Глава 1

НАТУРАЛЬНЫЕ СПЛАЙНЫ И СПЛАЙНОВЫЕ АЛГОРИТМЫ

§ 1. Общая задача о натуральных сплайнах

В настоящее время распространен такой подход к сплайнам, при котором сплайнами называются решения вариационных задач специального вида. Общая теория таких задач разработана французскими математиками М. Аттиа, Ф. М. Анселоном, П.-Ж. Лораном в 1965—1968 гг. и изложена в монографиях П.-Ж. Лорана [20] и В. А. Василенко [3]. Рассмотрим элементы этой теории и укажем приложения к теории оптимальных алгоритмов.

1. Теорема характеризации. Даны линейное пространство $\mathscr{X}$ и вещественное гильбертово пространство H. В пространстве $\mathscr{X}$ определены операция сложения элементов (векторов) и операция умножения элементов на вещественные числа. В пространстве H кроме этого определены скалярное произведение элементов $\langle h_1, h_2\rangle$ и норма $\| h \| = \sqrt{\langle h, h\rangle}$. Пусть даны линейный оператор $T : \mathscr{X} \to H$ и линейные функционалы L_i, $i \in 1 : m$, заданные на $\mathscr{X}$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\| Tf \|^2 \to \min_{L_i(f) = z_i,\ i \in 1:m}, \tag{1.1}$$

где z_i — фиксированные числа и минимум берется по всем элементам $f \in \mathscr{X}$, таким, что $L_i(f) = z_i$, $i \in 1 : m$. Решение σ задачи (1.1), если оно существует, называется натуральным сплайном или просто сплайном. Термин «натуральный» используется для того, чтобы подчеркнуть, что σ является решением задачи (1.1). Все сплайны, рассматриваемые в дальнейшем, являются натуральными, т. е. являются решениями некоторых задач вида (1.1).

Введем m-мерный вектор $If = (L_1(f), L_2(f), \ldots, L_m(f))$. Он задает информацию об элементе f. Пусть множество

$$M = \{f \in \mathscr{X} : L_i(f) = z_i,\ i \in 1 : m\}$$

непусто. Рассмотрим в $\mathscr{X}$ подпространство

$$N(I) = \{h \in \mathscr{X} : Ih = \mathbb{0}\}.$$

Равенство $Ih = \mathbb{0}$ означает, что $L_i(h) = 0$ для всех $i \in 1 : m$. Возьмем фиксированный элемент $f_0 \in M$. Тогда

$$M = \{f = f_0 + h \mid h \in N(I)\}$$

и задача (1.1) переписывается в виде

$$\|Tf_0 + Th\|^2 \to \min_{h \in N(I)} \qquad (1.2)$$

Задачу (1.2) можно рассматривать как задачу нахождения расстояния от элемента Tf_0 до $TN(I)$ — образа $N(I)$ при отображении T. $TN(I)$ является линейным множеством в H. Если это множество замкнуто в H, то хорошо известно [32, с. 60], что решение задачи (1.2) существует.

Установим теорему характеризации решения задачи (1.1).

Теорема 1.1. *Пусть* $\sigma \in M$. *Для того чтобы элемент* σ *был решением задачи* (1.1), *необходимо и достаточно выполнение условия ортогональности*

$$\langle T\sigma, Th\rangle = 0 \qquad \forall h \in N(I). \qquad (1.3)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть σ — решение, $h \in N(I)$. Очевидно, $\sigma + \alpha h \in M$ для любого α, поэтому функция $\varphi(\alpha) := \| T\sigma + \alpha Th \|^2$ достигает минимума при $\alpha = 0$. Отсюда

$$\varphi'(0) = 2\langle T\sigma, Th\rangle = 0.$$

Достаточность. Возьмем произвольный элемент $f \in M$. Его можно представить в виде $f = \sigma + h$, где $h \in N(I)$. В силу (1.3)

$$\|Tf\|^2 = \|T\sigma + Th\|^2 = \|T\sigma\|^2 + \|Th\|^2 \geqslant \|T\sigma\|^2.$$

Отсюда следует, что σ является решением задачи (1.1). Теорема доказана.

Положим $N(T) = \{h \in \mathscr{X} : Th = \mathbb{O}\}$.

Следствие 1.1. *Если*

$$N(T) \cap N(I) = \{\mathbb{O}\},$$

то решение задачи (1.1) *единственно.*

Доказательство. Пусть есть два решения, σ_1 и σ_2. Тогда $L_i(\sigma_1) = L_i(\sigma_2) = z_i$, $i \in 1:m$, и $h := \sigma_1 - \sigma_2 \in N(I)$. В силу необходимого условия оптимальности (1.3)

$$\langle T\sigma_1, Th\rangle = 0, \qquad \langle T\sigma_2, Th\rangle = 0.$$

Вычитая из первого равенства второе, получаем $\langle Th, Th\rangle = 0$, откуда $h \in N(T)$. По условию $h = \mathbb{O}$, и единственность доказана.

Утверждения о характеризации и единственности сплайна будут в дальнейшем неоднократно использоваться. В качестве первого применения покажем, что каждый сплайн является линейной комбинацией фундаментальных сплайнов $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$. Сплайн σ_k определяется как решение задачи

$$\|Tf\|^2 \to \min_{L_i(f) = \delta_{ik},\ i \in 1:m},$$

где $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$ и $\delta_{kk} = 1$. По теореме 1.1,

$$\langle T\sigma_k, Th\rangle = 0 \qquad \forall h \in N(I).$$

Элемент

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} z_k \sigma_k$$

удовлетворяет условию ортогональности (1.3) и ограничениям

$$L_i(\sigma) = \sum_{k=1}^{m} z_k \delta_{ik} = z_i, \quad i \in 1:m.$$

Поэтому σ является решением задачи (1.1).

2. Сплайны в выпуклом множестве. Предположим, что $\mathscr{X}$ — вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением (x_1, x_2), а T — линейный непрерывный оператор из $\mathscr{X}$ в гильбертово пространство H. Зафиксируем $y \in H$. Тогда $\langle Tx, y\rangle$ есть линейный непрерывный функционал от x. По теореме Рисса, существует единственный элемент $w \in \mathscr{X}$, такой, что

$$\langle Tx, y\rangle = (x, w) \quad \forall x \in \mathscr{X}.$$

Элемент w есть функция от $y: w = T^*y$. Оператор $T^*: H \to \mathscr{X}$ линеен, непрерывен и называется сопряженным к T.

Рассмотрим задачу

$$\Phi(x) := \frac{1}{2}\| Tx \|^2 \to \min_{x \in \Omega}, \tag{1.4}$$

где Ω — выпуклое множество в $\mathscr{X}$.

Теорема 1.2. *Для того чтобы элемент* $\sigma \in \Omega$ *был решением задачи* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$(T^*T\sigma, \sigma) = \min_{x \in \Omega} (T^*T\sigma, x). \tag{1.5}$$

Доказательство. Имеем:

$$\Phi(x+h) = \Phi(x) + (T^*Tx, h) + \frac{1}{2}(T^*Th, h).$$

Пусть $\sigma \in \Omega$ — решение (1.4), $v = T^*T\sigma$, $x \in \Omega$ — произвольный элемент, $h = x - \sigma$. Тогда

$$\Phi(\sigma + th) = \Phi(\sigma) + t(v, h) + \frac{t^2}{2}(T^*Th, h) \geqslant \Phi(\sigma) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Отсюда $(v, h) \geqslant 0$, $(v, x) \geqslant (v, \sigma)$, т. е. выполнено (1.5). Если выполнено (1.5), то, рассуждая в обратном порядке, получим, что σ — решение (1.4). Теорема доказана.

Для дальнейшего потребуются некоторые сведения о выпуклых конусах $\mathscr{X}$. Множество $\Gamma \subset \mathscr{X}$ называется конусом, если вместе с вектором x оно содержит векторы λx, $\lambda \geqslant 0$. Введем понятие сопряженного конуса:

$$\Gamma^+ = \{w \in \mathscr{X} \mid (w, x) \geqslant 0 \quad \forall x \in \Gamma\}.$$

Лемма 1.1. *Если* Γ — *замкнутый выпуклый конус в гильбертовом пространстве* $\mathscr{X}$, то

$$\Gamma^{++} = \Gamma. \tag{1.6}$$

Доказательство проводится так же, как и в [13, с. 309—314].

Рассмотрим конус Γ, заданный конечной системой линейных неравенств,

$$\Gamma = \{h \in \mathscr{X} \mid (l_i, h) \geqslant 0, \quad i \in 1:m\},$$

где $l_i \in \mathscr{X}$.

Лемма 1.2 (теорема Фаркаша). *Сопряженный конус имеет вид*

$$\Gamma^+ = \left\{ w \mid w = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i \in 1:m \right\}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Обозначим W множество в правой части (1.7). Нетрудно показать, что

$$W^+ = \Gamma. \tag{1.8}$$

Множество W является замкнутым выпуклым конусом (доказательство проводится по той же схеме, что и в [13, с. 318—319]). По лемме 1.1, $W^{++} = W$. Из (1.8) получаем $\Gamma^+ = W^{++} = W$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь задачу (1.4) в случае, когда Ω задано конечным числом линейных неравенств:

$$\Omega = \{x \in \mathscr{X} \mid (l_i, x) \geqslant b_i, \quad i \in 1:m\}.$$

Теорема 1.3. *Пусть* $\sigma \in \Omega$. *Для того чтобы элемент* σ *минимизировал функционал* $\| Tx \|^2$ *в* Ω, *необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа* $\lambda_i \geqslant 0$, *такие, что*

$$T^*T\sigma = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i, \tag{1.9}$$

$$\lambda_i [(l_i, \sigma) - b_i] = 0, \quad i \in 1:m. \tag{1.10}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено (1.9)—(1.10). Для произвольных $x \in \Omega$, $v = T^*T\sigma$ имеем:

$$(v, x-\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (l_i, x-\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [(l_i, x) - b_i + b_i - (l_i, \sigma)] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [(l_i, x) - b_i] \geqslant 0.$$

Значит, выполнено (1.5) и σ — точка минимума.

Необходимость. Пусть σ — сплайн в Ω. Тогда, по теореме 1.2, σ является решением задачи

$$(v, x) \to \min_{x \in \Omega}.$$

Рассмотрим множества

$$R(\sigma) = \{i \in 1:m \mid (l_i, \sigma) = b_i\}, \qquad \Gamma(\sigma) = \{h \in \mathscr{X} \mid (l_i, h) \geqslant 0, \; i \in R(\sigma)\}.$$

Для любого $h \in \Gamma(\sigma)$ вектор $\sigma + th \in \Omega$ при малых $t > 0$. Отсюда $(v, \sigma + th) \geqslant (v, \sigma)$, т. е. $(v, h) \geqslant 0$ для любого $h \in \Gamma(\sigma)$. Значит, $v \in \Gamma^+(\sigma)$. По лемме 1.2,

$$v = \sum_{i \in R(\sigma)} \lambda_i l_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i \in R(\sigma).$$

Положим $\lambda_i = 0$ для $i \notin R(\sigma)$. Тогда выполнено (1.9), (1.10). Теорема доказана.

В качестве следствия получим теорему характеризации в терминах множителей Лагранжа λ_i для задачи (1.1). Пусть L_i — линейные непрерывные функционалы на $\mathscr{X}$. По теореме Рисса, $L_i(x) = (l_i, x)$, где l_i — некоторый элемент из $\mathscr{X}$.

Следствие 1.2. *Элемент σ является решением задачи*

$$\frac{1}{2}\|Tx\|^2 \to \min_{(l_i, x) = z_i,\ i \in 1:m} \tag{1.11}$$

тогда и только тогда, когда найдутся $\lambda_i \in (-\infty, \infty)$, такие, что

$$T^*T\sigma = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i l_i. \tag{1.12}$$

Доказательство. Множество планов в задаче (1.11) можно записать в виде

$$\Omega = \{x \in \mathscr{X} \mid (l_i, x) \geqslant z_i, \quad (-l_i, x) \geqslant -z_i, \quad i \in 1:m\}.$$

По теореме 1.3, σ является решением тогда и только тогда, когда при некоторых $\lambda_i' \geqslant 0$, $\lambda_i'' \geqslant 0$ выполняется равенство

$$T^*T\sigma = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i' l_i - \lambda_i'' l_i).$$

Полагая $\lambda_i = \lambda_i' - \lambda_i''$, получим (1.12). Следствие доказано.

Окончание параграфа посвятим подробному рассмотрению задачи с двусторонними ограничениями:

$$\frac{1}{2}\|Tx\|^2 \to \min_{x \in \Omega}. \tag{1.13}$$

где

$$\Omega = \{x \in \mathscr{X} \mid (l_i, x) = b_i, \quad i \in 1:m; \quad \alpha_i \leqslant (l_i, x) \leqslant \beta_i, \quad i \in m+1:N\}. \tag{1.14}$$

Предполагается, что $\alpha_i < \beta_i$, но не исключается случай, когда некоторые $\alpha_i = -\infty$ или некоторые $\beta_i = +\infty$. Фактически это общая задача с конечным числом линейных ограничений, только ограничения-равенства выделены. Из теоремы 1.3 легко получить следующее утверждение.

Теорема 1.4. *Для того чтобы σ был сплайном в Ω, необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа λ_i, $i \in 1:N$, такие, что*

$$T^*T\sigma = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i l_i.$$

причем для $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_N$ выполнены следующие знаковые правила:

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad \text{если} \quad (l_i, \sigma) = \alpha_i,$$
$$\lambda_i = 0, \quad \text{если} \quad \alpha_i < (l_i, \sigma) < \beta_i,$$
$$\lambda_i \leqslant 0, \quad \text{если} \quad (l_i, \sigma) = \beta_i.$$

Рассуждая, как в [4, с. 61], покажем, что задача (1.13)—(1.14) сводится к конечномерной задаче квадратичного программирования. Предположим, что для любого набора чисел $z = (z_1, \ldots, z_N)$ множество

$$\Omega_z = \{x \in \mathscr{X} \mid (l_i, x) = z_i, \quad i \in 1:N\}$$

не пусто. В частности, не пусто подпространство Ω_0. Предположим также, что множество $T\Omega_0$ замкнуто в H. Тогда, как установлено в п. 1, для любого z разрешима задача

$$\|Tx\|^2 \to \min_{x \in \Omega_z}. \tag{1.15}$$

Решение $\sigma = \sigma_z$ этой задачи в п. 1 было названо сплайном. Обозначим через $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ фундаментальные сплайны (сплайн σ_k удовлетворяет ограничениям $(l_i, \sigma_k) = \delta_{ik}$, $i \in 1:N$). Тогда решение задачи (1.15) запишется в виде

$$\sigma = \sum_{k=1}^{N} z_k \sigma_k. \tag{1.16}$$

Покажем, что решением задачи (1.13)—(1.14) является некоторый сплайн σ. Подставим (1.16) в (1.13)—(1.14) вместо x. Получим (с учетом равенства $(l_i, \sigma) = z_i$) следующую задачу:

$$F(z) = \left\| \sum_{k=1}^{N} z_k T\sigma_k \right\|^2 = \sum_{k,\, j=1}^{N} \langle T\sigma_k, T\sigma_j \rangle z_k z_j \to \min$$

при ограничениях

$$z_i = b_i, \quad i \in 1:m; \quad \alpha_i \leqslant z_i \leqslant \beta_i, \quad i \in m+1:N.$$

В результате имеем задачу квадратичного программирования с двусторонними ограничениями. Поскольку целевая функция $F(z)$ ограничена снизу и множество планов непусто, то [9] существует решение $z^* = (z_1^*, \ldots, z_N^*)$.

Теорема 1.5. *Сплайн*

$$\sigma^* = \sum_{k=1}^{N} z_k^* \sigma_k$$

является решением задачи (1.13)—(1.14).

Доказательство. По следствию из теоремы 1.3 найдутся числа $\lambda_i \in (-\infty, \infty)$, такие, что

$$T^*T\sigma^* = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i l_i. \tag{1.17}$$

Введем множества

$$M_1 = \{i \in m+1 : N \mid z_i^* = \alpha_i\},$$
$$M_2 = \{i \in m+1 : N \mid z_i^* = \beta_i\},$$
$$M_3 = \{i \in m+1 : N \mid \alpha_i < z_i^* < \beta_i\}.$$

Воспользуемся теперь теоремой характеризации 1.4. По этой теореме σ^* будет решением (1.13)—(1.14), если удастся установить соотношения

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad i \in M_1; \quad \lambda_i \leqslant 0, \quad i \in M_2; \quad \lambda_i = 0, \quad i \in M_3. \qquad (1.18)$$

Зафиксируем $i \in M_1$ и рассмотрим орт e_i. Вектор $z = z^* + te_i$ удовлетворяет ограничениям (1.14) при малых $t > 0$ (при $t < \beta_i - \alpha_i$). Поэтому

$$F(z^* + te_i) = \| T\sigma^* + tT\sigma_i \|^2 = F(z^*) + 2t\,(T^*T\sigma^*, \sigma_i) + t^2 \| T\sigma_i \|^2. \qquad (1.19)$$

В силу (1.17) и определения фундаментального сплайна σ_i

$$(T^*T\sigma^*, \sigma_i) = \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k l_k, \ \sigma_i \right) = \lambda_i.$$

Отсюда и из (1.19) получаем:

$$F(z^*) + 2t\lambda_i + t^2 \| T\sigma_i \|^2 \geqslant F(z^*) \qquad (1.20)$$

при малых $t > 0$. Отсюда $\lambda_i \geqslant 0$.

При $i \in M_2$ неравенство (1.20) выполняется для малых $t < 0$, откуда $\lambda_i \leqslant 0$. Наконец, при $i \in M_3$ неравенство (1.20) выполняется для $t \in (-t_0, t_0)$, $t_0 > 0$, поэтому $\lambda_i = 0$. Условия (1.18) установлены и теорема доказана.

Теорема 1.5 является одновременно теоремой существования решения задачи (1.13)—(1.14). Решение существует, если для любого z множество Ω_z не пусто и множество $T\Omega_0$ замкнуто в H. В книге Лорана [20] доказано (неконструктивно) существование решения при других условиях: множество (1.14) не пусто и множество $T\mathscr{X}$ замкнуто в H.

§ 2. Задача оптимального восстановления функционала на классе элементов

Будем рассматривать задачи оптимального восстановления только линейных функционалов по «линейной» информации. Даны линейные функционалы L, L_1, ..., L_m на линейном пространстве $\mathscr{X}$ и выпуклое центрально-симметричное множество $W \subset \mathscr{X}$. Напомним, что выпуклое центрально-симметричное множество W вместе с элементами f, $g \in W$ содержит элементы $-f$ и $\alpha f + (1-\alpha) g$ при всех $\alpha \in [0, 1]$.

Требуется восстановить $L(f)$ по информации $If = (L_1(f), \ldots, L_m(f))$. Методы восстановления будут определяться функциями m переменных $\Phi(y_1, \ldots, y_m)$ (считаем, что $L(f) \approx \Phi(L_1(f), \ldots, L_m(f)) = \Phi(If)$). Следуя [31], функции Φ будем называть а лгоритмами, ибо задание Φ определяет алгоритм восстановления $L(f)$: по информации If вычисляем значение $\Phi(If)$ и считаем его приближенным значением для $L(f)$.

Задача состоит в нахождении алгоритма, имеющего наименьшую погрешность R на классе W:

$$R = \inf_{\Phi} \sup_{f \in W} |L(f) - \Phi(If)|.$$

Алгоритм Φ_0, на котором достигается инфимум, называется оптимальным. Заранее мы никак не ограничиваем класс алгоритмов, допуская, в частности, нелинейные функции Φ. Однако оказывается, что для линейных $L, L_1, \ldots, L_m$ обязательно найдется линейный оптимальный алгоритм. Это было установлено в диссертации С. А. Смоляка (1966 г.). Сформулируем и докажем лемму С. А. Смоляка.

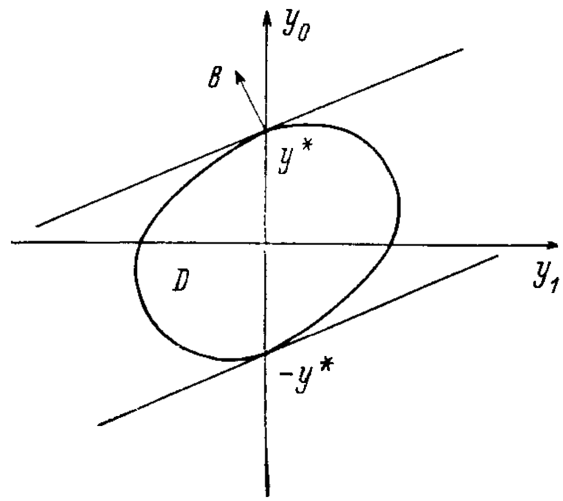

Рис. 1. Множество D.

Лемма 2.1. *Существует оптимальный линейный алгоритм, т. е. найдутся коэффициенты* $a_1^*, a_2^*, \ldots, a_m^*$, *такие, что*

$$R = \sup_{f \in W} \left| L(f) - \sum_{i=1}^{m} a_i^* L_i(f) \right|.$$

При этом справедливо соотношение двойственности

$$R = \sup_{f \in W \cap N(I)} |L(f)|,$$

где $N(I) = \{f \in \mathscr{X} : If = \mathbb{0}\}$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathscr{D}$ в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ (см. рис. 1):

$$\mathscr{D} = \{Y = (y_0, y_1, \ldots, y_m) : y_0 = L(f), \quad y_i = L_i(f), \quad i \in 1:m, \quad f \in W\}.$$

Очевидно, что $\mathscr{D}$ выпукло и центрально-симметрично. Положим

$$y^* = \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{D}} y_0.$$

Нетрудно понять, что

$$y^* = \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{D}} |y_0| = \sup_{\substack{f \in W \\ L_i(f) = 0, \ i \in 1:m}} |L(f)|.$$

Для любого алгоритма $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ имеем:

$$\sup_{f \in W} |L(f) - \Phi(L_1(f), \ldots, L_m(f))| \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{D}} \max\{|y_0 - \Phi(\mathbb{0})|, |-y_0 - \Phi(\mathbb{0})|\} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in \mathscr{D}} |y_0| = y^*.$$

Отсюда $R \geqslant y^*$.

Отметим, что в случае $y^* = \infty$ для любого метода Φ будет

$$\sup_{f \in W} | L(f) - \Phi(L_1(f), \ldots, L_m(f)) | = \infty,$$

значит, любой метод является оптимальным, и формально лемма справедлива.

Пусть не все $L_1, \ldots, L_m$ тождественно равны нулю на W. Тогда из $\{L_1, \ldots, L_m\}$ можно выделить линейно независимую систему на W, скажем, $\{L_1, \ldots, L_k\}$, так, что $L_{k+1}, \ldots, L_m$ линейно выражаются через $L_1, \ldots, L_k$.

Рассмотрим множество Ω в пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$:

$$\Omega = \{Y = (y_0, \ldots, y_k) : y_0 = L(f), \quad y_i = L_i(f), \quad i \in 1:k, \quad f \in W\}.$$

Нетрудно понять, что для ранее введенной величины y^* справедливо равенство

$$y^* = \sup_{(y_0, 0, \ldots, 0) \in \Omega} y_0.$$

Точка $Y^* = (y^*, 0, \ldots, 0)$ является граничной точкой Ω. Проведем через нее опорную гиперплоскость (см. рис. 1 для случая $k = m$, $\Omega = D$). Из геометрических соображений (по теореме отделимости) с учетом центральной симметрии Ω найдется ненулевой вектор $B = (b_0, b_1, \ldots, b_k)$, такой, что

$$|(B, Y)| \leqslant (B, Y^*) \qquad \forall Y \in \Omega,$$

или, в равносильной форме,

$$\left| b_0 L(f) + \sum_{i=1}^{k} b_i L_i(f) \right| \leqslant b_0 y^* \qquad \forall f \in W.$$

В силу линейной независимости $L_1, \ldots, L_k$ на W коэффициент b_0 отличен от нуля. Разделим неравенство на $|b_0|$. Получим

$$R \leqslant \sup_{f \in W} \left| L(f) - \sum_{i=1}^{n} a_i^* L_i(f) \right| \leqslant y^*,$$

где $a_i^* = -b_i/b_0$, $i \in 1:k$, $a_i^* = 0$, $i \in k+1:m$. Неравенство $R \geqslant y^*$ уже было доказано, значит, $R = y^*$, и лемма доказана.

§ 3. Сплайновые алгоритмы, их оптимальность и центральность

1. В этом параграфе рассматривается важный частный случай задачи § 2 об оптимальном восстановлении линейного функционала $L(f)$ по значениям m линейных функционалов $L_i(f)$ на множестве $W \subset \mathscr{X}$. Предполагается, что множество W задано в виде

$$W = \{f \in \mathscr{X} : \|Tf\|^2 \leqslant M^2\}, \tag{3.1}$$