Minhas provas

Sumário

1 Fáceis-Médios-Dificeis

1.1 Prove que a soma de dois pares também é par

Definição 1. *Um número inteiro $x \in \mathbb{Z}$ é par se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = 2k$.*

Teorema 1.1 (Teorema da soma de pares)**.** *Dado 2 números pares $a, b \in \mathbb{Z}$, a soma de $a + b$ também é par.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que a, b sejam pares. Então existem $k, m \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$a = 2k, b = 2m$$

Somando as duas expressões

$$a + b = 2k + 2m = 2(k + m)$$

Como $k, m \in \mathbb{Z}$, temos que $a + b = 2n$, sendo $n = k + m \in \mathbb{Z}$. Logo $a + b$ é par. ■

1.2 Prove que a raiz quadrada de 2 é irracional.

Definição 2. *Um número $x \in \mathbb{Q}$ é racional se existe $x = \frac{a}{b}$, aonde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $gcd(a, b) = 1$*

Teorema 1.2 (Teorema da irracionalidade de $\sqrt{2}$)**.** *Dado $n = \sqrt{2}$, $n \notin \mathbb{Q}$*

Lema 1.3. *Se o quadrado de um número é par (veja 1), então o número também é par.*

Demonstração. Consideremos $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, logo $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $gcd(a, b) = 1$

Se elevarmos ao quadrado:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

O que nos leva a:

$$2b^2 = a^2$$

Como $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a^2 = 2b^2$, então a é par (veja 1). Portanto podemos substituir a como:

$2b^2 = 4k^2$

Se dividirmos ambos os lados por 2:

$$b^2 = 2k^2$$

O que nos leva a descobrir que b também é par. E dado que dois números pares a, b não tem $gcd(a, b) = 1$, isso nos leva a uma contradição, provando que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

■

1.3 Seja $f : A \to B$. Prove que se f é injetora, então $f^{-1}(f(C)) = C$ para todo $C \subseteq A$

Definição 3. *Uma função $f : A \to B$ é dita **injetora** se:*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ou seja, diferentes elementos no domínio têm imagens diferentes.

Definição 4. *Dada uma função $f : A \to B$, definimos a função inversa à esquerda $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to A$, tal que:*

$$\forall x \in A, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Essa inversa é bem definida se f for injetora.

Lema 1.4 (Reconstrução de valor via função injetora inversa)**.** *Seja $f : A \to B$ uma função injetora. Então, para todo $x \in A$,*

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Teorema 1.5. *Seja $f : A \to B$ uma função injetora. Então, para todo subconjunto $C \subseteq A$,*

$$f^{-1}(f(C)) = C.$$

Demonstração. Seja $C \subseteq A$. Vamos provar as duas inclusões:

1. $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$**:**

Seja $x \in f^{-1}(f(C))$. Então $f(x) \in f(C)$, ou seja, existe $c \in C$ tal que $f(x) = f(c)$.

Como f é injetora, temos $x = c$, então $x \in C$. Logo, $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$.

2. $C \subseteq f^{-1}(f(C))$**:**

Seja $x \in C$. Então $f(x) \in f(C)$, e assim $x \in f^{-1}(f(C))$.

Portanto as duas inclusões mostram que $f^{-1}(f(C)) = C$. ■

1.4 Prove que se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ (Onde $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X

1.5 Prove que se n^2 é par, então n é par.

1.6 Prove que não existem inteiros x, y tais que $x^2 + y^2 = 1000001$

1.7 Prove que o limite $\lim_{x \to 2}(3x+1) = 7$ usando a definição $\epsilon - \delta$.

1.8 Prove que uma função constante é contínua em todos os pontos. (Use definição de continuidade: $\forall \varepsilon 0, \exists \delta 0 ...$)

1.9 Prove que existe infinitos números primos.

1.10 Prove que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ mas $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$

1.11 Prove que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ com xy existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que xqy)

1.12 Mostre que a função $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$

1.13 Prove que a união de duas aberturas em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.

1.14 Prove que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado.

1.15 Prove que não existem inteiros $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $x^3 + y^3 = 2024$

1.16 Seja G um grupo com a operação $*$ e $a \in G$ tal que $a^2 = e$ (elemento neutro). Prove que $a = a^{-1}$

1.17 prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivavel em $a \in \mathbb{R}$ então ela é contínua em a

1.18 prove que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ converge e que seu limite é 0.

1.19 Prove que toda sequência monótona crescente e limitada superiormente é convergente.

1.20 Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

1.21 Prove que se $\sum a_n$ converge absolutamente, então também converge.

1.22 Prove que um conjunto de vetores ortogonais não nulos em $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente. (Use definição de ortogonalidade e combinação linear)

1.23 Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$. Prove que $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$

1.24 Mostre que o conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ não é fechado.

1.25 Mostre que o intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ não é compacto.