Točka 2: Obnašanje $\overline{\gamma}(G)$ na grafovskih produktih in Vizingova domneva

Raziskovanje grafičnih lastnosti na grafovskih produktih je privedlo do številnih znanih domnev in odprtih problemov v teoriji grafov. V tem razdelku preučujemo obnašanje $\overline{\gamma}(G)$ na direktnem in kartezičnem produktu grafov.

Analizo smo izvedli v SageMath. Direktni in kartezični produkti sta dobro definirani, zato smo za izračun teh produktov uporabili vgrajene funkcije.

Direktni produkt

V datoteki *direktni_produkt.ipynb* je izvedena analiza direktnega produkta poljubnih grafov. Program generira grafe in jih shrani v seznam *grafi*. Nato naključno izbere dva grafa, *g1* in *g2*, ter izračuna njun direktni produkt, označen kot *g3*. Za *g1*, *g2* in *g3* izračunamo SDCTD vrednosti. Primer rezultatov je podan spodaj:

Izbira grafov	**SDCTD_graf1**	**SDCTD_graf2**	**SDCTD_direktni**
Izbira 1	4	3	18
Izbira 2	2	3	13
Izbira 3	3	3	17
⋮	⋮	⋮	⋮
Izbira 99	4	3	23
Izbira 100	3	2	20

Na podlagi dobljenih podatkov analiziramo, ali obstaja vzorec v SDCTD vrednostih direktnega produkta grafov. Naša pozornost je usmerjena v iskanje zgornje meje za **SDCTD_direktni**, označene kot $\overline{\gamma}(G \times H)$. Označimo še $\overline{\gamma}(G)$ in $\overline{\gamma}(H)$, ki predstavljata SDCTD vrednosti za *graf1* in *graf2*.

Za analizo smo izvedli 1000 ponovitev, pri čemer smo naključno izbrali pare grafov in preverjali naslednje domneve:

- **Domneva 1:**
$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$
Ta domneva velja le v 23.02% primerov, zato ni ustrezna zgornja meja.

- **Domneva 2:**
$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 2 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$
Z izboljšanjem meje na $2 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$ se je delež uspešno omejenih primerov povečal na 89.99%.

- **Domneva 3:**
$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 3 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$
Ta meja je veljavna za vse primere v naši analizi, zato jo lahko sprejmemo kot zgornjo mejo za direktni produkt.

- Preverili smo tudi meje za $k = 4$ in $k = 5$:

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq k \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

V vseh primerih tudi ti meji veljata, vendar se osredotočimo na najmanjšo. Končna ugotovitev je torej naslednja:

SKLEP: Za SDCTD direktnega produkta dveh poljubnih grafov G in H velja:

$$\overline{\gamma}(G \times H) \leq 3 \cdot \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H)$$

Kartezični produkt

V datoteki *kartezicni_produkt.ipynb* je izvedena analiza kartezičnega produkta poljubnih grafov. Analiza je podobna tisti, ki smo jo izvedli pri direktnem produktu.
Program generira grafe in jih shrani v seznam *grafi*. Nato naključno izbere dva grafa, *g1* in *g2*, ter izračuna njun kartezični produkt, označen kot *g3*. Za *g1*, *g2* in *g3* izračunamo SDCTD vrednosti.
Na podlagi dobljenih podatkov analiziramo, ali obstaja vzorec v SDCTD vrednostih kartezičnega produkta grafov. Naša pozornost je usmerjena v iskanje spodnje meje za $\overline{\gamma}(G \times H)$. Označimo še $\overline{\gamma}(G)$ in $\overline{\gamma}(H)$, ki predstavljata SDCTD vrednosti za *graf1* in *graf2*.

Podobno kot pri direktnem produktu predpostavimo naslednje:

$$k \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

Za analizo smo izvedli 1000 ponovitev, pri čemer smo naključno izbrali pare grafov in preverjali zgornjo enačbo. Iz teh rezultatov lahko sklepamo naslednje: za $k = 1$ pride do zelo majhnega odstopanja, saj v 0.90% primerov neenakost ne velja. Pri $k = 2$ in $k = 3$ pa neenakost vedno velja.

	Število False	**Delež False (%)**
k = 1	9	0.90%
k = 2	0	0.00%
k = 3	0	0.00%

SKLEP: Za kartezični produkt dveh grafov G in H velja naslednja neenakost:

$$2 \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

Zakaj pa pride do odstopanja pri $k = 1$? Odgovor je v načinu izbire grafov G in H. Preverimo, kaj se zgodi, če fiksiramo graf G, graf H pa je poljuben:

$$k \cdot \overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H), \quad \text{za } k = 1.$$

Z uporabo popravljene kode smo ugotovili, da v tem primeru neenakost drži. S tem smo pokazali Vizingovo domnevo.
Vizingova domneva: Naj bosta G in H poljubna grafa. Rečemo, da graf G zadošča Vizingovi domnevi, če spodnja neenakost velja za poljuben graf H.

$$\overline{\gamma}(G \Box H) \geq \overline{\gamma}(G) \cdot \overline{\gamma}(H).$$

Točka 3 – Kako se obnaša $\overline{\gamma}(G)$, ko je minimalna ali maksimalna stopnja grafa G omejena?

Namen te analize v tem razdelku je preučiti, kako se vrednost $\overline{\gamma}(G)$ spremnija glede na minimalno (δ) in maksimalno (Δ) stopnjo grafa G.
Pristop: Generirali smo vse možne grafe - drevesa in cikle, za število vozlišč od 2 do n. Za vse grafe smo izračunali minimalno stopnjo (δ), maksimalno stopnjo (Δ) in vrednost $\overline{\gamma}(G)$. Nato smo podatke razvrstili na različne načine:

- Najprej smo jih ločili glede na število vozlišč. Vsaka tabela ustreza določenemu n.
- Nato smo ločili grafe glede na minimalne stopnje, pri čemer je vsaka minimalna stopnja imela svojo tabelo.
- Podobno kot v prejšni točki, smo postopek ponovili glede na maksimalno stopnjo - vsaka Δ ima svojo tabelo.

Na podlagi teh tabel smo analizirali podatke, da bi odkrili morebitne vzorce oziroma formulirali zaključke. Ustvarjene tabele so na voljo v datoteki *vpliv_min_max.ipynb*. V analizi so zajeti vsi povezani grafi z do 7 vozlišč.

Iz analize najdemo le eno glavno ugotovitev:

Najbolj očitna ugotovitev izhaja iz analize zadnje tabele, v kateri so grafi razvrščeni glede na različne maksimalne stopnje. V tej tabeli so predstavljeni vsi grafi reda 7, katerih maksimalna stopnja je 6, pri čemer za vse te grafe velja $\overline{\gamma}(G) = None$. Podobno smo pregledali tudi prejšnje tabele. V tabeli za grafe z maksimalno stopnjo 5 smo ugotovili, da za vse grafe z 6 vozlišči prav tako velja $\overline{\gamma}(G) = None$. Na podlagi teh opažanj smo oblikovali naslednji sklep:

Če je graf G reda n in za ta graf velja $\Delta = n - 1$, potem je $\overline{\gamma}(G) = None$.

Pri tem je minimalna stopnja grafa poljubna. To trditev smo preverili z analizo na začetku datoteke, kjer smo testirali vse grafe z omenjenimi lastnostmi. Rezultati so pokazali, da trditev drži v 100% primerov (v kodi označena kot E2).
Nato smo preverili, ali podobna zakonitost velja tudi za minimalno stopnjo grafa. Preverili smo, ali velja: če je $\delta = n - 1$, kjer je G graf z n vozlišči, potem $\overline{\gamma}(G) = None$ (v kodi označena kot E3). To trditev smo prav tako potrdili. Grafov z navedenimi lastnostmi je bilo sicer malo, natančneje 7, vendar smo pokazali, da trditev velja za vse. Za prvo ugotovitev (maksimalna stopnja $\Delta = n - 1$) smo videli, da je več takih grafov, in sicer 1252 izmed vseh generiranih in je naša predpostavka veljala pri vseh.
Na podlagi analize lahko sklepamo: če ima graf G maksimalno stopnjo $\Delta = n - 1$ ali minimalno stopnjo $\delta = n - 1$, potem velja $\overline{\gamma}(G) = None$.

Odgovor na zgornje vprašanje: Za poljuben povezan graf G z n vozlišči minimalna ali maksimalna stopnja zavzameta neko vrednost iz množice $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Če za δ ali Δ trdimo, da mora biti maksimalna možna, potem bo za ta graf vedno veljalo $\overline{\gamma}(G) = None$. Za grafe, pri katerih vrednosti δ oziroma Δ spadajo v množico $\{1, 2, \ldots, n-2\}$, pa je $\overline{\gamma}(G)$ bodisi None bodisi neko naravno število.
Iz tabel smo prav tako opazili, da za to naravno število v večini primerov velja $\overline{\gamma}(G) < n/2$, kjer je n število vozlišč grafa G. To smo preverili tudi v naši analizi in ugotovili, da velja v 98.94% vseh zgeneriranih grafov (v kodi označena kot E1).