SDCTD DOMINATION - kratek opis projekta

Miha Novoselec, Nejc Rudež, Dimitrija Kostov

14. november 2024

1 Uvod

Tema naše naloge je SDCTD domination (šimultaneously dominating and complement total dominating set"). Projekt bomo delali na spletnem brskalniku CoCalc, ki podipra okolja za učinkovito risanje grafov in implementacije celoštevilskih linearnih programov. Posamezne dele projekta bomo sproti objavljali na Github-u.

2 Osnovne definicije

Za razumevanje teme projekta navedemo nekaj osnovnih definicij. Ukvarjali se bomo z neusmerjenimi grafi $G = (V, E)$. Poudariti je treba tudi, da preučujemo povezane grafe, torej dvodelnih ne zajamemo.

Definicija 1 *Dominacijska množica na grafu*
Podmnožica D vozlišč grafa $G = (V, E)$ je <u>*dominacijska množica na grafu*</u>*, če velja, da je vsako vozlišče iz G vozlišče v D ali pa je sosed od vozlišča v D.*

Definicija 2 *Totalna dominacijska množica na grafu*
Podmnožica D vozlišč grafa $G = (V, E)$ je <u>*totalna dominacijska množica na grafu*</u>*, če velja, da je vsako vozlišče iz G sosed od vozlišča v D.*

Definicija 3 *SDCTD dominacijska množica*
Množico, ki hkrati dominira graf G in totalno dominira komplement grafa (po zgornjih definicijah) G (označujemo jo kot SDCTD množica) je množica D, ki je hkrati dominacijska množica na G in totalna dominacijska množica na $\overline{G}$.

Definicija 4 *SDCTD število grafa G*
Minimalna kardinalnost SDCTD množice grafa G označimo z $\overline{\gamma}(G)$ in jo imenujemo SDCTD število grafa G.

3 Načrt dela

Najprej bomo implementirali osnovni CLP, ki sprejme neusmerjen graf $G = (V, E)$ in vrne najmanjšo SDCTD množico D na grafu G. Nato bomo to funkcijo za izračun najmanjšega SDCTD uporabljali skozi celoten projekt in raziskovali, kaj se dogaja v odvisnosti od različnih grafov. Za velike grafe bomo uporabljali t.i. stohastično iskanje, kar pomeni naključno generiranje grafov, ki jih bomo nato ustrezno modificirali, da v določenem delu projekta, dobimo kar zahtevajo podnaloge. Hipoteze, ki jih bomo razvili, bomo podrobneje zapisali in opisali v končnem poročilu.

Opisani CLP:

$$\begin{aligned} & min \sum_{v \in V(G)} x_v \\ s.t. & \sum_{w \in N_G(v)} x_w + x_v \geq 1 \quad \text{za vsak } v \in V(G) \\ & \sum_{w \in N_{\overline{G}}(v)} x_w \geq 1 \quad \text{za vsak } v \in V(G) \\ & x_v \in 0, 1 \text{ za vsak } v \in V(G) \end{aligned}$$

CLP vrne $D = \{v \in V(G) : x_v = 1\}$.

V grobem se bomo ukvarjali z naslednjimi problemi:

1. Želeli bomo ugotoviti, kakšni grafi reda n dosežejo največje (možno) in kateri najmanjše (možno) dominacijsko število, torej kateri imajo število enako 1 in pri katerih je dominacijsko število enako n (š, vozlišč).

2. Kako se $\overline{\gamma}(G)$ obnaša glede na kartezični produkt in druge tipe produktov grafov? Ideja je narediti CLP, ki ustvari dva poljubna grafa in izračuna njun kartezični produkt. Nato za te tri grafe izračuna števil SDCTD. To izvedemo za več različnih grafov. Primerjamo vrednosti in skušamo ugotoviti kakšen vzorec ali zakonitost. Iz zbranih podatkov bomo prišli do Vizingove domneve.

3. V naslednjem razdelku bomo pogledali, kako $\overline{\gamma}(G)$ reagira na spremembe v stopnjah vozlišč grafa.
   Ideja: Ustvarimo poljuben graf z n vozlišči. Nato v vsakem koraku spremninjamo število povezav za +1. Za vsak graf v vsakem koraku izračunamo $\overline{\gamma}(G)$ in analiziramo odvisnost od $\delta(G)$ in $\Delta(G)$.

4. Izračunali bomo $\overline{\gamma}(G)$ za grafe premera 2. Lotili se bomo tako, da generiramo naključne grafe in pogledamo ali imajo diameter enak 2; če imajo, lahko poženemo in dobimo $\overline{\gamma}(G)$, če ne pa dodajamo povezave, da primernega ustvarimo po čim manj korakih.

5. Ali lahko omejimo $\overline{\gamma}(G) + \overline{\gamma}(\overline{G})$ v odvisnosti od n.