Curs 6

Cuprins

Problema satisfiabilității

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care programul și ținta conțin n atomi diferiți, tabelul de adevăr rezultat o să aibă 2^n rânduri.
- Această metodă este extrem costisitoare computațional (timp exponențial).

Cum salvăm situația?

Problema satisfiabilității

- În principiu, putem verifica problema consecinței logice construind un tabel de adevăr, cu câte o linie pentru fiecare interpretare posibilă.
- În cazul în care programul și ținta conțin n atomi diferiți, tabelul de adevăr rezultat o să aibă 2^n rânduri.
- Această metodă este extrem costisitoare computațional (timp exponențial).

Cum salvăm situația?

1. Folosirea metodelor sintactice pentru a stabili problema consecinței logice (*proof search*)
2. Restricționarea formulelor din "programele logice" (clauze definite)

Clauze propoziționale definite

Clauze propoziționale definite

- O clauză propozițională definită este o formulă care poate avea una din formele:
  1. q
  2. $p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \rightarrow q$

  unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziționale

Clauze propoziționale definite

- O clauză propozițională definită este o formulă care poate avea una din formele:
  1. q (un fapt în Prolog `q.`)
  2. $p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \rightarrow q$ (o regulă în Prolog `q :- p1,...,pk`)

  unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziționale

Clauze propoziționale definite

- O clauză propozițională definită este o formulă care poate avea una din formele:
  1. q (un fapt în Prolog `q.`)
  2. $p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \to q$ (o regulă în Prolog `q :- p1,...,pk`)

  unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziționale
- Numim variabilele propoziționale atomi.

Clauze propoziționale definite

- O clauză propozițională definită este o formulă care poate avea una din formele:
  1. q (un fapt în Prolog `q.`)
  2. $p_1 \land \ldots \land p_k \rightarrow q$ (o regulă în Prolog `q :- p1,...,pk`)

  unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziționale
- Numim variabilele propoziționale atomi.

Programare logică – cazul logicii propoziționale

- Un "program logic" este o listă $Cd_1, \ldots, Cd_n$ de clauze definite.

Clauze propoziționale definite

- O clauză propozițională definită este o formulă care poate avea una din formele:
  1. q (un fapt în Prolog `q.`)
  2. $p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \to q$ (o regulă în Prolog `q :- p1,...,pk`)

  unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziționale
- Numim variabilele propoziționale atomi.

Programare logică – cazul logicii propoziționale

- Un "program logic" este o listă $Cd_1, \ldots, Cd_n$ de clauze definite.
- O întrebare este o listă $q_1, \ldots, q_m$ de atomi.

Clauze propoziționale definite

- O clauză propozițională definită este o formulă care poate avea una din formele:
  1. q (un fapt în Prolog `q.`)
  2. $p_1 \land \ldots \land p_k \to q$ (o regulă în Prolog `q :- p1,...,pk`)

  unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziționale
- Numim variabilele propoziționale atomi.

Programare logică – cazul logicii propoziționale

- Un "program logic" este o listă $Cd_1, \ldots, Cd_n$ de clauze definite.
- O întrebare este o listă $q_1, \ldots, q_m$ de atomi.
- Sarcina sistemului este să stabilească:

$$Cd_1, \ldots, Cd_n \models q_1 \land \ldots \land q_m.$$

Clauze propoziționale definite

- O clauză propozițională definită este o formulă care poate avea una din formele:
  1. q (un fapt în Prolog `q.`)
  2. $p_1 \wedge \ldots \wedge p_k \rightarrow q$ (o regulă în Prolog `q :- p1,...,pk`)

  unde $q, p_1, \ldots, p_n$ sunt variabile propoziționale
- Numim variabilele propoziționale atomi.

Programare logică – cazul logicii propoziționale

- Un "program logic" este o listă $Cd_1, \ldots, Cd_n$ de clauze definite.
- O întrebare este o listă $q_1, \ldots, q_m$ de atomi.
- Sarcina sistemului este să stabilească:

$$Cd_1, \ldots, Cd_n \models q_1 \wedge \ldots \wedge q_m.$$

Vom studia metode sintactice pentru a rezolva această problemă!

Sistem de deducție CDP

Sistem de deducție CDP pentru clauze definite propoziționale

Pentru o mulțime $\mathcal{S}$ de clauze definite propoziționale, avem

Sistem de deducție CDP

Sistem de deducție CDP pentru clauze definite propoziționale

Pentru o mulțime $\mathcal{S}$ de clauze definite propoziționale, avem

- Axiome (premise): orice clauză din $\mathcal{S}$

Sistem de deducție CDP

Sistem de deducție CDP pentru clauze definite propoziționale

Pentru o mulțime $\mathcal{S}$ de clauze definite propoziționale, avem

- Axiome (premise): orice clauză din $\mathcal{S}$
- Reguli de deducție:

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}\ (MP) \qquad\qquad \frac{P \quad Q}{P \wedge Q}\ (andI)$$

  - Aceste reguli ne permit să deducem formula de sub linie din formulele de deasupra liniei.
  - Sunt regulile $(\to e)$ și $(\wedge i)$ din deducția naturală pentru logica propozițională.

Sistemul de deducție CDP

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}\ (MP) \qquad\qquad \frac{P \quad Q}{P \wedge Q}\ (andI)$$

Exemplu

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{oslo} & \to & \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} & \to & \texttt{norway} \\
\texttt{norway} & \to & \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \wedge \texttt{windy} & \to & \texttt{winterIsComing} \\
 & & \texttt{oslo}
\end{array}$$

Sistemul de deducție CDP

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}\ (MP) \qquad\qquad \frac{P \quad Q}{P \land Q}\ (andI)$$

Exemplu

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{oslo} & \to & \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} & \to & \texttt{norway} \\
\texttt{norway} & \to & \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \land \texttt{windy} & \to & \texttt{winterIsComing} \\
 & & \texttt{oslo}
\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{oslo \qquad oslo \to norway}{norway} \qquad norway \to cold}{cold} \qquad \dfrac{oslo \qquad oslo \to windy}{windy}}{cold \land windy}$$

Sistemul de deducție CDP

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}\ (MP) \qquad\qquad \frac{P \quad Q}{P \wedge Q}\ (andI)$$

Exemplu

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{oslo} & \to & \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} & \to & \texttt{norway} \\
\texttt{norway} & \to & \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \wedge \texttt{windy} & \to & \texttt{winterIsComing} \\
 & & \texttt{oslo}
\end{array}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{oslo \qquad oslo \to norway}{norway} \qquad norway \to cold}{cold} \qquad \cfrac{oslo \qquad oslo \to windy}{windy}}{cold \wedge windy}$$

$$\frac{cold \wedge windy \qquad cold \wedge windy \to winterIsComing}{winterIsComing}$$

Sistemul de deducție CDP

$$\frac{P \quad P \to Q}{Q}\ (MP) \qquad\qquad \frac{P \quad Q}{P \wedge Q}\ (andI)$$

Exemplu

$$\begin{array}{rcl}
\texttt{oslo} & \to & \texttt{windy} \\
\texttt{oslo} & \to & \texttt{norway} \\
\texttt{norway} & \to & \texttt{cold} \\
\texttt{cold} \wedge \texttt{windy} & \to & \texttt{winterIsComing} \\
 & & \texttt{oslo}
\end{array}$$

1. $oslo \to windy$
2. $oslo \to norway$
3. $norway \to cold$
4. $cold \wedge windy \to winterIsComing$
5. $oslo$
6. $norway$ (MP 5,2)
7. $cold$ (MP 6,3)
8. $windy$ (MP 5,1)
9. $cold \wedge windy$ (andI 7,8)
10. $winterIsComing$ (MP 9,4)

Sistemul de deducție CDP

O formulă Q se poate deduce din $\mathcal{S}$ în sistemul de deducție CDP, notat

$$\mathcal{S} \vdash Q,$$

dacă există o secvență de formule $Q_1, \ldots, Q_n$ astfel încât $Q_n = Q$ și fiecare Q_i:

- fie aparține lui S
- fie se poate deduce din $Q_1, \ldots, Q_{i-1}$ folosind regulile de deducție (MP) și $(andI)$

Sistemul de deducție CDP

Putem folosi sistemul de deducție CDP pentru a deduce alți atomi:

Sistemul de deducție CDP

Putem folosi sistemul de deducție CDP pentru a deduce alți atomi:

- Atomii $p_i \in \mathcal{S}$ care sunt fapte sunt deductibili.
  - Sunt deduși ca axiome.

Sistemul de deducție CDP

Putem folosi sistemul de deducție CDP pentru a deduce alți atomi:

- Atomii $p_i \in \mathcal{S}$ care sunt fapte sunt deductibili.
  - Sunt deduși ca axiome.

- Un atom r este deductibil dacă
  - $p_1, \ldots, p_n$ sunt deductibili, și
  - $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow r$ este în $\mathcal{S}$.

  O astfel de derivare folosește de $n - 1$ ori $(andI)$ și o data (MP).

Sistemul de deducție CDP

Putem folosi sistemul de deducție CDP pentru a deduce alți atomi:

- Atomii $p_i \in \mathcal{S}$ care sunt fapte sunt deductibili.
  - Sunt deduși ca axiome.

- Un atom r este deductibil dacă
  - $p_1, \ldots, p_n$ sunt deductibili, și
  - $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to r$ este în $\mathcal{S}$.

  O astfel de derivare folosește de $n - 1$ ori $(andI)$ și o data (MP).

Deci putem construi mulțimi din ce în ce mai mari de atomi care sunt consecințe logice din $\mathcal{S}$, și pentru care există derivări din $\mathcal{S}$.

Sistemul de deducție CDP

Putem folosi sistemul de deducție CDP pentru a deduce alți atomi:

- Atomii $p_i \in \mathcal{S}$ care sunt fapte sunt deductibili.
  - Sunt deduși ca axiome.

- Un atom r este deductibil dacă
  - $p_1, \ldots, p_n$ sunt deductibili, și
  - $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow r$ este în $\mathcal{S}$.

  O astfel de derivare folosește de $n-1$ ori $(andI)$ și o data (MP).

Deci putem construi mulțimi din ce în ce mai mari de atomi care sunt consecințe logice din $\mathcal{S}$, și pentru care există derivări din $\mathcal{S}$.

Observăm că $(andI)$ și (MP) pot fi înlocuite cu următoarea regulă derivată:

$$\frac{P_1, \ldots, P_n \quad P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q}{Q}\ (GMP)$$

Completitudinea sistemului de deducție CDP

- Se poate demonstra că aceste reguli sunt corecte, folosind tabelele de adevăr.
  - Dacă formulele de deasupra liniei sunt adevărate, atunci și formula de sub linie este adevărată.

Completitudinea sistemului de deducție CDP

- Se poate demonstra că aceste reguli sunt corecte, folosind tabelele de adevăr.
  - Dacă formulele de deasupra liniei sunt adevărate, atunci și formula de sub linie este adevărată.

- Mai mult, sistemul de deducție este și complet, adică

$$\text{dacă } \mathcal{S} \models q, \text{ atunci } \mathcal{S} \vdash q.$$

  - Dacă q este o consecință logică a lui $\mathcal{S}$, atunci există o derivare a sa din $\mathcal{S}$ folosind sistemul de deducție CDP

Completitudinea sistemului de deducție CDP

- Se poate demonstra că aceste reguli sunt corecte, folosind tabelele de adevăr.
  - Dacă formulele de deasupra liniei sunt adevărate, atunci și formula de sub linie este adevărată.
- Mai mult, sistemul de deducție este și complet, adică

  dacă $\mathcal{S} \models q$, atunci $\mathcal{S} \vdash q$.

  - Dacă q este o consecință logică a lui $\mathcal{S}$, atunci există o derivare a sa din $\mathcal{S}$ folosind sistemul de deducție CDP
- Pentru a demonstra completitudinea vom folosi teorema Knaster-Tarski.

Puncte fixe. Teorema Knaster-Tarski

Mulțimi parțial ordonate

- O mulțime parțial ordonată (mpo) este o pereche $(M, \leq)$ unde $\leq \subseteq M \times M$ este o relație de ordine.
  - relaţie de ordine: reflexivă, antisimetrică, tranzitivă

Mulțimi parțial ordonate

- O mulțime parțial ordonată (mpo) este o pereche $(M, \leq)$ unde $\leq \subseteq M \times M$ este o relație de ordine.
  - relație de ordine: reflexivă, antisimetrică, tranzitivă

- O mpo $(L, \leq)$ se numește lanț dacă este total ordonată, adică $x \leq y$ sau $y \leq x$ pentru orice $x, y \in L$. Vom considera lanțuri numărabile:

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$$

Mulțimi parțial ordonate complete

O mpo $(C, \leq)$ este completă (cpo) dacă:

- C are prim element $\perp$ ($\perp \leq x$ oricare $x \in C$),
- $\bigvee_n x_n$ există în C pentru orice lanț $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$

Mulțimi parțial ordonate complete

O mpo $(C, \leq)$ este completă (cpo) dacă:

- C are prim element $\perp$ ($\perp \leq x$ oricare $x \in C$),
- $\bigvee_n x_n$ există în C pentru orice lanț $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots$

Exemplu

Fie X o mulțime și $\mathcal{P}(X)$ mulțimea submulțimilor lui X.

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ este o cpo:

- $\subseteq$ este o relație de ordine
- $\emptyset$ este prim element ($\emptyset \subseteq Q$ pentru orice $Q \in \mathcal{P}(X)$)
- pentru orice șir (numărabil) de submulțimi ale lui X $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \ldots$ evident $\bigcup_n Q_n \in \mathcal{P}(X)$

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)
  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)

  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)
  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este monotonă.

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)

  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este monotonă.
- $f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)
  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este monotonă.
- $f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$ este monotonă.

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)
  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este monotonă.
- $f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$ este monotonă.
- $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)

  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este monotonă.
- $f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$ este monotonă.
- $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$ nu este monotonă.

Funcție monotonă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate.
  O funcție $f : A \to B$ este monotonă (crescătoare)

  dacă $a_1 \leq_A a_2$ implică $f(a_1) \leq_B f(a_2)$ oricare $a_1, a_2 \in A$.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este monotonă.
- $f_2(Y) = \begin{cases} \{1\} & \text{dacă } 1 \in Y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases}$ este monotonă.
- $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$ nu este monotonă.
  De exemplu, $\emptyset \subseteq \{1\}$, dar $f_3(\emptyset) = \{1\}$, $f_3(\{1\}) = \emptyset$ și $f_3(\emptyset) \not\subseteq f_3(\{1\})$.

Funcție continuă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate complete.

  O funcție $f : A \to B$ este continuă dacă

  $$f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n) \text{ pentru orice lanț } \{a_n\}_n \text{ din } A.$$

Funcție continuă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate complete.
  O funcție $f : A \to B$ este continuă dacă
  $$f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n) \text{ pentru orice lanț } \{a_n\}_n \text{ din } A.$$

- Observăm că orice funcție continuă este crescătoare.

Funcție continuă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate complete.
  O funcție $f : A \to B$ este continuă dacă
  $$f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n) \text{ pentru orice lanț } \{a_n\}_n \text{ din } A.$$

- Observăm că orice funcție continuă este crescătoare.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este continuă.

Funcție continuă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate complete.
  O funcție $f : A \to B$ este continuă dacă
  $$f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n) \text{ pentru orice lanț } \{a_n\}_n \text{ din } A.$$
- Observăm că orice funcție continuă este crescătoare.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este continuă.
- $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$ nu este continuă.

Funcție continuă

- Fie $(A, \leq_A)$ și $(B, \leq_B)$ mulțimi parțial ordonate complete.
  O funcție $f : A \to B$ este continuă dacă
  $$f(\bigvee_n a_n) = \bigvee_n f(a_n) \text{ pentru orice lanț } \{a_n\}_n \text{ din } A.$$
- Observăm că orice funcție continuă este crescătoare.

Exemplu

Fie următoarele funcții $f_i : \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \to \mathcal{P}(\{1,2,3\})$ cu $i \in \{1,2,3\}$

- $f_1(Y) = Y \cup \{1\}$ este continuă.
- $f_3(Y) = \begin{cases} \emptyset & \text{dacă } 1 \in Y \\ \{1\} & \text{altfel} \end{cases}$ nu este continuă.
  De exemplu, consideram lantul $\emptyset \subseteq \{1\}$.
  Avem $\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$ și $f_3(\{1\}) = \emptyset$.
  Dar $f_3(\emptyset) = \{1\}$, $f_3(\{1\}) = \emptyset$ și $f_3(\emptyset) \cup f_3(\{1\}) = \{1\}$.

Teorema de punct fix

- Un element $a \in C$ este punct fix al unei funcții $f : C \to C$ dacă $f(a) = a$.

Teorema de punct fix

- Un element $a \in C$ este punct fix al unei funcții $f : C \to C$ dacă $f(a) = a$.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Fie $(C, \leq)$ o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă. Atunci

$$a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)$$

este cel mai mic punct fix al funcției $\mathbf{F}$.

Teorema de punct fix

- Un element $a \in C$ este punct fix al unei funcții $f : C \to C$ dacă $f(a) = a$.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Fie $(C, \leq)$ o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă. Atunci

$$a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)$$

este cel mai mic punct fix al funcției $\mathbf{F}$.

- Observăm că în ipotezele ultimei teoreme secvența

$$\mathbf{F}^0(\perp) = \perp \leq \mathbf{F}(\perp) \leq \mathbf{F}^2(\perp) \leq \cdots \leq \mathbf{F}^n(\perp) \leq \cdots$$

este un lanț, deci $\bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)$ există.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație

Fie $(C, \leq)$ o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă.

- Arătăm că $a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\bot)$ este punct fix, i.e. $\mathbf{F}(a) = a$

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație

Fie $(C, \leq)$ o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă.

- Arătăm că $a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)$ este punct fix, i.e. $\mathbf{F}(a) = a$

$$\mathbf{F}(a) \quad = \quad \mathbf{F}(\bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp))$$

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație

Fie $(C, \leq)$ o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă.

- Arătăm că $a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)$ este punct fix, i.e. $\mathbf{F}(a) = a$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(a) &= \mathbf{F}(\textstyle\bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp)) \\
&= \textstyle\bigvee_n \mathbf{F}(\mathbf{F}^n(\perp)) \text{ din continuitate}
\end{aligned}
$$

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație

Fie $(C, \leq)$ o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă.

- Arătăm că $a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\bot)$ este punct fix, i.e. $\mathbf{F}(a) = a$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(a) &= \mathbf{F}(\textstyle\bigvee_n \mathbf{F}^n(\bot)) \\
&= \textstyle\bigvee_n \mathbf{F}(\mathbf{F}^n(\bot)) \text{ din continuitate} \\
&= \textstyle\bigvee_n \mathbf{F}^{n+1}(\bot)
\end{aligned}
$$

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație

Fie $(C, \leq)$ o mulțime parțial ordonată completă și $\mathbf{F} : C \to C$ o funcție continuă.

- Arătăm că $a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\bot)$ este punct fix, i.e. $\mathbf{F}(a) = a$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}(a) &= \mathbf{F}(\textstyle\bigvee_n \mathbf{F}^n(\bot)) \\
&= \textstyle\bigvee_n \mathbf{F}(\mathbf{F}^n(\bot)) \text{ din continuitate} \\
&= \textstyle\bigvee_n \mathbf{F}^{n+1}(\bot) \\
&= \textstyle\bigvee_n \mathbf{F}^n(\bot) = a
\end{aligned}
$$

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație (cont.)

- Arătăm că *a* este cel mai mic punct fix.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație (cont.)

- Arătăm că a este cel mai mic punct fix.

Fie b un alt punct fix, i.e. $\mathbf{F}(b) = b$.

Demonstrăm prin inducție după $n \geq 1$ că $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație (cont.)

- Arătăm că a este cel mai mic punct fix.

Fie b un alt punct fix, i.e. $\mathbf{F}(b) = b$.

Demonstrăm prin inducție după $n \geq 1$ că $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$.

Pentru $n = 0$, $\mathbf{F}^0(\perp) = \perp \leq b$ deoarece $\perp$ este prim element.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație (cont.)

- Arătăm că a este cel mai mic punct fix.

Fie b un alt punct fix, i.e. $\mathbf{F}(b) = b$.

Demonstrăm prin inducție după $n \geq 1$ că $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$.

Pentru $n = 0$, $\mathbf{F}^0(\perp) = \perp \leq b$ deoarece $\perp$ este prim element.

Dacă $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$, atunci $\mathbf{F}^{n+1}(\perp) \leq \mathbf{F}(b)$, deoarece $\mathbf{F}$ este crescătoare. Deoarece $\mathbf{F}(b) = b$ rezultă $\mathbf{F}^{n+1}(\perp) \leq b$.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație (cont.)

- Arătăm că a este cel mai mic punct fix.

Fie b un alt punct fix, i.e. $\mathbf{F}(b) = b$.

Demonstrăm prin inducție după $n \geq 1$ că $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$.

Pentru $n = 0$, $\mathbf{F}^0(\perp) = \perp \leq b$ deoarece $\perp$ este prim element.

Dacă $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$, atunci $\mathbf{F}^{n+1}(\perp) \leq \mathbf{F}(b)$, deoarece $\mathbf{F}$ este crescătoare.
Deoarece $\mathbf{F}(b) = b$ rezultă $\mathbf{F}^{n+1}(\perp) \leq b$.

Știm $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$ oricare $n \geq 1$, deci $a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp) \leq b$.

Teorema Knaster-Tarski pentru CPO

Demonstrație (cont.)

- Arătăm că a este cel mai mic punct fix.

Fie b un alt punct fix, i.e. $\mathbf{F}(b) = b$.

Demonstrăm prin inducție după $n \geq 1$ că $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$.

Pentru $n = 0$, $\mathbf{F}^0(\perp) = \perp \leq b$ deoarece $\perp$ este prim element.

Dacă $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$, atunci $\mathbf{F}^{n+1}(\perp) \leq \mathbf{F}(b)$, deoarece $\mathbf{F}$ este crescătoare.
Deoarece $\mathbf{F}(b) = b$ rezultă $\mathbf{F}^{n+1}(\perp) \leq b$.

Știm $\mathbf{F}^n(\perp) \leq b$ oricare $n \geq 1$, deci $a = \bigvee_n \mathbf{F}^n(\perp) \leq b$.

Am arătat că a este cel mai mic punct fix al funcției $\mathbf{F}$. □

Completitudinea sistemului de deducție CDP

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea variabilelor propozitionale (atomilor) $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea variabilelor propozitionale (atomilor) $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Fie $Baza = \{p_i \mid p_i \in \mathcal{S}\}$ mulțimea faptelor din $\mathcal{S}$.

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea variabilelor propozitionale (atomilor) $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Fie $Baza = \{p_i \mid p_i \in \mathcal{S}\}$ mulțimea faptelor din $\mathcal{S}$.

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} \texttt{oslo} & \to & \texttt{windy} \\ \texttt{oslo} & \to & \texttt{norway} \\ \texttt{norway} & \to & \texttt{cold} \\ \texttt{cold} \wedge \texttt{windy} & \to & \texttt{winterIsComing} \\ & & \texttt{oslo} \end{array}$$

$At = \{oslo, windy, norway, cold, winterIsComing\}$

$Baza = \{oslo\}$

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Fie $Baza = \{p_i \mid p_i \in \mathcal{S}\}$ mulțimea atomilor care apar în *faptele* din $\mathcal{S}$.

Definim funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ prin

$$\boxed{\begin{aligned} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ & \cup \{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } \mathcal{S}, \\ & \qquad s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{aligned}}$$

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Fie $Baza = \{p_i \mid p_i \in \mathcal{S}\}$ mulțimea atomilor care apar în *faptele* din $\mathcal{S}$.

Definim funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ prin

$$\boxed{\begin{aligned} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza & \\ & \cup \{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } \mathcal{S}, \\ & \qquad s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{aligned}}$$

Exercițiu. Arătați că funcția $f_{\mathcal{S}}$ este monotonă.

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Propoziție

Funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este continuă.

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Propoziție

Funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este continuă.

Demonstrație

Arătăm că dacă $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \ldots$ atunci $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) = \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Propoziție

Funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este continuă.

Demonstrație

Arătăm că dacă $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \ldots$ atunci $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) = \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.

Din faptul că $f_{\mathcal{S}}$ este crescătoare rezultă $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) \supseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \dots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Propoziție

Funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este continuă.

Demonstrație

Arătăm că dacă $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \dots$ atunci $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) = \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.

Din faptul că $f_{\mathcal{S}}$ este crescătoare rezultă $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) \supseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$

Demonstrăm în continuare că $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$. Fie $a \in f_{\mathcal{S}}(\bigcup_n Y_k)$. Sunt posibile trei cazuri

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Propoziție

Funcția $f_\mathcal{S} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este continuă.

Demonstrație

Arătăm că dacă $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \ldots$ atunci $f_\mathcal{S}(\bigcup_k Y_k) = \bigcup_k f_\mathcal{S}(Y_k)$.

Din faptul că $f_\mathcal{S}$ este crescătoare rezultă $f_\mathcal{S}(\bigcup_k Y_k) \supseteq \bigcup_k f_\mathcal{S}(Y_k)$

Demonstrăm în continuare că $f_\mathcal{S}(\bigcup_k Y_k) \subseteq \bigcup_k f_\mathcal{S}(Y_k)$. Fie $a \in f_\mathcal{S}(\bigcup_n Y_k)$. Sunt posibile trei cazuri

- $a \in \bigcup_k Y_k$
  Există un $k \geq 1$ astfel încât $a \in Y_k$, deci $a \in f_\mathcal{S}(Y_k) \subseteq \bigcup_k f_\mathcal{S}(Y_k)$.

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Propoziție

Funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este continuă.

Demonstrație

Arătăm că dacă $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \ldots$ atunci $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) = \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.

Din faptul că $f_{\mathcal{S}}$ este crescătoare rezultă $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) \supseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$

Demonstrăm în continuare că $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$. Fie $a \in f_{\mathcal{S}}(\bigcup_n Y_k)$. Sunt posibile trei cazuri

- $a \in \bigcup_k Y_k$
  Există un $k \geq 1$ astfel încât $a \in Y_k$, deci $a \in f_{\mathcal{S}}(Y_k) \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.
- $a \in Baza \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$

Clauze definite și funcții monotone

Fie At mulțimea atomilor $p_1, p_2, \ldots$ care apar în $\mathcal{S}$.

Propoziție

Funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este continuă.

Demonstrație

Arătăm că dacă $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq Y_3 \subseteq \ldots$ atunci $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) = \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.

Din faptul că $f_{\mathcal{S}}$ este crescătoare rezultă $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) \supseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$

Demonstrăm în continuare că $f_{\mathcal{S}}(\bigcup_k Y_k) \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$. Fie $a \in f_{\mathcal{S}}(\bigcup_n Y_k)$. Sunt posibile trei cazuri

- $a \in \bigcup_k Y_k$
  Există un $k \geq 1$ astfel încât $a \in Y_k$, deci $a \in f_{\mathcal{S}}(Y_k) \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.
- $a \in Baza \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$
- Există $s_1, \ldots, s_n$ în $\bigcup_k Y_k$ astfel încât $(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a)$ este în $\mathcal{S}$.

Clauze definite și funcții monotone

Demonstrație (cont.)

- Există $s_1, \ldots, s_n$ în $\bigcup_k Y_k$ astfel încât $(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a)$ este în $\mathcal{S}$.

Clauze definite și funcții monotone

Demonstrație (cont.)

- Există $s_1, \ldots, s_n$ în $\bigcup_k Y_k$ astfel încât $(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a)$ este în $\mathcal{S}$.

  Pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$ există $k_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $s_i \in Y_{k_i}$.

Clauze definite și funcții monotone

Demonstrație (cont.)

- Există $s_1, \ldots, s_n$ în $\bigcup_k Y_k$ astfel încât $(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a)$ este în $\mathcal{S}$.

  Pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$ există $k_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $s_i \in Y_{k_i}$.

  Dacă $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ atunci $Y_{k_i} \subseteq Y_{k_0}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Clauze definite și funcții monotone

Demonstrație (cont.)

- Există $s_1, \ldots, s_n$ în $\bigcup_k Y_k$ astfel încât $(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \rightarrow a)$ este în $\mathcal{S}$.

  Pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$ există $k_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $s_i \in Y_{k_i}$.

  Dacă $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ atunci $Y_{k_i} \subseteq Y_{k_0}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.

  Rezultă că $s_1, \ldots, s_n \in Y_{k_0}$, deci $a \in f_{\mathcal{S}}(Y_{k_0}) \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.

Clauze definite și funcții monotone

Demonstrație (cont.)

- Există $s_1, \ldots, s_n$ în $\bigcup_k Y_k$ astfel încât $(s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a)$ este în $\mathcal{S}$.

  Pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$ există $k_i \in \mathbb{N}$ astfel încât $s_i \in Y_{k_i}$.

  Dacă $k_0 = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ atunci $Y_{k_i} \subseteq Y_{k_0}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.

  Rezultă că $s_1, \ldots, s_n \in Y_{k_0}$, deci $a \in f_{\mathcal{S}}(Y_{k_0}) \subseteq \bigcup_k f_{\mathcal{S}}(Y_k)$.

Am demonstrat că $f_{\mathcal{S}}$ este continuă. $\square$

Clauze definite și funcții monotone

Pentru funcția continuă $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$

$$\boxed{\begin{aligned} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup \{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } \mathcal{S}, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{aligned}}$$

aplicând Teorema Knaster-Tarski pentru CPO, obținem că

$$\bigcup_n f_{\mathcal{S}}^n(\emptyset)$$

este cel mai mic punct fix al lui $f_{\mathcal{S}}$.

Clauze definite și funcții monotone

- Analizați ce se întamplă când considerăm succesiv

$$\emptyset, \quad f_{\mathcal{S}}(\emptyset), \quad f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(\emptyset)), \quad f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(\emptyset))), \ldots$$

La fiecare aplicare a lui $f_{\mathcal{S}}$, rezultatul fie se mărește, fie rămâne neschimbat.

Clauze definite și funcții monotone

- Analizați ce se întamplă când considerăm succesiv

$$\emptyset, \quad f_{\mathcal{S}}(\emptyset), \quad f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(\emptyset)), \quad f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(\emptyset))), \ldots$$

  La fiecare aplicare a lui $f_{\mathcal{S}}$, rezultatul fie se mărește, fie rămâne neschimbat.

- Să presupunem că în $\mathcal{S}$ avem k atomi. Atunci după $k+1$ aplicări ale lui $f_{\mathcal{S}}$, trebuie să existe un punct în șirul de mulțimi obținute de unde o nouă aplicare a lui $f_{\mathcal{S}}$ nu mai schimbă rezultatul (punct fix):

$$f_{\mathcal{S}}(X) = X$$

Clauze definite și funcții monotone

- Analizați ce se întamplă când considerăm succesiv

$$\emptyset, \quad f_{\mathcal{S}}(\emptyset), \quad f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(\emptyset)), \quad f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(f_{\mathcal{S}}(\emptyset))), \ldots$$

  La fiecare aplicare a lui $f_{\mathcal{S}}$, rezultatul fie se mărește, fie rămâne neschimbat.

- Să presupunem că în $\mathcal{S}$ avem k atomi. Atunci după $k+1$ aplicări ale lui $f_{\mathcal{S}}$, trebuie să existe un punct în șirul de mulțimi obținute de unde o nouă aplicare a lui $f_{\mathcal{S}}$ nu mai schimbă rezultatul (punct fix):

$$f_{\mathcal{S}}(X) = X$$

- Dacă aplicăm $f_{\mathcal{S}}$ succesiv ca mai devreme până găsim un X cu proprietatea $f_{\mathcal{S}}(X) = X$, atunci găsim cel mai mic punct fix al lui $f_{\mathcal{S}}$.

Cel mai mic punct fix

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & \to & wet \\ wet \land cold & \to & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup\{a \in At \mid (s_1 \land \ldots \land s_n \to a) \text{ este în } \mathcal{S}, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

Se observă că $f_{\mathcal{S}}(\emptyset) =$

Cel mai mic punct fix

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & \to & wet \\ wet \wedge cold & \to & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup\{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } \mathcal{S}, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

Se observă că $f_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset$, deci $\emptyset$ este cel mai mic punct fix.

De aici deducem că niciun atom nu este consecință logică a formulelor de mai sus.

Exemplu

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & & \\ cold & \rightarrow & wet \\ windy & \rightarrow & dry \\ wet \wedge cold & \rightarrow & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup\{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \rightarrow a) \text{ este în } S, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

Exemplu

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & & \\ cold & \to & wet \\ windy & \to & dry \\ wet \wedge cold & \to & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup\{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } S, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

$$f_{\mathcal{S}}(\emptyset) \quad = \quad \{\ cold\ \}$$

Exemplu

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & & \\ cold & \to & wet \\ windy & \to & dry \\ wet \wedge cold & \to & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup \{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } S, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathcal{S}}(\emptyset) & = & \{\ cold\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold\ \}) & = & \{\ cold, wet\ \} \end{array}$$

Exemplu

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & & \\ cold & \rightarrow & wet \\ windy & \rightarrow & dry \\ wet \wedge cold & \rightarrow & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup\{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \rightarrow a) \text{ este în } S, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathcal{S}}(\emptyset) & = & \{\ cold\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold\ \}) & = & \{\ cold, wet\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold, wet\ \}) & = & \{\ cold, wet, scotland\ \} \end{array}$$

Exemplu

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & & \\ cold & \to & wet \\ windy & \to & dry \\ wet \land cold & \to & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup\{a \in At \mid (s_1 \land \ldots \land s_n \to a) \text{ este în } S, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathcal{S}}(\emptyset) & = & \{\ cold\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold\ \}) & = & \{\ cold, wet\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold, wet\ \}) & = & \{\ cold, wet, scotland\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold, wet, scotland\ \}) & = & \{\ cold, wet, scotland\ \} \end{array}$$

Exemplu

Exemplu

$$\begin{array}{rcl} cold & & \\ cold & \to & wet \\ windy & \to & dry \\ wet \wedge cold & \to & scotland \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f_{\mathcal{S}}(Y) = Y \cup Baza \\ \cup\{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } S, \\ s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{array}}$$

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathcal{S}}(\emptyset) & = & \{\ cold\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold\ \}) & = & \{\ cold, wet\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold, wet\ \}) & = & \{\ cold, wet, scotland\ \} \\ f_{\mathcal{S}}(\{\ cold, wet, scotland\ \}) & = & \{\ cold, wet, scotland\ \} \end{array}$$

Deci cel mai mic punct fix este $\{\ cold, wet, scotland\ \}$.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Teoremă

Fie X este cel mai mic punct fix al funcției $f_{\mathcal{S}}$. Atunci

$$q \in X \quad \textit{ddacă} \quad \mathcal{S} \models q.$$

Intuiție: Cel mai mic punct fix al funcției $f_{\mathcal{S}}$ este mulțimea tuturor atomilor care sunt consecințe logice ale programului.

Funcția $f_{\mathcal{S}} : \mathcal{P}(At) \to \mathcal{P}(At)$ este definită prin

$$\boxed{\begin{aligned} f_{\mathcal{S}}(Y) = {} & Y \cup Baza \\ & \cup \{a \in At \mid (s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \to a) \text{ este în } \mathcal{S}, s_1 \in Y, \ldots, s_n \in Y\} \end{aligned}}$$

unde At este mulțimea atomilor din $\mathcal{S}$ și $Baza = \{p_i \mid p_i \in \mathcal{S}\}$ este mulțimea atomilor care apar în faptele din $\mathcal{S}$.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație

$(\Rightarrow)$ $q \in X \Rightarrow \mathcal{S} \models q$.

- Funcția $f_{\mathcal{S}}$ conservă atomii adevărați.
- Deci, dacă fiecare clauză unitate din $\mathcal{S}$ este adevărată, după fiecare aplicare a funcției $f_{\mathcal{S}}$ obținem o mulțime adevărată de atomi.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație

$(\Rightarrow)$ $q \in X \Rightarrow \mathcal{S} \models q$.

- Funcția $f_{\mathcal{S}}$ conservă atomii adevărați.
- Deci, dacă fiecare clauză unitate din $\mathcal{S}$ este adevărată, după fiecare aplicare a funcției $f_{\mathcal{S}}$ obținem o mulțime adevărată de atomi.

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{S} \models q \Rightarrow q \in X$.

- Fie $\mathcal{S} \models q$. Presupunem prin absurd că $q \notin X$.
- Căutăm o evaluare e care face fiecare clauză din $\mathcal{S}$ adevărată, dar q falsă.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea

$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea
$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$
- Evident, această interpretare face q falsă.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea
$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$
- Evident, această interpretare face q falsă.
- Arătăm că $e^+(P) = 1$, pentru orice clauză $P \in \mathcal{S}$.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea
$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$
- Evident, această interpretare face q falsă.
- Arătăm că $e^{+}(P) = 1$, pentru orice clauză $P \in \mathcal{S}$.
- Fie $P \in \mathcal{S}$. Avem două cazuri:

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea
$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$
- Evident, această interpretare face q falsă.
- Arătăm că $e^+(P) = 1$, pentru orice clauză $P \in \mathcal{S}$.
- Fie $P \in \mathcal{S}$. Avem două cazuri:

  1. P este un fapt. Atunci $P \in X$, deci $e(P) = 1$.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea

$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Evident, această interpretare face q falsă.
- Arătăm că $e^{+}(P) = 1$, pentru orice clauză $P \in \mathcal{S}$.
- Fie $P \in \mathcal{S}$. Avem două cazuri:

  1. P este un fapt. Atunci $P \in X$, deci $e(P) = 1$.
  2. P este de forma $p_1 \land \ldots \land p_n \to r$. Atunci avem două cazuri:

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea

$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

- Evident, această interpretare face q falsă.
- Arătăm că $e^+(P) = 1$, pentru orice clauză $P \in \mathcal{S}$.
- Fie $P \in \mathcal{S}$. Avem două cazuri:

  1. P este un fapt. Atunci $P \in X$, deci $e(P) = 1$.
  2. P este de forma $p_1 \land \ldots \land p_n \to r$. Atunci avem două cazuri:
     - există un p_i, $i = 1, \ldots, n$, care nu este în X. Deci $e^+(P) = 1$.

Programe logice și cel mai mic punct fix

Demonstrație (cont.)

- Fie evaluarea
$$e(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } p \in X \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$
- Evident, această interpretare face q falsă.
- Arătăm că $e^+(P) = 1$, pentru orice clauză $P \in \mathcal{S}$.
- Fie $P \in \mathcal{S}$. Avem două cazuri:

1. P este un fapt. Atunci $P \in X$, deci $e(P) = 1$.
2. P este de forma $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to r$. Atunci avem două cazuri:
   - există un p_i, $i = 1, \ldots, n$, care nu este în X. Deci $e^+(P) = 1$.
   - toți p_i, $i = 1, \ldots, n$, sunt în X. Atunci $r \in f_{\mathcal{S}}(X) = X$, deci $e(r) = 1$.
     În concluzie $e^+(P) = 1$.

□

Sistemul de deducție

Corolar

Sistemul de deducție pentru clauze definite propoziționale este complet pentru a arăta clauze unitate:

$$\text{dacă } \mathcal{S} \models q, \text{ atunci } \mathcal{S} \vdash q.$$

Sistemul de deducție

Corolar

Sistemul de deducție pentru clauze definite propoziționale este complet pentru a arăta clauze unitate:

$$\text{dacă } \mathcal{S} \models q, \text{ atunci } \mathcal{S} \vdash q.$$

Demonstrație

- Presupunem $\mathcal{S} \models q$.
- Atunci $q \in X$, unde X este cel mai mic punct fix al funcției $f_{\mathcal{S}}$.
- Fiecare aplicare a funcției $f_{\mathcal{S}}$ produce o mulțime demonstrabilă de atomi.
- Cum cel mai mic punct fix este atins după un număr finit de aplicări ale lui $f_{\mathcal{S}}$, orice $a \in X$ are o derivare.

$\square$

Bibliografie

• J.W. Lloyd, Foundations of Logic Programming, Second Edition, Springer, 1987

• R.J. Brachman, H.J.Levesque, Knowledge Representation and Reasoning, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, CA, 2004

• Logic Programming, The University of Edinburgh, https://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lp/

Pe săptămâna viitoare!