Laboratorul/Seminarul 7 FLP

Puncte fixe. Teorema Knaster-Tarski.

Teorie pentru Exercitiul 1

O multime partial ordonata (poset) **mpo** este o pereche $(M, \leq)$, unde $\leq \subseteq M^2$ care respecta urmatoarele proprietati:

- reflexiva;
- antisimetrica;
- tranzitiva.
  O multime partial ordonata este completa **cpo** daca exista un prim element $\perp \in M$ astfel incat oricum alegem $x \in M, \perp \leq x$ si, in plus, pentru orice lant $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ exista un supremum, notat $\vee_n x_n$, care exista in aceasta multime.

Fie $(C, \leq)$ **cpo**. Un element al lui C - $c \in C$ se numeste punct fix pentru o functie f, daca $f(c) = c$. Numim cel mai mic punct fix al lui f - lpf acel element care este mai mic decat toate celelalte puncte fixe. Pentru orice $p \in C$ punct fix, $lpf \leq p$.

Exercitiul 1

Care sunt punctele fixe pentru urmatoarele functii? Indicati si care este cel mai mic punct fix pentru fiecare situatie data.

1. $f_1 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$.
   Observatie: toate submultimile care il contin pe $\{1\}$ sunt puncte fixe.
   Aceste elemente sunt: $\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$.
   Care este cel mai mic punct fix? $\{1\}$

2. $f_2 : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$
   $f_2(\emptyset) = \emptyset$ punct fix
   $f_2(\{1\}) = \{1\}$ punct fix

$f_2(\{2\}) = \emptyset$
$f_2(\{1, 2\}) = \{1\}$
...
Singurele doua puncte fixe sunt $\emptyset$ si $\{1\}$, iar cel mai mic punct fix este $\emptyset$.

3. $f_3 : \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \to \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$

   Observam ca nu avem puncte fixe.

Teorie pentru Exercitiul 2

Fie $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ doua multimi partial ordonate **mpo**. O functie $f : A \to B$ este monotona (crescatoare) daca $a_1 \leq_A a_2$ implica $f(a_1) \leq_B f(a_2)$, pentru orice $a_1, a_2 \in A$.

O clauza definita propozitionala este o formula care poate avea una dintre urmatoarele doua forme:

- q (clauza unitate).
- $p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_n \to q$
  unde $p_1, p_2, ...p_n, q$ sunt variabile propozitionale.

Fie S o multime de clauze definite propozitionale. Fie $\mathcal{A}$ multimea variabilelor propozitionale $p_1, p_2, ..., p_n$ care apar in S. Fie $Baza = \{p_i | p_i \in S\}$ multimea clauzelor unitate. Definim functia $f_S : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$ prin

$$f_S(Y) = Y \cup Baza \cup \{a \in \mathcal{A} | (s_1 \wedge ... \wedge s_n \to a) \in S, s_1 \in Y, ..., s_n \in Y\}$$

Exercitiul 2

Sa se demonstreze ca functia f_S este monotona.

Solutie.

Fie Y_1 si Y_2 astfel incat $Y_1 \subseteq Y_2$. Trebuie sa demonstrez ca $f_S(Y_1) \subseteq f_S(Y_2)$.

$f_S(Y_1) = Y_1 \cup Baza \cup Z_1$
$f_S(Y_2) = Y_2 \cup Baza \cup Z_2$

Trebuie sa demonstrez ca $Z_1 \subseteq Z_2$.

$Z_1 = \{a \in \mathcal{A} | (s_1 \wedge ... \wedge s_n \rightarrow a), s_1, ..., s_n \in Y_1\}$
$Z_2 = \{a \in \mathcal{A} | (s_1 \wedge ... \wedge s_n \rightarrow a), s_1, ..., s_n \in Y_2\}$

Fie $a \in Z_1$. Inseamna ca exista $s_1, ... s_n \in Y_1$ astfel incat $s_1 \wedge ... \wedge s_n \rightarrow a$. Dar $Y_1 \subseteq Y_2$ (din ipoteza). Inseamna ca $s_1, ..., s_n \in Y_2$. Rezulta ca $a \in Z_2$. Am demonstrat $Z_1 \subseteq Z_2$.
Deci $f_S(Y_1) \subseteq f_S(Y_2)$, deci f_S este monotona.

Teorie Exercitiul 3

Fie $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ doua **cpo**. O functie $f : A \rightarrow B$ este continua daca $f(\vee_n a_n) = \vee_n f(a_n)$ pentru orice lant $\{a_n\}_n$ din A.
Observam ca orice functie continua este si crescatoare.
Pentru orice multime de clauze definite propozitionale S, functia f_S este continua.

Teorema Knaster-Tarski. Fie $(C, \leq)$ o multime partial ordonata completa si $F : C \rightarrow C$ o functie continua. Atunci, elementul

$$a = \vee_n F^n(\perp)$$

este cel mai mic punct fix al lui F.

Exercitiul 3

Calculati cel mai mic punct fix pentru functia f_S pentru urmatoarele multimi de clauze definite propozitionale.

1. $S_1 = \{x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_3, x_4 \wedge x_2 \rightarrow x_5, x_2, x_6, x_6 \rightarrow x_1\}$

$\mathcal{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$
$Baza = \{x_2, x_6\}$

$f_S(\emptyset) = Baza = \{x_2, x_6\}$
$f_S(\{x_2, x_6\}) = \{x_2, x_6, x_1\}$

$f_S(\{x_2, x_6, x_1\}) = \{x_2, x_6, x_1, x_3\}$
$f_S(\{x_2, x_6, x_1, x_3\}) = \{x_2, x_6, x_1, x_3\}$

am obtinut, conform th. Knaster-Tarski, ca $\{x_1, x_2, x_3, x_6\}$ este cel mai mic punct fix al lui f_S.

```
x2.
x6.
x3 :- x1, x2.
x5 :- x4, x2.
x1 :- x6.
```

2. $S_2 = \{x_1 \wedge x_2 \to x_3, x_4 \to x_1, x_5 \to x_2, x_2 \to x_5, x_4\}$

$\mathcal{A} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
$Baza = \{x_4\}$

$f_S(\emptyset) = Baza = \{x_4\}$
$f_S(\{x_4\}) = \{x_4, x_1\}$
$f_S(\{x_4, x_1\}) = \{x_4, x_1\}$

am obtinut, conform th. Knaster-Tarski, ca $\{x_1, x_4\}$ este cel mai mic punct fix al lui f_S.

```
x4.
x3 :- x1, x2.
x1 :- x4.
x2 :- x5.
x5 :- x2.
```

3. $S_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \wedge x_3 \to x_1, x_3\}$.

$\mathcal{A} = \{x_1, x_2, x_3\}$
$Baza = \{x_3\}$

$f_S(\emptyset) = Baza = \{x_3\}$
$f_S(\{x_3\}) = \{x_3\}$

Am obtinut ca $\{x_3\}$ este cel mai mic punct fix, conform th. Knaster-Tarski.

```
x3.
x2 :- x1.
x1 :- x1, x3.
```