

Curs 3

Cuprins

1 Substituții și unificare

Substituții și unificare

Termeni

Alfabet:

- \mathcal{F} o multime de simboluri de functii de aritate cunoscuta
- \mathcal{V} o multime numarabila de variabile
- \mathcal{F} si \mathcal{V} sunt disjuncte

Termeni

Alfabet:

- \mathcal{F} o multime de simboluri de functii de aritate cunoscuta
- \mathcal{V} o multime numarabila de variabile
- \mathcal{F} si \mathcal{V} sunt disjuncte

Termeni peste \mathcal{F} si \mathcal{V} :

$$t ::= x \mid f(t_1, \dots, t_n)$$

unde

- $n \geq 0$
- x este o variabila
- f este un simbol de functie de aritate n

Termeni

Notatii:

- **constante:** simboluri de functii de aritate 0
- x, y, z, \dots pentru variabile
- a, b, c, \dots pentru constante
- f, g, h, \dots pentru simboluri de functii arbitrare
- s, t, u, \dots pentru termeni
- $var(t)$ multimea variabilelor care apa in t
- ecuatii $s \doteq t$ pentru o pereche de termeni
- $Trm_{\mathcal{F}, \mathcal{V}}$ multimea termenilor peste \mathcal{F} si \mathcal{V}

Termeni

Exemplu

- $f(x, g(x, a), y)$ este un termen, unde f are aritate 3, g are aritate 2, a este o constanta
- $\text{var}(f(x, g(x, a), y)) = \{x, y\}$

Substituții

Definiție

O **substituție** σ este o funcție (parțială) de la variabile la termeni, adică

$$\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \text{Trm}_{\mathcal{F}, \mathcal{V}}$$

Exemplu

În notația uzuală, $\sigma = \{x/a, y/g(w), z/b\}$. Substituația σ este identitate pe restul variabilelor.

Notatie alternativa $\sigma = \{x \mapsto a, y \mapsto g(w), z \mapsto b\}$.

Substituții

- Substituțiile sunt o modalitate de a înlocui variabilele cu alți termeni.
- Substituțiile se aplică simultan pe toate variabilele.

Aplicarea unei substituții σ unui termen t :

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{daca } t = x \\ f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)), & \text{daca } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \quad .$$

Substituții

- Substituțiile sunt o modalitate de a înlocui variabilele cu alți termeni.
- Substituțiile se aplică simultan pe toate variabilele.

Aplicarea unei substituții σ unui termen t :

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{daca } t = x \\ f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)), & \text{daca } t = f(t_1, \dots, t_n) \end{cases} \quad .$$

Exemplu

- $\sigma = \{x \mapsto f(x, y), y \mapsto g(a)\}$
- $t = f(x, g(f(x, f(y, z))))$
- $\sigma(t) = f(f(x, y), g(f(f(x, y), f(g(a), z))))$

Substituții

Două substituții σ_1 și σ_2 se pot compune

$$\sigma_1; \sigma_2$$

(aplicăm întâi σ_1 , apoi σ_2).

Substituții

Două substituții σ_1 și σ_2 se pot compune

$$\sigma_1; \sigma_2$$

(aplicăm întâi σ_1 , apoi σ_2).

Exemplu

$$\square \quad t = h(u, v, x, y, z)$$

Substituții

Două substituții σ_1 și σ_2 se pot compune

$$\sigma_1; \sigma_2$$

(aplicăm întâi σ_1 , apoi σ_2).

Exemplu

- $t = h(u, v, x, y, z)$
- $\tau = \{x \mapsto f(y), y \mapsto f(a), z \mapsto u\}$
- $\sigma = \{y \mapsto g(a), u \mapsto z, v \mapsto f(f(a))\}$

Substituții

Două substituții σ_1 și σ_2 se pot compune

$$\sigma_1; \sigma_2$$

(aplicăm întâi σ_1 , apoi σ_2).

Exemplu

- $t = h(u, v, x, y, z)$
- $\tau = \{x \mapsto f(y), y \mapsto f(a), z \mapsto u\}$
- $\sigma = \{y \mapsto g(a), u \mapsto z, v \mapsto f(f(a))\}$
- $(\tau; \sigma)(t) = \sigma(\tau(t)) = \sigma(h(u, v, f(y), f(a), u)) =$
 $= h(z, f(f(a)), f(g(a)), f(a), z)$

Substituții

Două substituții σ_1 și σ_2 se pot compune

$$\sigma_1; \sigma_2$$

(aplicăm întâi σ_1 , apoi σ_2).

Exemplu

$$\square t = h(u, v, x, y, z)$$

$$\square \tau = \{x \mapsto f(y), y \mapsto f(a), z \mapsto u\}$$

$$\square \sigma = \{y \mapsto g(a), u \mapsto z, v \mapsto f(f(a))\}$$

$$\begin{aligned} \square (\tau; \sigma)(t) &= \sigma(\tau(t)) = \sigma(h(u, v, f(y), f(a), u)) = \\ &= h(z, f(f(a)), f(g(a)), f(a), z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \square (\sigma; \tau)(t) &= \tau(\sigma(t)) = \tau(h(z, f(f(a)), x, g(a), z)) = \\ &= h(u, f(f(a)), f(y), g(a), u) \end{aligned}$$

Unificare

- Doi termeni t_1 și t_2 **se unifică** dacă există o substituție σ astfel încât
$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2).$$
- În acest caz, σ se numește **unificatorul** termenilor t_1 și t_2 .

Unificare

- Doi termeni t_1 și t_2 **se unifică** dacă există o substituție σ astfel încât $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$.
- În acest caz, σ se numește **unificatorul** termenilor t_1 și t_2 .
- În programarea logică, unificatorii sunt ingredientele de bază în execuția unui program.

Unificare

- Doi termeni t_1 și t_2 **se unifică** dacă există o substituție σ astfel încât
$$\sigma(t_1) = \sigma(t_2).$$
- În acest caz, σ se numește **unificatorul** termenilor t_1 și t_2 .
- În programarea logică, unificatorii sunt ingredientele de bază în execuția unui program.
- Un unificator σ pentru t_1 și t_2 este un **cel mai general unificator** (**cgu, mgu**) dacă pentru orice alt unificator σ' pentru t_1 și t_2 , există o substituție τ astfel încât

$$\sigma' = \sigma; \tau.$$

Unificator

Exemplu

- $t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$
- $t' = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$

Unificator

Exemplu

- $t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$
- $t' = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$
- $\sigma = \{x/y, y/y\}$
 - $\sigma(t) = y + (y * y)$
 - $\sigma(t') = y + (y * y)$
 - σ este **cgu**

Unificator

Exemplu

- $t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$
- $t' = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$
- $\sigma = \{x/y, y/y\}$
 - $\sigma(t) = y + (y * y)$
 - $\sigma(t') = y + (y * y)$
 - σ este **cgu**
- $\sigma' = \{x/0, y/0\}$
 - $\sigma'(t) = 0 + (0 * 0)$
 - $\sigma'(t') = 0 + (0 * 0)$

Unificator

Exemplu

- $t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$
- $t' = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$
- $\sigma = \{x/y, y/y\}$
 - $\sigma(t) = y + (y * y)$
 - $\sigma(t') = y + (y * y)$
 - σ este **cgu**
- $\sigma' = \{x/0, y/0\}$
 - $\sigma'(t) = 0 + (0 * 0)$
 - $\sigma'(t') = 0 + (0 * 0)$
 - $\sigma' = \sigma; \{y/0\}$

Unificator

Exemplu

- $t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$
- $t' = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$
- $\sigma = \{x/y, y/y\}$
 - $\sigma(t) = y + (y * y)$
 - $\sigma(t') = y + (y * y)$
 - σ este **cgu**
- $\sigma' = \{x/0, y/0\}$
 - $\sigma'(t) = 0 + (0 * 0)$
 - $\sigma'(t') = 0 + (0 * 0)$
 - $\sigma' = \sigma; \{y/0\}$
 - σ' este **unificator**, dar nu este **cgu**

Algoritmul de unificare

- Pentru o mulțime finită de termeni $\{t_1, \dots, t_n\}$, $n \geq 2$, algoritmul de **unificare** stabilește dacă există un cgu.
- Există algoritmi mai eficienți, dar îl alegem pe acesta pentru simplitatea sa.

Algoritmul de unificare

- Pentru o mulțime finită de termeni $\{t_1, \dots, t_n\}$, $n \geq 2$, algoritmul de unificare stabilește dacă există un cgu.
- Există algoritmi mai eficienți, dar îl alegem pe acesta pentru simplitatea sa.
- Algoritmul lucrează cu două liste:
 - Lista soluție: S
 - Lista de rezolvat: R

Algoritmul de unificare

- Pentru o mulțime finită de termeni $\{t_1, \dots, t_n\}$, $n \geq 2$, algoritmul de **unificare** stabilește dacă există un cgu.
- Există algoritmi mai eficienți, dar îl alegem pe acesta pentru simplitatea sa.
- Algoritmul lucrează cu două liste:
 - Lista soluție: S
 - Lista de rezolvat: R
- Inițial:
 - Lista soluție: $S = \emptyset$
 - Lista de rezolvat: $R = \{t_1 \doteq t_2, \dots, t_{n-1} \doteq t_n\}$

Algoritmul de unificare



Algoritmul constă în aplicarea regulilor de mai jos:

Algoritmul de unificare

Algoritmul constă în aplicarea regulilor de mai jos:

- SCOATE

- orice ecuație de forma $t \doteq t$ din R este eliminată.

Algoritmul de unificare

Algoritmul constă în aplicarea regulilor de mai jos:

- SCOATE

- orice ecuație de forma $t \doteq t$ din R este eliminată.

- DESCOMPUNE

- orice ecuație de forma $f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t'_1, \dots, t'_n)$ din R este înlocuită cu ecuațiile $t_1 \doteq t'_1, \dots, t_n \doteq t'_n$.

Algoritmul de unificare

Algoritmul constă în aplicarea regulilor de mai jos:

□ SCOATE

- orice ecuație de forma $t \doteq t$ din R este eliminată.

□ DESCOMPUNE

- orice ecuație de forma $f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t'_1, \dots, t'_n)$ din R este înlocuită cu ecuațiile $t_1 \doteq t'_1, \dots, t_n \doteq t'_n$.

□ REZOLVĂ

- orice ecuație de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ din R , unde variabila x nu apare în termenul t , este mutată sub forma $x \doteq t$ în S .
În toate celelalte ecuații (din R și S), x este înlocuit cu t .

Algoritmul de unificare

Algoritmul se termină normal dacă $R = \emptyset$. În acest caz, S conține cgu.

Algoritmul de unificare

Algoritmul se termină normal dacă $R = \emptyset$. În acest caz, S conține cgu.

Algoritmul este oprit cu concluzia inexistenței unui cgu dacă:

- 1 În R există o ecuație de forma

$$f(t_1, \dots, t_n) \doteq g(t'_1, \dots, t'_k) \text{ cu } f \neq g.$$

- 2 În R există o ecuație de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ și variabila x apare în termenul t .

Algoritmul de unificare - schemă

	Lista soluție S	Lista de rezolvat R
Inițial	\emptyset	$t_1 \doteq t'_1, \dots, t_n \doteq t'_n$
SCOATE	S	$R', t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R', f(t_1, \dots, t_n) \doteq f(t'_1, \dots, t'_n)$
	S	$R', t_1 \doteq t'_1, \dots, t_n \doteq t'_n$
REZOLVĂ	S	$R', x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t, S[x/t]$	$R'[x/t]$
Final	S	\emptyset

$S[x/t]$: în toate ecuațiile din S, x este înlocuit cu t

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	REZOLVĂ

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	REZOLVĂ
$w \doteq h(g(y)),$ $x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), y \doteq z$	REZOLVĂ

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	REZOLVĂ
$w \doteq h(g(y)),$ $x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), y \doteq z$	REZOLVĂ
$y \doteq z, x \doteq g(z),$ $w \doteq h(g(z))$	$g(z) \doteq g(z)$	SCOATE

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(g(z), w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(g(z), w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	REZOLVĂ
$w \doteq h(g(y)),$ $x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), y \doteq z$	REZOLVĂ
$y \doteq z, x \doteq g(z),$ $w \doteq h(g(z))$	$g(z) \doteq g(z)$	SCOATE
$y \doteq z, x \doteq g(z),$ $w \doteq h(g(z))$	\emptyset	

□ $\sigma = \{y \mapsto z, x \mapsto g(z), w \mapsto h(g(z))\}$ este cgu.

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)\}$ au cgu?

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(y) \doteq b, y \doteq z$	- EȘEC -

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(y), y) \doteq f(g(z), b, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq g(z), h(y) \doteq b, y \doteq z$	- EȘEC -

- h și b sunt simboluri de operații diferite!
- Nu există unificator pentru acești termeni.

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)\}$ au cgu?

Exemplu

Exemplu

□ Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(y, w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq y, h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	- EȘEC -

Exemplu

Exemplu

- Ecuațiile $\{g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)\}$ au cgu?

S	R	
\emptyset	$g(y) \doteq x, f(x, h(x), y) \doteq f(y, w, z)$	REZOLVĂ
$x \doteq g(y)$	$f(g(y), h(g(y)), y) \doteq f(y, w, z)$	DESCOMPUNE
$x \doteq g(y)$	$g(y) \doteq y, h(g(y)) \doteq w, y \doteq z$	- EȘEC -

- În ecuația $g(y) \doteq y$, variabila y apare în termenul $g(y)$.
- Nu există unificator pentru aceste ecuații.

Terminarea algoritmului

Propoziție

Algoritmul de unificare se termină.

Terminarea algoritmului

Propoziție

Algoritmul de unificare se termină.

Demonstrație

- Notăm cu
 - N_1 : numărul variabilelor care apar în R
 - N_2 : numărul aparițiilor simbolurilor care apar în R
- Este suficient să arătăm că perechea (N_1, N_2) descrește strict în ordine lexicografică la execuția unui pas al algoritmului:

dacă la execuția unui pas (N_1, N_2) se schimbă în (N'_1, N'_2) , atunci

$$(N_1, N_2) \geq_{lex} (N'_1, N'_2)$$

Demonstrație (cont.)

Fiecare regulă a algoritmului modifică N_1 și N_2 astfel:

	N_1	N_2
SCOATE	\geq	$>$
DESCOMPUNE	$=$	$>$
REZOLVĂ	$>$	

- N_1 : numărul variabilelor care apar în R
- N_2 : numărul aparițiilor simbolurilor care apar în R



Unificare în Prolog

- Ce se întâmplă dacă încercăm să unificăm X cu ceva care conține X ?
Exemplu: $?- X = f(X)$.
- Conform teoriei, acești termeni nu se pot unifica.
- Totuși, multe implementări ale Prolog-ului sar peste această verificare din motive de eficiență.

$?- X = f(X)$.

$X = f(X)$.

Unificare în Prolog

- Ce se întâmplă dacă încercăm să unificăm X cu ceva care conține X ?
Exemplu: `?- X = f(X).`
- Conform teoriei, acești termeni nu se pot unifica.
- Totuși, multe implementări ale Prolog-ului sar peste această verificare din motive de eficiență.

```
?- X = f(X).  
X = f(X).
```

- Putem folosi `unify_with_occurs_check/2`

```
?- unify_with_occurs_check(X,f(X)).  
false.
```



Quiz time!

<https://www.questionpro.com/t/AT4NiZrWmq>



Pe săptămâna viitoare!