Ecuații de gradul al doilea cu rădăcini reale

Fie ecuația: $ax^2 + bx + c = 0$, *cu* $a \neq 0$, (1) *a, b, c* fiind numere reale.

O astfel de ecuație se numeşte **ecuație de gradul al doilea** cu **coeficienți reali (a,b,c).**

Exemple:

a) $6x^2 - x - 1 = 0$

a = 6
b= -1
c= -1

b) $x^2 - x + 1 = 0$

a =1
b =-1
c = 1

c) $-x^2 + 8x = 0$

a = -1
b= 8
c= 0

d) $-x^2 + 8 = 0$

a = -1
b= 0
c= 8

coeficienții ecuației sunt numere (**nu conțin x** !!!)

Rezolvarea ecuației de gradul al doilea cu rădăcini reale

Sunt **două cazuri particulare**, în care **nu avem nevoie de o formulă** specială de calcul

Cazul b = 0

Forma ecuației este $ax^2 + c = 0$

Procedăm astfel: $ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\dfrac{c}{a}$

pozitiv

Dacă $-\dfrac{c}{a} \geq 0 \Rightarrow S = \left\{ \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}} \right\}$

Dacă $-\dfrac{c}{a} < 0 \Rightarrow S = \Phi$

imposibil

Exemple

$$a.)\ \ 2x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$b.)\ \ 2x^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = -7 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{7}{2}$$ imposibil

Cazul $\mathbf{c = 0}$

Forma ecuației este $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Procedăm astfel:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Exemplu

$$2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Forma canonică a ecuației de gradul II

Transformăm membrul stâng al acestei ecuații în modul următor:
mai întâi scoatem în fața parantezei coeficientul lui x^2:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0} \quad \text{unde} \quad \boxed{\Delta=b^2-4ac}$$

numit ***discriminantul*** ecuației de grad II

forma canonică a ecuației de gradul II

Exemplu

$$2x^2-7x+8=2\left(x^2-\frac{7}{2}x+4\right)=2\left(x^2-2\frac{7}{4}x+4\right)=2\left[\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+4-\frac{49}{16}\right]=$$

$$2\left[\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{64-49}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{25}{16}\right]$$

sau direct

$$\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 8=49-64=-25$$

$$2x^2-7x+8=2\left[\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{25}{16}\right]$$

Rezolvarea ecuației de gradul al doilea cu rădăcini reale

Forma canonică a ecuației de gradul II

$$\boxed{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0}$$ şi $$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$$ permit rezolvarea unei ecuații de grad II

" delta "

cum a≠0

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

DISCUȚIE – Natura rădăcinilor ecuației de gradul II

Cazul $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ ecuația **nu are rădăcini reale**

Cazul $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ ecuația **are 2 rădăcini egale** $x_1=x_2=\boxed{-\frac{b}{2a}}$

Cazul $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ ecuația **are 2 rădăcini distincte** $x_{1,2}=\boxed{\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}$

Exerciții

1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $6x^2 - x - 1 = 0$; b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $-x^2 + 8x - 16 = 0$; d) $-x^2 - 7x + 8 = 0$;

e) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$;f) $\frac{5}{x+2} + \frac{9}{2x+3} = 2$;g) $\frac{6}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

h) $\frac{5}{x+m} - \frac{1}{m-x} = 2 + \frac{10m}{m^2-x^2}$ i) $\frac{x-6}{x-12} - \frac{x-12}{x-6} = \frac{5}{6}$

2. Să se determine m, astfel încât ecuația $x^2 + mx + 1 = 0$:

a) să aibă rădăcini egale; b) să aibă rădăcini reale diferite; c) să nu aibă rădăcini reale.

3. Acelaşi enunț ca la problema 2, pentru ecuația $x^2 - 2mx + m(1 + m) = 0$.

4. să se determine valorile lui *m*, ştiind că ecuațiile $x^2+x+m=O$ *şi* $x^2+x-m=0$ au acelaşi număr de rădăcini reale.

Formula redusă

Dacă b=2b_1 atunci $\Delta = 4(b_1^{\,2} - ac)$ **şi** $x_{1,2} = \dfrac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^{\,2} - ac}}{a}$

Exemplu:

$3x^2-10x+3=0$ atunci a = 3, b = -10 ,c = 3

b_1= -5 şi $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \dfrac{5 \pm 4}{3}$ atunci x_1=3 şi x_2= $\dfrac{1}{3}$

Relații între coeficienții și rădăcinile unei ecuații de gradul al doilea

1. **Relațiile lui Viete**

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) cu $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, are rădăcinile: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

atunci au loc relațiile:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \leftarrow \text{suma rădăcinilor}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \leftarrow \text{produsul rădăcinilor}$$

relațiile lui Viete

Probleme BAC 2009

1. . Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1x_2$, știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - 2x - 2 = 0$.

2. **4.** Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că soluțiile x_1, x_2 ale ecuației $x^2 - (2m+1)x + 3m = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11$.

3. Se consideră ecuația $x^2 + 3x - 5 = 0$ cu soluțiile x_1 și x_2. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$

Formarea unei ecuații de grad II când cunoaştem **suma S** şi **produsul P** al rădăcinilor.

Forma ecuației este $x^2 - Sx + P = 0$

Exemplu :

Formați ecuația de grad II dacă $x_1 = -2$ şi $x_2 = 8$

Avem $\mathbf{S} = x_1+x_2 = -2+8 = \mathbf{6}$ şi $\mathbf{P} = x_1 \cdot x_2 = (-2)\cdot 8 = \mathbf{-16}$

Atunci ecuația este : $\mathbf{x^2-6x-16 = 0}$

Studiu individual

Exercițiile 5 şi 6 din fişa de exerciții

6.3 Studiul semnelor rădăcinilor ecuației de gradul 2

Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) cu $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$,

are rădăcinile:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{şi} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Şi au loc relațiile:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Cazul 1.) **P>0** $\Rightarrow$ **ambele rădăcini au același semn (ambele + sau ambele -)**

dacă S>0 $\Rightarrow$ **ambele rădăcini sunt pozitive**

dacă S<0 $\Rightarrow$ **ambele rădăcini sunt negative**

Cazul 2.) **P<0** $\Rightarrow$ **rădăcinile au semne contrare**

dacă S>0 $\Rightarrow$ $x_1<0, x_2>0$ **şi** $|x_1| < x_2$

dacă S<0 $\Rightarrow$ $x_1<0, x_2>0$ **şi** $|x_1| > x_2$

Observație :

1.) cazul $P = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (sau $x_2 = 0$)

2.) cazul $S = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$

Exemplu :

$x^2+2x-15=0 \Rightarrow$ ***S = -2 şi P = -15 deci*** $x_1<0, x_2>0$ **şi** $|x_1| > x_2$

Exercițiu :

Fie ecuația $x^2-2mx+m-1 = 0$, $m \in R$

a.) rezolvați ecuația pentru m=1,şi m= -1

b.) arătați că pentru orice m , ecuația are 2 rădăcini distincte

c.) aflați m dacă ambele rădăcini sunt mai mari decât -1

d.) aflați m dacă ambele rădăcini sunt mai mici decât -1

e.) aflați m dacă o rădăcină este mai mare decât -1,iar cealaltă rădăcină este mai mică decât -1.

INDICAȚIE :

Y=x+1

6.4 **Descompunerea trinomului de grad 2 în produs de factori de grad I**

Expresia $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ se numeşte ***TRINOM de grad 2.***
Ecuaţia $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ $(a \neq 0)$ cu $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac \geq 0}$,

are rădăcinile:

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ şi $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ şi au loc relaţiile:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Atunci $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2\right] = \ldots = a(x - x_1)(x - x_2)$

Deci descompunerea este : $\boldsymbol{ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)}$

Exemplu :

Descompuneţi trinomul : $\mathbf{6x^2-x-1}$ în factori.
Rezolvăm ecuaţia $\mathbf{6x^2-x-1=0}$

$\Delta = 25$ şi : $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Atunci : $6x^2-x-1 =$ $6\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right) = (2x-1)(3x+1)$

Observaţie :

$\boldsymbol{ax^2 + bx + c} = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a}$ ***se numeşte forma canonică a trinomului de grad 2***

6.5. Ecuații reductibile la ecuații de gradul al doilea

în practică se pot întâlni ecuații de grad mai mare decât 2, a căror rezolvare se poate reduce la rezolvarea unor ecuații de grad mai mic sau egal cu 2.

1. în unele cazuri astfel de ecuații se pot rezolva folosind ***metoda descompunerii în factori***.

Exemple

1) Să se rezolve ecuația:

$$x^3-4x = 0 \qquad (1)$$

Descompunem membrul stâng al ecuației în factori și avem

$x(x-2)(x + 2) = 0$ Rezultă că soluțiile ecuației (1) sunt: 0, -2 și 2.

2) Să se rezolve ecuația

$$x^4-2x^3+x-2 = 0 \qquad (2)$$

Descompunem membrul stâng al ecuației în factori.

Avem succsiv,

$x^4-2x^3+x-2 = x^3(x-2) + x-2 = (x-2)(x^3 + l) = (x-2)(x+l)(x^2-x+l)$.

Ecuația devine: $(x - 2) (x + 1) \{x^2 - x + 1) = 0$, adică $x - 2 = 0$, $x + 1 = 0$ sau $x^2 - x + 1 =0$.

Cum ecuația $x^2 - x + 1 = 0$ nu are rădăcini reale ($\Delta= -3 < 0$), rezultă că rădăcinile ecuației (2) sunt: -l și 2.

2. în alte cazuri ecuațiile de grad mai mare sau egal cu 2 se pot rezolva folosind ***metoda introducerii unei noi necunoscute.***

Exemple

1) Să se rezolve ecuația

$$(x^2 - 3x)^2 - 2 (x^2 - 3x) - 8 = 0 \qquad (3)$$

Observăm că membrul stâng al ecuației conține expresia $(\mathbf{x^2 - 3x})$, atât la puterea a doua cât și la puterea întâia. Facem substituția

$\mathbf{x^2 - 3x = y}$ și obținem ecuația de gradul al doilea în y:

$$y^2-2y-8 = 0, \text{ de unde } y_1 = -2, y_2 = 4.$$

Rezultă $x^2 - 3x = -2$ și $x^2 - 3x = 4$.

Rădăcinile primei ecuații sunt $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$, iar rădăcinile celei de-a doua ecuații sunt $x_3 = -l$, $x_4 = 4$. Deci, soluțiile ecuației (3) sunt: 1,2,-1 și 4.

2) Să se rezolve ecuația

$$x^4-3x^2-4 = 0. \qquad (4)$$

Făcând substituția $\mathbf{x^2 = y}$, obținem ecuația în y: $y^2 - 3y - 4 = 0$, de unde $y_1 =-1, y_2 = 4$.

Cum y poate lua numai valori nenegative (deoarece $y = x^2$), rezultă că singura soluție care convine estey = 4, adică $x^2 = 4$, de unde $x_1 = - 2$ și $x_2 = 2$.

Observație.

Această ecuație este un caz particular al ecuației generale $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$, numită **ecuație bipătrată.**

3) Să se rezolve ecuația

$$\mathbf{x^6 - 7x^3 - 8 = 0.} \qquad (5)$$

Făcând substituția $\mathbf{x^3 = y}$, obținem

$$y^2-7y-8= 0$$

de unde $z_1=-l$, $z_2 = 8$.

Deoarece $y = x^3$ avem $x^3 = -l$, $x^3 = 8$ și obținem următoarele două rădăcini ale ecuației date: $x_1 = —1, x_2 = 2$.

Observație.

Analog, pot fi rezolvate și ecuații mai generale de forma:

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a \neq 0$, unde n este un număr natural nenul.

Făcând substituția $y = x^n$, obținem ecuația de gradul al doilea:

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Exerciţii

1. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $6x^2 - x - l = 0$; b) $x^2 - x + 1 = 0$; c) $-x^2 + 8x - 16 = 0$; d) $-x^2 - 7x + 8 = 0$;

e) $\frac{3x-7}{x+5} = \frac{x-3}{x+2}$; f) $\frac{5}{x+2} + \frac{9}{2x+3} = 2$; g) $\frac{6}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1}$;

h) $\frac{5}{x+m} - \frac{1}{m-x} = 2 + \frac{10m}{m^2-x^2}$; i) $\frac{x-6}{x-12} - \frac{x-12}{x-6} = \frac{5}{6}$

2. Să se determine m, astfel încât ecuaţia $x^2 + mx + 1 = 0$:

a) să aibă rădăcini egale; b) să aibă rădăcini reale diferite; c) să nu aibă rădăcini reale.

3. Acelaşi enunţ ca la problema 2, pentru ecuaţia $x^2 - 2mx + m(1 + m) = 0$.

4. să se determine valorile lui *m,* ştiind că ecuaţiile $x^2 + x + m = 0$ şi $x^2 + x - m = 0$ au acelaşi număr de rădăcini reale.

5. Să se formeze ecuaţii de gradul al doilea, care au rădăcinile:

a) $x_1 = -3$ şi $x_2 = 5$; b) $x_1 = m+n$ şi $x_2 = m - n$; c) $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ şi $x_2 = 2 - \sqrt{3}$,

d) $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ şi $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

6. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$. Să se formeze ecuaţii de gradul al doilea în y, ale căror rădăcini sunt:

a) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$ şi $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$; b) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ şi $y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$; c) $y_1 = (x_1 + x_2)^2$ şi $y_2 = (x_1 - x_2)^2$

d) $y_1 = \frac{1}{x_1^2}$ şi $y_2 = \frac{1}{x_2^2}$

7. Fără a rezolva ecuaţiile următoare, să se determine semnele rădăcinilor lor:

a) $x^2 - x - 6 = 0$; b) $6x^2 - x - 1 = 0$; c) $-5x^2 + x - 7 = 0$; d) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

8.) Să se determine valorile lui m, astfel încât rădăcinile ecuaţiei $x^2 + (1-m)x - m = 0$ să aibă:

a) acelaşi semn; b) semne diferite.

9. Acelaşi enunţ ca la problema 8, pentru ecuaţia:

$x^2 + 2(m - 2)x + (m - 1)(m - 3) = 0$.

10. Să se descompună în factori de gradul întâi trinoamele:

a) $6x^2 - 7x + 2$; b) $x^2 - x - l$; c) $2x^2 - 7mx + 6m^2$.

11. Să se determine valorile lui m, astfel încât ecuaţiile: $x^2 + mx + l = 0$ şi $x^2 + x + m = 0$ să aibă o rădăcină comună.

12. Folosind forma canonică a trinomului de gradul al doilea, să se arate că:

a) trinomul $x^2 - x + 1$ ia valori pozitive pentru orice x real;
b) trinomul $-2x^2 + 8x - 9$ ia valori negative pentru orice x real.

13. Fie ecuaţia $4mx^2 + 4(1 - 2m)x + 3(m - 1) = 0$. Să se determine valorile lui m astfel încât să avem:

a) ambele rădăcini să fie mai mici decât 1;
b) ambele rădăcini să fie mai mari decât 1;

c) o rădăcină mai mică decât 1 şi alta mai mare decât 1.

14. Să se determine valorile parametrului M, astfel încât fiecare din următoarele ecuații să aibă două rădăcini egale:

a) $4x^2 + mx + 9 = 0$; b) $mx^2 + 4x + 1 = 0$; c) $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$.

15. Descompunând membrul stâng în factori, să se rezolve ecuațiile:

a) $4x^3 + 28x^2 - 9x - 63 = 0$; b) $6x3 - x^2 - 486x + 81 = 0$; c) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$.

16) Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4+x^2-2 = 0$; b) $x^4+15x^2 + 50 = 0$; c) $4x^4-5x^2+ 1 =0$; d) $x^6 + 26x^3-27 = 0$.

Să se rezolve ecuațiile: a) $(x^2 - 16X)^2 - 2(x^2 - 16x) - 63 = 0$;

$$\left(\frac{1}{x} + 2\right)^2 + \frac{1}{x} - 10 = 0$$

c) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$; d) $x^2 - 4x + \dfrac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2$

e) $x^2 + \dfrac{49}{x^2} + 2(x + \dfrac{7}{x}) - 34 = 0$; f) $\dfrac{x^2 - 3x}{x - 2} + \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x} = \dfrac{5}{2}$; g) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{18}{x^2} = \dfrac{13}{5}(\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x})$

h) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$

20. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^4+ 4x-l=0$; b) $x^4-4x^3-l=0$;

21.

Dacă x şi y satisfac relația $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, să se determine : $\dfrac{x}{y}; y \neq 0$

22

Să se determine valorile parametrului m, astfel încât ecuația $x^2 - 6x + m = 0$ să aibă două rădăcini reale dintre care una să fie dublul celeilalte.

23

Să se determine două numere nenule, astfel încât suma, produsul şi diferența pătratelor lor să fie egale.

24

Să se determine legătura dintre rădăcinile ecuațiilor: $ax^2 + bx + c = 0$ şi $cx^2 + bx + a = 0$.

25

Fără a rezolva ecuația, să se găsească suma pătratelor rădăcinilor ecuației:

$$(x^2 + 2x)^2 - 5(x^2 + 2x) + 3 = 0.$$

26. Să se arate că dacă ecuațiile $x^2 + ax + b = 0$ şi $x^2 + cx + d = 0$, $(a, b, c, d \in Z)$, au o rădăcină irațională comună, atunci $a = c$ şi $b = d$.