UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Departamento de Física

Introdução à Computação em Física - ICF

Movimento de partículas carregadas em um campo magnético gerado por um dipolo.

Alunos: Filipe Freitas Curty, Miguel Goncalves Beirigo e Vinicius Santos Souza

2023/02

1 Objetivo:

Este estudo se fundamenta na análise dos campos eletromagnéticos gerados por um dipolo por meio da aplicação das equações de Maxwell. O principal objetivo consiste em determinar o campo magnético produzido pelo dipolo a partir do potencial vetor magnético. Ao empregar a segunda lei de Newton, junto com a equação da força de Lorentz, em combinação com o campo magnético calculado previamente, somos capazes de adquirir uma compreensão aprofundada da dinâmica das partículas carregadas quando estão sujeitas a um campo gerado por um dipolo.

2 Metodologia Teórica:

O movimento de partículas carregadas geram campos elétricos e magnéticos, onde os campos magnéticos obedecem as equações de maxwell, que são:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{E} = 0$$

nas quais μ_0 e ϵ_0 são a permeabilidade e permissividade do meio, respectivamente. Dado que o potencial vetor magnético está associado ao campo magnético por um rotacional, temos então:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times [\frac{\mu_0}{4\pi} |\vec{r}|^3 (\vec{m} \times \vec{r})] = \frac{\mu_0}{4\pi} [\frac{3(\vec{m} \bullet \vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{m}}{|\vec{r}|^3}] \tag{1}$$

A equação 1 representa o campo magnético gerado por uma configuração de um dipolo magnético. Essa expressão satisfaz as equações de Maxwell na ausência de campo elétrico, uma vez que possui divergência nula e uma densidade de corrente $\vec{J} = 0$.
A partir desse campo magnético, é possível compreender como funciona a dinâmica de partículas carregadas submetidas a um campo magnético de um dipolo. Para os cálculos será usado um momento de dipolo constante $\vec{m} = m\hat{k}$ e as equações que governam a dinâmica desse sistema serão tratados pela formulação da segunda lei de Newton e pelo formalismo Hamiltoniano.
A interação de partículas carregadas com os campos eletromagnéticos é descrita pela força de Lorentz.

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times B) \tag{2}$$

Onde Q é a carga da partícula. Uma vez que, uma carga elétrica está sujeita a uma composição de campos elétricos e magnéticos, a força que atua sobre essa partícula, resultando em uma influência direta na trajetória que essa partícula descreve, é a soma da força elétrica com a força magnética. No entanto, é importante se atentar para alguns detalhes importantes. Primeiro, nesse caso, é considerado o movimento de uma partícula carregada sobre os efeitos de um campo magnético gerado por um dipolo e na ausência de campo elétrico, o que resulta, da equação:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times B. \tag{3}$$

Segundo, uma característica que reivindica uma certa cautela: a força magnética não realiza trabalho, pois $Q[\vec{v} \times B] \bullet dl = 0$. Em outras palavras, uma partícula carregada em repouso, em um referencial inercial, permanece em repouso se a única força externa agindo sobre ela for a força magnética.

Considere uma partícula com carga Q e massa M, submetida ao campo magnético de um dipolo, com um momento de dipolo $\vec{m} = m\hat{k}$ onde m é uma constante. Igualando a segunda lei de Newton a força magnética, obtemos:

$$M\vec{r''} = \vec{r'} \times \vec{B}$$

Tomando uma equação com cada componente de $\vec{r}$, em coordenadas cartesianas, temos:

$$x''(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} + \omega_0[y'(x^2 + y^2 + 2z^2) + 3z'zy] = 0$$

$$y''(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} - \omega_0[x'(x^2 + y^2 + 2z^2) + 3z'zx] = 0$$

$$z''(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} + 3z\omega_0(y'x - x'y) = 0$$

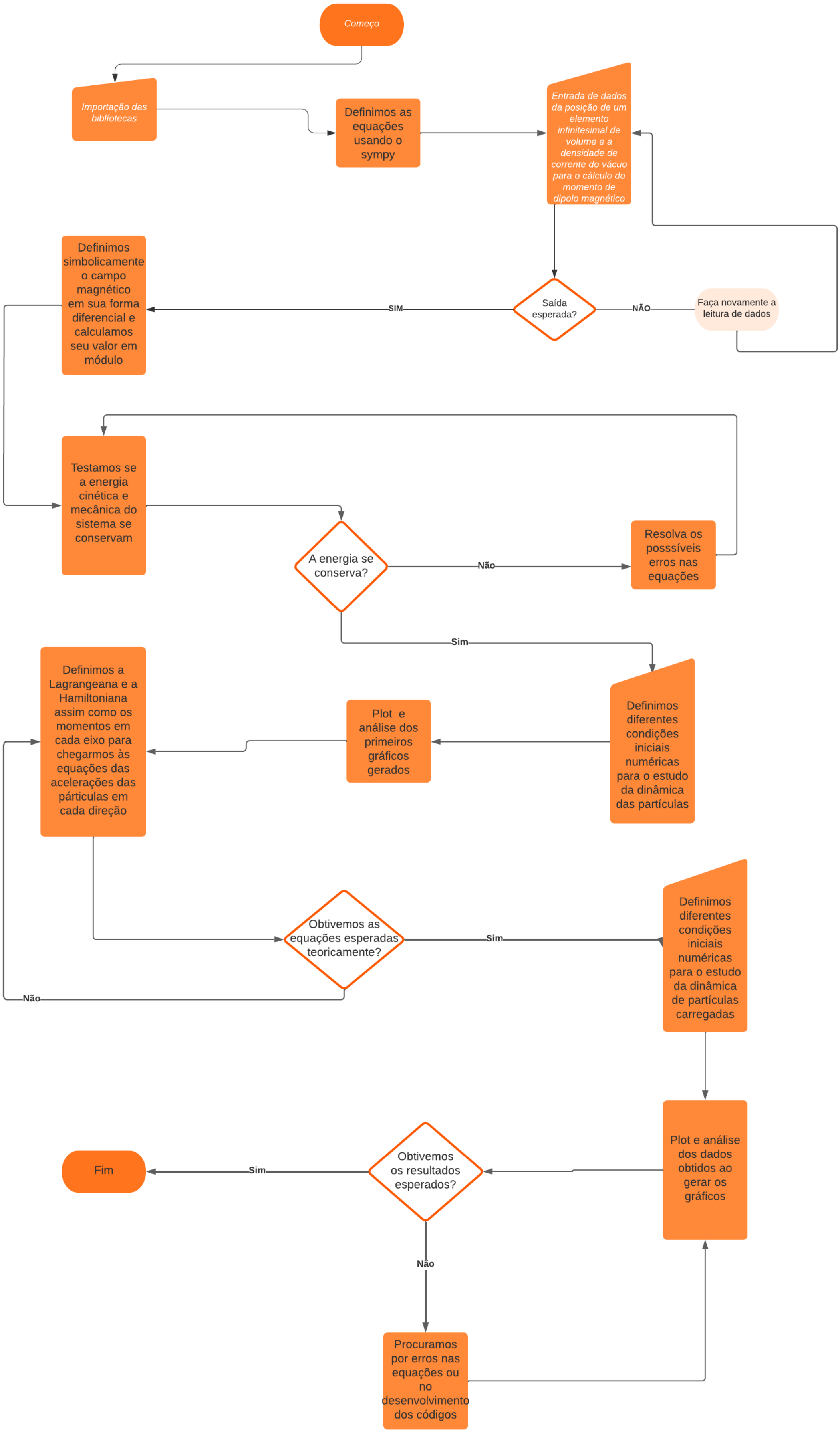
sendo $\omega_0 = \frac{Q\mu_0}{4\pi M}$.

Dado que a força magnética não realiza trabalho, a energia mecânica E desse sistema se resume a energia cinética $T = \frac{Mv^2}{2}$. Para verificar se a energia desse sistema é conservativa, ou dissipativa, é tomada a derivada temporal da energia mecânica:

$$E' = T' = \frac{M}{2}\frac{dv^2}{dt} = (x'\hat{i} + y'\hat{j} + z'\hat{k}) * M((x''\hat{i} + y''\hat{j} + z''\hat{k})$$

A partir dessas sistema equações diferencias não lineares e acopladas. Diante dessa tipologia de equações, uma situação analítica é inviável. Portanto, o estudo da trajetória será feito a partir de uma solução numérica.

3 Flowchart:


Começo
Importação das bibliotecas
Definimos as equações usando o sympy
Entrada de dados da posição de um elemento infinitesimal de volume e a densidade de corrente do vácuo para o cálculo do momento de dipolo magnético
Saída esperada?
NÃO
Faça novamente a leitura de dados
SIM
Definimos simbolicamente o campo magnético em sua forma diferencial e calculamos seu valor em módulo
Testamos se a energia cinética e mecânica do sistema se conservam
A energia se conserva?
Não
Resolva os posssíveis erros nas equações
Sim
Definimos diferentes condições iniciais numéricas para o estudo da dinâmica das partículas
Plot e análise dos primeiros gráficos gerados
Definimos a Lagrangeana e a Hamiltoniana assim como os momentos em cada eixo para chegarmos às equações das acelerações das párticulas em cada direção
Obtivemos as equações esperadas teoricamente?
Sim
Não
Definimos diferentes condições iniciais numéricas para o estudo da dinâmica de partículas carregadas
Plot e análise dos dados obtidos ao gerar os gráficos
Obtivemos os resultados esperados?
Sim
Fim
Não
Procuramos por erros nas equações ou no desenvolvimento dos códigos

4 Equipe:

- Filipe: Responsável pela parte teórica, elaboração dos slides/organização da apresentação, ajuda na resolução das equações.
- Miguel: Encarregado da otimização e ajuste do código, criação de gráficos utilizando o Matplotlib, criação do GitHub para o código e elaboração do manual do usuário.
- Vinícius: Encarregado de apresentar e solucionar as equações.

Além de suas atribuições individuais, os membros do grupo estarão colaborando mutuamente em suas respectivas áreas, sendo a divisão apenas uma indicação do foco principal de cada um.

5 Milestones:

- **Primeira prova até a Segunda Prova:**

  Nesta fase, cada membro trabalhará individualmente em suas respectivas tarefas do projeto. Quando surgirem dúvidas, nos reuniremos para tirar dúvidas e propor mudanças nos códigos, também analisaremos cada parte desenvolvida até então, não deixando de lado a atenção acerca de nos adequarmos às equações e teorias envolvidas no trabalho.

- **Segunda Prova até a Entrega do Trabalho:**

  Durante este período, concentraremos nossos esforços em fazer os ajustes finais no projeto. Isso incluirá revisar e testar todos os códigos, analisar os dados obtidos por meio dos gráficos gerados, verificar a precisão das execuções, aprofundar a parte teórica, preparar a apresentação final.

Referências:

Uma análise das regiões de confinamento caóticas descritas por uma partícula carregada submetida ao campo magnético de um dipolo. - Deyvid W. M. Pastana e Manuel E. Rodrigues, SciELO - Brasil / 2021
(https://www.scielo.br/j/rbef/a/Td7vBD73y9Lk6YKScjQMSZM/)