UNIVERSIDAD DE GRANADA.

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIAS INFORMATICA Y DE TELECOMUNICACIÓN.

Departamento de Arquitectura y Tecnología de Computadores.

TECNOLOGÍA Y ORGANIZACIÓN DE COMPUTADORES.

APENDICE SEMINARIOS 3 y 4.

1º GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA.

TECNOLOGÍA Y ORGANIZACIÓN DE COMPUTADORES.
APÉNDICE SEMINARIOS 3 y 4.

ÁLGEBRA DE BOOLE

El Álgebra de Boole, fue presentada originalmente por el inglés George Boole, en el año 1854 en su artículo *"An Investigation of the Laws of Thoght ...* ". Las primeras aplicaciones a circuitos de conmutación fueron desarrolladas por Claude Shannon en su tesis doctoral *"Análisis simbólico de los circuitos de conmutación y relés"* en 1938.

POSTULADOS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

Un conjunto **B** se dice que tiene estructura de Álgebra de Boole si cumple los siguientes Postulados:

Postulado 1. Número de elementos. El conjunto **B**, debe contener al menos dos elementos distintos entre sí.

$$\exists\, x, y \in B \,/\, x \neq y$$

Postulado 2. Leyes de composición interna. En el conjunto B se definen dos leyes de composición interna denominadas *Suma Lógica* u *Operación OR* (+) y *Producto Lógico* u *Operación AND* (·)

$$\forall\, x, y \in B$$

$$\text{a) } x + y \in B$$

$$\text{b) } x \cdot y \in B$$

Postulado 3. Existencia de Elementos Neutros. Existen en **B** el elemento neutro correspondiente a la operación OR, denominado 0 y el elemento neutro correspondiente a la operación AND, denominado 1, diferentes entre sí, tales que:

$$\text{a) } \exists\, 0 \in B \,/\, \forall\, x \in B,\ x + 0 = 0 + x = x$$

$$\text{b) } \exists\, 1 \in B \,/\, \forall\, x \in B,\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

$$\text{c) } 0 \neq 1$$

Postulado 4. Propiedad Conmutativa. Para cada x e y elementos de **B**:

$$\text{a) } \forall\, x, y \in B,\ x + y = y + x$$

$$\text{b) } \forall\, x, y \in B,\ x \cdot y = y \cdot x$$

Postulado 5. Propiedad Distributiva. Para cada x, y, z elementos de **B**:

$$\text{a) } \forall\, x, y, z \in B,\ x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$$

$$\text{b) } \forall\, x, y, z \in B,\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Postulado 6. Propiedad Asociativa. Para cada x, y, z elementos de **B**:

$$\text{a) } \forall\, x, y, z \in B,\ x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\text{b) } \forall\, x, y, z \in B,\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Postulado 7. Existencia de Complementos. Para cada x en **B** existe un elemento único denotado por $\overline{x}$ (o por *x'*), denominado elemento opuesto o complemento de x tal que

$$\text{a) } \exists\, \overline{x} \in B \,/\, \forall\, x \in B,\ x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$$

$$\text{b) } \exists\, \overline{x} \in B \,/\, \forall\, x \in B,\ x \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot x = 0$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

TEOREMA 1: a) El elemento neutro para la suma, 0, es único.

$$\forall\, x \in \mathbf{B},\ \exists_1\, 0 \in \mathbf{B} \,/\, x + 0 = 0 + x = x$$

b) El elemento neutro para el producto, 1, es único.

$$\forall\, x \in \mathbf{B},\ \exists_1\, 1 \in \mathbf{B} \,/\, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

TEOREMA 2: Ley de Absorción:

$\forall\, x \in \mathbf{B}$

a) $x + 1 = 1$

b) $x \cdot 0 = 0$

TEOREMA 3: Los elementos 0 y 1 son distintos, y complementarios el uno del otro:

$$0 \neq 1 \quad ; \quad \overline{0} = 1 \quad ; \quad \overline{1} = 0$$

TEOREMA 4: Ley de Absorción:

$\forall\, x \in \mathbf{B}$

a) $x + x = x$

b) $x \cdot x = x$

TEOREMA 5: El complemento de cada elemento es único.

$\forall\, x \in \mathbf{B},\ \exists_1\, \overline{x} \in \mathbf{B}$ /

a) $x + \overline{x} = \overline{x} + x = 1$

b) $x \cdot \overline{x} = \overline{x} \cdot x = 0$

TEOREMA 6: El complemento del complemento de cada elemento es el propio elemento.

$$\forall\, x \in \mathbf{B},\ \overline{\overline{x}} = x$$

TEOREMA 7: Ley de Absorción:

$\forall\, x, y \in \mathbf{B}$,

a) $x + (x \cdot y) = x$

b) $x \cdot (x + y) = x$

TEOREMA 8: Ley de Absorción:

$\forall\, x, y, z \in \mathbf{B}$,

a) $x + [\,(x \cdot y) \cdot z] = x \;;\; [\,(x \cdot y) \cdot z] + x = x$

b) $x \cdot [\,(x + y) + z] = x \;;[\,(x + y) + z] \cdot x = x$

TEOREMA 9: Propiedad asociativa:

$\forall\, x, y, z \in \mathbf{B}$

a) $x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

TEOREMA 10: Ley de Absorción:

$\forall\, x, y \in \mathbf{B}$,

a) $x + (\overline{x} \cdot y) = x + y$

b) $x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$

TEOREMA 11: Leyes de De Morgan:

$\forall\, x, y \in \mathbf{B}$,

a) $\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

b) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$

TEOREMA 12: Ley de Absorción:

$\forall\, x, y, z \in \mathbf{B}$,

a) $(x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z) + (y \cdot z) = (x \cdot y) + (\overline{x} \cdot z)$

b) $(x + y) \cdot (\overline{x} + z) \cdot (y + z) = (x + y) \cdot (\overline{x} + z)$

DEFINICIONES

SISTEMA DIGITAL: Cualquier dispositivo destinado a la generación y/o transmisión y/o procesamiento y/o almacenamiento de información en el que la misma esté representada por magnitudes físicas, conocidas como señales limitadas a tomar sólo un conjunto finito de valores discretos.

SISTEMA DIGITAL BINARIO: Sistema digital en el que sólo se utilizan dos valores para representar la información. Por convenio se suelen tomar los valores 0 y 1.

SISTEMA COMBINACIONAL: Es aquel sistema en el que las salidas en un instante dado son función única y exclusivamente de las variables de entrada en ese mismo instante. El tiempo se encuentra discretizado en intervalos (.... t-1, t , t+1, ...). Es decir:

$$z_i (t) = z_i (x_{n-1} (t) , x_{n-2} (t) , ... , x_0 (t))$$

donde $(x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0)$ es el conjunto de variables de entrada del sistema.

SISTEMA SECUENCIAL: Es aquel sistema en el que las salidas en un instante dado son función de las variables de entrada en ese mismo instante de tiempo y de valores que tuvieron en instante de tiempo anteriores. Es decir:

$$\begin{gathered} z_i (t) = z_i (x_{n-1} (t) , x_{n-2} (t) , ... , x_0 (t), \\ x_{n-1} (t-1) , x_{n-2} (t-1) , ... , x_0 (t-1), \\ .... \\ x_{n-1} (0) , x_{n-2} (0) , ... , x_0 (0)) \end{gathered}$$

donde $(x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0)$ es el conjunto de variables de entrada del sistema y siendo t = 0 el instante de tiempo en el que el sistema empezó a funcionar. Se podría decir que los sistemas secuenciales tienen "memoria" ya que deben recordar los valores de las variables en entrada en instantes de tiempo anteriores al actual (t). Para ello, la información contenida en las variables de entrada

$$\begin{gathered} x_{n-1} (t-1) , x_{n-2} (t-1) , ... , x_0 (t-1), \\ .... \\ x_{n-1} (0) , x_{n-2} (0) , ... , x_0 (0) \end{gathered}$$

se almacena en otras *p* variables $y_{p-1} (t) , y_{p-2} (t) , ... , y_0 (t)$, denominadas "variables de estado" que contienen dicha información siendo entonces:

$$\begin{gathered} y_j (t) = y_j (x_{n-1} (t-1) , x_{n-2} (t-1) , ... , x_0 (t-1), \\ .... \\ x_{n-1} (0) , x_{n-2} (0) , ... , x_0 (0)) \end{gathered}$$

VARIABLE DE CONMUTACIÓN: Variable que en un determinado instante puede tomar el valor lógico 0 ó 1.

LITERAL: Es una variable o su complemento.

FUNCIÓN DE COMMUTACIÓN: Es una aplicación del producto cartesiano

$$\begin{gathered} f : B^n \rightarrow B \\ (x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0) \rightarrow f (x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0) \in B \end{gathered}$$

siendo B = {0 , 1}.

TÉRMINO SUMA: Es un conjunto de literales relacionados entre sí por la operación lógica OR.

TÉRMINO PRODUCTO: Es un conjunto de literales relacionados entre sí por la operación lógica AND.

TÉRMINO SUMA NORMAL: Es un término suma en el que no aparece repetido ningún literal.

TÉRMINO PRODUCTO NORMAL: Es un término producto el que no aparece repetido ningún literal.

TÉRMINO SUMA CANÓNICO O MÁXTERM: Para un conjunto de *n* variables $(x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0)$ es un término suma normal en el que aparecen todos los *n* literales sin estar repetidos, una y sólo una vez.

TÉRMINO PRODUCTO CANÓNICO O MÍNTERM: Para un conjunto de *n* variables $(x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0)$ es un término producto normal en el que aparecen todos los *n* literales sin estar repetidos, una y sólo una vez.

TEOREMA DE SHANNON:

a) Toda función de conmutación de *n* variables se puede expresar como un producto lógico (AND) único de términos Máxterms.

b) Toda función de conmutación de *n* variables se puede expresar como una suma lógica (OR) única de términos Mínterms.

FUNCIONES DE CONMUTACIÓN DE 1 y 2 VARIABLES

1.- FUNCIONES DE CONMUTACIÓN DE 1 VARIABLE:

$$\begin{aligned} f_i : \quad & B \quad \to \quad B \\ x_0 \in B \quad & \to \quad f_i(x_0) \in B \end{aligned}$$

x_0	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

1.1.- Funciones constantes: $f_0 = 0$; $f_3 = 1$

1.2.- Funciones de una variable: $f_1 = x_0$; $f_2 = \overline{x}_0$

2.- FUNCIONES DE CONMUTACIÓN DE 2 VARIABLES:

$$\begin{aligned} f_i \quad : \quad & B \times B \quad \to \quad B \\ x_1, x_0 \in B \quad & \to \quad f_i(x_1, x_0) \in B \end{aligned}$$

x_1 x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

2.1.- Funciones constantes: $f_0 = 0$; $f_{15} = 1$

2.2.- Funciones de una variable: $f_5 = x_0$; $f_{10} = \overline{x}_0$

$f_3 = x_1$; $f_{12} = \overline{x}_1$

2.3.- Funciones de dos variables, con OR: $f_7 = x_1 + x_0$; $f_{11} = x_1 + \overline{x}_0$

$f_{13} = \overline{x}_1 + x_0$; $f_{14} = \overline{x}_1 + \overline{x}_0 = \overline{x_1 \cdot x_0}$

2.4.- Funciones de dos variables, con AND: $f_1 = x_1 \cdot x_0$; $f_2 = x_1 \cdot \overline{x}_0$

$f_4 = \overline{x}_1 \cdot x_0$; $f_8 = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_0 = \overline{x_1 + x_0}$

2.5.- Funciones XOR y XNOR: $f_6 = (\overline{x}_1 \cdot x_0) + (x_1 \cdot \overline{x}_0) = x_1 \oplus x_0$

$f_9 = (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_0) + (x_1 \cdot x_0) = \overline{x_1 \oplus x_0}$

DESARROLLO DE UNA FUNCION COMO PRODUCTO DE MÁXTERMS:

Para desarrollar una función de conmutación como producto de máxterms, se procede de la siguiente manera:

a) Si se proporciona la función de manera exhaustiva, es decir, como una tabla de verdad, se colocará un producto (AND) de tantas sumas (OR) como "ceros" (0's) aparezcan en la tabla de verdad y en dichas sumas (OR) deberán aparecer todas las variables de la función o sus complementos sólo una vez (si no, no serían máxterms). Cada variable de cada suma (OR) que tenga valor 1 en la tabla de verdad de la función, se complementará y las que tengan el valor 0 aparecerán como ellas mismas, sin complementar.

b) Si se proporciona la función en forma compacta (Π M(i)), se coloca un producto (AND) de tantas sumas (OR) como números aparecen en la función. En cada una de estas sumas (OR) deberán aparecer todas las variables de la función o sus complementos sólo una vez (si no, no serían máxterms). A continuación, se coloca en una tabla la expresión en binario de cada uno de los números que aparecen en la forma compacta de la función y al lado, la expresión del máxterm que le corresponde, complementando aquellas variables que tienen el valor 1 y sin complementar aquellas variables que tienen el valor 0. Seguidamente se hace el producto (AND) de estos máxterms y se obtiene la función.

DESARROLLO DE UNA FUNCION COMO SUMA DE MÍNTERMS:

Para desarrollar una función de conmutación como suma de mínterms, se procede de la siguiente manera:

a) Si se proporciona la función de manera exhaustiva, es decir, como una tabla de verdad, se colocará una suma (OR) de tantos productos (AND) como "unos" (1's) aparezcan en la tabla de verdad y en dichos productos (AND) deberán aparecer todas las variables de la función o sus complementos sólo una vez (si no, no serían mínterms). Cada variable de cada producto (AND) que tenga valor 0 en la tabla de verdad de la función, se complementará y las que tengan el valor 1 aparecerán como ellas mismas, sin complementar.

b) Si se proporciona la función en forma compacta (Σ m(i)), se coloca una suma (OR) de tantos productos (AND) como números aparecen en la función. En cada uno de estos productos (AND) deberán aparecer todas las variables de la función o sus complementos sólo una vez (si no, no serían mínterms). A continuación, se coloca en una tabla la expresión en binario de cada uno de los números que aparecen en la forma compacta de la función y al lado, la expresión del mínterm que le corresponde, complementando aquellas variables que tienen el valor 0 y sin complementar aquellas variables que tienen el valor 1. Seguidamente se hace la suma (OR) de estos mínterms y se obtiene la función.

ÍNDICE DE UN MÁXTERM: Es el número de variables que toman el valor uno (1) en la expresión en coordenadas binarias del Máxterm. Coincide con el número de variables complementadas que aparecen en la expresión algebraica como término suma del Máxterm.

ÍNDICE DE UN MÍNTERM: Es el número de variables que toman el valor uno (1) en la expresión en coordenadas binarias del mínterm. Coincide con el número de variables sin complementar que aparecen en la expresión algebraica como término producto del mínterm.

IMPLICANTE: Dada una función de conmutación de *n* variables, se dice que un término producto expresado como una adyacencia de cualquier orden es un implicante de la función si para aquellos valores de las variables en los que el término producto toma el valor 1, la función toma también el valor 1.

IMPLICANTE PRIMO: Se dice que un implicante de una función es un implicante primo si los términos producto que resultan del implicante eliminando una de las variables ya no son implicantes de la función.

IMPLICADO: Dada una función de conmutación de *n* variables, se dice que un término suma expresado como una adyacencia de cualquier orden es un implicado de la función si para aquellos valores de las variables en los que el término suma toma el valor 0, la función toma también el valor 0.

IMPLICADO PRIMO: Se dice que un implicado de una función es un implicado primo si los términos suma que resultan del implicado eliminando una de las variables ya no son implicados de la función.

CUBOS Y ADYACENCIAS : Para un conjunto de *n* variables (x_{n-1} , x_{n-2} , ... , x_0).

	CUBOS					ADYACENCIA	
ORDEN	DEFINICION	NC0	NC	NCNV	NCV	DEFINICION	NV
0	Cada una de las celdas de un mapa de Karnaugh. El cubo de orden 0 se representa por (*n-0*) = *n* coordenadas binarias, las correspondientes a la fila y columna del mapa donde está situado.	2^0	n	n – 0	0	Un Mínterm o un Máxterm. Una adyacencia de orden 0 contiene (*n-0*) = *n* literales en su expresión.	n
1	Dos cubos de orden 0 forman un cubo de orden 1 si tienen todas sus coordenadas iguales salvo una, que cambia un 0 por un 1. El cubo de orden 1 resultante se representa por *n* coordenadas binarias que están formadas por : 1º) Las (*n-1*) coordenadas binarias que son comunes a los dos cubos de orden 0 en sus mismas posiciones. 2º) Una coordenada llamada vacía, representada por una indiferencia (-), correspondiente a la posición de coordenada no vacía donde difieren los dos cubos de orden 0. Un cubo de orden 1 contiene 2^1 cubos de orden 0.	2^1	n	n – 1	1	Dos adyacencias de orden 0 (Mínterm ó Máxterm) forman una adyacencia de orden 1 si sus expresiones con literales son iguales salvo una variable, que en un caso está complementada y en el otro no. La expresión con literales de la adyacencia de orden 1 será igual a la de la adyacencia de orden 0 suprimiendo la variable que difiere. Una adyacencia de orden 1 contiene (*n-1*) literales en su expresión.	n - 1
2	Dos cubos de orden 1 forman un cubo de orden 2 si tienen : a) La coordenada vacía de ambos en la misma posición. b) Todas sus (*n-1*) coordenadas no vacías iguales salvo una, que cambia un 0 por un 1. El cubo de orden 2 resultante se representa por *n* coordenadas binarias que están formadas por : 1º) Las (*n-2*) coordenadas binarias no vacías que son comunes a los dos cubos de orden 1. 2º) La coordenada vacía común a ambos. 3º) Una nueva coordenada vacía, representada por una indiferencia (-), correspondiente a la posición de coordenada no vacía donde difieren los dos cubos de orden 1. Un cubo de orden 2 contiene 2^2 cubos de orden 0.	2^2	n	n – 2	2	Dos adyacencias de orden 1 forman una adyacencia de orden 2 si sus expresiones con literales son iguales salvo una variable, que en un caso está complementada y en el otro no. La expresión con literales de la adyacencia de orden 2 será igual a la de la adyacencia de orden 1 suprimiendo la variable que difiere. Una adyacencia de orden 2 contiene (*n-2*) literales en su expresión.	n - 2
.....	....	.....	.....	.....	......	....	.....
k	Dos cubos de orden (*k-1*) forman un cubo de orden *k* si tienen : a) Las (*k-1*) coordenadas vacías de ambos en las misma posiciones. b) Todas sus (*n-(k-1)*) coordenadas no vacías iguales salvo una, que cambia un 0 por un 1. El cubo de orden *k* resultante se representa por *n* coordenadas binarias que están formadas por : 1º) Las (*n-(k-1)*) coordenadas binarias no vacías que son comunes a los dos cubos de orden (*k-1*). 2º) Las *k* coordenadas vacías comunes a ambos. 3º) Una nueva coordenada vacía, representada por una indiferencia (-), correspondiente a la posición de coordenada no vacía donde difieren los dos cubos de orden (*k-1*). Un cubo de orden *k* contiene 2^k cubos de orden 0.	2^k	n	n – k	k	Dos adyacencias de orden (*k-1*) forman una adyacencia de orden *k* si sus expresiones con literales son iguales salvo una variable, que en un caso está complementada y en el otro no. La expresión con literales de la adyacencia de orden *k* será igual a la de la adyacencia de orden (*k-1*) suprimiendo la variable que difiere. Una adyacencia de orden 1 contiene (*n-k*) literales en su expresión.	n - k

NOTAS : NC0 = Número de Cubos de Orden 0. ; NC = Número de Coordenadas. ; NCNV = Número de Coordenadas No Vacías. ; NCV = Número de Coordenadas Vacías. ; NV = Número de Variables.

MINIMIZACION DE FUNCIONES EMPLEANDO MAPAS DE KARNAUGH.

DEFINICIÓN: *Expresión Mínima*.

1. Una expresión de una función de conmutación en forma suma de productos (AND-OR) se considera una expresión mínima si y sólo sí:
    a. No existe otra expresión equivalente de la función que contenga menos términos producto.
    b. No existe otra expresión equivalente de la función que, conteniendo el mismo número de términos producto, contenga menor número de literales.
2. Una expresión de una función de conmutación en forma producto de sumas (OR-AND) se considera una expresión mínima si y sólo sí:
    a. No existe otra expresión equivalente de la función que contenga menos términos suma.
    b. No existe otra expresión equivalente de la función que, conteniendo el mismo número de términos suma, contenga menor número de literales.

TEOREMA: Dada una función de conmutación:

1. Cualquier realización en forma suma de productos (AND-OR) mínima de la función debe constar de una suma (OR) de términos producto que sean implicantes primos de la función.
2. Cualquier realización en forma producto de sumas (OR-AND) mínima de la función debe constar de un producto (AND) de términos suma que sean implicados primos de la función.

COROLARIO: Dada una función de conmutación:

1. Obteniendo TODOS los implicantes primos de dicha función, es seguro que, de entre ellos, se puede extraer un conjunto mínimo de implicantes primos que permita realizar una implementación mínima en forma suma de productos (AND-OR) de la función.
2. Obteniendo TODOS los implicados primos de dicha función, es seguro que, de entre ellos, se puede extraer un conjunto mínimo de implicados primos que permita realizar una implementación mínima en forma producto de sumas (OR-AND) de la función.

IMPLEMENTACIÓN MÍNIMA DE UNA FUNCIÓN DE CONMUTACIÓN:

1. <u>Implementación mínima de una función como Suma de Productos (Síntesis AND-OR)</u>:

1.1. Representar la función de *n* variables en un mapa de Karnaugh. Sólo se han de representar las celdas donde la función toma el valor uno (1) o indiferencia (-).

1.2. Extraer TODOS los cubos de orden *k = 0, 1, 2, ..., n* tales que:

1.2.1. Cada uno de estos cubos contiene sólo cubos de orden cero de valor uno (1) ó indiferencia (-).

1.2.2. Al menos hay un cubo de orden cero con valor uno (1). No se permite seleccionar cubos que sólo contengan indiferencias (-).

1.2.3. Ninguno de estos cubos de orden *k* puede estar contenido en otro cubo de orden *k'* con *k' > k* con las mismas características anteriores.

1.3. Escribir los términos producto correspondientes a las adyacencias que provienen de las coordenadas de los cubos obtenidos en el apartado 1.2. Esta lista está formada por todos los implicantes primos de la función.

1.4. Seleccionar de entre ellos un conjunto de forma que se realice la función con el mínimo número de implicantes primos. La elección se realiza de la manera siguiente:

1.4.1. Elegir los implicantes primos llamados esenciales: son aquellos que provienen de una o varias celdas o cubos de orden cero que contienen unos (1) de la función y no están a su vez contenidos en ningún otro cubo que representa a otro implicante primo. Gráficamente estos unos de la función se localizan en cubos en el mapa de Karnaugh que contienen celdas o cubos de orden cero que no forman parte de la intersección entre varios de los cubos elegidos. Al seleccionar estos implicantes primos esenciales quedan realizados todos los unos (1) de la función contenidos en ellos y ya no hay que seleccionarlos a posteriori.

1.4.2. Elegir los implicantes primos no esenciales: si al finalizar el apartado 1.4.1 quedara algún valor uno (1) de la función sin realizar se eligen para cubrirlos de entre los implicantes primos que aún no se han escogido (que reciben el nombre de implicantes primos no esenciales) escogiendo aquellos cubos siempre de mayor orden.

1.4.3. Para realizar la selección de implicantes primos (tanto esenciales como no esenciales) es útil valerse de una herramienta denominada *tabla de implicantes primos*. Ésta es una tabla que tiene tantas filas como implicantes se han obtenido en el apartado 1.3 y tantas columnas como mínterms correspondientes a valores “1” tiene la función (en el caso de funciones incompletamente especificadas, no se colocan, como columnas, los valores correspondientes a los valores indiferentes de la función). Se realiza una marca cuando se corresponde al cruce entre implicante (fila) y mínterm (columna), tal que el mínterm está contenido en el implicante. Para la búsqueda de los implicantes primos esenciales se localizan aquellas columnas que sólo presentan una marca. Esto corresponde a un mínterm que sólo está contenido en ese implicante en cuestión y, por tanto, hace que dicho implicante sea esencial para la realización de la función. Terminada la selección de los implicantes primos esenciales, para proceder a la selección de los no esenciales, se puede construir una nueva *tabla de implicantes primos reducida*. Ésta es una tabla de implicantes primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicantes primos esenciales seleccionados en la tabla de implicantes primos y las columnas correspondientes a los mínterms contenidos en los implicantes primos esenciales. En la tabla de implicantes primos reducida no puede ocurrir que haya columnas que presenten sólo una marca en las filas de los implicantes, ya que éstas se han localizado en la tabla de implicantes primos original. En la tabla de implicantes primos reducida puede ocurrir lo siguiente:

1.4.3.1. Que haya filas con marcas en distintas posiciones de columnas.

1.4.3.2. Que haya filas con las mismas marcas en todas las posiciones. En este caso se dice que dichas filas son *intercambiables*. Se deben suprimir de la tabla de implicantes primos reducida todas las filas intercambiables, menos una.

1.4.3.3. Que haya filas que contengan las mismas marcas que otras, y algunas más. En este caso se dice que la fila que contiene más marcas *domina* a la fila con menos marcas. Se deben suprimir de la tabla de implicantes primos reducida todas las filas dominadas y dejar las filas dominantes.

Una vez suprimidas de la tabla de implicantes primos reducida las filas intercambiables, menos una, y las filas dominadas, se obtendrá una tabla aún más reducida, en la que ahora sí pueden aparecer columnas con una sola marca. Esto corresponde a un mínterm que sólo está contenido en ese implicante en cuestión de la tabla de implicantes reducida y, por tanto, hace que dicho implicante sea esencial para la realización de la función, pasándose a denominar ahora implicante primo esencial secundario. Se localizan todos los implicantes primos esenciales secundarios de la función. Terminada la selección de los implicantes primos esenciales secundarios, si aún quedaran implicantes primos que no se han elegido para la realización de la función, se procede a construir una nueva *tabla de implicantes primos reducida* que sería una nueva tabla de implicantes primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicantes primos esenciales secundarios seleccionados en la tabla de implicantes primos reducida y las columnas correspondientes a los mínterms contenidos en los implicantes primos esenciales. Y así sucesivamente se procedería hasta conseguir seleccionar un conjunto mínimo de implicantes primos para la realización de la función.

1.5. Escribir la función como Suma Lógica (OR) de los términos producto (AND) que corresponden a los implicantes primos que se han elegido.

2. <u>Implementación mínima de una función como Producto de Sumas (Síntesis OR-AND)</u>:

2.1. Representar la función de n variables en un mapa de Karnaugh. Sólo se han de representar las celdas donde la función toma el valor cero (0) o indiferencia (-).

2.2. Extraer TODOS los cubos de orden $k = 0, 1, 2, ..., n$ tales que:

2.2.1. Cada uno de estos cubos contiene sólo cubos de orden cero de valor cero (0) ó indiferencia (-).

2.2.2. Al menos hay un cubo de orden cero con valor cero (0). No se permite seleccionar cubos que sólo contengan indiferencias (-).

2.2.3. Ninguno de estos cubos de orden k puede estar contenido en otro cubo de orden k' con $k' > k$ con las mismas características anteriores.

2.3. Escribir los términos suma correspondientes a las adyacencias que provienen de las coordenadas de los cubos obtenidos en el apartado 2.2. Esta lista está formada por todos los implicados primos de la función.

2.4. Seleccionar de entre ellos un conjunto de forma que se realice la función con el mínimo número de implicados primos. La elección se realiza de la manera siguiente:

2.4.1. Elegir los implicados primos llamados esenciales: son aquellos que provienen de una o varias celdas o cubos de orden cero que contienen ceros (0) de la función y no están a su vez contenidos en ningún otro cubo que representa a otro implicado primo. Gráficamente estos ceros de la función se localizan en cubos en el mapa de Karnaugh que contienen celdas o cubos de orden cero que no forman parte de la intersección entre varios de los cubos elegidos. Al seleccionar estos implicados primos esenciales quedan realizados todos los ceros (0) de la función contenidos en ellos y ya no hay que seleccionarlos a posteriori.

2.4.2. Elegir los implicados primos no esenciales: si al finalizar el apartado 2.4.1 quedara algún valor cero (0) de la función sin realizar se eligen para cubrirlos de entre los implicados primos que aún no se han escogido (que reciben el nombre de implicados primos no esenciales) escogiendo aquellos cubos siempre de mayor orden.

2.4.3. Para realizar la selección de implicados primos (tanto esenciales como no esenciales) es útil valerse de una herramienta denominada *tabla de implicados primos*. Ésta es una tabla que tiene tantas filas como implicados se han obtenido en el apartado 2.3 y tantas columnas como máxterms correspondientes a valores “1” tiene la función (en el caso de funciones incompletamente especificadas, no se colocan, como columnas, los valores correspondientes a los valores indiferentes de la función). Se realiza una marca cuando se corresponde al cruce entre implicado (fila) y máxterm (columna), tal que el máxterm está contenido en el implicado. Para la búsqueda de los implicados primos esenciales se localiza(n) aquella(s) columna(s) que sólo presentan una marca. Esto corresponde a un máxterm que sólo está contenido en ese implicado en cuestión y, por tanto, hace que dicho implicado sea esencial para la realización de la función. Terminada la selección de los implicados primos esenciales, para proceder a la selección de los no esenciales, se puede construir una nueva *tabla de implicados primos reducida*. Ésta es una tabla de implicados primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicados primos esenciales seleccionados en la tabla de implicados primos y las columnas correspondientes a los máxterms contenidos en los implicados primos esenciales. En la tabla de implicados primos reducida no puede ocurrir que haya columnas que presenten sólo una marca en las filas de los implicados, ya que éstas se han localizado en la tabla de implicados primos original. En la tabla de implicados primos reducida puede ocurrir lo siguiente:

2.4.3.1. Que haya filas con marcas en distintas posiciones de columnas.

2.4.3.2. Que haya filas con las mismas marcas en todas las posiciones. En este caso se dice que dichas filas son *intercambiables*. Se deben suprimir de la tabla de implicados primos reducida todas las filas intercambiables, menos una.

2.4.3.3. Que haya filas que contengan las mismas marcas que otras, y algunas más. En este caso se dice que la fila que contiene más marcas *domina* a la fila con menos marcas. Se deben suprimir de la tabla de implicados primos reducida todas las filas dominadas y dejar las filas dominantes.

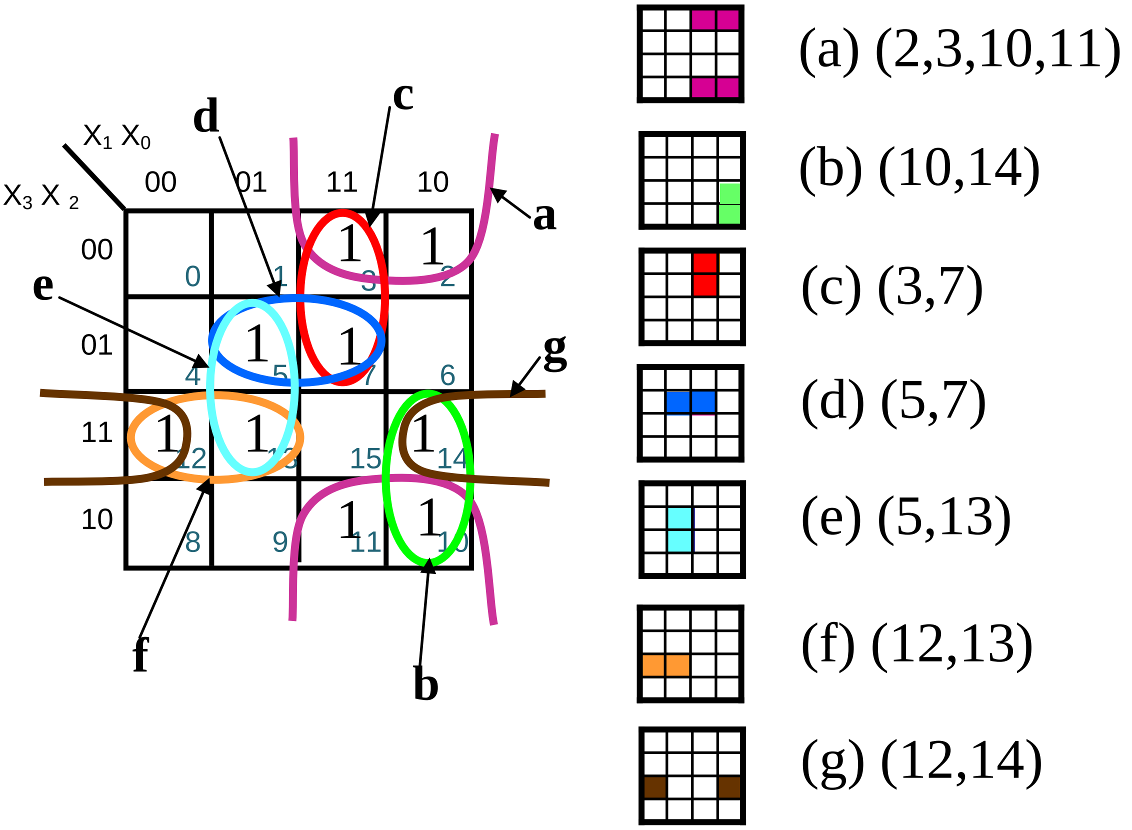
Una vez suprimidas de la tabla de implicados primos reducida las filas intercambiables, menos una, y las filas dominadas, se obtendrá una tabla aún más reducida, en la que ahora sí pueden aparecer columnas con una sola marca. Esto corresponde a un máxterm que sólo está contenido en ese implicado en cuestión de la tabla de implicados reducida y, por tanto, hace que dicho implicado sea esencial para la realización de la función, pasándose a denominar ahora implicado primo esencial secundario. Se localizan todos los implicados primos esenciales secundarios de la función. Terminada la selección de los implicados primos esenciales secundarios, si aún quedaran implicados primos que no se han elegido para la realización de la función, se procede a construir una nueva *tabla de implicados primos reducida* que sería una nueva tabla de implicados primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicados primos esenciales secundarios seleccionados en la tabla de implicados primos reducida y las columnas correspondientes a los máxterms contenidos en los implicados primos esenciales. Y así sucesivamente se procedería hasta conseguir seleccionar un conjunto mínimo de implicados primos para la realización de la función.

2.5. Escribir la función como Producto Lógico (AND) de los términos suma (OR) que corresponden a los implicados primos que se han elegido.

EJEMPLO DE MINIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE CONMUTACIÓN DE 4 VARIABLES (SÍNTESIS FORMA SUMA DE PRODUCTOS (AND-OR)).

$$f \quad : \quad B\times B\times B\times B \quad \rightarrow \quad B$$
$$(x_3,x_2,x_1,x_0)\in B^4 \quad \rightarrow \quad f\,(x_3,x_2,x_1,x_0)\in B$$
$$f\,(x_3,x_2,x_1,x_0)=\sum m\,(2\,,3\,,5\,,7\,,10\,,11\,,12\,,13\,,14)$$

a) Mapa de Karnaugh e implicantes primos de la Función:



b) Selección de Implicantes Primos de la Función:

Implicante	Mínterms Contenidos	Coordenadas $X_3\ X_2\ X_1\ X_0$	Expresión Algebraica
a	2 , 3 , 10 , 11	– 0 1 –	$\overline{x_2}\cdot x_1$
b	10 , 14	1 – 1 0	$x_3\cdot x_1\cdot\overline{x_0}$
c	3 , 7	0 – 1 1	$\overline{x_3}\cdot x_1\cdot x_0$
d	5 , 7	0 1 – 1	$\overline{x_3}\cdot x_2\cdot x_0$
e	5 , 13	– 1 0 1	$x_2\cdot\overline{x_1}\cdot x_0$
f	12 , 13	1 1 0 –	$x_3\cdot x_2\cdot\overline{x_1}$
g	12 , 14	1 1 – 0	$x_3\cdot x_2\cdot\overline{x_0}$

· Tabla de Implicantes Primos:

m_i / Impl.	2	3	5	7	10	11	12	13	14
a	x	x			x	x			
b					x				x
c		x		x					
d			x	x					
e			x					x	
f							x	x	
g							x		x

· Implicantes Primos Esenciales: *a*

· Tabla de Implicantes Reducida:

m_i / Impl.	5	7	12	13	14
b					x
c		x			
d	x	x			
e	x			x	
f			x	x	
g			x		x

- El implicante *d domina a c*. Se puede eliminar *c.*
- El Implicante *g domina a b*. Se puede eliminar *b.*

m_i / Impl.	5	7	12	13	14
d	x	x			
e	x			x	
f			x	x	
g			x		x

· Implicantes Primos Esenciales Secundarios: d , g

· Tabla de Implicantes Primos Secundarios Reducida:

m_i / Impl.	13
e	x
f	x

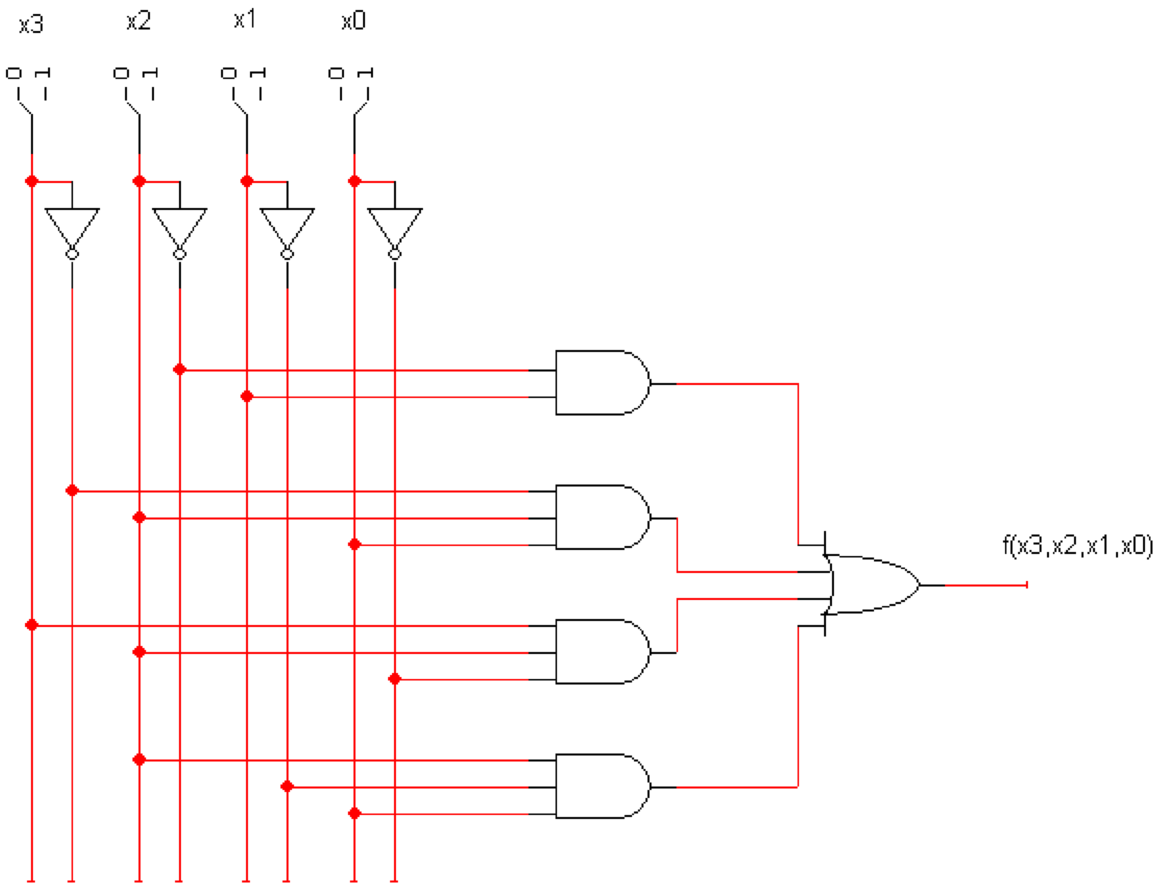
- Los implicantes *e* y *f* son *intercambiables*. Se puede eliminar uno de los dos.

· Implicantes Primos Opcionales: *e* ó *f* (se elige uno de los dos)

c) Implementación de la función como Suma de Productos (S de P) :

$$f(x_3\ ,\ x_2\ ,\ x_1\ ,x_0)\ =\ a\ +\ d\ +\ g\ +\ \left\{\begin{matrix} e \\ ó \\ f \end{matrix}\right\}\ =\ \overline{x_2}\cdot x_1\ +\ \overline{x_3}\cdot x_2\cdot x_0\ +\ x_3\cdot x_2\cdot \overline{x_0}\ +\ \left\{\begin{matrix} x_2\cdot \overline{x_1}\cdot x_0 \\ ó \\ x_3\cdot x_2\cdot \overline{x_1} \end{matrix}\right\}$$

d) Esquema del circuito (Síntesis AND – OR) :



MINIMIZACION DE FUNCIONES EMPLEANDO EL MÉTODO DE QUINE-Mc KLUSKEY.

DEFINICIÓN: *Expresión Mínima*.

1. Una expresión de una función de conmutación en forma suma de productos (AND-OR) se considera una expresión mínima si y sólo sí:
    c. No existe otra expresión equivalente de la función que contenga menos términos producto.
    d. No existe otra expresión equivalente de la función que, conteniendo el mismo número de términos producto, contenga menor número de literales.
2. Una expresión de una función de conmutación en forma producto de sumas (OR-AND) se considera una expresión mínima si y sólo sí:
    e. No existe otra expresión equivalente de la función que contenga menos términos suma.
    f. No existe otra expresión equivalente de la función que, conteniendo el mismo número de términos suma, contenga menor número de literales.

TEOREMA 0: Dada una función de conmutación:

1. Cualquier realización en forma suma de productos (AND-OR) mínima de la función debe constar de una suma (OR) de términos producto que sean implicantes primos de la función.
2. Cualquier realización en forma producto de sumas (OR-AND) mínima de la función debe constar de un producto (AND) de términos suma que sean implicados primos de la función.

COROLARIO 0: Dada una función de conmutación:

1. Obteniendo TODOS los implicantes primos de dicha función, es seguro que, de entre ellos, se puede extraer un conjunto mínimo de implicantes primos que permita realizar una implementación mínima en forma suma de productos (AND-OR) de la función.
2. Obteniendo TODOS los implicados primos de dicha función, es seguro que, de entre ellos, se puede extraer un conjunto mínimo de implicados primos que permita realizar una implementación mínima en forma producto de sumas (OR-AND) de la función.

TEOREMA 1: Sean a_i y a_j dos adyacencias de orden cero (Mínterm ó Máxterm). La condición necesaria y suficiente para que dos adyacencias de orden cero (Mínterm ó Máxterm) formen una de orden 1 son las siguientes:

1. Sus índices han de diferir en una unidad, es decir:

$$|\ I(a_i) - I(a_j)\ | = 1$$

2. Las expresiones decimales de las adyacencias han de diferir en una potencia de 2, es decir:

$$|\ i - j\ | = 2^k \ ;\ k \in \mathbb{N}$$

3. La expresión decimal de la adyacencia de menor índice (por ejemplo, a_i) ha de ser menor que la de mayor índice (por ejemplo, a_j), es decir:

$$i < j$$

IMPLEMENTACIÓN MÍNIMA DE UNA FUNCIÓN DE CONMUTACIÓN:

1. Implementación mínima de una función como Suma de Productos (Síntesis AND-OR):

    1.1. Representar la función de *n* variables en forma compacta ($f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \Sigma\, m(\ldots)$.

    1.2. Construir una tabla agrupando los mínterms o adyacencias de orden cero de la función de acuerdo con su índice (nº de variables sin complementar de la expresión con literales del mínterm, que coinciden con el nº de unos de su expresión en coordenadas binarias). Esta tabla tendrá tantas filas como valores de índices diferentes pueda haber (como máximo desde 0 hasta n, es decir n+1 filas, en caso de que haya mínterms de todos los tipos de índices) y tendrá dos columnas, una para el número del índice y otra para el valor del mínterm, a saber:

Índice	Mínterm
0	
1	
2	
….	….
n	

1.3. Seguidamente, hay que formar una nueva tabla, con las adyacencias de primer orden formadas por cada una dos adyacencias de orden cero (mínterms) de la tabla anterior. Según el Teorema 1, sólo se podrán formar adyacencias de primer orden entre adyacencias de orden cero cuyos índices difieran en una unidad, es decir, entre filas contiguas de la tabla construida anteriormente. Además, para formar la adyacencia de primer orden, las expresiones decimales de las dos adyacencias de orden cero deben diferir en una potencia de 2 (ya que cambia una variable por su complemento o viceversa y, en la expresión con coordenadas binarias, esto significa un cambio de un 0 por un 1 o viceversa) y, por último, la expresión decimal de la adyacencia de menor índice ha de ser menor que la de mayor índice.

Siguiendo estas indicaciones, para formar la tabla de adyacencias de primer orden hay que comparar cada adyacencia de orden cero (mínterm) de cada grupo caracterizado por el mismo índice con cada una de las del grupo que les sigue en la fila siguiente (de índice una unidad superior), pero sólo con aquellas que tienen una expresión decimal mayor. Si difieren en una potencia de 2, se combinan en una adyacencia de primer orden y se anotan en la nueva tabla. Para representarla, se colocan las expresiones decimales de las adyacencias de orden cero combinadas en la tabla de las de primer orden y, a su lado, entre paréntesis la potencia de 2 en que difieren. Se van marcando las adyacencias de orden cero combinadas en alguna de primer orden para indicar que ya están incluidas en las de orden superior. Estas adyacencias de orden cero ya marcadas no habrá que tenerlas en cuenta para la realización mínima de la función, pues están incluidas en una de orden superior, pero sí podrían formar parte de más de una adyacencia de primer orden. Se procede de manera exhaustiva hasta encontrar todas las adyacencias de primer orden de entre la tabla de adyacencias de orden cero. Cuando se pasa a estudiar de un grupo de adyacencias de orden cero a otro distinto, se debe crear una nueva fila en la tabla de adyacencias de primer orden, para indicar este cambio y que las nuevas adyacencias de primer orden proceden de adyacencias de orden cero de diferente índice. La tabla de adyacencias de primer orden tendría una forma como la siguiente:

Índices	Adyacencias primer orden
0 : 1	
1 : 2	
2 : 3	
….	….
(n-1) : n	

1.4. A continuación hay que formar las adyacencias de segundo orden partiendo de las de primer orden. Es inmediato ver que sólo se pueden formar adyacencias de segundo orden entre adyacencias de primer orden que esté situadas en filas contiguas de la tabla de adyacencias de primer orden que, además, tengan la misma diferencia en potencias de 2 entre paréntesis en la tabla, ya que esto representa que carecen del mismo literal las dos adyacencias de primer orden. Además, para formar la adyacencia de segundo orden, las expresiones decimales de las dos adyacencias de primer orden deben diferir, de nuevo, en una potencia de 2 (ya que cambia una variable por su complemento o viceversa y, en la expresión con coordenadas binarias, esto significa un cambio de un 0 por un 1 o viceversa) y, por último, la expresión decimal de la adyacencia de menor índice ha de ser menor que la de mayor índice.

Siguiendo estas indicaciones, para formar la tabla de adyacencias de segundo orden hay que comparar cada adyacencia de primer orden de cada grupo con cada una de las del grupo que les sigue en la fila siguiente, pero sólo con aquellas que tienen una expresión decimal mayor. Si difieren en una potencia de 2, se combinan en una adyacencia de segundo orden y se anotan en la nueva tabla. Para representarlo, se colocan las expresiones decimales de las adyacencias de primer orden combinadas en la tabla de las de segundo orden y, a su lado, entre paréntesis las potencias de 2 en que difieren (que serán la que ya tenían proveniente de las de orden cero y la nueva que aparece). Se van marcando las adyacencias de primer orden combinadas en alguna de segundo orden para indicar que ya están incluidas en las de orden superior. Estas adyacencias de primer orden ya marcadas no habrá que tenerlas en cuenta para la realización mínima de la función, pues están incluidas en una de orden superior, pero sí podrían formar parte de más de una adyacencia de segundo orden. Se procede de manera exhaustiva hasta encontrar todas las adyacencias de segundo orden de entre la tabla de adyacencias de primer orden. Cuando se pasa a estudiar de un grupo de adyacencias de primer orden a otro distinto, se debe crear una nueva fila en la tabla de adyacencias de segundo orden, para indicar este cambio y que las nuevas adyacencias de segundo orden proceden de adyacencias de primer orden de diferentes grupos. La tabla de adyacencias de segundo orden tendría una forma como la siguiente:

Índices	Adyacencias segundo orden
0 : 1/1 : 2	
1 : 2/2 : 3	
2 : 3/3 : 4	
….	….
(n-2) : (n-1)/(n-1) : n	

1.5. Se procede de de esta manera reiterativa formando después las adyacencias de tercer orden, cuarto orden, etc.. Se termina el proceso cuando, estudiada una tabla de adyacencias de un orden determinado, no se consigan formar adyacencias de un orden superior. El conjunto de adyacencias, sean del orden que sean, que no han quedado incluidas en otras de orden superior formará el conjunto de todos los implicantes primos de la función.

1.6. Se deben ahora escribir los términos producto correspondientes a las adyacencias que se han obtenido en los apartados 1.2, 1.3 1.4 y 1.5 del método. Esta lista está formada por todos los implicantes primos de la función.

1.7. Seleccionar de entre ellos un conjunto de forma que se realice la función con el mínimo número de implicantes primos. La elección se realiza de la manera siguiente:

1.7.1. Elegir los implicantes primos llamados esenciales: son aquellos que contienen mínterms de la función que no están contenidos en otros implicantes primos. Al seleccionar estos implicantes primos esenciales quedan realizados todos los mínterms de la función contenidos en ellos y ya no hay que seleccionarlos a posteriori.

1.7.2. Elegir los implicantes primos no esenciales: si al finalizar el apartado 1.7.1 quedara algún valor mínterm de la función sin realizar se eligen para realizarlos de entre los implicantes primos que aún no se han escogido (que reciben el nombre de implicantes primos no esenciales) escogiendo aquellas adyacencias siempre de mayor orden.

1.7.3. Para realizar la selección de implicantes primos (tanto esenciales como no esenciales) es útil valerse de una herramienta denominada *tabla de implicantes primos*. Ésta es una tabla que tiene tantas filas como implicantes se han obtenido en el apartado 1.6 y tantas columnas como mínterms correspondientes a valores “1” tiene la función (en el caso de funciones incompletamente especificadas, no se colocan, como columnas, los valores correspondientes a los valores indiferentes de la función). Se realiza una marca cuando se corresponde al cruce entre implicante (fila) y mínterm (columna), tal que el mínterm está contenido en el implicante. Para la búsqueda de los implicantes primos esenciales se localizan aquellas columnas que sólo presentan una marca. Esto corresponde a un mínterm que sólo está contenido en ese implicante en cuestión y, por tanto, hace que dicho implicante sea esencial para la realización de la función. Terminada la selección de los implicantes primos esenciales, para proceder a la selección de los no esenciales, se puede construir una nueva *tabla de implicantes primos reducida*. Ésta es una tabla de implicantes primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicantes primos esenciales seleccionados en la tabla de implicantes primos y las columnas correspondientes a los mínterms contenidos en los implicantes primos esenciales. En la tabla de implicantes primos reducida no puede ocurrir que haya columnas que presenten sólo una marca en las filas de los implicantes, ya que éstas se han localizado en la tabla de implicantes primos original. En la tabla de implicantes primos reducida puede ocurrir lo siguiente:

1.7.3.1. Que haya filas con marcas en distintas posiciones de columnas.

1.7.3.2. Que haya filas con las mismas marcas en todas las posiciones. En este caso se dice que dichas filas son *intercambiables*. Se deben suprimir de la tabla de implicantes primos reducida todas las filas intercambiables, menos una.

1.7.3.3. Que haya filas que contengan las mismas marcas que otras, y algunas más. En este caso se dice que la fila que contiene más marcas *domina* a la fila con menos marcas. Se deben suprimir de la tabla de implicantes primos reducida todas las filas dominadas y dejar las filas dominantes.

Una vez suprimidas de la tabla de implicantes primos reducida las filas intercambiables, menos una, y las filas dominadas, se obtendrá una tabla aún más reducida, en la que ahora sí pueden aparecer columnas con una sola marca. Esto corresponde a un mínterm que sólo está contenido en ese implicante en cuestión de la tabla de implicantes reducida y, por tanto, hace que dicho implicante sea esencial para la realización de la función, pasándose a denominar ahora implicante primo esencial secundario. Se localizan todos los implicantes primos esenciales secundarios de la función. Terminada la selección de los implicantes primos esenciales secundarios, si aún quedaran implicantes primos que no se han elegido para la realización de la función, se procede a construir una nueva *tabla de implicantes primos reducida* que sería una nueva tabla de implicantes primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicantes primos esenciales secundarios seleccionados en la tabla de implicantes primos reducida y las columnas correspondientes a los mínterms contenidos en los implicantes primos esenciales. Y así sucesivamente se procedería hasta conseguir seleccionar un conjunto mínimo de implicantes primos para la realización de la función.

1.8. Escribir la función como Suma Lógica (OR) de los términos producto (AND) que corresponden a los implicantes primos que se han elegido.

2. <u>Implementación mínima de una función como Producto de Sumas (Síntesis OR-AND)</u>:

2.1. Representar la función de *n* variables en forma compacta (f $(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_0) = \Pi\, M\, (\ldots)$.

2.2. Construir una tabla agrupando los máxterms o adyacencias de orden cero de la función de acuerdo con su índice (nº de variables complementadas de la expresión con literales del máxterm, que coinciden con el nº de unos de su expresión en coordenadas binarias). Esta tabla tendrá tantas filas como valores de índices diferentes pueda haber (como máximo desde 0 hasta n, es decir n+1 filas, en caso de que haya máxterms de todos los tipos de índices) y tendrá dos columnas, una para el número del índice y otra para el valor del máxterm, a saber:

Índice	Máxterm
0	
1	
2	
….	….
n	

2.3. Seguidamente, hay que formar una nueva tabla, con las adyacencias de primer orden formadas por cada una dos adyacencias de orden cero (máxterms) de la tabla anterior. Según el Teorema 1, sólo se podrán formar adyacencias de primer orden entre adyacencias de orden cero cuyos índices difieran en una unidad, es decir, entre filas contiguas de la tabla construida anteriormente. Además, para formar la adyacencia de primer orden, las expresiones decimales de las dos adyacencias de orden cero deben diferir en una potencia de 2 (ya que cambia una variable por su complemento o viceversa y, en la expresión con coordenadas binarias, esto significa un cambio de un 0 por un 1 o viceversa) y, por último, la expresión decimal de la adyacencia de menor índice ha de ser menor que la de mayor índice.
Siguiendo estas indicaciones, para formar la tabla de adyacencias de primer orden hay que comparar cada adyacencia de orden cero (máxterm) de cada grupo caracterizado por el mismo índice con cada una de las del grupo que les sigue en la fila siguiente (de índice una unidad superior), pero sólo con aquellas que tienen una expresión decimal mayor. Si difieren en una potencia de 2, se combinan en una adyacencia de primer orden y se anotan en la nueva tabla. Para representarla, se colocan las expresiones decimales de las adyacencias de orden cero combinadas en la tabla de las de primer orden y, a su lado, entre paréntesis la potencia de 2 en que difieren. Se van marcando las adyacencias de orden cero combinadas en alguna de primer orden para indicar que ya están incluidas en las de orden superior. Estas adyacencias de orden cero ya marcadas no habrá que tenerlas en cuenta para la realización mínima de la función, pues están incluidas en una de orden superior, pero sí podrían formar parte de más de una adyacencia de primer orden. Se procede de manera exhaustiva hasta encontrar todas las adyacencias de primer orden de entre la tabla de adyacencias de orden cero. Cuando se pasa a estudiar de un grupo de adyacencias de orden cero a otro distinto, se debe crear una nueva fila en la tabla de adyacencias de primer orden, para indicar este cambio y que las nuevas adyacencias de primer orden proceden de adyacencias de orden cero de diferente índice. La tabla de adyacencias de primer orden tendría una forma como la siguiente:

Índices	Adyacencias primer orden
0 : 1	
1 : 2	
2 : 3	
….	….
(n-1) : n	

2.4. A continuación hay que formar las adyacencias de segundo orden partiendo de las de primer orden. Es inmediato ver que sólo se pueden formar adyacencias de segundo orden entre adyacencias de primer orden que esté situadas en filas contiguas de la tabla de adyacencias de primer orden que, además, tengan la misma diferencia en potencias de 2 entre paréntesis en la tabla, ya que esto representa que carecen del mismo literal las dos adyacencias de primer orden. Además, para formar la adyacencia de segundo orden, las expresiones decimales de las dos adyacencias de primer orden deben diferir, de nuevo, en una potencia de 2 (ya que cambia una variable por su complemento o viceversa y, en la expresión con coordenadas binarias, esto significa un cambio de un 0 por un 1 o viceversa) y, por último, la expresión decimal de la adyacencia de menor índice ha de ser menor que la de mayor índice.
Siguiendo estas indicaciones, para formar la tabla de adyacencias de segundo orden hay que comparar cada adyacencia de primer orden de cada grupo con cada una de las del grupo que les sigue en la fila siguiente, pero sólo con aquellas que tienen una expresión decimal mayor. Si difieren en una potencia de 2, se combinan en una adyacencia de segundo orden y se anotan en la nueva tabla. Para representarlo, se colocan las expresiones decimales de las adyacencias de primer orden combinadas en la tabla de las de segundo orden y, a su lado, entre paréntesis las potencias de 2 en que difieren (que serán la que ya tenían proveniente de las de orden cero y la nueva que aparece). Se van marcando las adyacencias de primer orden combinadas en alguna de segundo orden para indicar que ya están incluidas en las de orden superior. Estas adyacencias de primer orden ya marcadas no habrá que tenerlas en cuenta para la realización mínima de la función, pues están incluidas en una de orden superior, pero sí podrían formar parte de más de una adyacencia de segundo orden. Se procede de manera exhaustiva hasta encontrar todas las adyacencias de segundo orden de entre la tabla de adyacencias de primer orden. Cuando se pasa a estudiar de un grupo de adyacencias de primer orden a otro distinto, se debe crear una nueva fila en la tabla de adyacencias de segundo orden,

para indicar este cambio y que las nuevas adyacencias de segundo orden proceden de adyacencias de primer orden de diferentes grupos. La tabla de adyacencias de segundo orden tendría una forma como la siguiente:

Índices	Adyacencias segundo orden
0 : 1/1 : 2	
1 : 2/2 : 3	
2 : 3/3 : 4	
….	….
(n-2) : (n-1)/(n-1) : n	

2.5. Se procede de de esta manera reiterativa formando después las adyacencias de tercer orden, cuarto orden, etc.. Se termina el proceso cuando, estudiada una tabla de adyacencias de un orden determinado, no se consigan formar adyacencias de un orden superior. El conjunto de adyacencias, sean del orden que sean, que no han quedado incluidas en otras de orden superior formará el conjunto de todos los implicados primos de la función.

2.6. Se deben ahora escribir los términos suma correspondientes a las adyacencias que se han obtenido en los apartados 2.2, 2.3 2.4 y 2.5 del método. Esta lista está formada por todos los implicados primos de la función.

2.7. Seleccionar de entre ellos un conjunto de forma que se realice la función con el mínimo número de implicados primos. La elección se realiza de la manera siguiente:

2.7.1. Elegir los implicados primos llamados esenciales: son aquellos que contienen máxterms de la función que no están contenidos en otros implicados primos. Al seleccionar estos implicados primos esenciales quedan realizados todos los máxterms de la función contenidos en ellos y ya no hay que seleccionarlos a posteriori.

2.7.2. Elegir los implicados primos no esenciales: si al finalizar el apartado 2.7.1 quedara algún valor máxterm de la función sin realizar se eligen para realizarlos de entre los implicados primos que aún no se han escogido (que reciben el nombre de implicados primos no esenciales) escogiendo aquellas adyacencias siempre de mayor orden.

2.7.3. Para realizar la selección de implicados primos (tanto esenciales como no esenciales) es útil valerse de una herramienta denominada *tabla de implicados primos*. Ésta es una tabla que tiene tantas filas como implicados se han obtenido en el apartado 2.6 y tantas columnas como máxterms correspondientes a valores “1” tiene la función (en el caso de funciones incompletamente especificadas, no se colocan, como columnas, los valores correspondientes a los valores indiferentes de la función). Se realiza una marca cuando se corresponde al cruce entre implicado (fila) y máxterm (columna), tal que el máxterm está contenido en el implicado. Para la búsqueda de los implicados primos esenciales se localizan aquellas columnas que sólo presentan una marca. Esto corresponde a un máxterm que sólo está contenido en ese implicado en cuestión y, por tanto, hace que dicho implicado sea esencial para la realización de la función. Terminada la selección de los implicados primos esenciales, para proceder a la selección de los no esenciales, se puede construir una nueva *tabla de implicados primos reducida*. Ésta es una tabla de implicados primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicados primos esenciales seleccionados en la tabla de implicados primos y las columnas correspondientes a los máxterms contenidos en los implicados primos esenciales. En la tabla de implicados primos reducida no puede ocurrir que haya columnas que presenten sólo una marca en las filas de los implicados, ya que éstas se han localizado en la tabla de implicados primos original. En la tabla de implicados primos reducida puede ocurrir lo siguiente:

2.7.3.1. Que haya filas con marcas en distintas posiciones de columnas.

2.7.3.2. Que haya filas con las mismas marcas en todas las posiciones. En este caso se dice que dichas filas son *intercambiables*. Se deben suprimir de la tabla de implicados primos reducida todas las filas intercambiables, menos una.

2.7.3.3. Que haya filas que contengan las mismas marcas que otras, y algunas más. En este caso se dice que la fila que contiene más marcas *domina* a la fila con menos marcas. Se deben suprimir de la tabla de implicados primos reducida todas las filas dominadas y dejar las filas dominantes.

Una vez suprimidas de la tabla de implicados primos reducida las filas intercambiables, menos una, y las filas dominadas, se obtendrá una tabla aún más reducida, en la que ahora sí pueden aparecer columnas con una sola marca. Esto corresponde a un máxterm que sólo está contenido en ese implicado en cuestión de la tabla de implicados reducida y, por tanto, hace que dicho implicado sea esencial para la realización de la función, pasándose a denominar ahora implicado primo esencial secundario. Se localizan todos los implicados primos esenciales secundarios de la función. Terminada la selección de los implicados primos esenciales secundarios, si aún quedaran implicados primos que no se han elegido para la realización de la función, se procede a construir una nueva *tabla de implicados primos reducida* que sería una nueva tabla de implicados primos en la que se han suprimido las filas correspondientes a los implicados primos esenciales secundarios seleccionados en la tabla de implicados primos reducida y las columnas correspondientes a los máxterms contenidos en los implicados primos esenciales. Y así sucesivamente se procedería hasta conseguir seleccionar un conjunto mínimo de implicados primos para la realización de la función.

2.8. Escribir la función como Producto Lógico (AND) de los términos suma (OR) que corresponden a los implicados primos que se han elegido.

EJEMPLO DE MINIMIZACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE CONMUTACIÓN DE 4 VARIABLES (SÍNTESIS FORMA SUMA DE PRODUCTOS (AND-OR)).

$$f \quad : \quad B\times B\times B\times B \quad \to \quad B$$
$$(x_3, x_2, x_1, x_0) \in B^4 \quad \to \quad f\,(x_3, x_2, x_1, x_0) \in B$$
$$f\,(x_3, x_2, x_1, x_0) = \sum m\,(2\,,3\,,5\,,7\,,10\,,11\,,12\,,13\,,14)$$

e) Tablas de adyacencias:

a. Adyacencias de orden cero:

Índice	Mínterm
0	-
1	2 √
2	3 √ 5 √ 10 √ 12 √
3	7 √ 11 √ 13 √ 14 √
4	-

b. Adyacencias de primer orden:

Índices	Adyacencias primer orden	
0 : 1	-	
1 : 2	2-3 (1) 2-10 (8)	√ √
2 : 3	3-7 (4) 3-11 (8) 5-7 (2) 5-13 (8) 10-11 (1) 10-14 (4) 12-13 (1) 12-14 (2)	c √ d e √ b f g
3 : 4	-	

c. Adyacencias de segundo orden:

Índices	Adyacencias Segundo orden	
(1:2)/(2:3)	2-3-10-11 (1,8)	a

f) Selección de Implicantes Primos de la Función:

Implicante	**Mínterms Contenidos**	**Coordenadas $X_3\ X_2\ X_1\ X_0$**	**Expresión Algebraica**
a	2 , 3 , 10 , 11	– 0 1 –	$\overline{x_2} \cdot x_1$
b	10 , 14	1 – 1 0	$x_3 \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$
c	3 , 7	0 – 1 1	$\overline{x_3} \cdot x_1 \cdot x_0$
d	5 , 7	0 1 – 1	$\overline{x_3} \cdot x_2 \cdot x_0$
e	5 , 13	– 1 0 1	$x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot x_0$
f	12 , 13	1 1 0 –	$x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_1}$
g	12 , 14	1 1 – 0	$x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_0}$

· Tabla de Implicantes Primos:

Impl. \ m_i	2	3	5	7	10	11	12	13	14
a	x	x			x	x			
b					x				x
c		x		x					
d			x	x					
e			x					x	
f							x	x	
g							x		x

· Implicantes Primos Esenciales: *a*

· Tabla de Implicantes Reducida:

m_i / Impl.	5	7	12	13	14
b					x
c		x			
d	x	x			
e	x			x	
f			x	x	
g			x		x

- El implicante *d domina a c*. Se puede eliminar *c*.
- El Implicante *g domina a b*. Se puede eliminar *b.*

m_i / Impl.	5	7	12	13	14
d	x	x			
e	x			x	
f			x	x	
g			x		x

· Implicantes Primos Esenciales Secundarios: *d* , *g*

· Tabla de Implicantes Primos Secundarios Reducida:

m_i / Impl.	13
e	x
f	x

- Los implicantes *e* y *f* son *intercambiables*. Se puede eliminar uno de los dos.

· Implicantes Primos Opcionales: *e* ó *f* (se elige uno de los dos)

g) Implementación de la función como Suma de Productos (S de P) :

$$f(x_3\ ,\ x_2\ ,\ x_1\ ,x_0)\ =\ a\ +\ d\ +\ g\ +\ \begin{Bmatrix} e \\ ó \\ f \end{Bmatrix} = \overline{x_2}\cdot x_1\ +\ \overline{x_3}\cdot x_2\cdot x_0\ +\ x_3\cdot x_2\cdot \overline{x_0}\ +\ \begin{Bmatrix} x_2\cdot \overline{x_1}\cdot x_0 \\ ó \\ x_3\cdot x_2\cdot \overline{x_1} \end{Bmatrix}$$

h) Esquema del circuito (Síntesis AND – OR) :