Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

З курсу “Комп’ютерне моделювання”

Варіант 7

Виконав:
Студент 3 курсу, групи МІ-32
Спеціальності “Комп’ютерні науки”
Статнік Михайло Михайлович

Київ - 2023

Завдання 7

Постановка задачі

Побудувати таблиці функції Лобачевського $F(x) \ = \ -\int\limits_0^x ln(cos(t))dt$ з 2 правильними значущими цифрами на проміжку [0; π/2] з кроком π/36, побудувати графік функції. Використати формулу середніх прямокутників, правило Рунге.

Теоретичні відомості

Формула середніх прямокутників. Якщо у формулі Ньютона-Котеса відкритого типу взяти один вузол $\dfrac{a+b}{2}$, отримаємо формулу середніх прямокутників

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

з оцінкою залишкового члена

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\Big(f(x_{\frac{1}{2}}) + f(x_{\frac{3}{2}}) + ... + f(x_{n-\frac{1}{2}})\Big), \tag{9}$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)h^2}{24}. \tag{10}$$

Враховуючи зауваження про симетричне розташування вузлів, алгебраїчний степінь точності квадратурної формули дорівнює 1. Порядок точності складеної формули середніх прямокутників – 2, а на одному проміжку – 3.

Обчислення інтеграла із заданою точністю. Алгоритм обчислення інтеграла з заданою точністю ε за допомогою правила Рунге:

1) Наближено обчислюємо інтеграл з кроками h та $\frac{h}{2}$, оцінюємо похибку за формулою (16).

2) Якщо $\frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1} > \varepsilon$, то наближено обчислюємо інтеграл з кроком $\frac{h}{4}$ і обчислюємо похибку $|I - I_{\frac{h}{4}}|$.

3) Процес обчислення інтеграла $I_{\frac{h}{2^i}}$, $i = 1, 2, ..., n$, з двічі меншим кроком продовжуємо, поки не виконається умова $\frac{\left|I_{\frac{h}{2^n}} - I_{\frac{h}{2^{n-1}}}\right|}{2^p - 1} \leqslant \varepsilon$.

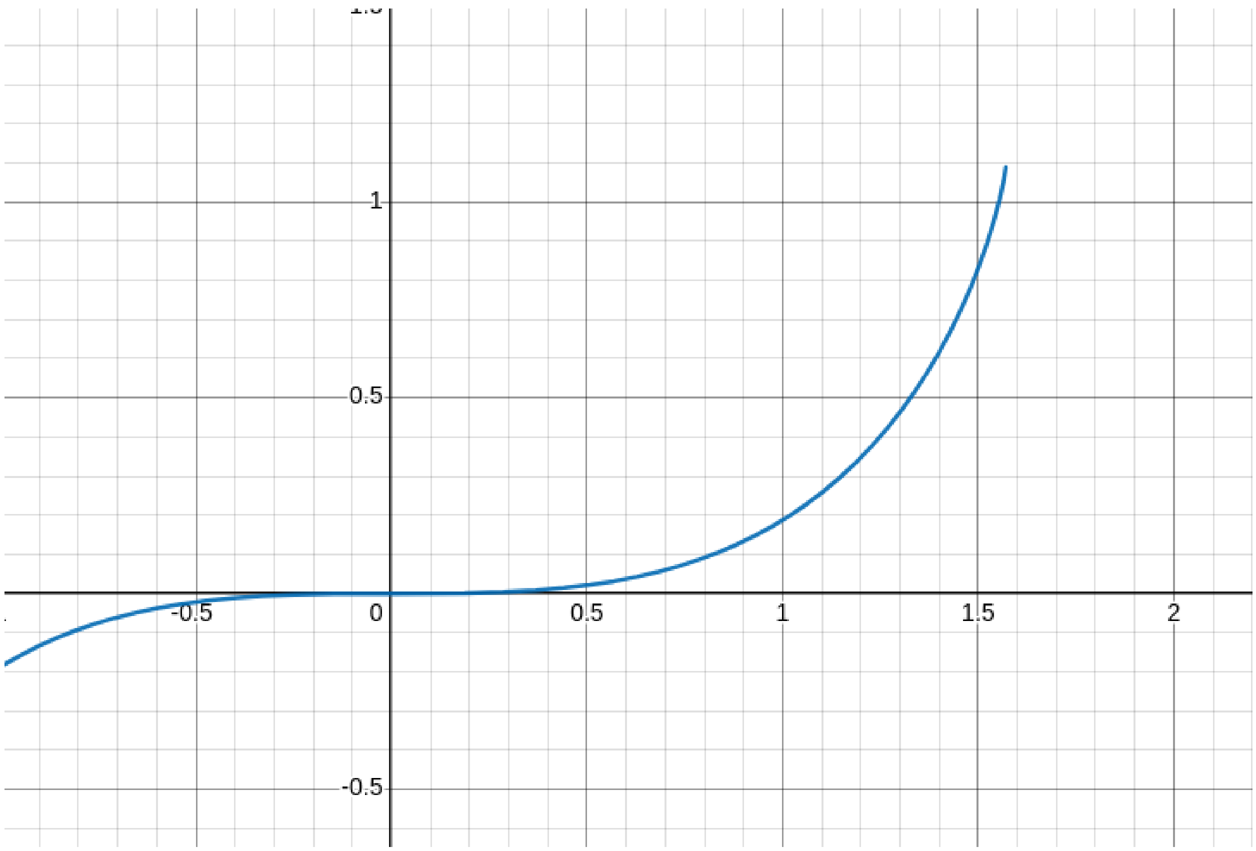
4) Тоді $I \approx I_{\frac{h}{2^n}}$ з точністю ε.

Обрахунки

В нашому випадку p = 2 (Порядок точності складеної формули середніх прямокутників). Тож форма в 3 пункті набуває вигляду

$$\frac{\left|I_{\frac{h}{2^n}} - I_{\frac{h}{2^{n-1}}}\right|}{3}$$

Графік функції



Результати роботи програми

a: 0
b: 1.57079632679490
h: 0.0872664625997165
precision: 2

The function under integral: -log(cos(x))
0.000 : 0.0e+00
0.087 : 1.1e-4
0.175 : 8.9e-4
0.262 : 3.0e-3
0.349 : 7.2e-3
0.436 : 1.4e-2
0.524 : 2.5e-2
0.611 : 3.9e-2
0.698 : 6.0e-2
0.785 : 8.6e-2
0.873 : 1.2e-1
0.960 : 1.6e-1
1.047 : 2.2e-1
1.134 : 2.8e-1
1.222 : 3.7e-1
1.309 : 4.7e-1
1.396 : 6.1e-1
1.484 : 7.9e-1
1.571 : 9.8e-1

Завдання 20

Постановка задачі

Наближено обчислити інтеграл $I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ методом Канторовича.

Використати квадратурну формулу правих прямокутників

Теоретичні відомості

Метод виділення особливостей (Канторовича) знов використовує представлення інтеграла у вигляді суми:

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx + \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx,$$

де функція $g(x)$ має таку ж особливість, як $f(x)$; функція $(f(x) - g(x))$ – достатньо гладка: $(f(x) - g(x)) \in C^{(m)}_{[a;b]}$, $m \geqslant 1$.

Розглянемо метод для інтегралів вигляду

$$I = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^\alpha} dx$$

з особливою точкою $x_0 \in [a; b]$, $\alpha \in (0; 1)$.

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \Psi(x) = P_m(x) + \Psi(x) \Rightarrow$$

$$\Psi(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k;$$

$$I = \int\limits_a^b \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^\alpha} dx = \int\limits_a^b \frac{P_m(x) + \Psi(x)}{(x - x_0)^\alpha} dx =$$

$$= \int\limits_a^b \frac{1}{(x - x_0)^\alpha} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \Psi(x) \right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!} \int_a^b (x - x_0)^{k-\alpha} dx + \int_a^b \frac{\Psi(x)}{(x - x_0)^{\alpha}} dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!(k+1-\alpha)} \left((b - x_0)^{k+1-\alpha} - (a - x_0)^{k+1-\alpha}\right) +$$

$$+ \int_a^b \frac{\Psi(x)}{(x - x_0)^{\alpha}} dx = I_1 + I_2.$$

Отже, інтеграл I_1 обчислюється аналітично, а інтеграл I_2 – наближено, наприклад, за допомогою квадратурних формул.

Формула правих прямокутників будується аналогічно попередньому випадку, тільки замість лівого вузла береться правий:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b - a)f(b),$$

оцінка залишкового члена квадратурної формули:

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b - a)^2}{2}.$$

Складена формула з оцінкою залишкового члена мають вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)),$$

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)h}{2}.$$

Алгебраїчний степінь точності квадратурної формули правих прямокутників, так саме як і лівих, дорівнює 0, порядок точності складеної формули – 1, а формули по одному проміжку – 2.

Обрахунки

$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx, I$ - невласний інтеграл II роду: $f(0) = +\infty$

$x_0 = 0, \alpha = 0.5, \varphi(x) = e^x$

Розкладемо $\varphi(x)$ в ряд Тейлора до x^4:

$\varphi(x) = e^x = P_4(x) + \Psi(x)$

$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

$\Psi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$

$I = \int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{\Psi(x)}{\sqrt{x}} dx = I_1 + I_2$

Інтеграл I_1 проінтегруємо аналітично, I_2 наближено обчислимо методом

Правих Прямокутників з кроком $h = 0.1$

$$I_1 = \frac{\sqrt{x}(35x^4+180x^3+756x^2+2520x+7560)}{3780}\Big|_0^1=2.9235$$

$I_2 = 0.002155$ (код для розрахунку на гітхабі, посилання в кінці звіту)

$$I = I_1 + I_2 = 2.9235 + 0.0022 = 2.9257$$

Завдання 33

Постановка задачі

Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_2^{\infty} \frac{1}{1+x^3}dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0.005$. Використати метод середніх прямокутників, правило Рунге.

Теоретичні відомості

Метод обрізання границь. Невласний інтеграл I роду вигляду $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ можна представити у вигляді суми:

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{A} f(x)dx + \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx \tag{33}$$

Величину A, наприклад, вибирають таким чином, щоб виконувалась умова

$$\left| \int\limits_A^{+\infty} f(x)dx \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

тоді інтеграл $\int\limits_a^{A} f(x)dx$ також обчислюють з точністю $\frac{\varepsilon}{2}$.

*Теоретичні відомості щодо середніх прямокутників і правила Рунгу надавалися в 1 завданні

Обрахунки

$\varepsilon = 0.005$

$$I = \int\limits_2^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = \int\limits_2^{A} \frac{1}{1+x^3} dx + \int\limits_A^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$

$$\int\limits_A^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx < \int\limits_A^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = arctan(x)\Big|_A^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctan(A)$$

$$\frac{\pi}{2} - arctan(A) < 0.0025 => A \approx 500$$

Тепер обрахуємо інтеграл $I = \int_{2}^{500} \frac{1}{1+x^3} dx$ методом середніх прямокутників і правилом Рунге з $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} = 0.0025$

$I \approx 0.113497$(код для розрахунку на гітхабі, посилання в кінці звіту)

Код Програми

https://github.com/Miha-s/computer_modeling_lab1