UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika

Miha Novoselec, Nejc Rudež, Dimitrija Kostov

SDCTD domination

Skupinski projekt

Poročilo

Mentorja: doc. dr. Janoš Vidali,
prof. dr. Riste Škrekovski

Ljubljana, 2024

1. Opis naloge in način dela

V projektu smo preučevali SDCTD dominacijsko število grafov, ki smo ga definirali že v kratki predstavitvi. Prvi korak našega projekta je bil implementacija CLP programa, ki vrne SDCTD število, če je le to večje od 0, sicer pa vrne None. Nato smo se osredotočili na 5 različnih problemov z različnimi omejitvami. Preko testiranja algoritmov na grafih v programu Sage na platformi CoCalc-u smo prišli do krajših ugotovitev/zaključkov. Le ti so predstavljeni v nadaljevanju. Prav tako pa smo opisali, kako smo do njih sploh prišli. Koda je bolj natančno zakomentirana v samih datotekah na GitHub-u.

2. Opis dela in rezultati

2.1. **Točka 1: Kateri grafi zavzamejo največje in najmanjše SDCTD dominacijsko število v odvisnosti od števila vozlišč?**

Označimo funkcijo maksimalnega SDCTD števila z $max\_st(n)$ in funkcijo minimalnega SDCTD števila $min\_st(n)$, kjer je $n \in \mathbb{N}; n \geq 4$, naša naloga bo poiskati njune ekstreme. Sprva se lotimo naloge za majhne grafe, za nas bodo zanimivi le povezani in na vsaj 4 vozliščih. Problema se lotimo tako, da generiramo vse grafe na n vozliščih, nato pa za vse izračunamo dominacijska števila, in izmed teh grafov izberemo graf z največjim številom in ga tudi izrišemo. Ta postopek sem izvajal na grafih z največ 8 vozlišči.

Problema na večjih grafih sem se lotil s pomočjo algoritma Hill climbing, pri katerem je bilo ključno, da sem določil zadostno število iteracij (pri vsakem pogonu kode sem jih določil vsaj 150000), ter da sem tudi program čim večkrat pognal in tako zares dobil globalni ekstrem. Vključil sem novo funkcijo, ki z verjetnostjo 0.5 spreminja povezave (dodaja, odstranjuje). Ukvarjal sem se predvsem z grafi z do dvanajst vozlišči.

Ugotovimo, da je maksimum funkcije $max\_st(n)$ dosežen pri $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $min\_st(n)$ je konstantno enaka 2.
Pri tem še enkrat poudarimo, da se ukvarjamo le s povezanimi grafi. V kolikor se ne bi, bi tudi za lihe grafe na n vozliščih dobili maksimalno število enako n, tak bi bil graf brez povezav. Povejmo še, kateri grafi ustrezajo ekstremom. Opazimo, da imamo za minimum zelo veliko število grafov, ki ustrezajo pogoju minimalnosti, z vsakim vozliščem, ki ga dodamo, jih imamo več. Za razliko od max, jih je veliko v obliki v dreves le s kakšnim ciklom. Za max SDCTD pa imamo pri sodih n en graf, ki je dosežen, ko gre iz vsakega vozlišča $n-2$ povezav, pri lihih n pa imamo dva grafa, katerih vozlišča imajo $n-2$ ali pa $n-3$ sosednjih vzolišč. Grafi vsebujejo ogromno ciklov.

število vozlišč	maksimalno SDCTD	minimalno SDCTD
4	4	2
5	4	2
6	6	2
7	6	2
8	8	2
9	8	2
10	10	2
11	10	2
12	12	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	2

2.2. **Točka 2: Obnašanje $\overline{\gamma}(G)$ na grafovskih produktih in Vizingova domneva.**

V tem razdelku preučujemo obnašanje $\overline{\gamma}(G)$ na direktnem in kartezičnem produktu grafov.

Direktni in kartezični produkti sta dobro definirani, zato smo za izračun teh produktov uporabili vgrajene funkcije.

2.2.1. *Direktni produkt.* V datoteki *direktni_produkt.ipynb* je izvedena analiza direktnega produkta poljubnih grafov. Program generira grafe in jih shrani v seznam *grafi*. Nato naključno izbere dva grafa, *g1* in *g2*, ter izračuna njun direktni produkt, označen kot *g3*. Za *g1*, *g2* in *g3* izračunamo SDCTD vrednosti. Primer rezultatov je podan spodaj:

Izbira grafov	**SDCTD_graf1**	**SDCTD_graf2**	**SDCTD_direktni**
Izbira 1	4	3	18
Izbira 2	2	3	13
Izbira 3	3	3	17
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Izbira 99	4	3	23
Izbira 100	3	2	20

Na podlagi dobljenih podatkov analiziramo, ali obstaja vzorec v SDCTD vrednostih direktnega produkta grafov. Naša pozornost je usmerjena v iskanje zgornje meje za **SDCTD_direktni**, označene kot $\overline{\gamma}(G \times H)$. Označimo še $\overline{\gamma}(G)$ in $\overline{\gamma}(H)$, ki predstavljata SDCTD vrednosti za *graf1* in *graf2*.

Za analizo smo izvedli 1000 ponovitev, pri čemer smo naključno izbrali pare grafov in preverjali naslednje domneve:

- **Domneva 1:**

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

Ta domneva velja le v 23.02% primerov, zato ni ustrezna zgornja meja.

- **Domneva 2:**

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 2 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

Z izboljšanjem meje na $2 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$ se je delež uspešno omejenih primerov povečal na 89.99%.

- **Domneva 3:**

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 3 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

Ta meja je veljavna za vse primere v naši analizi, zato jo lahko sprejmemo kot zgornjo mejo za direktni produkt.

- Preverili smo tudi meje za $k = 4$ in $k = 5$:

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq k \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

V vseh primerih tudi ti meji veljata, vendar se osredotočimo na najmanjšo. Končna ugotovitev je torej naslednja:

SKLEP: Za SDCTD direktnega produkta dveh poljubnih grafov G in H velja:

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 3 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

V datoteki *kartezicni_produkt.ipynb* je izvedena analiza kartezičnega produkta poljubnih grafov. Analiza je podobna tisti, ki smo jo izvedli pri direktnem produktu.
Program generira grafe in jih shrani v seznam *grafi*. Nato naključno izbere dva grafa, *g1* in *g2*, ter izračuna njun kartezični produkt, označen kot *g3*. Za *g1*, *g2* in *g3* izračunamo SDCTD vrednosti.
Na podlagi dobljenih podatkov analiziramo, ali obstaja vzorec v SDCTD vrednostih kartezičnega produkta grafov. Naša pozornost je usmerjena v iskanje spodnje meje za $\overline{\gamma}(G \times H)$. Označimo še $\overline{\gamma}(G)$ in $\overline{\gamma}(H)$, ki predstavljata SDCTD vrednosti za *graf1* in *graf2*.

Podobno kot pri direktnem produktu predpostavimo naslednje:

$$k \cdot \overline{\gamma}(G \square H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

Za analizo smo izvedli 1000 ponovitev, pri čemer smo naključno izbrali pare grafov in preverjali zgornjo enačbo. Iz teh rezultatov lahko sklepamo naslednje: za $k = 1$ pride do zelo majhnega odstopanja, saj v 0.90% primerov neenakost ne velja. Pri $k = 2$ in $k = 3$ pa neenakost vedno velja.

	Število False	**Delež False (%)**
k = 1	9	0.90%
k = 2	0	0.00%
k = 3	0	0.00%

SKLEP: Za kartezični produkt dveh grafov G in H velja naslednja neenakost:

$$2 \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

Zakaj pa pride do odstopanja pri $k = 1$? Odgovor je v načinu izbire grafov G in H. Preverimo, kaj se zgodi, če fiksiramo graf G, graf H pa je poljuben:

$$k \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H), \quad \text{za } k = 1.$$

Z uporabo popravljene kode smo ugotovili, da v tem primeru neenakost drži. S tem smo pokazali Vizingovo domnevo.
Vizingova domneva: Naj bosta G in H poljubna grafa. Rečemo, da graf G zadošča Vizingovi domnevi, če spodnja neenakost velja za poljuben graf H.

$$\overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

2.3. Točka 3: Kako se obnaša $\overline{\gamma}(G)$, ko je minimalna ali maksimalna stopnja grafa G omejena?

Namen te analize v tem razdelku je preučiti, kako se vrednost $\overline{\gamma}(G)$ spremnija glede na minimalno (δ) in maksimalno (Δ) stopnjo grafa G.
Pristop: Generirali smo vse možne grafe - drevesa in cikle, za število vozlišč od 2 do n. Za vse grafe smo izračunali minimalno stopnjo (δ), maksimalno stopnjo (Δ) in vrednost $\overline{\gamma}(G)$. Nato smo podatke razvrstili na različne načine:

- Najprej smo jih ločili glede na število vozlišč. Vsaka tabela ustreza določenemu n.
- Nato smo ločili grafe glede na minimalne stopnje, pri čemer je vsaka minimalna stopnja imela svojo tabelo.
- Podobno kot v prejšni točki, smo postopek ponovili glede na maksimalno stopnjo - vsaka Δ ima svojo tabelo.

Na podlagi teh tabel smo analizirali podatke, da bi odkrili morebitne vzorce oziroma formulirali zaključke. Ustvarjene tabele so na voljo v datoteki *vpliv_min_max.ipynb*. V analizi so zajeti vsi povezani grafi z do 7 vozlišč.

Iz analize najdemo le eno glavno ugotovitev: Najbolj očitna ugotovitev izhaja iz analize zadnje tabele, v kateri so grafi razvrščeni glede na različne maksimalne stopnje. V tej tabeli so predstavljeni vsi grafi reda 7, katerih maksimalna stopnja je 6, pri čemer za vse te grafe velja $\overline{\gamma}(G) = None$. Podobno smo pregledali tudi prejšnje tabele. V tabeli za grafe z maksimalno stopnjo 5 smo ugotovili, da za vse grafe z 6 vozlišči prav tako velja $\overline{\gamma}(G) = None$. Na podlagi teh opažanj smo oblikovali naslednji sklep:

Če je graf G reda n in za ta graf velja $\Delta = n - 1$, potem je $\overline{\gamma}(G) = None$.

Pri tem je minimalna stopnja grafa poljubna. To trditev smo preverili z analizo na začetku datoteke, kjer smo testirali vse grafe z omenjenimi lastnostmi. Rezultati so pokazali, da trditev drži v 100% primerov (v kodi označena kot E2).
Nato smo preverili, ali podobna zakonitost velja tudi za minimalno stopnjo grafa. Preverili smo, ali velja: če je $\delta = n - 1$, kjer je G graf z n vozlišči, potem $\overline{\gamma}(G) = None$ (v kodi označena kot E3). To trditev smo prav tako potrdili. Grafov z navedenimi lastnostmi je bilo sicer malo, natančneje 7, vendar smo pokazali, da trditev velja za vse.
Za prvo ugotovitev (maksimalna stopnja $\Delta = n - 1$) smo videli, da je več takih grafov, in sicer 1252 izmed vseh generiranih in je naša predpostavka veljala pri vseh.
Na podlagi analize lahko sklepamo: če ima graf G maksimalno stopnjo $\Delta = n-1$ ali minimalno stopnjo $\delta = n-1$, potem velja $\overline{\gamma}(G) = None$.

Odgovor na zgornje vprašanje: Za poljuben povezan graf G z n vozlišči minimalna ali maksimalna stopnja zavzameta neko vrednost iz množice $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Če za δ ali Δ trdimo, da mora biti maksimalna možna, potem bo za ta graf vedno veljalo $\overline{\gamma}(G) = None$. Za grafe, pri katerih vrednosti δ oziroma Δ spadajo v množico $\{1, 2, \ldots, n-2\}$, pa je $\overline{\gamma}(G)$ bodisi None bodisi neko naravno število.
Iz tabel smo prav tako opazili, da za to naravno število v večini primerov velja $\overline{\gamma}(G) < n/2$, kjer je n število vozlišč grafa G. To smo preverili tudi v naši analizi in ugotovili, da velja v 98.94% vseh zgeneriranih grafov (v kodi označena kot E1).

2.4. **Točka 4: Kakšna je $\overline{\gamma}(G)$ za grafe z diametrom(premerom) 2?**

Pri tej točki nas zanima obnašanje SDCTD števila pri pogoju, da so grafi premera 2, tj. največja dolžina najkrajše poti med katerima koli dvema vozliščema v grafu.
Nato smo se najprej osredotočili na majhne grafe; s pomočjo preproste kode smo generirali majhne grafe velikosti s 3 do 7 vozlišči; samo take, ki nimajo največje stopnje enake $n - 1$, pri čemer je število n enako številu vozlišč posameznega grafa. Seveda dodamo pogoj, da je premer grafa enak 2. Za potrebe primerjanja in ugotavljanja vzorcev, ki se pojavljajo, nato izrišemo tabelo. Za vsak graf sta v tabeli predstavljena podatka o številu vozlišč in pripadajočem SDCTD številu. Nadalje, nas zanima kakšen je max/min za grafe z določenim številom vozlišč. S pomočjo knjižnice Pandas dobimo tabelo s povzetkom.

število vozlišč	max	min
4	4	4
5	4	3
6	6	3
7	6	3

Ugotovitve:

V vseh primerih je minimum enak 3, razen za vozlišča s štirimi vozlišči. Edini graf z diametrom 2 in 4 vozlišči je 4-cikel in njegovo SDCTD število je maksimalno. Opazimo še, da je poseben tudi 4-regularen graf na 6 vozliščih. Sicer je število povsod enako 3 ali 4. Manj ne more biti. To je implikacija tega, da je, če iskano število zapišemo kot vsoto dominacijskega števila grafa in totalnega dominacijskega števila njegovega komplementa, prva komponenta vedno vsaj 1, druga pa vedno vsaj 2.

Za velike grafe smo najprej implementirali najprej poljuben graf na 13 vozliščih. Ker smo ugotovili, da premer ni enak 2 (in za to je velika verjetnost) kot želimo, smo postopoma dodajali povezave in opazovali, če se premer spremeni. Po par korakih in racionalnem dodajanju povezav nismo prišli do končnega grafa. Iskanje povezav je zamudno, zato napišemo algoritem, ki je učinkovitejši. Preko matrik najkrajših poti poišče v vsakem koraku najbolj primerno povezavo in jo doda. Postopek se konča ko tvori graf s premerom 2. Ker smo ugotovili, da algoritem vseeno ni najboljši (izpiše le eno odstranjeno povezavo, želimo da vse), ga malce izboljšamo in uporabimo za 10 grafov na 15 vozliščih in nato še na 18 vozliščih. Pridemo do sledečih zaključkov.

Ugotovitve:

Večino grafov ima STCTD število enako 0, lahko pa je enako tudi 3 ali 4. Vsi grafi so med seboj zelo podobni; dve vozlišči sta povsod močno povezani z več drugimi. Spominja na obliko zvezdastega grafa.

Če primerjamo dva grafa z razliko: v prvem grafu so povezave vozlišča 0 bolj enakomerno razporejene med drugimi vozlišči. V prvem grafu je eno izmed vozlišč, ki je bilo prej povezano z vozliščem 13, povezano neposredno z vozliščem 0. Drugi graf se bolj približa zvezdasti obliki z večjim številom neposrednih povezav med 0 in drugimi vozlišči. To bi bil ključen razlog za razliko v STCTD številu.

2.5. **Točka 5: za katere grafe na n vozliščih je vsota največja in za katere grafe je vsota najmanjša.**

Zanima nas, za katere grafe na n vozliščih je vsota največja in za katere grafe je vsota najmanjša. Definiramo dve funkciji v odvisnosti od števila vozlišč, $max\_vsota(n)$ in $min\_vsota(n)$. Upoštevamo, da število vozlišč je iz množice $\{n \in \mathbb{N}; n \geq 4\}$. Začnemo na majhnih grafih, do 8 vozlišč, definiramo funkcijo za vsoto, generiramo vse povezane grafe in njihove komplemente na n vozliščih in izberemo ustrezne maksimume in minimume. Problema na večjih grafih, do 12 vozlišč, se lotimo z algoritmom Simulated annuling. Opazimo, da je maksimum funkcije $max\_vsota(n)$ dosežen pri $3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, funkcija $min\_vsota(n)$ pa je konstantno enaka 4.

število vozlišč	maksimalna vsota	minimalna vsota
4	6	4
5	6	4
6	9	4
7	9	4
8	12	4
9	12	4
10	15	4
11	15	4
12	18	4
⋮	⋮	⋮
n	$3\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$	4

Maksimum je dosežen pri zelo cikličnih grafih, komplement pa je zelo preprost in nepovezan, v obliki grafov, pri katerih sta samo dve ali pa tri vozlišča povezana med seboj. Pri sodih n je tak graf samo en, pri lihih pa dva. Za minimum je veliko več ustreznih grafov, za katere velja, da tako graf kot tudi njegov komplement vsebujeta cikle.