Caderno de Provas Matemáticas

26 de junho de 2025

Sumário

1 Fáceis-Médios-Dificeis

1.1 Prove que a soma de dois pares também é par

Definição 1. *Um número inteiro* $x \in \mathbb{Z}$ *é par se existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tal que* $x = 2k$.

Teorema 1.1 (Teorema da soma de pares)**.** *Dado 2 números pares* $a, b \in \mathbb{Z}$*, a soma de* $a + b$ *também é par.*

Demonstração. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que a, b sejam pares. Então existem $k, m \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$a = 2k, b = 2m$$

Somando as duas expressões

$$a + b = 2k + 2m = 2(k + m)$$

Como $k, m \in \mathbb{Z}$, temos que $a + b = 2n$, sendo $n = k + m \in \mathbb{Z}$. Logo $a + b$ é par. ∎

1.2 Prove que a raiz quadrada de 2 é irracional.

Definição 2. *Um número* $x \in \mathbb{Q}$ *é racional se existe* $x = \frac{a}{b}$*, aonde* $a, b \in \mathbb{Z}$*,* $b \neq 0$ *e* $gcd(a, b) = 1$

Teorema 1.2 (Teorema da irracionalidade de $\sqrt{2}$)**.** *Dado* $n = \sqrt{2}$*,* $n \notin \mathbb{Q}$

Lema 1.3. *Se o quadrado de um número é par (veja 1), então o número também é par.*

Demonstração. Consideremos $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, logo $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ e $gcd(a, b) = 1$

Se elevarmos ao quadrado:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

O que nos leva a:

$$2b^2 = a^2$$

Como $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a^2 = 2b^2$, então a é par (veja 1). Portanto podemos substituir a como:

$2b^2 = 4k^2$

Se dividirmos ambos os lados por 2:

$$b^2 = 2k^2$$

O que nos leva a descobrir que b também é par. E dado que dois números pares a, b não tem $gcd(a, b) = 1$, isso nos leva a uma contradição, provando que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

∎

1.3 Seja $f : A \to B$. Prove que se f é injetora, então $f^{-1}(f(C)) = C$ para todo $C \subseteq A$

Definição 3. *Uma função $f : A \to B$ é dita **injetora** se:*

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ou seja, diferentes elementos no domínio têm imagens diferentes.

Definição 4. *Dada uma função $f : A \to B$, definimos a função inversa à esquerda $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \to A$, tal que:*

$$\forall x \in A, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$

Essa inversa é bem definida se f for injetora.

Lema 1.4 (Reconstrução de valor via função injetora inversa)**.** *Seja $f : A \to B$ uma função injetora. Então, para todo $x \in A$,*

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Teorema 1.5. *Seja $f : A \to B$ uma função injetora. Então, para todo subconjunto $C \subseteq A$,*

$$f^{-1}(f(C)) = C.$$

Demonstração. Seja $C \subseteq A$. Vamos provar as duas inclusões:

1. $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$**:**

Seja $x \in f^{-1}(f(C))$. Então $f(x) \in f(C)$, ou seja, existe $c \in C$ tal que $f(x) = f(c)$.

Como f é injetora, temos $x = c$, então $x \in C$. Logo, $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$.

2. $C \subseteq f^{-1}(f(C))$**:**

Seja $x \in C$. Então $f(x) \in f(C)$, e assim $x \in f^{-1}(f(C))$.

Portanto as duas inclusões mostram que $f^{-1}(f(C)) = C$. ∎

1.4 Prove que se $A \subseteq B$, então $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ (Onde $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto das partes de X)

Definição 5. *Seja X um conjunto, o conjunto das partes $\mathcal{P}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X. Todo conjunto das partes inlui o conjunto vazio $\emptyset$, e todos os subconjuntos de X, incluindo o próprio X.*

Lema 1.6. *Seja X um conjunto e $\mathcal{P}(X)$ seu conjunto das partes, se X possui n elementos, então $\mathcal{P}(X)$ possuirá 2^n elementos.*

Teorema 1.7. *Sejam dois conjuntos A e B, dado $A \subseteq B$, temos que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$*

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos, sendo que $A \subseteq B$ e seus conjuntos das partes $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$. Portanto temos que:

$$\forall x \in A \subseteq B$$

Dessa forma, (veja 1.6) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. Ou seja, todo subconjunto possível de A também está em B. Assim podemos concluir que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. ∎

1.5 Prove que se n^2 é par, então n é par.

Definição 6. *Um número inteiro $n \in \mathbb{Z}$ é par se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.*

Teorema 1.8. *Seja $n \in \mathbb{Z}$. Se n^2 é par, então n também é par.*

Demonstração. Iremos provar pela contrapositiva se n é ímpar, então n^2 é ímpar. Se n é ímpar, então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$. Calculando o quadrado:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Portanto, n^2 é ímpar. Logo, a contrapositiva é verdadeira, e isso implica que se n^2 é par, então n também é par. ■

1.6 Prove que o limite $\lim_{x \to 2}(3x+1) = 7$ usando a definição $\epsilon - \delta$.

Definição 7. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a, L \in \mathbb{R}$. Dizemos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, sempre que

$$0 < |x - a| < \delta, \quad \textit{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Demonstração. Seja o limite $\lim_{x \to 2}(3x+1) = 7$, podemos analisar a veracidade do limite. Queremos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existirá um $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 2| < \delta, \quad \text{e} \quad |f(x) - 7| < \varepsilon$$

Dessa forma temos:

$$|3x + 1 - 7| < \varepsilon = \quad |3x - 6| < \varepsilon = \quad 3|x - 2| < \varepsilon = \quad |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Assim podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Portanto, com $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$ temos o limite verificado, e a prova está completa.

■

1.7 **Prove que uma função constante é contínua em todos os pontos. (Use definição de continuidade:** $\forall \varepsilon 0, \exists \delta 0 ...$**)**

1.8 **Prove que existe infinitos números primos.**

1.9 **Prove que** $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ **mas** $\sqrt{9} \in \mathbb{Q}$

1.10 **Prove que** $\mathbb{Q}$ **é denso em** $\mathbb{R}$ **(Para todo** $x, y \in \mathbb{R}$ **com** xy **existe** $q \in \mathbb{Q}$ **tal que** xqy**)**

1.11 **Mostre que a função** $f(x) = x^2$ **não é uniformemente contínua em** $\mathbb{R}$

1.12 **Prove que a união de duas aberturas em** $\mathbb{R}$ **é um conjunto aberto.**

1.13 **Prove que todo subconjunto finito de** $\mathbb{R}$ **é fechado.**

1.14 **Prove que não existem inteiros** $x, y \in \mathbb{Z}$ **tais que** $x^3 + y^3 = 2024$

1.15 **Seja** G **um grupo com a operação** $*$ **e** $a \in G$ **tal que** $a^2 = e$ **(elemento neutro). Prove que** $a = a^{-1}$

1.16 **prove que se** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **é derivavel em** $a \in \mathbb{R}$ **então ela é contínua em** a

1.17 **prove que a sequência** $a_n = \frac{1}{n}$ **converge e que seu limite é 0.**

1.18 **Prove que toda sequência monótona crescente e limitada superiormente é convergente.**

1.19 **Determine se a série** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **converge**

1.20 **Prove que se** $\sum a_n$ **converge absolutamente, então também converge.**

1.21 **Prove que um conjunto de vetores ortogonais não nulos em** $\mathbb{R}^n$ **é linearmente independente. (Use definição de ortogonalidade e combinação linear)**

1.22 **Seja** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ **uma transformação linear tal que** $T^2 = T$**. Prove que** $\mathrm{Im}(T) \cap \ker(T) = \{0\}$

1.23 **Mostre que o conjunto** $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ **não é fechado.**

1.24 **Mostre que o intervalo** $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ **não é compacto.**

1.25 **Prove que todo operador unitário** U **em um espaço de Hilbert de dimensão finita preserva normas, ou seja,** $\|Ux\| = \|x\|$ **para todo** x**.**

1.26 **Mostre que o conjunto dos estados quânticos (vetores normalizados em** $\mathbb{C}^n$**) forma uma variedade topológica esférica complexa. (dica,** $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ **com norma 1)**

1.27 **Mostre que a classe** P **é fechada sob composição de**