Točka 2: Obnašanje $\overline{\gamma}(G)$ na grafovskih produktih in Vizingova domneva

Raziskovanje grafičnih lastnosti na grafovskih produktih je privedlo do številnih znanih domnev in odprtih problemov v teoriji grafov. V tem razdelku preučujemo obnašanje $\overline{\gamma}(G)$ na direktnem in kartezičnem produktu grafov.

Analizo smo izvedli v SageMath. Direktni in kartezični produkti sta dobro definirani, zato smo za izračun teh produktov uporabili vgrajene funkcije.

Direktni produkt

V datoteki *direktni_produkt.ipynb* je izvedena analiza direktnega produkta poljubnih grafov. Program generira grafe in jih shrani v seznam *grafi*. Nato naključno izbere dva grafa, *g1* in *g2*, ter izračuna njun direktni produkt, označen kot *g3*. Za *g1*, *g2* in *g3* izračunamo SDCTD vrednosti. Primer rezultatov je podan spodaj:

Izbira grafov	**SDCTD_graf1**	**SDCTD_graf2**	**SDCTD_direktni**
Izbira 1	4	3	18
Izbira 2	2	3	13
Izbira 3	3	3	17
⋮	⋮	⋮	⋮
Izbira 99	4	3	23
Izbira 100	3	2	20

Na podlagi dobljenih podatkov analiziramo, ali obstaja vzorec v SDCTD vrednostih direktnega produkta grafov. Naša pozornost je usmerjena v iskanje zgornje meje za **SDCTD_direktni**, označene kot $\overline{\gamma}(G \times H)$. Označimo še $\overline{\gamma}(G)$ in $\overline{\gamma}(H)$, ki predstavljata SDCTD vrednosti za *graf1* in *graf2*.

Za analizo smo izvedli 1000 ponovitev, pri čemer smo naključno izbrali pare grafov in preverjali naslednje domneve:

- **Domneva 1:**
$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$
Ta domneva velja le v 23.72% primerov, zato ni ustrezna zgornja meja.

- **Domneva 2:**
$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 2 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$
Z izboljšanjem meje na $2 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$ se je delež uspešno omejenih primerov povečal na 93.39%.

- **Domneva 3:**
$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 3 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$
Ta meja je veljavna za vse primere v naši analizi, zato jo lahko sprejmemo kot zgornjo mejo za direktni produkt.

- Preverili smo tudi meje za $k = 4$ in $k = 5$:

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq k \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

V vseh primerih tudi ti meji veljata, vendar se osredotočimo na najmanjšo. Končna ugotovitev je torej naslednja:

SKLEP: Za SDCTD direktnega produkta dveh poljubnih grafov G in H velja:

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 3 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

Kartezični produkt

V datoteki *kartezicni_produkt.ipynb* je izvedena analiza kartezičnega produkta poljubnih grafov. Analiza je podobna tisti, ki smo jo izvedli pri direktnem produktu.
Program generira grafe in jih shrani v seznam *grafi*. Nato naključno izbere dva grafa, *g1* in *g2*, ter izračuna njun kartezični produkt, označen kot *g3*. Za *g1*, *g2* in *g3* izračunamo SDCTD vrednosti.
Na podlagi dobljenih podatkov analiziramo, ali obstaja vzorec v SDCTD vrednostih kartezičnega produkta grafov. Naša pozornost je usmerjena v iskanje spodnje meje za $\overline{\gamma}(G \times H)$. Označimo še $\overline{\gamma}(G)$ in $\overline{\gamma}(H)$, ki predstavljata SDCTD vrednosti za *graf1* in *graf2*.

Podobno kot pri direktnem produktu predpostavimo naslednje:

$$k \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

Za analizo smo izvedli 1000 ponovitev, pri čemer smo naključno izbrali pare grafov in preverjali zgornjo enačbo. Iz teh rezultatov lahko sklepamo naslednje: za $k = 1$ pride do zelo majhnega odstopanja, saj v 0.90% primerov neenakost ne velja. Pri $k = 2$ in $k = 3$ pa neenakost vedno velja.

	Število False	**Delež False (%)**
k = 1	9	0.90%
k = 2	0	0.00%
k = 3	0	0.00%

SKLEP: Za kartezični produkt dveh grafov G in H velja naslednja neenakost:

$$2 \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

Zakaj pa pride do odstopanja pri $k = 1$? Odgovor je v načinu izbire grafov G in H. Preverimo, kaj se zgodi, če fiksiramo graf G, graf H pa je poljuben:

$$k \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H), \quad \text{za } k = 1.$$

Z uporabo popravljene kode smo ugotovili, da v tem primeru neenakost drži. S tem smo pokazali Vizingovo domnevo.
Vizingova domneva: Naj bosta G in H poljubna grafa. Rečemo, da graf G zadošča Vizingovi domnevi, če neenakost velja za poljuben graf H.

$$\overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$