FMI, Info, Anul II, 2021-2022
Fundamentele Limbajelor de Programare

Seminar 2

Recapitularea logicii propoziţionale. Deducţia naturală pentru calculul propoziţional

Recapitulare:

Amintim tabelele de adevăr pentru conectorii propoziţionali:

p	$\neg\mathbf{p}$
0	1
1	0

p	q	$\mathbf{p} \to \mathbf{q}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Putem să arătăm că o formulă φ este tautologie (validă, universal adevărată) folosind **metoda tabelului de adevăr**. Dacă $v_1, \ldots, v_n$ sunt variabilele propoziţionale care apar în φ, atunci cele 2^n evaluări posibile (i.e, o evaluarea este o funcţie $e : \{v_1, \ldots, v_n\} \to \{0, 1\}$) $e_1, \ldots, e_{2^n}$ pot fi scrise într-un tabel:

v_1	v_2	$\ldots$	v_n	φ
$e_1(v_1)$	$e_1(v_2)$	$\ldots$	$e_1(v_n)$	$f_{e_1}(\varphi)$
$e_2(v_1)$	$e_2(v_2)$	$\ldots$	$e_2(v_n)$	$f_{e_2}(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$e_{2^n}(v_1)$	$e_{2^n}(v_2)$	$\ldots$	$e_{2^n}(v_n)$	$f_{2^n}(\varphi)$

Dacă pe coloana lui φ obţinem doar valoarea 1, atunci φ este tautologie.

(S2.1) Arătaţi că următoarea formulă în logica propoziţională este o tautologie:

$$(v_1 \vee v_2 \to v_3) \leftrightarrow (v_1 \to v_3) \wedge (v_2 \to v_3)$$

Axiomele calculului propoziţional sunt următoarele:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule.

În plus, avem următoarea **regulă de deducţie**:

$$\text{MP } (\textit{modus ponens})\ \frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

O Γ-**demonstraţie** este o secvenţă de formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiţii este satisfăcută:

- φ_i este axiomă sau $\varphi_i \in \Gamma$,
- φ_i se obţine din formulele anterioare prin MP.

O formulă φ este Γ-**teoremă** dacă există o Γ-demonstraţie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ astfel încât $\varphi_n = \varphi$. Notăm prin $\Gamma \vdash \varphi$ faptul că φ este Γ-teoremă.

Teorema 1 (Teorema deducţiei). $\Gamma \vdash \varphi \to \psi \ \Leftrightarrow\ \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Sistemul de reguli al deducţiei naturale

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\ (\wedge i) \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\ (\wedge e_1) \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\ (\wedge e_2)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\varphi \to \psi}\ (\to i) \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (\to e)$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_1) \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\ (\vee i_2) \qquad\qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ (\vee e)$$

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\varphi}\ (\neg i) \qquad\qquad \frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\ (\neg e)$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\ (\neg\neg i) \qquad\qquad \frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\ (\neg\neg e)$$

$$\frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\ \textbf{TND} \qquad\qquad \frac{\bot}{\varphi}\ (\bot e)$$

TND (*tertium non datur*) este regulă derivată.
Atenţie! La acest sistem se adaugă regula de copiere.
Regula de copiere:

- la un pas al unei demonstraţii poate fi copiată orice formulă demonstrată anterior.
- la un pas al unei demonstraţii nu pot fi copiate formule din interiorul cutiilor care sunt închise în acel moment.

(S2.2) Demonstraţi că următorii secvenţi sunt valizi:

(1) $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$

(2) $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

(3) $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$

(4) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(5) $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

(S2.3) Demonstraţi că următoarele reguli pot fi derivate din regulile deducţiei naturale:

$$\frac{\varphi \to \psi \quad \neg\psi}{\neg\varphi}\ \textbf{MT} \qquad\qquad \frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\varphi}\ \textbf{RAA}$$

MT = *modus tollens* RAA = *reductio ad absurdum*

(S2.4) Fie $n \geq 1$ şi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, φ formule. Demonstraţi că

dacă $\vdash \varphi_1 \to (\varphi_2 \to (\cdots \to (\varphi_n \to \varphi) \cdots))$ este valid, atunci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ este valid.

(S2.5) Ştim că *echivalenţa logică* este definită astfel: $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Găsiţi reguli de introducere şi eliminare pentru $\leftrightarrow$.

(S2.6) Formalizaţi şi demonstraţi folosind deducţia naturală faptul că din ipotezele (i1)-(i5) deducem (c):

(i1) *Toţi scriitorii care înţeleg natura umană sunt înţelepţi.*
(i2) *Un scriitor care este poet adevărat poate trezi sentimente puternice.*
(i3) *Shakespeare este scriitorul care a scris "Hamlet".*
(i4) *Un scriitor care trezeşte sentimente puternice înţelege natura umană.*
(i5) *Numai un poet adevărat putea scrie "Hamlet".*

(c) Shakespeare este înţelept.

Traducere după S. Burris, Logic for Mathemetics and Computer Science, Prentice Hall 1998. Exerciţiu din Lewis Carroll, Symbolic Logic and The Game of Logic, 1897/87. Forma originală:

All writers, who understand the human nature, are clever.
No writer is a true poet unless he can stir the heart of men.
Shakespeare wrote "Hamlet".
No writer who does not understand human nature can stir the heart of men.
None but a true poet could have written "Hamlet".
Therefore Shakespeare is clever.