信息设计导论

贝叶斯劝说框架与进展

赵万春

天津财经大学金融学院

2024 年 5 月 24 日

第一部分：入门

1. 基础文献
2. 例子：KG2011
   - 问题引入与设定
   - 贝叶斯劝说
3. 正规表述
4. 问题求解
5. 问题推广与简化：BM2016,2019
6. 中文例子

1. 基础文献
2. 例子：KG2011
   - 问题引入与设定
   - 贝叶斯劝说
3. 正规表述
4. 问题求解
5. 问题推广与简化：BM2016,2019
6. 中文例子

问题

法官（judge）、检察官（prosecutor）和嫌疑人（defendant）

- 法官的目标是公平断案
- 检察官的目标是将犯人判为有罪

检察官可以调查嫌疑人，获取私人信息。

- 如果有罪，检察官如实汇报对自己有利
- 如果无罪，检察官如实汇报会损害自己效用

那么，检察官能否通过设计信息结构，提高理性法官的平均定罪概率？

基础设定：行动集、支付与先验概率

嫌疑人有两种状态：有罪（Guilty）、无罪（Innocent）

$$\Omega = \{G, I\}$$

法官（Receiver）：定罪（convict）或释放（acquit）
法官的效用函数：

- 审判结果与状态相符时为 1
- 审判结果与状态不符时为 0

检察官（Sender）的效用函数取决于法官的行为：

- 法官选择“定罪”时为 1
- 法官选择“释放”时为 0

检察官的效用与事实情况无关，只和法官行为有关。
检察官与法官共享先验信念 $\text{Pr}(G) = 0.3$、$\text{Pr}(I) = 0.7$

检察官行为、时点设定与基准模型

检察官可以调查，即选择一个信息结构 $\pi : \Omega \to \Delta(S)$。

检察官调查 $\to$ 检察官向法官告知结果 $\to$ 法官根据结果做出决策

基准模型 1：完全如实汇报，即令 $S = G$，
如果嫌疑人有罪（guilty,G），检察官必然告知法官有罪，即
$\pi(G \mid G) = 1$；
如果嫌疑人无罪（innocent,I），检察官必然告知法官无罪，即
$\pi(I \mid I) = 1$。
此时法官的支付恒为 1
检察官的收益是嫌疑人有罪的先验概率 0.3。

基准模型 2：不进行任何调查

无论是否有罪，检察官都告知法官同一个证据 $S = \{1\}$。即
$\pi(1 \mid G) = \pi(1 \mid I) = 1$
如果法官无论收到什么信号都判有罪，法官的期望收益为
$\Pr(G) \times 1 + \Pr(I) \times 0 = 0.3$
如果法官无论收到什么信号都判无罪，法官的期望收益为
$\Pr(G) \times 0 + \Pr(I) \times 1 = 0.7$

基准模型 2：不进行任何调查

无论是否有罪，检察官都告知法官同一个证据 $S=\{1\}$。即 $\pi(1\mid G)=\pi(1\mid I)=1$

如果法官无论收到什么信号都判有罪，法官的期望收益为 $\Pr(G)\times 1+\Pr(I)\times 0=0.3$

如果法官无论收到什么信号都判无罪，法官的期望收益为 $\Pr(G)\times 0+\Pr(I)\times 1=0.7$

因此，法官必然选择判无罪，检察官支付为 0。

基准模型 2：不进行任何调查

无论是否有罪，检察官都告知法官同一个证据 $S = \{1\}$。即
$\pi(1 \mid G) = \pi(1 \mid I) = 1$
如果法官无论收到什么信号都判有罪，法官的期望收益为
$\Pr(G) \times 1 + \Pr(I) \times 0 = 0.3$
如果法官无论收到什么信号都判无罪，法官的期望收益为
$\Pr(G) \times 0 + \Pr(I) \times 1 = 0.7$
因此，法官必然选择判无罪，检察官支付为 0。

检察官选择如实披露比完全不披露更有利。

1. 基础文献
2. 例子：KG2011
   - 问题引入与设定
   - 贝叶斯劝说
3. 正规表述
4. 问题求解
5. 问题推广与简化：BM2016,2019
6. 中文例子

检察官能否做得更好？

令 $S = \{g, i\}$，π 满足

$$\pi(g \mid G) = 1, \pi(i \mid G) = 0$$

$$\pi(g \mid I) = \frac{3}{7}, \pi(i \mid I) = \frac{4}{7}$$

检察官能否做得更好？

令 $S=\{g,i\}$，π 满足

$$\pi(g\mid G)=1,\pi(i\mid G)=0$$

$$\pi(g\mid I)=\frac{3}{7},\pi(i\mid I)=\frac{4}{7}$$

此时，法官收到信号 g 并判有罪时，所获支付为

检察官能否做得更好？

令 $S = \{g, i\}$，π 满足

$$\pi(g \mid G) = 1, \pi(i \mid G) = 0$$

$$\pi(g \mid I) = \frac{3}{7}, \pi(i \mid I) = \frac{4}{7}$$

此时，法官收到信号 g 并判有罪时，所获支付为

$$judge's\ payoff = \frac{\overbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}^{\text{有罪时收到信号 g 的概率}}}{\underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}} + \underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}$$

检察官能否做得更好？

令 $S=\{g,i\}$，π 满足

$$\pi(g \mid G)=1, \pi(i \mid G)=0$$

$$\pi(g \mid I)=\frac{3}{7}, \pi(i \mid I)=\frac{4}{7}$$

此时，法官收到信号 g 并判有罪时，所获支付为

$$judge's\ payoff=\frac{\overbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}^{\text{有罪时收到信号 g 的概率}}}{\underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}}+\underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}$$

$$=\frac{1\times 0.3}{1\times 0.3+\frac{3}{7}\times 0.7}=\frac{1}{2}$$

检察官能否做得更好？

法官收到信号 g 并判无罪时，所获支付为

$$judge's\ payoff = \frac{\overbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}^{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}{\underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}} + \underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}$$

检察官能否做得更好？

法官收到信号 g 并判无罪时，所获支付为

$$judge's\ payoff = \frac{\overbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}^{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}{\underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}} + \underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times 0.7}{1 \times 0.3 + \frac{3}{7} \times 0.7} = \frac{1}{2}$$

检察官能否做得更好？

法官收到信号 g 并判无罪时，所获支付为

$$judge's\ payoff = \frac{\overbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}^{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}{\underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}} + \underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times 0.7}{1 \times 0.3 + \frac{3}{7} \times 0.7} = \frac{1}{2}$$

如果收到信号 i，法官可以确定嫌疑人无罪。

检察官能否做得更好？

法官收到信号 g 并判无罪时，所获支付为

$$judge's\ payoff = \frac{\overbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}^{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}{\underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}} + \underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}}}$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \times 0.7}{1 \times 0.3 + \frac{3}{7} \times 0.7} = \frac{1}{2}$$

如果收到信号 i，法官可以确定嫌疑人无罪。

假定判有罪和无罪的收益相同时，法官会选择对检察官有利的选项。

检察官的收益

检察官的收益完全取决于发出信号 g 的概率，即

$$prosecutor'spayoff = \underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}} + \underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}} = 0.6$$

因此，只要检察官发出有罪信号，法官一定会判有罪。此时检察官的收益为 0.6。

检察官的收益

检察官的收益完全取决于发出信号 g 的概率，即

$$prosecutor' spayoff = \underbrace{\pi(g \mid G)\Pr(G)}_{\text{有罪时收到信号 g 的概率}} + \underbrace{\pi(g \mid I)\Pr(I)}_{\text{无罪时收到信号 g 的概率}} = 0.6$$

因此，只要检察官发出有罪信号，法官一定会判有罪。此时检察官的收益为 0.6。

可以看出，不同情境下检察官的支付满足：

什么都不披露 (0) < 完全披露 (0.3) < 选择性披露 (0.6)

主体

信息发送者（Sender）和信息接受者（Receiver）

状态空间 Ω 是有穷的，且无论是 S 还是 R 都观测不到具体的状态。

S 和 R 都了解先验概率 $p \in \Delta(\Omega)$

接受者可以采取行动所构成的集合 A 是紧集。

信息接受者 R 的效用函数:$A \times \Omega \to \mathbb{R}$ 满足连续性。

信息发送者 S 的效用函数:$A \times \Omega \to \mathbb{R}$ 满足连续性。

时间线与 partial implementation

1. 信息发送者 S 选择信息结构 $\overbrace{\pi : \Omega \to \Delta(S)}^{\text{给定}\Omega\text{，以一定概率发送信号}S}$
2. 信息接受者 R 观测到信号 S 的实现，并进行贝叶斯更新，采取行动 $a \in A$

解概念：子博弈精炼均衡/子博弈完美均衡。

定义：信号发送者偏好的子博弈完美均衡：当信号接受者 R 的两个选项无差异时，接受者会选择更有利于信号发送者的选项。

信念更新：后验信念

考虑任何信号发送者偏好的子博弈完美均衡 (Sender-preferred subgame perfect equilibrium)
给定后验信念 $q \in \Delta(\Omega)$ 令集合 $A(q) \subset A$ 为最大化信号接受者 R 期望收益的行动集合。（存在性源于 Weierstrass theorem）

$$A(q) = \arg\max_{a \in A} E_q\left[u_R(a, \omega)\right]$$

信念更新：后验信念

考虑任何信号发送者偏好的子博弈完美均衡 (Sender-preferred subgame perfect equilibrium)

给定后验信念 $q \in \Delta(\Omega)$ 令集合 $A(q) \subset A$ 为最大化信号接受者 R 期望收益的行动集合。（存在性源于 Weierstrass theorem）

$$A(q) = \arg\max_{a \in A} E_q[u_R(a, \omega)]$$

给定信念为 q，最大化信息接受者期望收益的集合。对不同 ω 各自可能性相乘取期望，采取行动 a 最大化收益。即

$$E_q[u_R(a, \omega)] = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{q(\omega)}_{\omega\text{发生的概率}} \underbrace{u_R(a, \omega)}_{\omega\text{发生时采取行动}a\text{的效用}}$$

信念更新：后验信念

考虑任何信号发送者偏好的子博弈完美均衡 (Sender-preferred subgame perfect equilibrium)

给定后验信念 $q \in \Delta(\Omega)$ 令集合 $A(q) \subset A$ 为最大化信号接受者 R 期望收益的行动集合。（存在性源于 Weierstrass theorem）

$$A(q) = \arg\max_{a \in A} E_q\left[u_R(a,\omega)\right]$$

给定信念为 q，最大化信息接受者期望收益的集合。对不同 ω 各自可能性相乘取期望，采取行动 a 最大化收益。即

$$E_q\left[u_R(a,\omega)\right] = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{q(\omega)}_{\omega\text{发生的概率}} \underbrace{u_R(a,\omega)}_{\omega\text{发生时采取行动}a\text{的效用}}$$

令 $\hat{a}$ 表示均衡时信号接受者 R 的行动，

$$\hat{a}(q) \in \arg\max_{a \in A} E_q\left[u_S(a,\omega)\right]$$

信号发送者的期望收益

给定后验信念 q 和信号接受者行动 $\hat{a}(q)$，令 $\hat{v}(q)$ 为信号发送者 R 的期望收益：

$$\hat{v}(q) = E_q\left[u_S\left(\hat{a}(q), \omega\right)\right]$$

1. 基础文献
2. 例子：KG2011
3. 正规表述
   - 符号表达
   - 转译例子
4. 问题求解
5. 问题推广与简化：BM2016,2019
6. 中文例子

基准假设

状态空间 $\Omega = \{G, I\}$，$\omega \in \Omega$

信息发送者：检察官（prosecutor）

信息接受者：法官（judge）

行动集合：$A = \{$判无罪 (acquit), 判有罪 (convict)$\}$

基准假设

状态空间 $\Omega = \{G, I\}$，$\omega \in \Omega$
信息发送者：检察官（prosecutor）
信息接受者：法官（judge）
行动集合：$A = \{$判无罪 (acquit), 判有罪 (convict)$\}$
先验概率：$\Pr(G) = 0.3$，$\Pr(I) = 0.7$
信号接受者 R 的效用函数：

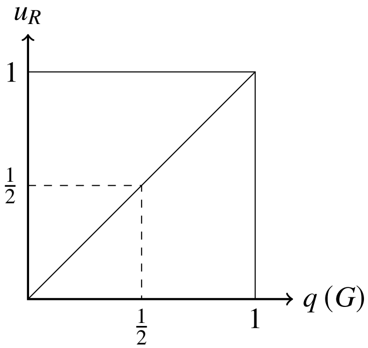
$$u_R(acquit, I) = u_R(convict, G) = 1; \quad u_R(acquit, G) = u_R(convict, I) = 0$$

信号发送者 S 的效用函数：

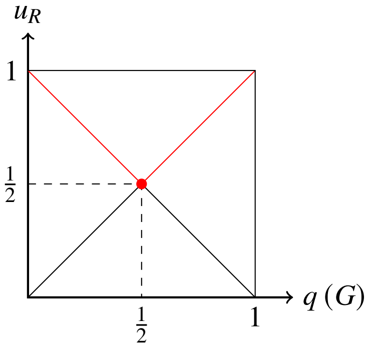
$$u_S(acquit, I) = u_S(acquit, G) = 0; \quad u_S(convict, G) = u_S(convict, I) = 0$$

后验信念：从法官行为开始的子博弈精炼

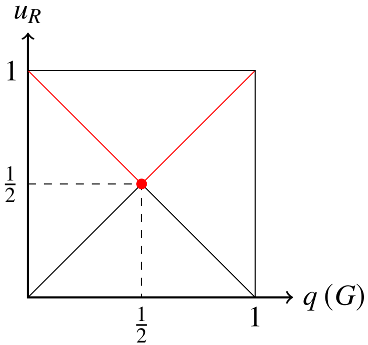
期望收益与“有罪”概率



最大化 Receiver 收益的集合 $A(q)$



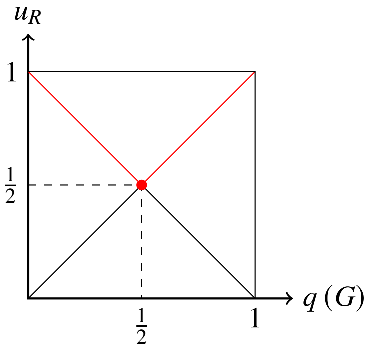
最大化 Receiver 收益的集合 $A(q)$



$$A(q) = \begin{cases} \{acquit\} & if\ q(G) < \frac{1}{2} \\ \{convict\} & if\ q(G) = \frac{1}{2} \\ \{convict\} & if\ q(G) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

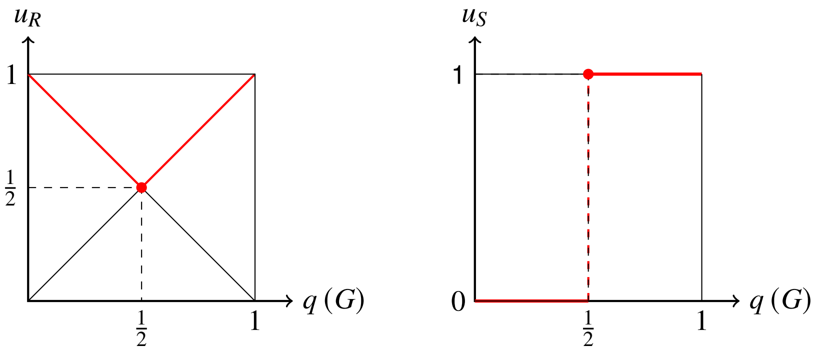
Receiver 的行动 $\hat{a}(q)$

$$\hat{a}(q)=\begin{cases}\{acquit\} & if\ q(G)<\frac{1}{2}\\ \{convict\} & if\ q(G)\geq\frac{1}{2}\end{cases}$$



检察官的行动 $\hat{v}(q)$

检察官（Sender）的行动需要根据法官行动反推收益函数。



$$\hat{v}(q) = \begin{cases} 0 & \text{if } q(G) < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{if } q(G) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

进一步限制信息结构

信息结构 $\pi : \Omega \rightarrow \Delta(S)$ 由有穷的信号空间 S 和一组分布 $\{\pi(\bullet|\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ 构成。
假设信息结构 π 能诱导出后验信念分布 $\mu \in \Delta(\Delta(\Omega))$，信息结构 π 的价值为信号发送者 R 的后验期望收益 $E_{\mu}[\hat{v}(q)]$
此时，信息结构 π 的价值为 $E_{\mu}[\hat{v}(q)]$

基准模型中的信息结构价值

1. 完全披露
   如果检察官直接告知真实状态，均衡时检察官支付为 0.3
2. 完全不披露
   如果检察官什么都不告知，均衡时检察官支付为 0

定理 1：从信息结构到后验信念

以下三个命题是等价的

1. 存在一个价值为 v^* 的信息结构
2. 存在一个信号实现空间 $S \subset A$（信号实现空间是行动空间子集）、价值为 v^* 的信息结构
3. 存在一个贝叶斯可信的（Bayes-plausible）后验信念分布 μ，使信号发送者期望收益 $E_\mu[\hat{v}(q)]$ 等于 v^*

贝叶斯可信：先验分布等于后验分布的期望 $p = E_\mu[q]$
分离引理：给定先验信念 $p \in \Delta(\Omega)$，当且仅当后验信念满贝叶斯可信，先验信念可以通过某一信息结构诱导出后验信念的分布。

选择信息结构、选择行动建议和选择后验分布是等价的。

发送者能从劝说中获益吗？

推论 1：发送者能从劝说中获益。

当且仅当存在贝叶斯可信后验分布 $\mu \in \Delta(\Delta(\Omega))$，使 $E_{\mu}[\hat{v}(q)] > \hat{v}(p)$，信息发送者能从劝说中获益，即。$v^* > \hat{v}(p)$

最优信息结构的价值是最优化后验分布问题：

$$\max_{\mu} E_{\mu}[\hat{v}(q)]$$

$$s.t.\ \ \underbrace{p = E_{\mu}[q]}_{bayes-plausible}$$

即给定先验分布 q，在贝叶斯可信 $p = E_{\mu}[q]$ 的约束下，选择后验分布 μ 最大化信息结构的价值 $\hat{v}(q)$。

$\hat{v}$ 不是连续的，但是上半连续的，加之 μ 是紧集，最优化问题恒有解。（KG2011，Proposition 6）

concavification

回顾 $\hat{v}:\Delta(\Omega)\to\mathbb{R}$ 的图像：

$$C(\hat{v})=\{(q,\hat{v}(q))\,|q\in\Delta(\Omega)\}$$

定义 $\hat{v}$ 的凹闭包（concave closure）$V:\Delta(\Omega)\to\mathbb{R}$：

$$V(q)=\sup\{z\in\mathbb{R}|\,(q,z)\in\operatorname{conv}C(v)\}$$

此时，$V(q)$ 是盖在 $\hat{v}$ 上最小的凹函数。

凹闭包与最大福利的直觉

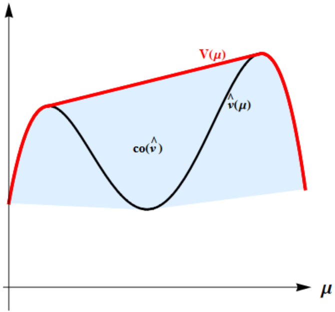
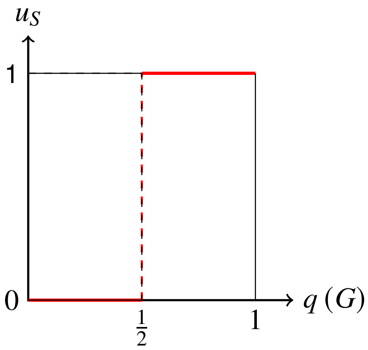


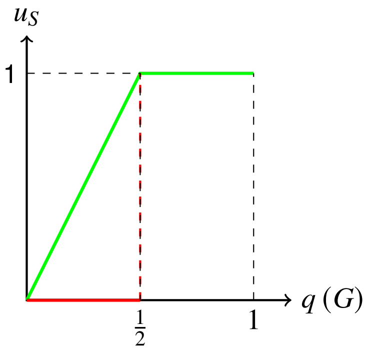
Figure 1: an illustration of concave closure

如果 $(q, v) \in \text{conv}\, C(\hat{v})$，即点 (q, v) 在 $C(\hat{v})$ 图像的凸包内部，存在后验信念 $\mu \in \Delta(\Delta(\Omega))$，满足 $q = E_\mu\left[q^1\right]$ 和 $v = E_\mu\left[\hat{v}(q)\right]$

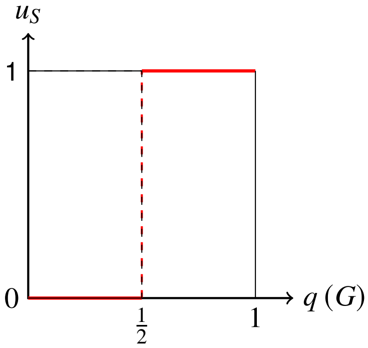
引理 2：最优信息结构的价值为 $V(p)$

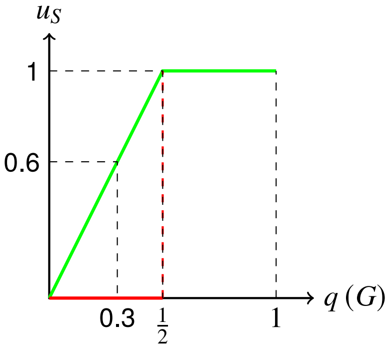
案例





案例





补充结论：$\hat{v}$ 函数性质与获益

KG2011 Propositon 8：
对于任意先验概率 $p \in \operatorname{Int} \Delta(\Omega)$：

1. 如果 $\hat{v}$ 严格凹，$\hat{v} = V$，信号发送者不能从劝说中获益。
2. 如果 $\hat{v}$ 严格凸，信号发送者完全披露时获益最大。
3. 如果 $\hat{v}$ 为凸函数（非凹函数），信号发送者能从劝说中获益。

1. 基础文献
2. 例子：KG2011
3. 正规表述
4. 问题求解
5. 问题推广与简化：BM2016,2019
   - 广义信息设计
   - 贝叶斯纳什均衡：为什么是 $\frac{3}{7}$ 和 $\frac{4}{7}$？
6. 中文例子

1. 基础文献
2. 例子：KG2011
3. 正规表述
4. 问题求解
5. 问题推广与简化：BM2016,2019
   - 广义信息设计
   - 贝叶斯纳什均衡：为什么是 $\frac{3}{7}$ 和 $\frac{4}{7}$？
6. 中文例子

用博弈论的思路探讨信息设计

一个完整的博弈 G 需要包括至少三部分：

1. 参与者 $i \in I$、参与者行动 A_i 和行动的效用 u_i：$A \times \Omega \to \mathbb{R}$。
2. 状态（不确定、不能对所有人公开）$\omega \in \Omega$
3. 状态发生的先验概率分布 (先验信念)$p \in \mathrm{Int}\,(\Delta\,(\Omega))$

$$G = ((A_i, u_i)\,, \Omega, p)$$

博弈结果 $\nu \in \Delta\,(A \times \Omega)$：行动与状态的联合分布概率

信息结构：$T = ((S_i)_{i \in I}\,, \tau)$

- S_i ：私人信号空间，只有参与人自己知道
- S ：信号组合，$S = S_1 \times \ldots S_{|I|}$
- τ ：共同先验信念，$\tau \in \Delta\,(S \times \Omega)$，某一信息结构同一状态下的先验信念 $p\,(\omega)$ 必须与关于状态的边缘分布 $\sum_S \tau\,(S, \omega)$ 一致。

法官与检察官：博弈语言

$I = \{法官\}$

$A = \{判无罪（\text{acquit}），判有罪（\text{convict}）\}$

$\Omega = \{G, I\}$

$p(G) = 0.3,\ p(I) = 0.7$

$u(acquit, I) = u(convict, G) = 1;$

$u(acquit, G) = u(convict, I) = 0$

$S = \{g, i\}$

description

信息结构 $T = (S, \tau)$ 满足

$$\tau(g, G) =$$

内容...

1 基础文献

2 例子：KG2011

3 正规表述

4 问题求解

5 问题推广与简化：BM2016,2019

广义信息设计

贝叶斯纳什均衡：为什么是 $\frac{3}{7}$ 和 $\frac{4}{7}$？

6 中文例子

1. 基础文献
2. 例子：KG2011
3. 正规表述
4. 问题求解
5. 问题推广与简化：BM2016,2019
6. 中文例子
    - 基准模型设定
    - 严格执行
    - 变通执行

问题导入

治理失灵现象普遍存在，但治理失灵被内生于治理体系中。

- 基层政府的选择性执行
- 政策治理的变通行为
- 消极执行与运动式执行

“非正式行为”为什么在上级政府具有纠偏能力时也会被制度化？

假定上级政府 U 和下级政府 D 政策集为 $X \in \{a, b\}$
上级政府负责制定政策，下级政府负责执行政策。