

Progresii

1. Aritmetice:

$$a_n = a_{n-1} + r$$


Termenul general: $a_n = a_1 + (n - 1) * r$

$$\text{Suma: } S_n = \frac{(a_n + a_1) * n}{2}$$

$$!!! (1 + 3 + 5 + \dots + x) \Rightarrow x = a_n$$

$$1) a_1, a_2, a_3 \in \div \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$2) \underline{\text{Ex:}} \quad S_n = \div ? \quad (n \geq 2)$$

- 
- Notam $a_n = S_n - S_{n-1}$
 - Scriem S_n in functie de n
 - Aflam a_n apoi a_1
 - Verificam daca a_1, a_2, a_3 sunt in \div
 - Verificam daca $a_n - a_{n-1}$ este constant

$$3) a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$$

Progresii aritmetice – tipuri de exercitii

1. “Sa se determine primul termen si ratia”

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \begin{cases} a_4 - a_2 = 6 \\ a_3 - a_1 = 3 \end{cases}$$

- Se noteaza fiecare termen cu formula termenului general si apoi se scad sau se aduna cele doua ecuatii

2. “O progresie aritmetica verifica relatiile”

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \begin{cases} a_3 + a_{10} + a_{11} = 15 \\ a_9 * a_{10} * a_{11} = 120 \end{cases}$$

- Se noteaza a_9 si a_{11} in functie de a_{10}
- Afli r si a_{10} si apoi a_1

“Calculati suma primilor 20 de termeni”

- Se calculeaza S_{20} folosind r si a_1

3. “Fie a, b, c termeni de rang l, m, n al unei p.a. Sa se calculeze $E = \dots$ ”

Ex: $E = (m - n)a + (n - l)b + (l - m)c$

- Se noteaza a, b si c in functie de termenul general
- In ecuatie ii dam factori pe m, n si l
- Ne folosim de a, b si c si le inlocuim in parantezele din ecuatie

4. “Pentru ce valori este sirul o progresie aritmetica”

Ex: $S_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

- Calculam $a_n = S_n - S_{n-1}$
- Punem conditia $a_n - a_{n-1}$ sa fie constant (coeficientul la n sa fie 0)

5. “Demonstrati ca numerele nu pot fi termeni ai unei progresii aritmetice”

Ex: $\sqrt{3}, 6, \sqrt{35}$

- Notam numerele ca termenii a_m, a_n si a_k (m, n, k naturale)
- Scadem ecuatiile intre ele si apoi le impartim sa obtinem o fractie = cu o fractie fiind de naturi diferite ($\in Q = \notin Q$)

6. “ a_n progresie aritmetica, calculati sumele”

Ex: $S = a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n$

$$S = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$$

➤ Notam $a_n a_{n+1}$ ($n \geq 2$) ca

$$\frac{a_{n-1} a_n a_{n+1} - a_n a_{n+1} a_{n+2}}{-3r \text{ (care este de fapt } a_{n-1} - a_{n+2} = -3r \text{)}}$$

➤ Notam $\frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ($n \geq 1$) ca $\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \frac{1}{r}$

7. “Demonstrati ca numerele nu pot fi termeni ai unei progresii aritmetice”

Ex: $\sqrt{3}, 6, \sqrt{35}$

2. Geometrice:

$$b_n = b_{n-1} * q$$

Termenul general: $b_n = b_1 * q^{n-1}$

Progresia: $P_n = b_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$

1) $b_1, b_2, b_3 \in \text{G.P.} \Rightarrow \begin{matrix} b_2^2 = b_1 * b_3 \\ |b_2| = \sqrt{b_1 * b_3} \end{matrix}$

2) Ex: $P_n = \text{G.P.} ?$ ($n \geq 2$)

➤ Notam $b_n = P_n - P_{n-1}$

➤ Aflam b_n apoi b_1

➤ Verificam daca b_1, b_2, b_3 sunt in G.P.

➤ Verificam daca b_n / b_{n-1} este constant

3) $b_1 * b_n = b_2 * b_{n-1} = \dots$

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^n}$$

$$\frac{1}{a} S = \dots$$

Progresii geometrice – tipuri de exercitii

1. “Sa se determine primul termen si ratia”

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \begin{cases} a_4 - a_2 = 6 \\ a_3 - a_1 = 3 \end{cases}$$

- Se noteaza fiecare termen cu formula termenului general
- Se impart ecuatiile

2. “Fie doua progresii una aritmetica una geometrica, fiecare cu cate

4 termeni, ai adunand termenii de acelasi rang sa se obtina ca suma 18,18,26,58. Aflati ratia progresiei geometrice”

3. “Aratati ca un sir este progresie geometrica”

Aratam ca $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ este constanta $\forall n \geq 1$

Inegalitatea Cauchy - Bunikovski - Schwarz:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \end{aligned}$$

Daca: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$