

# Caderno de Provas Matemáticas

26 de junho de 2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Fáceis-Médios-Difíceis</b>	<b>4</b>
1.1	Prove que a soma de dois pares também é par . . . . .	4
1.2	Prove que a raiz quadrada de 2 é irracional. . . . .	4
1.3	Seja $f : A \rightarrow B$ . Prove que se $f$ é injetora, então $f^{-1}(f(C)) = C$ para todo $C \subseteq A$ . . . . .	5
1.4	Prove que se $A \subseteq B$ , então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ (Onde $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de $X$ ) . . . . .	5
1.5	Prove que se $n^2$ é par, então $n$ é par. . . . .	6
1.6	Prove que o limite $\lim_{x \rightarrow 2}(3x + 1) = 7$ usando a definição $\epsilon - \delta$ . .	6
1.7	Prove que uma função constante é contínua em todos os pontos. (Use definição de continuidade: $\forall \epsilon 0, \exists \delta 0 \dots$ ) . . . . .	7
1.8	Prove que existe infinitos números primos. . . . .	7
1.9	Prove que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ mas $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$ . . . . .	7
1.10	Prove que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$ (Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ com $xy$ existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $xqy$ ) . . . . .	7
1.11	Mostre que a função $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$	7
1.12	Prove que a união de duas aberturas em $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto.	7
1.13	Prove que todo subconjunto finito de $\mathbb{R}$ é fechado. . . . .	7
1.14	Prove que não existem inteiros $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $x^3 + y^3 = 2024$ .	7
1.15	Seja $G$ um grupo com a operação $*$ e $a \in G$ tal que $a^2 = e$ (elemento neutro). Prove que $a = a^{-1}$ . . . . .	7
1.16	prove que se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em $a \in \mathbb{R}$ então ela é contínua em $a$ . . . . .	7
1.17	prove que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ converge e que seu limite é 0. . . .	7
1.18	Prove que toda sequência monótona crescente e limitada superi- ormente é convergente. . . . .	7
1.19	Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge . . . . .	7
1.20	Prove que se $\sum a_n$ converge absolutamente, então também con- verge. . . . .	7
1.21	Prove que um conjunto de vetores ortogonais não nulos em $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente. (Use definição de ortogonalidade e combinação linear) . . . . .	7

1.22	Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$ . Prove que $\text{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$ . . . . .	7
1.23	Mostre que o conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ não é fechado. . . . .	7
1.24	Mostre que o intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ não é compacto. . . . .	7
1.25	Prove que todo operador unitário $U$ em um espaço de Hilbert de dimensão finita preserva normas, ou seja, $\ Ux\  = \ x\ $ para todo $x$ . . . . .	7
1.26	Mostre que o conjunto dos estados quânticos (vetores normaliza- dos em $\mathbb{C}^n$ ) forma uma variedade topológica esférica complexa. (dica, $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ com norma 1) . . . . .	7
1.27	Mostre que a classe $P$ é fechada sob composição de funções. . . . .	7
1.28	Mostre que se $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ então o complemento de qualquer problema NP-completo também é NP-completo. . . . .	7
1.29	Prove que todo grupo abeliano finito é isomorfo a um produto de grupos cíclicos de ordem potência de primos. . . . .	7
1.30	Mostre que o primeiro grupo de homologia $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ . . . . .	7
1.31	Prove que a função grau de uma aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$ é um invariante topológico sob homotopia. (Ou seja, se $f \sim g$ então $\deg(f) = \deg(g)$ ) . . . . .	7
1.32	Mostre que a functorialidade da homologia garante que mapas homotópicos induzem o mesmo homomorfismo em homologia. . . . .	7
1.33	Mostre que uma superfície toroidal tem grupo de homologia $H_1(T^2) \cong$ $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . . . . .	7
1.34	Mostre que qualquer operador linear hermitiano em $\mathbb{C}^n$ possui uma base ortonormal de autovetores e autovalores reais. . . . .	7
<b>2</b>	<b>Insano</b> . . . . .	<b>7</b>
2.1	Prove ou discuta criticamente a equivalência entre a hipótese de Riemann e a estimativa de erro na contagem de primos: $\pi(x) =$ $\text{Li}(x) + O(x^{1/2} \log x)$ (Assuma a validade ou estude implicações formais. Construa uma prova da implicação RH estimativa.) . . . . .	7
2.2	Prove que o grupo fundamental do toro $T^2$ é $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e mostre como ele classifica os loops essenciais da superfície. (Generalize a estrutura para superfícies orientáveis genus $g$ ) . . . . .	7
2.3	Mostre que a categoria dos espaços de Hilbert finitamente di- mensionais com operadores unitários é uma categoria monoidal fechada, e discuta implicações para circuitos quânticos. (Use a linguagem de funtores, objetos internos e tensores) . . . . .	7
2.4	Estude o problema de Hodge em $\mathbb{CP}^2$ . Verifique, com provas formais, que todo ciclo harmônico em $H^2(\mathbb{CP}^2)$ é classe de um subvariedade algébrica. (Esse é um caso conhecido da conjectura de Hodge) . . . . .	7
2.5	Mostre que toda variedade diferenciável compacta orientável de dimensão 3 admite uma estrutura de fibrado de Seifert. (Esse é um caso particular da geometrização de Thurston que implica a Poincaré) . . . . .	7

2.6	Assuma que $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ , e demonstre que então o problema de determinar se um grafo tem um ciclo Hamiltoniano pode ser resolvido em tempo polinomial. (Formalize usando reduções e classes de complexidade) . . . . .	7
2.7	Prove que o espectro de um operador compacto autoadjunto em um espaço de Hilbert é um conjunto enumerável com possível ponto de acumulação apenas em 0. (Fundamental para física quântica e teoria espectral) . . . . .	7
2.8	Mostre que os grupos de homotopia estáveis das esferas são finitos para $n \neq 0$ exceto para múltiplos especiais. (Use ideias da teoria de espectros e suspensões estáveis) . . . . .	7
2.9	Mostre que todo topos booleano com um objeto natural e um subobjeto de igualdades satisfaz os axiomas de Peano internamente. (Traduza isso em lógica categórica e modelagem interna) . . . . .	7
2.10	Formalize como a homologia persistente pode ser usada para extrair topologia de espaço-tempo em abordagens tipo causal set theory. (Trabalho de fronteira entre física matemática, topologia e IA) . . . . .	7

# 1 Fáceis-Médios-Díficeis

## 1.1 Prove que a soma de dois pares também é par

**Definição 1.** Um número inteiro  $x \in \mathbb{Z}$  é par se existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = 2k$ .

**Teorema 1.1** (Teorema da soma de pares). Dado 2 números pares  $a, b \in \mathbb{Z}$ , a soma de  $a + b$  também é par.

*Demonstração.* Sejam  $a, b \in \mathbb{Z}$  tal que  $a, b$  sejam pares. Então existem  $k, m \in \mathbb{Z}$  tais que:

$$a = 2k, b = 2m$$

Somando as duas expressões

$$a + b = 2k + 2m = 2(k + m)$$

Como  $k, m \in \mathbb{Z}$ , temos que  $a + b = 2n$ , sendo  $n = k + m \in \mathbb{Z}$ . Logo  $a + b$  é par. ■

## 1.2 Prove que a raiz quadrada de 2 é irracional.

**Definição 2.** Um número  $x \in \mathbb{Q}$  é racional se existe  $x = \frac{a}{b}$ , aonde  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  e  $\gcd(a, b) = 1$

**Teorema 1.2** (Teorema da irracionalidade de  $\sqrt{2}$ ). Dado  $n = \sqrt{2}$ ,  $n \notin \mathbb{Q}$

**Lema 1.3.** Se o quadrado de um número é par (veja 1), então o número também é par.

*Demonstração.* Consideremos  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , logo  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  com  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $b \neq 0$  e  $\gcd(a, b) = 1$

Se elevarmos ao quadrado:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

O que nos leva a:

$$2b^2 = a^2$$

Como  $a, b \in \mathbb{Z}$  e  $a^2 = 2b^2$ , então  $a$  é par (veja 1). Portanto podemos substituir  $a$  como:

$$2b^2 = 4k^2$$

Se dividirmos ambos os lados por 2:

$$b^2 = 2k^2$$

O que nos leva a descobrir que  $b$  também é par. E dado que dois números pares  $a, b$  não tem  $\gcd(a, b) = 1$ , isso nos leva a uma contradição, provando que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  ■

**1.3 Seja  $f : A \rightarrow B$ . Prove que se  $f$  é injetora, então  $f^{-1}(f(C)) = C$  para todo  $C \subseteq A$**

**Definição 3.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é dita **injetora** se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ou seja, diferentes elementos no domínio têm imagens diferentes.

**Definição 4.** Dada uma função  $f : A \rightarrow B$ , definimos a função inversa à esquerda  $f^{-1} : \text{Im}(f) \rightarrow A$ , tal que:

$$\forall x \in A, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Essa inversa é bem definida se  $f$  for injetora.

**Lema 1.4** (Reconstrução de valor via função injetora inversa). *Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função injetora. Então, para todo  $x \in A$ ,*

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

**Teorema 1.5.** *Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função injetora. Então, para todo subconjunto  $C \subseteq A$ ,*

$$f^{-1}(f(C)) = C.$$

*Demonstração.* Seja  $C \subseteq A$ . Vamos provar as duas inclusões:

1.  $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$ :

Seja  $x \in f^{-1}(f(C))$ . Então  $f(x) \in f(C)$ , ou seja, existe  $c \in C$  tal que  $f(x) = f(c)$ .

Como  $f$  é injetora, temos  $x = c$ , então  $x \in C$ . Logo,  $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$ .

2.  $C \subseteq f^{-1}(f(C))$ :

Seja  $x \in C$ . Então  $f(x) \in f(C)$ , e assim  $x \in f^{-1}(f(C))$ .

Portanto as duas inclusões mostram que  $f^{-1}(f(C)) = C$ . ■

**1.4 Prove que se  $A \subseteq B$ , então  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$  (Onde  $\mathcal{P}(X)$  é o conjunto das partes de  $X$ )**

**Definição 5.** *Seja  $X$  um conjunto, o conjunto das partes  $\mathcal{P}(X)$  é o conjunto de todos os subconjuntos de  $X$ . Todo conjunto das partes inclui o conjunto vazio  $\emptyset$ , e todos os subconjuntos de  $X$ , incluindo o próprio  $X$ .*

**Lema 1.6.** *Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{P}(X)$  seu conjunto das partes, se  $X$  possui  $n$  elementos, então  $\mathcal{P}(X)$  possuirá  $2^n$  elementos.*

**Teorema 1.7.** *Sejam dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dado  $A \subseteq B$ , temos que  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$*

*Demonstração.* Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos, sendo que  $A \subseteq B$  e seus conjuntos das partes  $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$ . Portanto temos que:

$$\forall x \in A \subseteq B$$

Dessa forma, (veja 1.6)  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ . Ou seja, todo subconjunto possível de  $A$  também está em  $B$ . Assim podemos concluir que  $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ . ■

### 1.5 Prove que se $n^2$ é par, então $n$ é par.

**Definição 6.** Um número inteiro  $n \in \mathbb{Z}$  é par se existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $n = 2k$ .

**Teorema 1.8.** Seja  $n \in \mathbb{Z}$ . Se  $n^2$  é par, então  $n$  também é par.

*Demonstração.* Iremos provar pela contrapositiva se  $n$  é ímpar, então  $n^2$  é ímpar. Se  $n$  é ímpar, então existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $n = 2k + 1$ . Calculando o quadrado:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Portanto,  $n^2$  é ímpar. Logo, a contrapositiva é verdadeira, e isso implica que se  $n^2$  é par, então  $n$  também é par. ■

### 1.6 Prove que o limite $\lim_{x \rightarrow 2}(3x + 1) = 7$ usando a definição $\epsilon - \delta$ .

**Definição 7.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a, L \in \mathbb{R}$ . Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

se, para todo  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que, sempre que

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \epsilon.$$

*Demonstração.* Seja o limite  $\lim_{x \rightarrow 2}(3x + 1) = 7$ , podemos analisar a veracidade do limite. Queremos mostrar que para todo  $\epsilon > 0$ , existirá um  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta, \quad \text{e} \quad |f(x) - 7| < \epsilon$$

Dessa forma temos:

$$|3x + 1 - 7| < \epsilon = |3x - 6| < \epsilon = 3|x - 2| < \epsilon = |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$$

Assim podemos escolher  $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ . Portanto, com  $0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{3}$  temos o limite verificado, e a prova está completa. ■

- 1.7 Prove que uma função constante é contínua em todos os pontos. (Use definição de continuidade:  $\forall \varepsilon 0, \exists \delta 0 \dots$ )
- 1.8 Prove que existe infinitos números primos.
- 1.9 Prove que  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$  mas  $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$
- 1.10 Prove que  $\mathbb{Q}$  é denso em  $\mathbb{R}$  (Para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  com  $xy$  existe  $q \in \mathbb{Q}$  tal que  $xqy$ )
- 1.11 Mostre que a função  $f(x) = x^2$  não é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}$
- 1.12 Prove que a união de duas aberturas em  $\mathbb{R}$  é um conjunto aberto.
- 1.13 Prove que todo subconjunto finito de  $\mathbb{R}$  é fechado.
- 1.14 Prove que não existem inteiros  $x, y \in \mathbb{Z}$  tais que  $x^3 + y^3 = 2024$
- 1.15 Seja  $G$  um grupo com a operação  $*$  e  $a \in G$  tal que  $a^2 = e$  (elemento neutro). Prove que  $a = a^{-1}$
- 1.16 prove que se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é derivável em  $a \in \mathbb{R}$  então ela é contínua em  $a$
- 1.17 prove que a sequência  $a_n = \frac{1}{n}$  converge e que seu limite é 0.
- 1.18 Prove que toda sequência monótona crescente e limitada superiormente é convergente.
- 1.19 Determine se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge
- 1.20 Prove que se  $\sum a_n$  converge absolutamente, então também converge.
- 1.21 Prove que um conjunto de vetores ortogonais não nulos em  $\mathbb{R}^n$  é linearmente independente. (Use definição de ortogonalidade e combinação linear)
- 1.22 Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação linear tal que  $T^2 = T$ . Prove que  $\text{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$
- 1.23 Mostre que o conjunto  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  não é fechado.
- 1.24 Mostre que o intervalo  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  não é compacto.
- 1.25 Prove que todo operador unitário  $U$  em um espaço de Hilbert de dimensão finita preserva normas, ou seja,  $\|Ux\| = \|x\|$  para todo  $x$ .
- 1.26 Mostre que o conjunto dos estados quânticos (vetores normalizados em  $\mathbb{C}^n$ ) forma uma variedade topológica esférica complexa. (dica,  $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$  com norma 1)
- 1.27 Mostre que a classe  $P$  é fechada sob composição de