Derivare si Continuitate

Continuitatea:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0) \ => f \ continua \ in \ x_0$$

(Daca 2 ↑ sunt diferite si finite => discontinuitate de speta I)

(Daca una din limite e ∞ sau ∄ => discontinuitate de speta II)

Continuitatea pe o multime:

$$f - cont \ in \ A \ \Leftrightarrow f \ cont \ in \ \forall \ x \in A$$

!!! Toate functiile elementare sunt continue pe domeniul lor (Inclusiv functiile de gradul I si II)

$$f \ continua \rightarrow f \ are \ proprietatea \ lui \ Darboux$$

$$f(a) * f(b) < 0 => \exists \ c \in (a, b) \ a.i. \ f(c) = 0$$

Derivabilitatea in punctul x_0:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad si \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

sa ∃ si sa fie FINITE si daca sunt egale

f este derivabila in x_0

sau

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(x) \quad si \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x)$$

sa ∃ si sa fie FINITE si daca sunt egale ($f's(x_0) = f'd(x_0)$)

Teorema lui Lagrange:

$$f:[a,b] \to \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{matrix} a)\ f-continua\ pe\ [a,b] \\ b)\ f-derivabila\ pe\ (a,b) \end{matrix}\right\} => \exists\ c \in (a,b);$$

$$f(b) - f(a) = f'(c) * (b - a)$$

Derivatele Functiilor elementare:

- $c - constanta \qquad c' = 0$
- $(x^n)' = n * x^{n-1}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $(a^x)' = a^x * \ln a \qquad (e^x)' = e^x$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$
- $tg'x = \frac{1}{cos^2x} = 1 + tg^2x$
- $ctg'x = -\frac{1}{sin^2x} = -1 - ctg^2x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- Suma

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- Produs

$$(f * g)'(x) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

- Impartire

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f', f'', f''', \dots, f^{(n)} - derivate\ de\ ordin\ superior$$

- $f''(x) = f'(f'(x))$

Formula lui Leibniz (derivarea unui produs de fct)

$$(f * g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k * f^{(n-k)} * g^k$$

Teorema lui Rolle:

$$\begin{matrix} functia\ este\ continua\ pe\ interval\ (si\ in\ x_0) \\ functia\ este\ derivabila\ in\ x_0 \end{matrix} \overset{T.R.}{\Longrightarrow} \exists\ c \in D$$

$$a.i.\ \ f'(c) = 0$$

Sirul lui Rolle:

- *se foloseste pentru numarearea solutiilor reale ale unei ecuatii de tip: f(x)=0*

Pasi:

1. $se\ identifica\ f\ si\ D_f$
2. $se\ calculeaza\ f'(x)\ si\ se\ stabileste\ D_{f'}$
3. $se\ rezolva\ f'(x) = 0\ cu\ sol\ x_1, x_2, \dots\ , x_n$
4. $se\ calculeaza$: $\begin{matrix} f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n) \\ limitele\ la\ catpetele\ D_f \end{matrix}$
5. $se\ face\ tabelul\ cu\ toate\ rez\ de\ la\ punctul\ anterior$
6. $se\ interpreteza\ tabelul$:
   - *Unde apar doua semne alaturate diferite (-/+) avem o solutie pe acel interval*
   - *Unde in loc de +/- avem 0 acolo avem o solutie dubla (doua solutii egale)*

Teorema lui Fermat:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\ si\ x_0 \in (a, b)\ , x_0 \rightarrow pct. de\ extrem\ al$

$functiei\ f \overset{T.F.}{\Longrightarrow} f'(x_0) = 0\ (derivata\ in\ pct\ de\ extrem\ e\ 0)$

Aplicare:

Se da o inegalitate. Se cere determinarea unei constante:

1. Se trece totul intr-o parte, se noteaza totul cu f si se reformuleaza ca o problema de max si min
2. Se identifica punctele de max si min (extrem)
3. Se aplica T.F. (egalam f derivat de pct de extrem cu 0)
4. Se afla constanta

Rolul derivatei a doua:

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < b:$$

$$f - continua\ pe\ [a, b]$$

$$f - derivabila\ de\ doua\ ori\ pe\ (a, b)$$

$$=> \begin{cases} f'' \geq 0 \ \ => functia\ f\ este\ convexa\ pe\ [a, b] \\ f'' \leq 0 \ \ => functia\ f\ este\ concava\ pe\ [a, b] \end{cases}$$