

Prelucrarea semnalelor

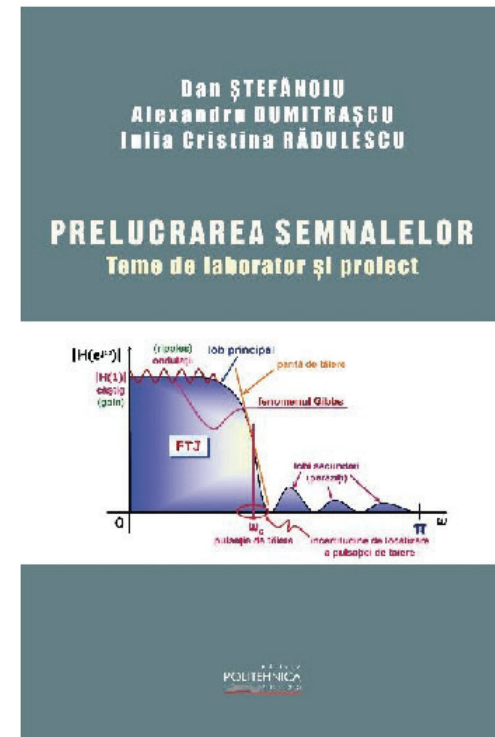
Proiect 2 - Proiectarea filtrelor FIR prin optimizare

<https://curs.upb.ro>

Profesor Dan ȘTEFĂNOIU
dan.stefanoiu@upb.ro

Conferențiar Alexandru DUMITRAȘCU
alexandru.dumitrascu@upb.ro

Șef de lucrări Vasilică VOINEA
vasilica.voinea@upb.ro



Obiective

Studierea practică a două metode de proiectare a filtrelor FIR prin optimizare, prima după un criteriu pătratic, a doua după un criteriu Cebîșev (minmax). Observarea diferențelor între filtrele obținute cu cele două metode. Proiectarea unui algoritm pentru o problemă de optimizare particulară.

Suport teoretic

Probleme de proiectare a filtrelor prin optimizare (PPFO)

Sunt descrise câteva metode de optimizare a coeficienților unui filtru FIR având TZ definită în (4.1) și ordinul M fixat în prealabil. Optimizarea se realizează pe baza unui obiectiv descris de o caracteristică de frecvență H_d , numită *răspuns dorit*.

Exemplu de răspuns dorit pentru un FTJ (ω_p și ω_s sunt parametri de proiectare) :

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \omega_s < \omega \leq \pi \end{cases} , \quad (5.1)$$

Chiar dacă în banda $[\omega_p, \omega_s]$ nu se impune un anumit comportament al filtrului (deși s-ar putea interveni și aici cu precizări), este de dorit ca amplitudinea răspunsului să fie descrescătoare. (Există și posibilitatea ca $\omega_p = \omega_s$.)

Dorim să găsim filtrul (5.1) al cărui răspuns în frecvență H este cel mai apropiat de H_d , în $\Omega_{ps} = [0, \omega_p] \cup [\omega_s, \pi]$. Distanța dintre două răspunsuri se măsoară utilizând o normă în spațiul funcțiilor definite pe Ω_{ps} . Uzuale sunt normele 2 și infinit, pentru care obținem problemele de proiectare următoare.

Problema PFO_2

Plecând de la perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ și un răspuns dorit H_d , se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență este cel mai aproape de răspunsul H_d , în sensul normei pătratice. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare :

$$\min_h \int_{\omega \in \Omega_{ps}} \left| H_d(\omega) - |H(\omega)| \right|^2 d\omega. \quad (5.2)$$

Problema PFO_INF

Plecând de la perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ și un răspuns dorit H_d , se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență este cel mai aproape de răspunsul H_d , în sensul normei infinit. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare :

$$\min_h \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ \left| H_d(\omega) - |H(\omega)| \right| \right\}. \quad (5.3)$$

Pentru simetria exprimării, în (5.2) și (5.3), am notat $H(e^{j\omega})$ prin $H(\omega)$, pentru orice pulsație $\omega \in \mathbb{R}$.

- Soluția problemei PFO_2 : metoda celor mai mici pătrate MCMMP.
- Soluția problemei PFO_INF : mecanismul de proiectare de tip Cebîșev sau minmax

În ambele probleme de optimizare, se pot impune restricții suplimentare asupra filtrului. De exemplu, o condiție naturală este cea de simetrie, care asigură liniaritatea fazei. Astfel de restricții micșorează numărul de variabile și simplifică găsirea unei soluții optime.

Pentru a avea erori mai mici în anumite zone (de exemplu în banda de stopare), se poate introduce o funcție de ponderare W :

→ PPFO_2W

$$\min_h \int_{\omega \in \Omega_{ps}} W(\omega) \left[H_d(\omega) - |H(\omega)| \right]^2 d\omega, \quad (5.4)$$

→ PPFO_INF W

$$\min_h \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ W(\omega) \left| H_d(\omega) - |H(\omega)| \right| \right\}. \quad (5.5)$$

Se poate considera :

$$\int_{\omega \in \Omega_{ps}} W(\omega) d\omega = 1. \quad (5.6)$$

Pentru a optimiza întregul răspuns în frecvență, se alege un răspuns dorit H_c (cu valori complexe, de exemplu, ca în definiția (4.2)) :

→ PPFO_2CW

$$\min_h \int_{\omega \in \Omega_{ps}} W(\omega) \left| H_c(\omega) - H(\omega) \right|^2 d\omega, \quad (5.7)$$

→ PPFO_INF CW

$$\min_h \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ W(\omega) \left| H_c(\omega) - H(\omega) \right| \right\}, \quad (5.8)$$

unde W poate fi unitară.

Proiectarea filtrelor FIR în sens CMMP

Se va încerca rezolvarea problemei PFO_2CW , în varianta generală, pentru care :

- funcția de ponderare este unitară ;
- criteriul de optimizare este (5.7), i.e. răspunsul dorit are valori complexe (H_c) ;
- nu există nicio restricție asupra coeficienților filtrului H (de exemplu, de tip fază liniară).

Astfel, se va rezolva de fapt problema :

$$PPFO_2C : \min_h \int_{\omega \in \Omega_{ps}} |H_c(\omega) - H(\omega)|^2 d\omega. \quad (5.9)$$

Răspunsul în frecvență al filtrului H , de ordin M fixat, poate fi scris în forma vectorială care urmează :

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n]e^{-j\omega n} = \mathbf{h}^T \mathbf{e}(\omega), \quad (5.10)$$

- Vectorul coeficienților filtrului (care reprezintă variabilele problemei de optimizare) :

$$\mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \dots & h[M-1] \end{bmatrix}$$

- Vector armonic, ale cărui elemente pot fi calculate pentru orice pulsație $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{e}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega} & \dots & e^{-j\omega(M-1)} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{C}^M. \quad (5.11)$$

Atunci funcția-criteriu care apare în formularea problemei PFO_2C (5.9) poate fi, de asemenea, exprimată în formă vectorială :

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega}) - H_c(\omega)|^2 &= [\mathbf{h}^T \mathbf{e}(\omega) - H_c(\omega)] [\overline{\mathbf{e}^T(\omega) \mathbf{h}} - \overline{H_c(\omega)}] = \\ &= \mathbf{h}^T \mathbf{e}(\omega) \overline{\mathbf{e}^T(\omega) \mathbf{h}} - 2\operatorname{Re} [\overline{\mathbf{e}^T(\omega) H_c(\omega)}] \mathbf{h} + |H_c(\omega)|^2, \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Matricea $\mathbf{e}(\omega) \overline{\mathbf{e}^T(\omega)}$ are structură Toeplitz hermitică. (Se poate citi pe diagonale.)

$$\mathbf{e}(\omega) \overline{\mathbf{e}^T(\omega)} = \begin{bmatrix} 1 & e^{+j\omega} & \dots & e^{+j\omega(M-1)} \\ e^{-j\omega} & 1 & \ddots & e^{+j\omega(M-2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\omega(M-1)} & \dots & e^{-j\omega} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}(\omega) + j\mathbf{S}(\omega), \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (5.13)$$

→ Partea reală $\mathbf{C}(\omega)$ este o matrice Toeplitz simetrică :

$$\mathbf{C}(\omega) = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\omega) & \dots & \cos[(M-1)\omega] \\ \cos(\omega) & 1 & \ddots & \cos[(M-2)\omega] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cos[(M-1)\omega] & \dots & \cos(\omega) & 1 \end{bmatrix}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (5.14)$$

→ Partea imaginară $\mathbf{S}(\omega)$ este o matrice Toeplitz antisimetrică :

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\omega) & \cdots & \sin[(M-1)\omega] \\ -\sin(\omega) & 0 & \ddots & \sin[(M-2)\omega] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\sin[(M-1)\omega] & \cdots & -\sin(\omega) & 0 \end{bmatrix}, \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (5.15)$$

Introducând notația :

$$\mathbf{g}(\omega) = \text{Re} \left[\overline{\mathbf{e}(\omega)} H_c(\omega) \right], \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

și, observând că $\mathbf{h}^T \mathbf{S}(\omega) \mathbf{h} = 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ (căci funcția criteriu (5.12) are numai valori reale), se poate scrie că :

$$\left| H(e^{j\omega}) - H_c(\omega) \right|^2 = \mathbf{h}^T \mathbf{C}(\omega) \mathbf{h} - 2\mathbf{g}^T(\omega) \mathbf{h} + \left| H_c(\omega) \right|^2, \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

Cum funcția (5.17) trebuie minimizată în raport cu \mathbf{h} , termenul care nu depinde de aceasta poate fi ignorat.

Problema de optimizare (5.9) revine atunci la :

$$\min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} \left\{ \mathbf{h}^T \left[\int_{\omega \in \Omega_{ps}} \mathbf{C}(\omega) d\omega \right] \mathbf{h} - 2 \left[\int_{\omega \in \Omega_{ps}} \mathbf{g}^T(\omega) d\omega \right] \mathbf{h} \right\}. \quad (5.18)$$

Cu notațiile naturale :

$$\mathbf{R} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} \mathbf{C}(\omega) d\omega \in \mathbb{R}^{M \times M} \text{ și } \mathbf{r} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} \mathbf{g}(\omega) d\omega \in \mathbb{R}^M, \quad (5.19)$$

problema de optimizare (5.18) devine :

$$\min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} \{ \mathbf{h}^T \mathbf{R} \mathbf{h} - 2 \mathbf{r}^T \mathbf{h} \} = \min_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^M} \{ \mathbf{h}^T (\mathbf{R} \mathbf{h} - 2 \mathbf{r}) \}. \quad (5.20)$$

Aceasta este o problemă de optimizare fără restricții, în care criteriul are formă pătratică. Soluția ei este oferită de următorul rezultat.

Propoziția 5.1. *Filtrul FIR reprezentând soluția problemei de optimizare (5.20) (în sens CMMP) are următoarea secvență pondere (exprimată vectorial) :*

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}. \quad (5.21)$$

Evident, expresia (5.21) este corectă numai dacă matricea \mathbf{R} (de tip Toeplitz simetrică) este inversabilă. Această condiție se verifică întotdeauna, chiar și dacă $\omega_p = \omega_s$. În concluzie, algoritmul de proiectare constă în evaluarea \mathbf{R} și \mathbf{r} (care depinde de răspunsul dorit al filtrului), urmată de estimarea vectorului \mathbf{h} , ca în expresia (5.21).

Proiectarea filtrelor FIR optime în sens Cebîșev

Metoda Cebîșev se referă la problema de optimizare PFO_INFCW și propune construcția de filtre FIR cu fază liniară. Rezolvarea acestei probleme se realizează cu ajutorul unei celebre rețete numerice numite *Algoritmul Parks-McClellan*.

Ghid MATLAB

Proiectarea filtrelor FIR optime, cu fază liniară, în sens CMMP (adică al normei euclidiene)

» **h=firls(M,W,A);**

→ **M** : ordinul filtrului ;

→ **W** : vector ce conține pulsațiile normalizate reprezentând benzile de interes (vector de lungime pară) ;

Exemplu pentru FTJ dorit :

» **W=[0 wp ws 1];**

wp și **ws** sunt pulsațiile normalizate ω_p și ω_s , care descriu benzile de trecere, respectiv stopare. Deci, prima bandă (de trecere, în cazul de mai sus) este între **W(1)** și **W(2)**, iar a doua (de stopare) este între **W(3)** și **W(4)**. Benzile de tranziție sunt între **W(2)** și **W(3)**, între **W(4)** și **W(5)**, dacă există, etc.

→ **A** : vector ce descrie valorile răspunsului dorit în benzile de interes (vector de lungime pară).

Exemplu :

» **A=[1 1 0 0]** ;

Prima pereche de elemente descrie o bandă de trecere, iar a doua o bandă de stopare. În general, răspunsul dorit este format din segmente de dreaptă unind punctele de coordonate (**W(k)**, **A(k)**) și (**W(k + 1)**, **A(k + 1)**), unde **k** este un număr impar. (Acest răspuns este mai general decât cel constant pe porțiuni, utilizat în exemplele noastre.)

Introducerea unor ponderi în criteriul CMMP se realizează adăugând un al patrulea parametru de apel :

» **h=firls(M,W,A,w)** ;

Vectorul **w** are jumătate din lungimea lui **W** și **A**, fiecare valoare a sa corespunzând unei perechi de valori din cei doi vectori. O valoare din **w** este ponderea (constantă) asociată, în criteriul pătratic, benzii de frecvențe corespunzătoare. Implicit, **w** are toate elementele egale.

În exemplul nostru de FTJ, dacă vrem să acordăm abaterii de la răspunsul dorit ponderea 1 în banda de trecere și ponderea 10 în banda de stopare (cu scopul de a crește atenuarea în banda de stopare), atunci vom utiliza următoarea atribuire :

» $\mathbf{w} = [1 \ 10];$

Proiectarea filtrelor optime în sensul normeii infinite (Algoritmul Parks-McClellan)

» $\mathbf{h} = \text{remez}/\text{firpm}(\mathbf{M}, \mathbf{W}, \mathbf{A}, \mathbf{w});$

Așa cum se poate observa, argumentele sunt aceleași ca la funcția **firls** de proiectare în sens CMMP. Ultimul argument poate lipsi (implicit, el are toate componente egale). Totuși, în acest caz, **M** poate fi și impar, filtrul rezultat continuând să fie de fază liniară.

Atenție !

Funcțiile **firls** și **firpm** operează corect cu ordine pară de filtre (adică **M** ar trebui să fie un număr par). Lungimea secvenței pondere proiectate (**h**) este întotdeauna egală cu **M + 1** (indiferent de paritate), ea fiind, în plus, simetrică față de verticala ce trece prin $\mathbf{M}/2 + 1$, pentru a asigura faza liniară a filtrului. Dacă **M** este impar, axa de simetrie se situează între eșantioanele de valori egale din pozițiile $(\mathbf{M} - 1)/2 + 1$ și $(\mathbf{M} + 1)/2 + 1$.

Proiect

Faza 1 (Optimizarea filtrelor FIR cu fază liniară)

Considerați problema de proiectare a unui FTJ cu răspunsul dorit (5.1), în care ω_p și ω_s au valori fixate. (Alegeți, de exemplu, $\omega_p = 0.3\pi$ și $\omega_s = 0.4\pi$.)

- Utilizând funcția **firls**, proiectați filtre FIR optime, în sens CMMP, cu ordine M de la 10 la 100 și observați diferențele dintre caracteristicile lor de frecvență. Convingeți-vă că faza este liniară, atât din răspunsul în frecvență, cât și din valorile coeficienților filtrelor. (Atât aici cât și în restul proiectului, folosiți funcția **freqz** pentru afișarea caracteristicilor în frecvență și **stem** pentru afișarea secvenței pondere. Se recomandă ca rezoluția reprezentării în frecvență să fie de cel puțin o sută de linii spectrale.)
- Utilizând funcția **remez** sau **firpm**, proiectați filtre FIR optime în sensul normei infinit, cu ordine M de la 10 la 100 și observați diferențele dintre ele. (Pentru acest tip de filtre, observați înălțimea egală a lobilor din benzile de trecere, respectiv stopare.)
- Pentru M fixat (cel puțin egal cu 20, dar nu mai mare de 100), trasați pe același grafic răspunsurile în frecvență a două filtre optime, în sens CMMP, respectiv normă infinit. Care este atenuarea minimă a fiecăruia, în banda de stopare?

- d. Introduceți o funcție de ponderare, cum ar fi, de exemplu, următoarea :

$$w(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \in [0, \omega_p] \\ 5 & , \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases} . \quad (5.22)$$

Pentru o singură valoare a ordinului M , reproiectați filtre optime în sens CMMP, respectiv al normei infinit, folosind ponderile (5.22). Comparați-le cu cele de la punctele **a**, respectiv **b**. Pentru fiecare dintre filtre, ce raport este între dispersia erorii din banda de stopare și cea a erorii din banda de trecere?

- e. Proiectați FTS și FTB, de ordin $M = 20$, cu specificații potrivite scopului propus. Pentru aceasta, se pot utiliza două abordări. Prima constă în adaptarea corespunzătoare a argumentelor de intrare pentru funcțiile **firls** și **remez** sau **firpm**. În a doua abordare, se consideră că oricare dintre aceste funcții poate proiecta numai FTJ, iar celelalte două filtre, FTS și FTB trebuie obținute prin diferențe de tipul : „FTS=1-FTJ”, „FTB=FTJ-FTJ”. Trasați răspunsurile în frecvență ale filtrelor proiectate, folosind ambele abordări, pentru a vă convinge de validitatea rezultatelor obținute. Analizați dacă există diferențe între rezultatele celor două abordări? (Puteți calcula separat distanța euclidiană dintre secvențele pondere și cea dintre răspunsurile în frecvență.)

Faza 2 (Proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR cu răspuns ideal complex, fără restricții de fază)

Funcția MATLAB `firls_FTJ_c.m` încărcată pe platforma Moodle (<https://curs.upb.ro>) implementează Algoritmul de proiectare în sens CMMP a unui FTJ de tip FIR, fără restricții de fază, conform descrierii din suportul teoretic al acestei secțiuni. Utilizatorul trebuie să precizeze ordinul filtrului M și următorul răspuns dorit (cu valori complexe) :

$$H_c(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega K} & , \quad |\omega| \leq \omega_p \\ 0 & , \quad \omega_s < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (5.23)$$

Pulsațiile ω_p și ω_s , precum și întârzierea de grup K , sunt date de proiectare. Reamintim că întârzierea de grup (*group delay*) este derivată cu semn schimbat a fazei răspunsului în frecvență al unui filtru. Mai precis :

$$\text{grd} \left[H(e^{j\omega}) \right] = -\frac{d}{d\omega} \arg \left[H(e^{j\omega}) \right], \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (5.24)$$

Evident, filtrele cu fază liniară au întârziere de grup constantă.

Pentru înțelegerea programului, precizăm următoarea egalitate (pe care cititorul o poate verifica singur) :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(n\omega) d\omega = \omega_2 Sc(n\omega_2) - \omega_1 Sc(n\omega_1). \quad (5.25)$$

Prin Sc s-a notat funcția sinus cardinal (atenuat) (adică $\sin(x)/x$). (Semnalăm că funcția MATLAB **sinc** are o definiție diferită de cea matematică : $\sin(\pi x)/(\pi x)$.) Așa cum s-a menționat, matricea \mathbf{R} , definită în (5.19), moștenește structura Toeplitz simetrică a matricei $\mathbf{C}(\omega)$ definite în (5.14). Ținând cont de forma lui Ω_{ps} (ca reuniune de două intervale închise) și de egalitatea (5.25), rezultă că elementele lui \mathbf{R} au forma următoare :

$$\omega_p Sc[(m-n)\omega_p] - \omega_s Sc[(m-n)\omega_s] + \pi\delta_0[m-n], \quad (5.26)$$

unde $m \in \overline{1, M}$ este indicele de linie, iar $n \in \overline{1, M}$ este indicele de coloană. (Oricum, datorită simetriei, semnificațiile celor doi indici se pot inversa.)

Similar, se obține vectorul \mathbf{r} definit tot în (5.19), ținând seama de expresia (5.23) a răspunsului dorit H_c și de faptul că banda de stopare nu contribuie, de fapt, la calculul integralei.

- a. Folosind funcția **firls_FTJ_c.m**, proiectați mai multe FTJ cu parametrii ω_p și ω_s preluați de la faza anterioară. Alegeți $M = 20$ și mai multe valori pentru întârzierea de grup K , astfel încât să se verifice inegalitățile $M/4 \leq K \leq 3M/4$. Trasați răspunsurile în frecvență ale filtrelor obținute și secvențele pondere aferente. Observați că fazele sunt neliniare și secvențele pondere nu mai sunt simetrice, mai puțin în cazul $K = M/2 = 10$. Apelați funcția **grpdelay** pentru a vedea deviația de la liniaritate.
- b. Modificați funcția **firls_FTJ_c.m** prin adăugarea unui nou argument de ieșire, **pr**, care returnează performanța relativă a filtrului proiectat (în procente). Aceasta se poate evalua astfel :

$$pr(\hat{\mathbf{h}}) = 100 \frac{\mathbf{v}_{id} - \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{h}}}{\mathbf{v}_{id}} [\%] \quad (5.27)$$

Unde :

$$\mathbf{v}_{id} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} \left| H_{id}(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega = \int_0^{\omega_p} d\omega = \omega_p \quad (5.28)$$

Proiectați mai multe FTJ optime cu ajutorul noii funcții **firls_FTJ_c.m**, alegând diferite valori ale ordinului M (între 10 și 100, nu neapărat pare) și stabilind întotdeauna întârzierea de grup la mijlocul suportului secvenței pondere ($K = M/2$, chiar dacă ea nu rezultă a fi un număr întreg). Afișați răspunsurile în frecvență și secvențele pondere ale filtrelor proiectate, cu indicarea performanței relative pe primul grafic. Efectuați o comparație riguroasă între aceste filtre, cu referire la performanța relativă.

- c. Modificați funcția **firls_FTJ_c.m** astfel încât să se poată proiecta și FTS sau FTB. (Adaptați calculul performanței relative pentru fiecare dintre cele două tipuri de filtre.) Denumiți noile funcții prin **firls_FTS_c.m**, respectiv **firls_FTB_c.m**. Comparați rezultatele obținute cu cele de la punctul e. al fazei precedente.

Faza 3 <opțională> (Proiectarea filtrelor FIR optimale, utilizând MCMMP și o mulțime finită de pulsații predefinite)

În *PPFO_2CW* (6.7), optimizarea se realizează pe întreaga mulțime de pulsații Ω_{ps} . Alternativ, problema poate fi tratată aproximativ, în sensul că mulțimea continuă de pulsații Ω_{ps} se înlocuiește cu o grilă discretă de pulsații $\Omega_{ps}^N \subset \Omega_{ps}$, având $N \in \mathbb{N}^*$ elemente, $\{\omega_n\}_{n \in \overline{0, N-1}}$. De regulă, N se alege de valoare superioară ordinului filtrului, M . Atunci, se poate formula următoarea problemă de proiectare în puncte discrete (*PPFO_2CD*) :

Plecând de la un răspuns dorit H_c , cunoscut în mulțimea discretă finită de pulsații $\Omega_{ps}^N = \{\omega_n\}_{n \in \overline{0, N-1}}$, se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență este cel mai aproape de răspunsul H_c , în sensul normei euclidiene discrete. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare :

$$\min_h \sum_{n=0}^{N-1} |H_c(\omega_n) - H(\omega_n)|^2. \quad (5.29)$$

Implementați o rutină ce rezolvă problema de optimizare *PFO_2CD* prin MCMMP. Apoi, rezolvați *PPFO_2CD* alegând diferite valori ale parametrilor M , K și N , pentru $\omega_n = n\pi/N$, $\forall n \in \overline{0, N-1}$. Comparați filtrele obținute cu cele proiectate în fazele anterioare ale proiectului.