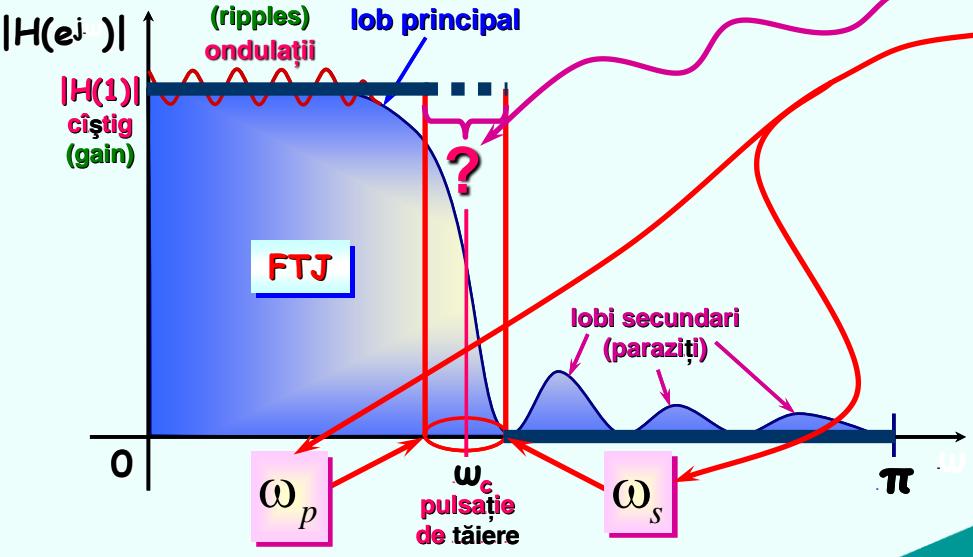


Project PS no. 2



Caracteristicile practice ale unui filtru numeric

(R)



pulsătie "de trecere"

pulsătie "de stop(are)"

Cum se poate exprima "apropierea" dintre cele două filtre?

Folosind **diferite norme** definite în spațiul semnalelor.

Două norme uzuale

- Ne propunem să nu precizăm cum se comportă filtrul în **zona tranzitorie**.
- Se precizează numai cele **două pulsări** care **mărginesc** zona tranzitorie.
- Se dorește ca filtrul proiectat să se "apropie" **cît mai mult** de **filtrul ideal**, simultan în banda de trecere și în banda de stop(are).

↓ Nu se impun restricții în zona tranzitorie.

Așadar

Filtrul ideal (FTJ)

Filtrul real (FIR, FTJ)

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-jK\omega} & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \omega_s < \omega \leq \pi \end{cases}$$

de fază liniară

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

Norma Euclidiană

$$\|H\|^2 = \int_0^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Norma infinit

$$\|H\|_{\infty} = \max_{\omega \in [0, \pi]} \{|H(e^{j\omega})|\}$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Formulări relaxate ale problemelor de optimizare

Problema proiectării filtrelor pătratic optimale

PPFO²

- Plecînd de la perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ și răspunsul ideal H_{id} , se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență H este cel mai aproape de răspunsul H_{id} , în sensul normei pătratice. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare pătratică de mai jos:

$$\min_{h \in \mathcal{S}_{dM}} \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) |H_{id}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

Problema proiectării filtrelor asimptotic optimale

PPFO_∞

- Plecînd de la perechea de pulsații $\{\omega_p, \omega_s\}$ și răspunsul ideal H_{id} , se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență H este cel mai aproape de răspunsul H_{id} , în sensul normei infinit. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare asimptotică de mai jos:

$$\min_{h \in \mathcal{S}_{dM}} \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ w(\omega) |H_{id}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})| \right\}.$$

→ Aici este luată în considerare și faza filtrului.

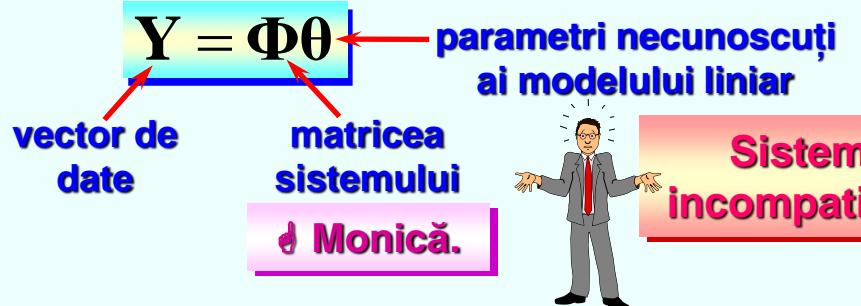
- PPFO² se rezolvă cu ajutorul **Metodei Celor Mai Mici Pătrate (MCMM)**.
- PPFO_∞ se rezolvă cu ajutorul unui raționament bazat pe o **teoremă a lui Cebîșev și algoritmul lui Remez** (în implementarea **Iui Parks și McClellan**).

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Despre MCMMMP

- Metoda Celor Mai Mici Pătrate (MCMMMP) se bazează pe Teoria regresiei liniare, inițiată de Carl Gauss.
- Această metodă este extrem de utilizată în inginerie, pentru a "(pseudo-)rezolva" sisteme liniare incompatibile.
- Un astfel de sistem apare adesea cînd se încearcă modelarea matematică liniară a unui set de date, dar modelul are un număr de parametri necunoscuți mult mai mic decît numărul datelor.



Totuși

Matricea sistemului este monică, deci de rang maxim.

Ideea lui Gauss

Să încercăm să găsim modelul care "trece cel mai bine printre date".

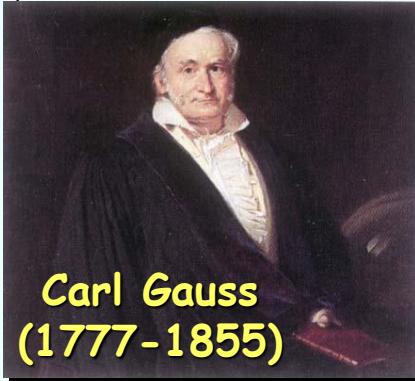
- În sensul minimizării următorului criteriu al erorilor pătratice dintre datele măsurate și cele simulate cu ajutorul modelului liniar:

$$\mathcal{V}(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon^2[n, \theta] = \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - \Phi^T[n]\theta)^2$$

liniile matricii sistemului

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \mathbb{R}^{n\theta}}{\operatorname{argmin}} \mathcal{V}(\theta)$$

$$Y = \Phi \times \theta$$

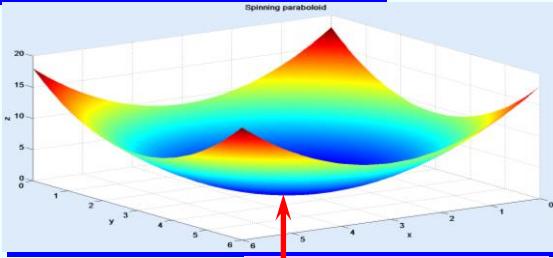


Carl Gauss
(1777-1855)

Cum se poate rezolva problema de optimizare pătratică?

De exemplu, cu ajutorul metodei gradientului.

- Criteriul este un hiper-paraboloid de rotație.



→ Minim unic.
P_{2.3}

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Exercițiu

- Arătați că: $\nabla \mathcal{V}(\theta) = 0$

parametrii estimati ai modelului liniar

Reguli de derivare

$$\nabla_x (\mathbf{b}^T \mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

$$\nabla_x (\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}) = (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \mathbf{x}$$

Despre MCMMMP (continuare)

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Phi[n] \Phi^T[n] \right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Phi[n] y[n] \right)$$

\mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}

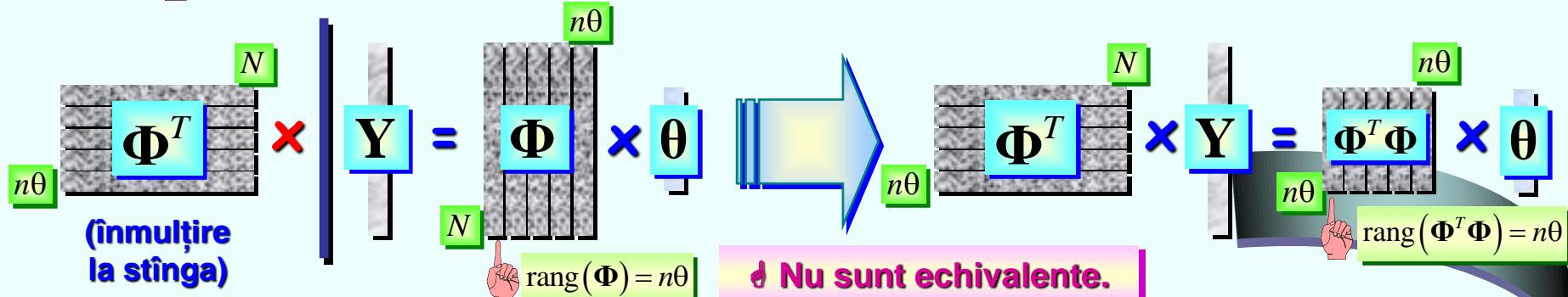
$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} (\Phi^T \mathbf{Y}) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}$$

Formula de implementare

Formula matricială compactă



Este ca și cum s-ar opera **direct asupra sistemului incompatibil.**



⌚ Sistem incompatibil.

⌚ Sistem compatibil si determinat.

Pseudo-inversa Moore-Penrose

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T$$

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \times \mathbf{Y}$$

P2.4

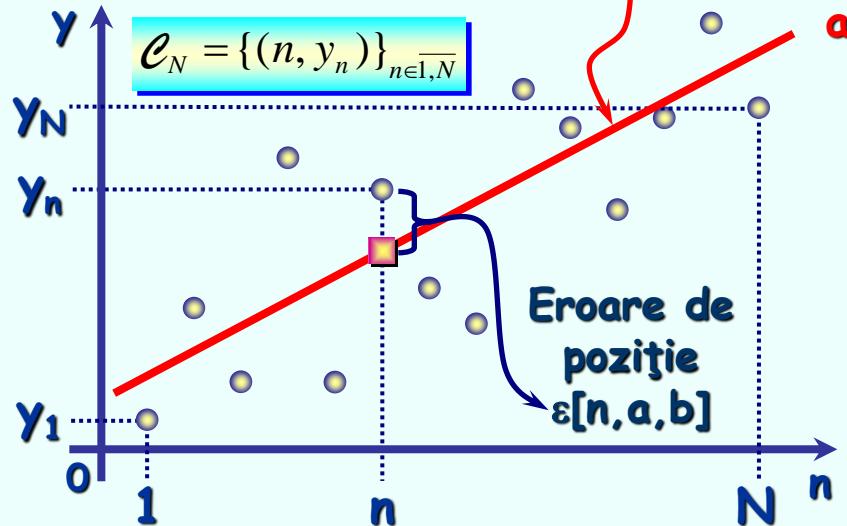
11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Despre MCMMMP (final)

Exemplu

Evaluarea dreptei de regresie liniară prin MCMMMP



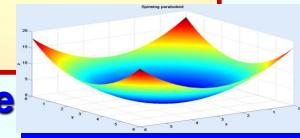
Cum pot fi determinați cei doi parametri ai dreptei?



Prin minimizarea erorii pătratice totale.

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \in \mathbb{R}^2}{\operatorname{argmin}} \mathcal{V}(\theta) = \underset{a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^N \varepsilon^2[n, a, b] \right\} =$$

$$= \underset{a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{n=1}^N (y_n - an - b)^2 \right\}$$



Soluția problemei de optimizare se găsește anulînd valorile gradientului.

$$\nabla \mathcal{V}(a, b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{V}(a, b) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \mathcal{V}(a, b) = 0 \end{cases}$$

Exercițiu

- Arătați cum se poate aproxima un set de N date cu o parabolă, apoi cu un polinom oarecare. (curve fitting)

$$\begin{cases} -2 \sum_{n=1}^N n(y_n - an - b) = 0 \\ -2 \sum_{n=1}^N (y_n - an - b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{6}{N(N^2 - 1)} \left[2 \sum_{n=1}^N ny_n - (N+1) \sum_{n=1}^N y_n \right] \\ \hat{b} = \frac{2}{N(N-1)} \left[(2N+1) \sum_{n=1}^N y_n - 3 \sum_{n=1}^N ny_n \right] \end{cases}$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Cum se poate rezolva PPFO²
cu ajutorul MCMMMP?



După cum urmează.



PPFO²

$$\min_{\mathbf{h} \in \mathcal{S}_{dM}} \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) |H_{id}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{h}) = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) |H_{id}(e^{j\omega}) - \Phi^T(\omega) \mathbf{h}|^2 d\omega$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{h}) = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \left(H_{id}(e^{j\omega}) - \Phi^T(\omega) \mathbf{h} \right) \left(\overline{H_{id}(e^{j\omega})} - \overline{\Phi^T(\omega)} \mathbf{h} \right) d\omega$$

$$|H_{id}(e^{j\omega})|^2 - \left(H_{id}(e^{j\omega}) \overline{\Phi^T(\omega)} + \overline{H_{id}(e^{j\omega})} \Phi^T(\omega) \right) \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \Phi(\omega) \overline{\Phi^T(\omega)} \mathbf{h}$$

$$1 \quad e^{-j\omega} \quad \dots \quad e^{j(1-M)\omega}$$

$$h[0] \rightarrow \dots \rightarrow h[M-1]$$

Însă (formă pătratică)

Are valori reale.

→ Termenul liber nu influențează minimizarea.

→ Partea imaginară trebuie să fie nulă.

$$2 \left\{ \operatorname{Re} [H_{id}(e^{j\omega})] \mathbf{c}^T(\omega) - \operatorname{Im} [H_{id}(e^{j\omega})] \mathbf{s}^T(\omega) \right\} \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{P}(\omega)$



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} \quad \forall \omega \in [0, \pi]$$

$$\mathbf{h}^T [\mathbf{c}(\omega) \mathbf{c}^T(\omega) + \mathbf{s}(\omega) \mathbf{s}^T(\omega)] \mathbf{h} + j \mathbf{h}^T [\mathbf{c}(\omega) \mathbf{s}^T(\omega) - \mathbf{s}(\omega) \mathbf{c}^T(\omega)] \mathbf{h}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \omega & \dots & \cos((M-1)\omega) \\ 1 & \sin \omega & \dots & \sin((M-1)\omega) \end{bmatrix}$$

Astfel Se poate simplifica expresia criteriului pătratic.

$$\mathcal{V}(\mathbf{h}) \leftarrow \mathbf{h}^T \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) (\mathbf{P}(\omega) \mathbf{h} - 2\mathbf{q}(\omega)) d\omega$$

(Toeplitz simetrică)

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Noul criteriu poate fi minimizat, pentru a găsi o pseudo-soluție nebanală.

Gradient nul

$$2 \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) (\mathbf{P}(\omega)\mathbf{h} - \mathbf{q}(\omega)) d\omega = 0$$

$$\left(\int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \mathbf{P}(\omega) d\omega \right) \mathbf{h} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \mathbf{q}(\omega) d\omega$$

R (simetrică)

r

$$\hat{\mathbf{h}} = \left(\int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \mathbf{P}(\omega) d\omega \right)^{-1} \left(\int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \mathbf{q}(\omega) d\omega \right) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}$$

Detalii de implementare

→ Valoarea minimă a criteriului pătratic poate fi utilizată pentru a alege o dimensiune convenabilă a secvenței pondere a FIR (M).

- Valoarea minimă a criteriului pătratic este:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\hat{\mathbf{h}}) &= \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) |H_{id}(e^{j\omega})|^2 d\omega - 2 \left(\int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \mathbf{q}^T(\omega) d\omega \right) \hat{\mathbf{h}} + \hat{\mathbf{h}}^T \left(\int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) \mathbf{P}(\omega) d\omega \right) \hat{\mathbf{h}} = \\ &= \mathcal{V}_{id} - \mathbf{r}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r} = \mathcal{V}_{id} - \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{h}} \geq 0 \end{aligned}$$

→ În general, se operează cu două ferestre de ponderare diferite: una pentru banda de trecere și alta pentru banda de stop.

$$\mathbf{R} = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) \mathbf{P}(\omega) d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega) \mathbf{P}(\omega) d\omega$$

$$\mathbf{r} = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) \mathbf{q}(\omega) d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega) \mathbf{q}(\omega) d\omega$$

- Se poate opera cu ferestre dreptunghiulare (fără ponderare).
- Ferestrele pot fi utilizate și pentru a asigura inversabilitatea matricii R.

Exercițiu

- Arătați cum se poate aplica metoda pseudo-inversei Moore-Penrose pentru a ajunge la expresia pseudo-soluției.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Detalii de implementare

→ În general, ferestrele de ponderare și răspunsul dorit în frecvență se aleg în așa fel încât integralele să se poată evalua în formă completă.

⇒ Dacă nu, se apelează la integrarea numerică.

Exerciții

- Arătați că elementul generic al matricii P este:

$$P_{i,j}(\omega) = \cos[(i-j)\omega]$$

$\forall \omega \in \Omega_{ps}$

- Arătați că elementul generic al vectorului q este:

$$q_i(\omega) = \cos[(K-i)\omega]$$

$\forall \omega \in [0, \omega_p]$

Rezultă

$$R_{i,j} = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) \cos[(i-j)\omega] d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega) \cos[(i-j)\omega] d\omega$$



$\forall i, j \in \overline{0, M-1}$

$$r_i = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) \cos[(K-i)\omega] d\omega$$

$\forall i, j \in \overline{0, M-1}$

$$H_{id}(e^{j\omega}) = 0$$

$\forall \omega \in [\omega_s, \pi]$

Exemplu

Cazul ferestrelor dreptunghiulare

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{i,j} = \omega_p \text{Sc}[(i-j)\omega_p] - \omega_s \text{Sc}[(i-j)\omega_s] + \pi \delta_0[i-j] \\ r_i = \omega_p \text{Sc}[(K-i)\omega_p] \end{array} \right. \quad \forall i, j \in \overline{0, M-1}$$

$$\hat{h}[i] = \frac{\omega_p}{\pi} \text{Sc}[(K-i)\omega_p]$$

$\forall i \in \overline{0, M-1}$

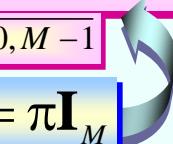


$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(n\omega) d\omega = \omega_2 \text{Sc}(n\omega_2) - \omega_1 \text{Sc}(n\omega_1)$$



DAR

$$\mathbf{R} = \pi \mathbf{I}_M$$



⇒ Performanța filtrului e modestă.

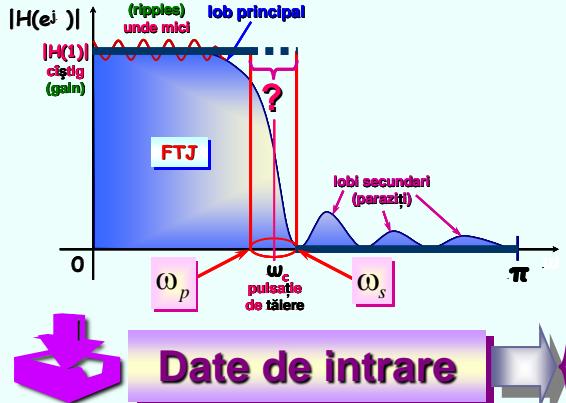
⇒ Pentru ca matricea R să fie inversabilă nu este necesar ca pulsăriile critice să fie diferite.

- Dacă se dorește suprimarea zonei tranzitorii, atunci se recomandă utilizarea unor ferestre de ponderare diferite de cea dreptunghiulară.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate



Date de intrare

F_p [Hz] (frecvența de trecere a filtrului analogic corespunzător)

F_s [Hz] (frecvența de stop a filtrului analogic corespunzător)

- Implicit: $F_s = 1.1 \cdot F_p$

T_s [s] (perioada de eșantionare)

- Implicit: $T_s = \frac{2}{2.1 \cdot (F_p + F_s)}$

w_p w_s (tipurile de ferestre dorite)

- Implicit: ferestre dreptunghiulare

M (ordinul maxim al filtrului – întreg pozitiv)

K (coeficientul de fază liniară – întreg nenegativ)

- Implicit: $K = \frac{M}{2}$

$\varepsilon > 0$ (pragul de precizie pentru criteriul pătratic – subunitar)

- Implicit: $\varepsilon = 10^{-7}$



Initializare

1. Se calculează pulsăriile critice relative.

$$\omega_p = 2\pi F_p T_s \text{ [rad]}$$

$$\omega_s = 2\pi F_s T_s \text{ [rad]}$$

2. Se calculează valoarea maximă a criteriului pătratic.

$$\mathcal{V}_{id} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} w(\omega) |H_{id}(e^{j\omega})|^2 d\omega = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) d\omega$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate

(continuare)



Inițializare

3. Se inițializează ordinul filtrului. $m = 1$

4. Se inițializează eroarea relativă. $\delta = 1$



Bucă iterativă

⌚ Cît timp $\delta > \varepsilon$ & $m \leq M$

1. Se construiește matricea de inversat. R

$$R_{i,j} = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) \cos[(i-j)\omega] d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega) \cos[(i-j)\omega] d\omega \quad \forall i, j \in \overline{0, m-1}$$

↳ Eventual, prin integrare numerică.

2. Dacă matricea nu este inversabilă, se oprește algoritmul și
se sare direct la datele de ieșire.

↳ În mod normal, cel puțin filtrul de ordin $m=1$ va fi disponibil.

3. Se construiește vectorul liber. r

$$r_i = \int_0^{\omega_p} w_p(\omega) \cos[(K-i)\omega] d\omega + \int_{\omega_s}^{\pi} w_s(\omega) \cos[(K-i)\omega] d\omega \quad \forall i \in \overline{0, m-1}$$

↳ Eventual, prin integrare numerică.

4. Se proiectează filtrul optimal. $\hat{h} = R^{-1}r$

5. Se evaluatează performanța filtrului optimal. $\mathcal{V}(\hat{h}) = \mathcal{V}_{id} - r^T \hat{h}$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



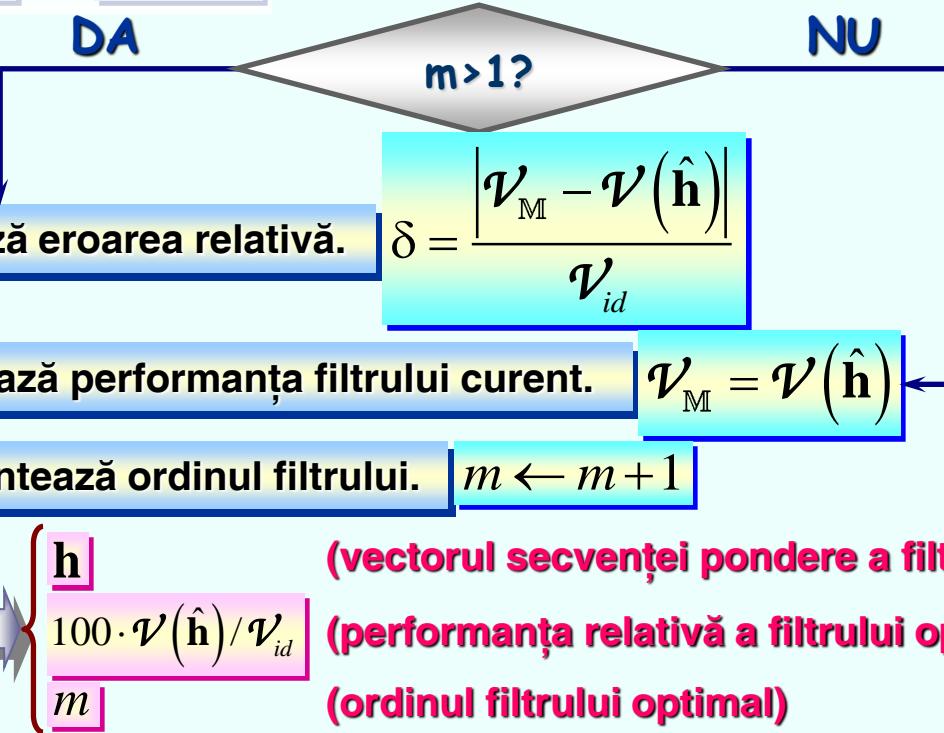
Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Celor Mai Mici Pătrate

(final)



Buclă iterativă

• Cît timp $\delta > \varepsilon$ & $m \leq M$



Exerciții

- Particularizați algoritmul de mai sus pentru cazul ferestrelor triunghiulare și analizați condițiile de inversabilitate.
- Concepeti algoritmii aferenți pentru proiectarea filtrelor optimale FIR de tip **trece-bandă** (FTB), **trece-sus** (FTS) și **multi-bandă** (FMB).

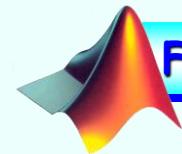
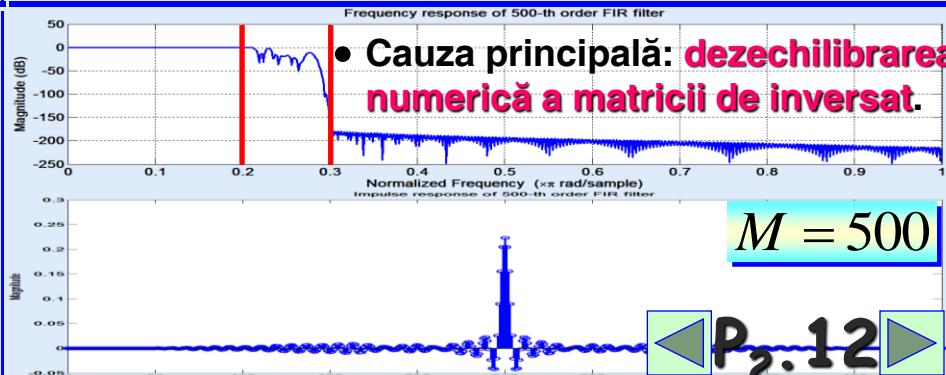
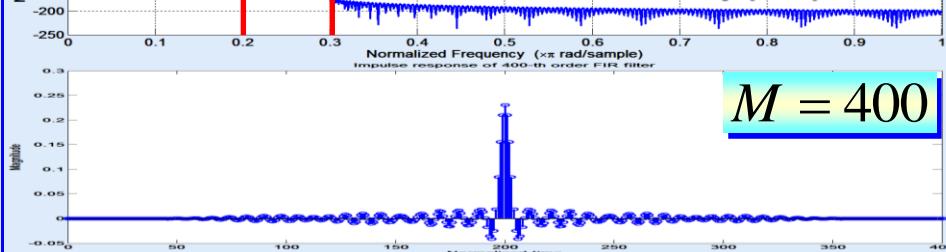
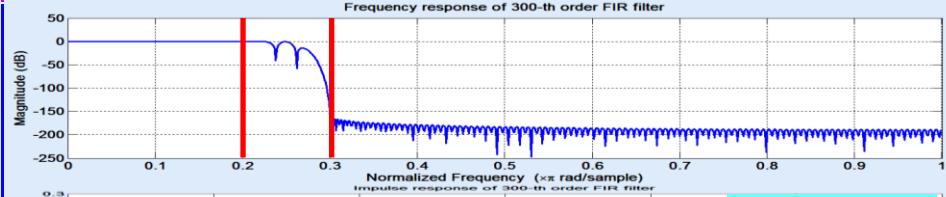
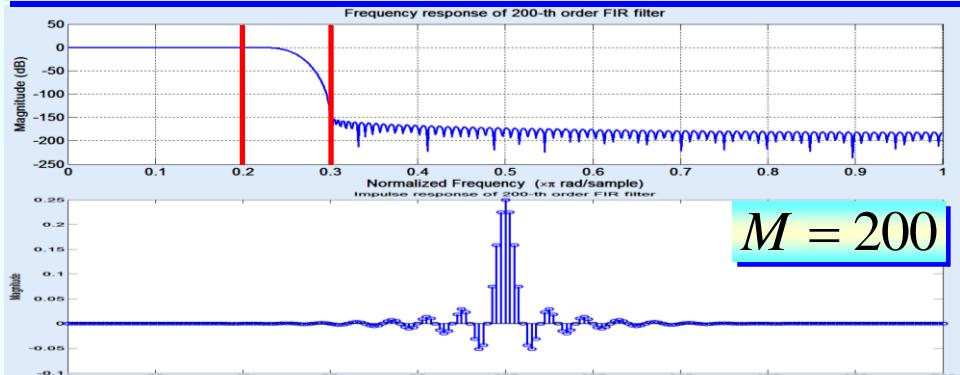
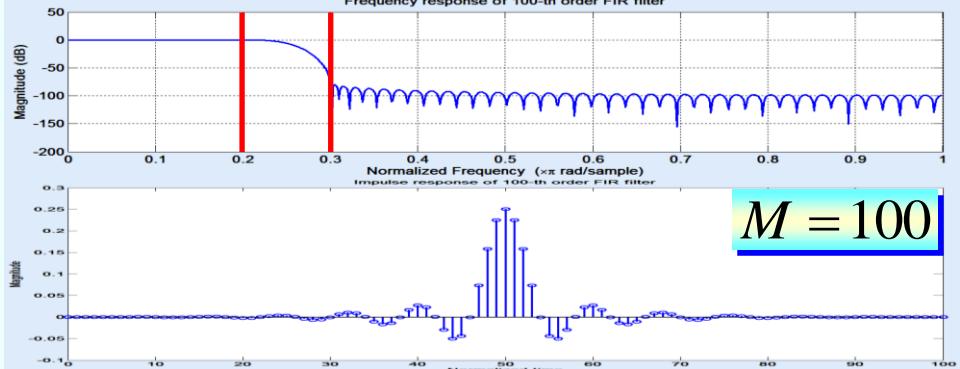
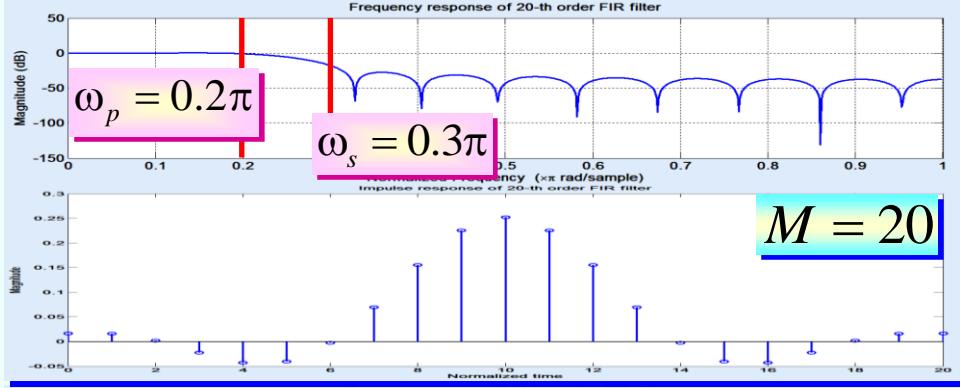
↓ Similar, se pot proiecta FTB, FTS și chiar FMB.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale

Exemple

Filtre FIR de tip FTJ, de diferite ordine, proiectate folosind MCMMP

↓ Cu fereastră dreptunghiulară.



Funcție utilă

firls



11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Secvența pondere este **simetrică**, dar M nu trebuie să fie par!

secvența pondere a filtrului optimal proiectat

ordinul filtrului
vectorul frecvențelor relative de proiectare

♦ Lungimea secvenței pondere este M+1.

$$0 \frac{\omega_p}{\pi} \frac{\omega_s}{\pi} 1$$

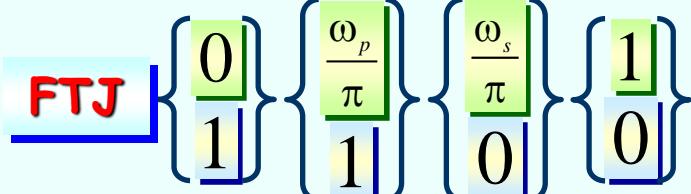
Doar numere între 0 și 1!

Se pot proiecta **FTS** sau **FTB** definind corespunzător W și A.

vectorul valorilor dorite ale răspunsului în frecvență

$$1 \ 1 \ 0 \ 0$$

♦ Împerechiat cu vectorul anterior.

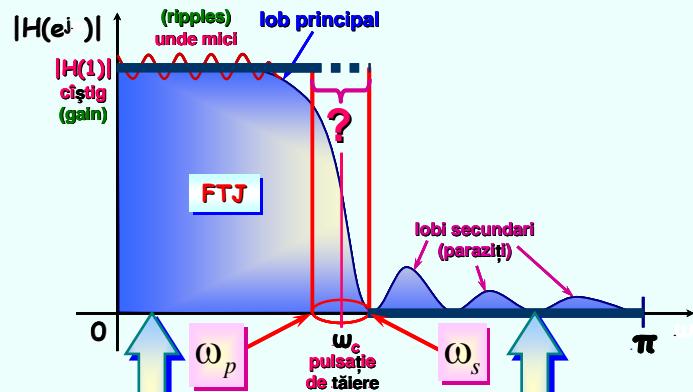


Funcție utilă

`>> h = fircls(M, W, A, w);`

⌚ Nu permite decât rezolvarea PPFO² cu H_{id} avînd K=M/2.

optional: vector al ponderilor benzilor de frecvență



w(1)

w(2)

Exemplu

`>> w = [1 10];`

- Răspunsul filtrului în banda de stop este de 10 ori mai important decât cel din banda de trecere.

Implicit:

`>> w = [1 1];`

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Cum se poate rezolva PPFO_∞?



Analiza este mai profundă și raționamentul mai complicat.

- S-a constatat că algoritmii precedenți conduc la filtre cu performanțele dorite numai dacă lungimea secvenței pondere (**memoria filtrelor**) este suficient de mare (de ordinul zecilor sau sutelor, cel puțin).
- Filtrele cu memorie scurtă sunt adesea afectate de **fenomenul Gibbs** (atât în banda de trecere, cât și în banda de stop).
- Pentru astfel de filtre, este mai natural să se caute soluția care **minimizează amplitudinea maximă a ondulațiilor Gibbs**.



PPFO_∞

$$\min_{h \in \mathcal{H}_{dM}} \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ w(\omega) \underbrace{\left| H_{id} \left(e^{j\omega} \right) - H \left(e^{j\omega} \right) \right| \right\}$$

ondulații Gibbs (ripples)

- Se caută un model matematic pentru ondulațiile Gibbs, astfel încât determinarea maximului să fie simplificată.

Cum?



Trebuie analizat cu atenție **modul cum se produce faza liniară**.

Patru tipuri de filtre cauzale de fază liniară

Simetrice
cu M impar

Simetrice
cu M par

Anti-simetrice
cu M impar

Anti-simetrice
cu M par

Exercițiu

- Arătați că fiecare dintrefiltrele de mai sus este de fază liniară/afină.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Cazul 1

Simetrice cu M impar

$$h[n] = h[M-1-n] \quad \& \quad \forall n \in \overline{0, M-1}$$

$$K = \frac{M+1}{2} \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} = h[K-1] e^{-j(K-1)\omega} + \sum_{n=0}^{K-2} h[n] \left(e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(2K-n-2)} \right) = \\ &= e^{-j(K-1)\omega} \left[h[K-1] + 2 \sum_{n=1}^{K-1} h[K-n-1] \cos(n\omega) \right] = e^{-j(K-1)\omega} \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \end{aligned}$$

↳ Fază liniară.

Cazul 2

Simetrice cu M par

$$h[n] = h[M-1-n] \quad \& \quad \forall n \in \overline{0, M-1}$$

$$K = \frac{M}{2} \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{M-1} h[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{K-1} h[n] \left(e^{-j\omega n} + e^{-j\omega(2K-n-1)} \right) = 2e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{K-1} h[n] \cos\left[\left(\frac{2K-1}{2}-n\right)\omega\right] = \\ &\quad n \leftarrow K-n-1 \end{aligned}$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Cazul 2

$$\cos\left(\frac{2n-1}{2}\omega\right) + \cos\left(\frac{2n+1}{2}\omega\right) = 2\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos(n\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$\tilde{h}[K-1]$

$$2g[K-1]\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\cos((K-1)\omega)$$

Simetrice cu M par (continuare)

$$= e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{K-1} g[n] \cos\left(\frac{2n+1}{2}\omega\right) = e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} g[K-1] \left[\cos\left(\frac{2K-1}{2}\omega\right) + \cos\left(\frac{2K-3}{2}\omega\right) \right] +$$

$$+ e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \left[\left(g[K-2] - \frac{1}{2} \tilde{h}[K-1] \right) \cos\left(\frac{2K-3}{2}\omega\right) + \sum_{n=0}^{K-3} g[n] \cos\left(\frac{2n+1}{2}\omega\right) \right] =$$

$$+ e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \left[\tilde{h}[K-1] \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos((K-1)\omega) + \left(2g[K-2] - \tilde{h}[K-1] \right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos((K-2)\omega) \right] +$$

$$+ e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{K-4} g[n] \cos\left(\frac{2n+1}{2}\omega\right) = \dots = e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=2}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) +$$

$$+ e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \left[\left(g[1] - \frac{1}{2} \tilde{h}[2] \right) \cos\left(\frac{3\omega}{2}\right) + g[0] \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] = e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=2}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) +$$

$$+ e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \left[\left(2g[1] - \tilde{h}[2] \right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos\omega + \left(g[0] - \frac{1}{2} \tilde{h}[1] \right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right] =$$

$$\tilde{h}[K-1] = 2g[K-1]$$

$$\tilde{h}[n] = 2g[n] - \tilde{h}[n+1] \quad \forall n \in \overline{K-2, 1}$$

$$\tilde{h}[0] = g[0] - \frac{1}{2} \tilde{h}[1]$$

$$= e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

▫ Fază liniară.

Așadar

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Cazul 3

Anti-simetrice cu M impar

$$h[n] = -h[M-1-n] \quad \& \quad \forall n \in \overline{0, M-1}$$

$$h[K] = -h[-K] = 0$$

$$K = \frac{M-1}{2} \in \mathbb{N}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\left(K\omega - \frac{\pi}{2}\right)} \sin(\omega) \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$g[n] = 2h[K-n-1] \quad \forall n \in \overline{0, K-1}$$

$$\tilde{h}[K-1] = 2g[K-1]$$

$$\tilde{h}[K-2] = 2g[K-2]$$

$$\tilde{h}[K-3] = 2g[K-3] + \tilde{h}[K-1]$$

$$\tilde{h}[K-4] = 2g[K-4] + \tilde{h}[K-2]$$

⋮

$$\tilde{h}[1] = 2g[1] + \tilde{h}[3]$$

$$\tilde{h}[0] = g[0] + \frac{1}{2}\tilde{h}[2]$$

Exercițiu

$$\sin((n+1)\omega) - \sin((n-1)\omega) = 2 \sin(\omega) \cos(n\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$



Cazul 4

Anti-simetrice cu M par

$$h[n] = -h[M-1-n] \quad \& \quad \forall n \in \overline{0, M-1}$$

$$K = \frac{M}{2} \in \mathbb{N}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(2K-1)\omega-\pi}{2}} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$g[n] = 2h[K-n-1] \quad \forall n \in \overline{0, K-1}$$

$$\tilde{h}[K-1] = 2g[K-1]$$

$$\tilde{h}[K-2] = 2g[K-2] + \tilde{h}[K-1]$$

⋮

$$\tilde{h}[1] = 2g[1] + \tilde{h}[2]$$

$$\tilde{h}[0] = g[0] + \frac{1}{2}\tilde{h}[1]$$

Exercițiu

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}\omega\right) - \sin\left(\frac{2n-1}{2}\omega\right) = 2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(n\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Așadar

Se poate scrie o **relație unificatoare**, pentru toate cele 4 categorii de filtre.

$$H(e^{j\omega}) = \phi(e^{j\omega}) \tilde{H}(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Al doilea factor, cu valori reale, este, de fapt, un **polinom trigonometric**.

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^{K-1} \beta[n] \cos^n(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Exercițiu

$$\phi(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(K-1)\omega} & , \text{ cazul 1} \\ e^{-j\left(\frac{2K-1}{2}\right)\omega} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) & , \text{ cazul 2} \\ e^{-j\left(\frac{K\omega-\pi}{2}\right)} \sin(\omega) & , \text{ cazul 3} \\ e^{-j\frac{(2K-1)\omega-\pi}{2}} \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) & , \text{ cazul 4} \end{cases} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

- Proprietatea de mai sus se bazează pe o **identitate trigonometrică** (demonstrabilă prin inducție matematică):

$$\cos(n\omega) = \sum_{k=0}^n \alpha[k] \cos^k(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Să revenim la

PPFO_∞

$$\min_{h \in \mathcal{S}_{dM}} \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ \left| w(\omega) \left[H_{id}(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \right] \right| \right\}$$

♪ **Fereastră nenegativă.**

$$\Delta H(e^{j\omega})$$

$$\Delta H(e^{j\omega}) = \underbrace{w(\omega) \phi(e^{j\omega})}_{\tilde{w}(\omega)} \left[\frac{H_{id}(e^{j\omega})}{\phi(e^{j\omega})} - \tilde{H}(\omega) \right] \quad \forall \omega \in \Omega_{ps}$$

$$\Delta H(e^{j\omega}) = \tilde{w}(\omega) \left[\tilde{H}_{id}(e^{j\omega}) - \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \right] \quad \forall \omega \in \Omega_{ps}$$

♪ **Necunoscute.**

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Aşadar

PPFO_∞

$$\min_{\tilde{h} \in \mathcal{S}_{dK}} \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \left\{ \tilde{w}(\omega) \left[\tilde{H}_{id} \left(e^{j\omega} \right) - \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \right] \right\}$$

⇒ S-a redus ordinul la aproximativ jumătate.

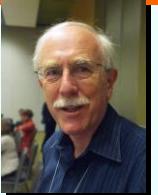
Cum se poate rezolva noua PPFO_∞?

Ideeua lui Parks & McClellan

1972



Thomas W.
PARKS
(n. 1939)



James H.
McCLELLAN
în 2013



Pafnuti Lvovici
CEBYSHEV
(1821-1894)

Se poate folosi un vechi rezultat din matematică, datorat lui Cebîșev.

Teorema 5, a alternării (Cebîșev)

Dacă $\Omega_{ps} \subset [0, \pi)$ este compactă, atunci condiția necesară și suficientă ca \tilde{H} să fie unică și cea mai bună **aproximare Cebîșev** a lui \tilde{H}_{id} peste Ω_{ps} este ca eroarea ΔH să aibă cel mult $(K+1)$ frecvențe extreme în Ω_{ps} .

- Aşadar, trebuie găsite cel mult $(K+1)$ extreme ale erorii.

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{K+1}$$

$$\Delta H(e^{j\omega_k}) = -\Delta H(e^{j\omega_{k+1}})$$

&

$$\forall k \in \overline{1, K}$$

⇒ Aceasta crează ondulații de amplitudine constantă.
(equiripples)

$$|\Delta H(e^{j\omega_k})| = \max_{\omega \in \Omega_{ps}} \{ \Delta H(e^{j\omega}) \}$$

$\forall k \in \overline{1, K+1}$

Aproximare Cebîșev?

Solutia problemei de mai sus, adică **în sensul normei infinit**.

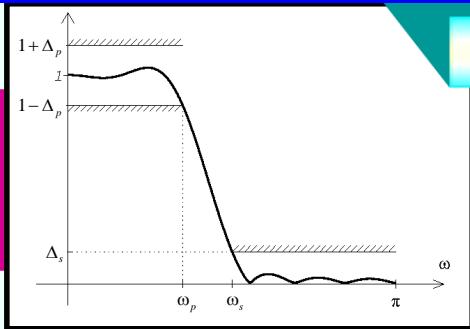
11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Pentru a nu complica găsirea unei soluții, în practică, se stabilesc:

Filtrul ideal (FTJ)

$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} \phi(e^{j\omega}) & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \omega_s < \omega \leq \pi \end{cases}$$



$$\tilde{H}_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \omega_s < \omega \leq \pi \end{cases}$$

Fereastra de ponderare a erorii

$$w(\omega) = \frac{1}{|\phi(e^{j\omega})|} \begin{cases} \frac{\Delta_s}{\Delta_p} & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1 & , \omega_s < \omega \leq \pi \end{cases}$$

⚠ Această alegere nu este unică.

$$\tilde{w}(\omega) = \frac{\phi(e^{j\omega})}{|\phi(e^{j\omega})|} \begin{cases} \frac{\Delta_s}{\Delta_p} & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 1 & , \omega_s < \omega \leq \pi \end{cases}$$

$$\Delta H(e^{j\omega}) = \frac{\phi(e^{j\omega})}{|\phi(e^{j\omega})|} \begin{cases} \frac{\Delta_s}{\Delta_p} \left[1 - \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) \right] & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ -\sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) & , \omega_s < \omega \leq \pi \end{cases}$$

⚠ Fereastră adaptivă.

Astfel

Extremele erorii sunt oferite de **extremele polinomului trigonometric**.

- Cum gradul acestuia este egal cu (K-1), există (K-2) **extreme interne**.
- La acestea, se adaugă cel mult 4 **extreme** în capetele benzilor de trecere și de stop(are).
- Combinând cu **Teorema alternării (Cebîșev)**, nu se pot determina mai puțin de (K-2) și nici mai mult de (K+2) **extreme**.

$$\tilde{H}(\omega) = \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^{K-1} \beta[n] \cos^n(\omega)$$

$\forall \omega \in \Omega_{ps} \subset [0, \pi]$

⚠ Aici, cosinusul este monoton descrescator.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



- Deoarece polinomul trigonometric are K necunoscute, la care se poate adăuga și toleranța din banda de stop(are), este necesar să se determine $(K+1)$ extreme.

Rezultă

Ecuatia generică de determinare a extremelor.

$$\Delta H \left(e^{j\omega_k} \right) = \tilde{w}(\omega_k) \left[\tilde{H}_{id} \left(e^{j\omega_k} \right) - \sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega_k) \right] = (-1)^k \Delta_s \quad \forall k \in \overline{1, K+1}$$



$$\sum_{n=0}^{K-1} \tilde{h}[n] \cos(n\omega_k) + \frac{(-1)^k \Delta_s}{\tilde{w}(\omega_k)} = \tilde{H}_{id} \left(e^{j\omega_k} \right) \quad \forall k \in \overline{1, K+1}$$

• Dacă se alege: $\Delta_p = \Delta_s$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_1 & \cos(2\omega_1) & \cdots & \cos((K-1)\omega_1) & \frac{-1}{\tilde{w}(\omega_1)} \\ 1 & \cos \omega_2 & \cos(2\omega_2) & \cdots & \cos((K-1)\omega_2) & \frac{+1}{\tilde{w}(\omega_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \omega_K & \cos(2\omega_K) & \cdots & \cos((K-1)\omega_K) & \frac{(-1)^K}{\tilde{w}(\omega_K)} \\ 1 & \cos \omega_{K+1} & \cos(2\omega_{K+1}) & \cdots & \cos((K-1)\omega_{K+1}) & \frac{(-1)^{K+1}}{\tilde{w}(\omega_{K+1})} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{h}[0] \\ \tilde{h}[1] \\ \vdots \\ \tilde{h}[K-1] \\ \Delta_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{id} \left(e^{j\omega_1} \right) \\ \tilde{H}_{id} \left(e^{j\omega_2} \right) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{id} \left(e^{j\omega_K} \right) \\ \tilde{H}_{id} \left(e^{j\omega_{K+1}} \right) \end{bmatrix}$$

Sistem liniar.

Nu se cunosc frecvențele extreme.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Se mai poate rezolva sistemul liniar?

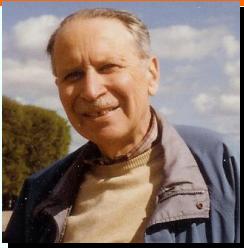


Desigur, dar într-o manieră iterativă,
prin **metoda substituției bipoziționale**.



Această idee aparține lui

1934



Evgheni Yakovlevici
REMEZ
(1895-1975)

Exerciții

- Verificați formula lui Rabiner în cazurile K=1 și K=2.
- Folosind procedeul inducției matematice relativ la K, demonstrați formula lui Rabiner.
- Formula lui Rabiner se bazează, de fapt, pe următoarea **identitate trigonometrică remarcabilă**:

$$\sum_{k=1}^{K+1} \delta_k \cos(n\omega_k) = 0 \quad \forall n \in \overline{0, K-1}$$

- Adică prin înlățuirea următorilor pași:
 - ① Se stabilesc cele (K+1) **frecvențe extreme**.
 - ② Se calculează toleranța din banda de stop(are) pe baza acestor frecvențe.
 - ③ Se determină benzile de frecvență unde toleranța este depășită.

Totuși

Adaptarea metodei lui **Remez** la cazul filtrelor optimale se datorează lui **Parks & McClellan**, cu aportul lui **Rabiner**.

- **Rabiner** indică o formulă de calcul a toleranței, plecînd de la forma matricială sistemului liniar.

$$\Delta_s = \frac{\delta_1 \tilde{H}_{id}(e^{j\omega_1}) + \delta_2 \tilde{H}_{id}(e^{j\omega_2}) + \dots + \delta_{K+1} \tilde{H}_{id}(e^{j\omega_{K+1}})}{-\frac{\delta_1}{\tilde{w}(\omega_1)} + \frac{\delta_2}{\tilde{w}(\omega_2)} - \frac{\delta_3}{\tilde{w}(\omega_3)} + \dots + \frac{(-1)^{K+1} \delta_{K+1}}{\tilde{w}(\omega_{K+1})}}$$

$$\delta_k = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{K+1} \frac{1}{\cos(\omega_k) - \cos(\omega_n)} \quad \forall k \in \overline{1, K+1}$$



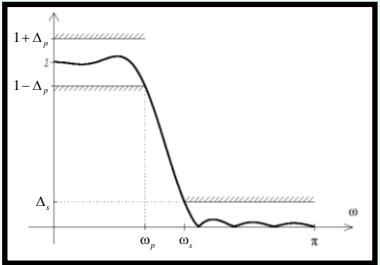
Lawrence R.
RABINER
(n. 1943)

- Prin metoda lui Remez, se variază cele (K+1) **frecvențe extreme**, pînă cînd extretele erorii se încadrează toate în tubul de lărgime egală cu dublul toleranței.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Parks-McClellan(-Rabiner-Remez-Cebîșev)



Date de intrare

F_p [Hz]

F_s [Hz]

T_s [s]

ft

M
 N

(frecvența de trecere a filtrului analogic corespunzător)

(frecvența de stop a filtrului analogic corespunzător)

• Implicit: $F_s = 1.1 \cdot F_p$

(perioada de eșantionare)

• Implicit: $T_s = \frac{2}{2.1 \cdot (F_p + F_s)}$

(tipul de filtru dorit: 1, 2, 3 sau 4)

• Implicit: 1

(ordinul filtrului – întreg pozitiv)

(parametrul de rezoluție al interpolatorului Lagrange)

• Implicit: $N = 16M$

Inițializare

1. Se calculează pulsăriile critice relative.

$$\omega_p = 2\pi F_p T_s \text{ [rad]}$$

$$\omega_s = 2\pi F_s T_s \text{ [rad]}$$

2. Se evaluatează numărul de coeficienți ai polinomului armonic.

$$K = \begin{cases} \frac{M+1}{2}, & M \in 2\mathbb{N}+1 \text{ și } ft=1 \\ \frac{M-1}{2}, & M \in 2\mathbb{N}+1 \text{ și } ft=3 \\ \frac{M}{2}, & M \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

3. Se evaluatează factorul de fază, în funcție de tipul de filtru dorit.

$$\phi \equiv \phi_{ft}$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



24/40

Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Parks-McClellan(-Rabiner-Remez-Cebîșev)

(continuare)



Inițializare

4. Se aleg cele $(K+1)$ pulsații extremele inițiale. $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{K+1}$

- De regulă, majoritatea pulsațiilor extreme se aleg în banda de stop(are).
- Cele două pulsații critice figurează printre pulsațiile extremele inițiale.
- Celelalte pulsații extremele inițiale se pot alege echidistante, de exemplu.

$$\omega_p, \omega_s \in \{\omega_k\}_{k \in \overline{1, K+1}}$$

5. Se inițializează indicatorul de stop buclă iterativă. $\sigma = 0$



Buclă iterativă

Cît timp $\sigma = 0$

1. Se evaluatează inversa ferestrei în pulsațiile extremele curente.

$$\left\{ \tilde{w}^{-1}(\omega_k) = \frac{|\phi(e^{j\omega_k})|}{\phi(e^{j\omega_k})} \right\}_{k \in \overline{1, K+1}}$$

2. Se evaluatează TCFD ideală în pulsațiile extremele curente. $\{\tilde{H}_{id}(\omega_k)\}_{k \in \overline{1, K+1}}$

3. Se evaluatează ponderile corespunzătoare pulsațiilor extremele curente.

$$\delta_k = \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{K+1} \frac{1}{\cos(\omega_k) - \cos(\omega_n)} \quad \forall k \in \overline{1, K+1}$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Parks-McClellan(-Rabiner-Remez-Cebîșev)

(continuare)



Buclă iterativă

Cât timp $\sigma = 0$

4. Se evaluatează toleranța curentă.

$$\Delta_s = \frac{\delta_1 \tilde{H}_{id}(\mathrm{e}^{j\omega_1}) + \delta_2 \tilde{H}_{id}(\mathrm{e}^{j\omega_2}) + \cdots + \delta_{K+1} \tilde{H}_{id}(\mathrm{e}^{j\omega_{K+1}})}{-\delta_1 \tilde{w}^{-1}(\omega_1) + \delta_2 \tilde{w}^{-1}(\omega_2) - \delta_3 \tilde{w}^{-1}(\omega_3) + \cdots + (-1)^{K+1} \delta_{K+1} \tilde{w}^{-1}(\omega_{K+1})}$$

5. Se construiește tabela de interpolare corespunzătoare pulsăriilor extremale curente.

⇒ Tabela e ordonată descrescător.

$x_1 = \cos(\omega_1)$	$x_2 = \cos(\omega_2)$	$x_3 = \cos(\omega_3)$...	$x_k = \cos(\omega_k)$...	$x_{K+1} = \cos(\omega_{K+1})$
$y_1 = \tilde{H}(\mathrm{e}^{j\omega_1})$	$y_2 = \tilde{H}(\mathrm{e}^{j\omega_2})$	$y_3 = \tilde{H}(\mathrm{e}^{j\omega_3})$...	$y_k = \tilde{H}(\mathrm{e}^{j\omega_k})$...	$y_{K+1} = \tilde{H}(\mathrm{e}^{j\omega_{K+1}})$

$$\tilde{H}(\mathrm{e}^{j\omega_k}) = \tilde{H}_{id}(\mathrm{e}^{j\omega_k}) - (-1)^k \Delta_s \tilde{w}^{-1}(\omega_k) \quad \forall k \in \overline{1, K+1}$$

6. Se construiește grila de eșantionare cu rezoluția N.

$$\omega^N = \frac{\pi - \omega_s + \omega_p}{N}$$

pulsăria fundamentală

$$N_p = \left\lceil \frac{\omega_p}{\omega^N} \right\rceil$$

numărul de eșantioane în banda de trecere

$$\omega_n^N = \begin{cases} n \omega^N & , n \in \overline{0, N_p - 2} \\ \omega_p & , n = N_p - 1 \\ \omega_s + (n - N_p) \omega^N & , n \in \overline{N_p, N - 1} \end{cases}$$

pulsăriile eșantioanelor

$$\xi_n = \cos(\omega_n^N)$$

$\forall n \in \overline{0, N-1}$

⇒ Trec prin pulsăriile critice.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Parks-McClellan(-Rabiner-Remez-Cebîșev)

(continuare)



Buclă iterativă

Cât timp $\sigma = 0$

7. Se construiește interpolatorul Lagrange cu rezoluția N, folosind tabela de interpolare.

$$\mathcal{L}(\xi_n) = \sum_{k=1}^{K+1} y_k \frac{(\xi_n - x_1)(\xi_n - x_2) \cdots (\xi_n - x_{k-1})(\xi_n - x_{k+1}) \cdots (\xi_n - x_{K+1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_{K+1})} \quad \forall n \in \overline{0, N-1}$$

8. Se determină extremele șirului de eșantioane ale erorii de caracteristică spectrală.

$$\Delta H(e^{j\omega_n^N}) = \tilde{w}(\omega_n^N) \left[\tilde{H}_{id}(e^{j\omega_n^N}) - \mathcal{L}(\xi_n) \right] \quad \forall n \in \overline{0, N-1}$$

NU

Toate extremele sunt în banda de toleranță?

$$[-\Delta_s, +\Delta_s]$$

DA

Stop buclă iterativă.

$$\sigma = 1$$

9. Se selectează toate pulsatiile corespunzătoare extremelor din afara benzii de toleranță (pulsatiile "rebele").

$$\{\omega_{n_i}^N\}_{i \in \overline{1, N_r}}$$

numărul de pulsatiile "rebele"

10. Se selectează cele mai depărtate pulsati "rebele" de banda de toleranță, în număr de (K+1).

$$\{\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_{K+1}\} \subseteq \{\omega_{n_i}^N\}_{i \in \overline{1, N_r}}$$

Acetă sunt noile pulsatiile extreme curente.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Parks-McClellan(-Rabiner-Remez-Cebîșev)

(continuare)

Dacă sunt mai puțin de $(K+1)$ pulsații "rebele"?



Atunci, se va completa setul cu pulsații corespunzătoare extremelor din banda de toleranță situate cel mai aproape de marginile acestei benzi.

- Cu alte cuvinte, se selectează primele $(K+1)$ pulsații care corespund celor mai ample extreme, indiferent dacă ele sunt rebele sau nu.

În acest punct al algoritmului, s-a ieșit din bucla iterativă fără pulsații extreame "rebele".

$$\{\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{K+1}\} \subset \Omega_{ps} \quad \left| \tilde{w}(\omega_k) [\tilde{H}_{id}(e^{j\omega_k}) - \tilde{H}(e^{j\omega_k})] \right| \leq \Delta_s \quad \forall k \in \overline{1, K+1}$$

Convergența este asigurată de Teorema alternării (Cebîșev).



Pași de finalizare a proiectării filtrului

1. Se rezolvă sistemul liniar redus, pentru determinarea secvenței pondere restrânsă.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_1 & \cos(2\omega_1) & \cdots & \cos((K-1)\omega_1) \\ 1 & \cos\omega_2 & \cos(2\omega_2) & \cdots & \cos((K-1)\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\omega_K & \cos(2\omega_K) & \cdots & \cos((K-1)\omega_K) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{h}[0] \\ \tilde{h}[1] \\ \vdots \\ \tilde{h}[K-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{id}(e^{j\omega_1}) + \Delta_s \tilde{w}^{-1}(\omega_1) \\ \tilde{H}_{id}(e^{j\omega_2}) - \Delta_s \tilde{w}^{-1}(\omega_2) \\ \vdots \\ \tilde{H}_{id}(e^{j\omega_K}) + (-1)^{K+1} \Delta_s \tilde{w}^{-1}(\omega_K) \end{bmatrix}$$

→ $\{\tilde{h}[0], \tilde{h}[1], \dots, \tilde{h}[K-1]\}$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Algoritmul de proiectare a filtrelor optimale FIR, de tip FTJ, prin Metoda Parks-McClellan(-Rabiner-Remez-Cebîșev)

(final)



Pași de finalizare a proiectării filtrului

2. În funcție de tipul filtrului (ft) și de paritatea ordinului M , se deduce secvența pondere originală din cea restrânsă.

Exemplu

$$ft = 1 \quad \& \quad M \in 2\mathbb{N} + 1$$

$$h[0] = h[M - 1] = \frac{1}{2} \tilde{h}[K - 1]$$

$$h[1] = h[M - 2] = \frac{1}{2} \tilde{h}[K - 2]$$

•••



$$K = \frac{M + 1}{2} \in \mathbb{N}$$

•••

$$h[K - 2] = h[K] = \frac{1}{2} \tilde{h}[1] \quad h[K - 1] = \tilde{h}[0]$$

Exercițiu

- Indicați formulele de recuperare a secvenței pondere originale din cea restrânsă, în celelalte 3 cazuri de filtre.

Se pot proiecta și FTB, FTS sau FMB.



Date de ieșire

$\left\{ \begin{array}{l} h \\ \Delta_s \end{array} \right.$ (vectorul secvenței pondere a filtrului optimal)
(toleranță în banda de stop(are), în deciBelii)

- Toleranța în banda de trecere este identică celei din banda de stop(are).
- Algoritmul se concentrează cu precădere pe găsirea pulsărilor optimale din banda de stop(are), deoarece, acolo, minimele spectrale devin importante.
- Ondulațiile din banda de trecere sunt practic invizibile, în raport cu cele din banda de stop(are).



Implementează o variantă cu mai multe tipuri de filtre.

1975

P₂.28

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale

Exemple

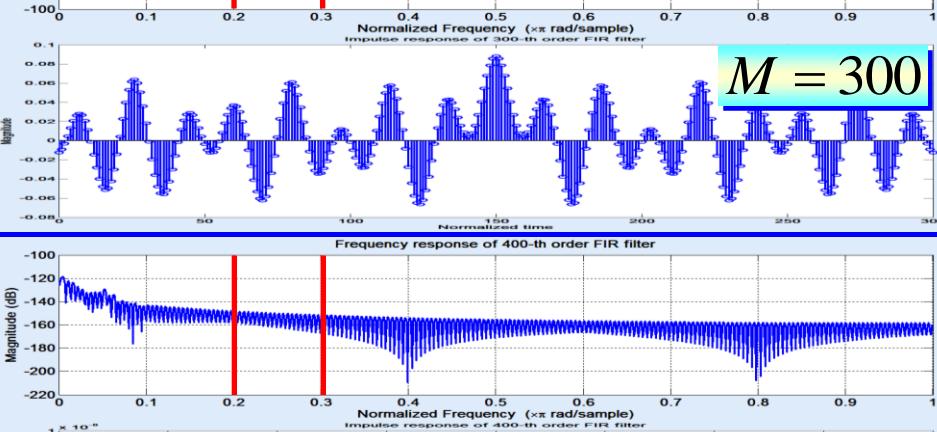
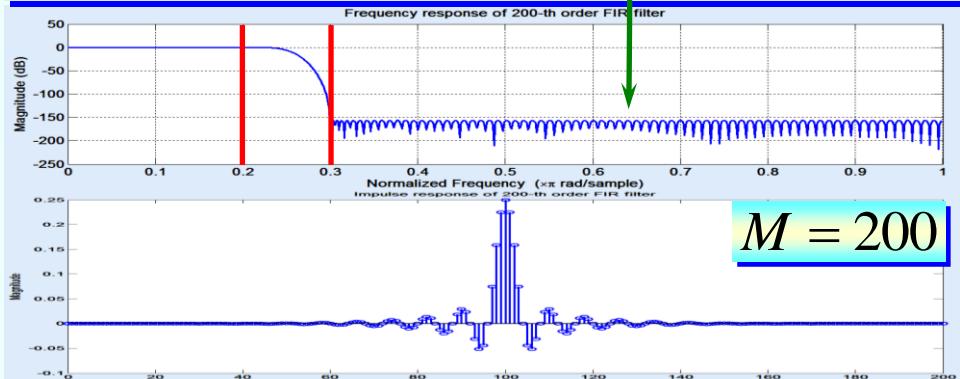
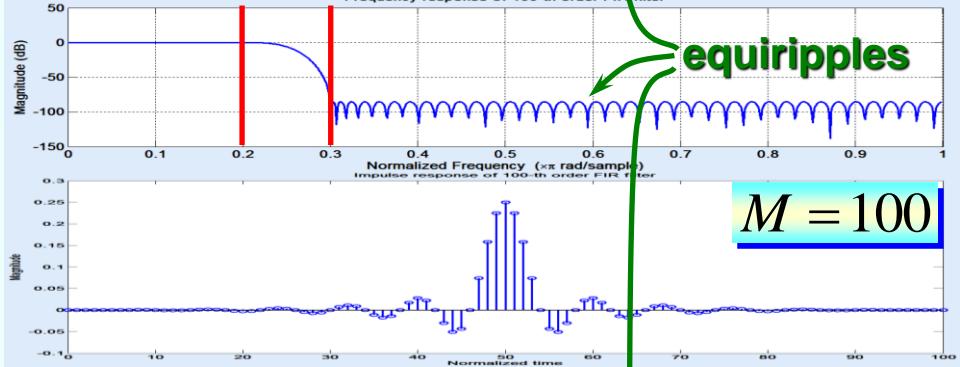
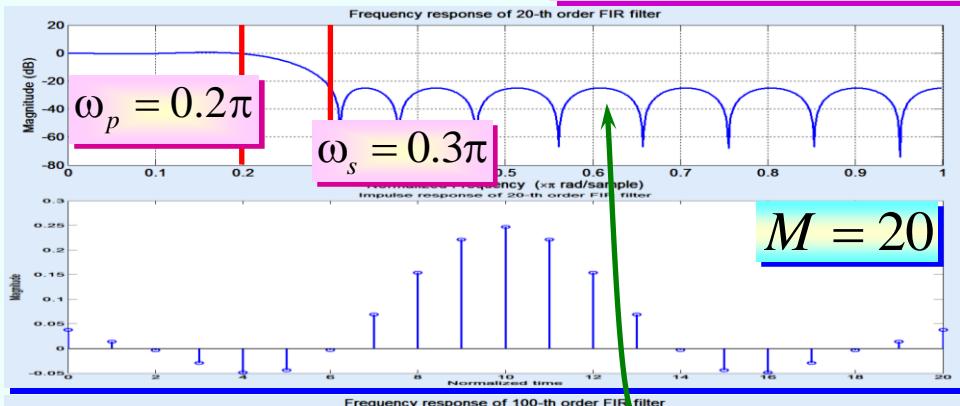
Filtre FIR de tip FTJ, de diferite ordine, proiectate folosind Algoritmul Parks-McClellan

↓ Cu interpolator Lagrange.

Funcție utilă

`firpm`

↓ Aceeași sintaxă ca `firls`.



- Dacă ordinul e prea mare, apar distorsiuni din ce în ce mai mari.

- Cauza principală: fenomenul Runge ce afectează interpolatorul.

↓ Trebuie schimbat interpolatorul.

Proiect

Faza 1 (Optimizarea filtrelor FIR cu fază liniară)

Considerați problema de proiectare a unui FTJ cu răspunsul dorit (5.1), în care ω_p și ω_s au valori fixate. (Alegeți, de exemplu, $\omega_p = 0.3\pi$ și $\omega_s = 0.4\pi$.)

2p

- a. Utilizând funcția **firls**, proiectați filtre FIR optime, în sens CMMP, cu ordine M de la 10 la 100 și observați diferențele dintre caracteristicile lor de frecvență. Convingeți-vă că fază este liniară, atât din răspunsul în frecvență, cât și din valorile coeficienților filtrelor. (Atât aici cât și în restul proiectului, folosiți funcția **freqz** pentru afișarea caracteristicilor în frecvență și **stem** pentru afișarea secvenței pondere. Se recomandă ca rezoluția reprezentării în frecvență să fie de cel puțin o sută de linii spectrale.)

↓ Nu alegeți toti aceleasi date de proiectare (ω_p , ω_s , colectia de valori M).

↓ Etichetați cu atenție axele graficelor afișate.

↓ Comentați rezultatele în raportul final al proiectului.



11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



2p

b. Utilizând funcția **remez** sau **firpm**, proiectați filtre FIR optime în sensul normei infinit, cu ordine M de la 10 la 100 și observați diferențele dintre ele. (Pentru acest tip de filtre, observați înălțimea egală a lobilor din benzile de trecere, respectiv stopare.)

1p

c. Pentru M fixat (cel puțin egal cu 20, dar nu mai mare de 100), trasați pe același grafic răspunsurile în frecvență a două filtre optime, în sens CMMP, respectiv normă infinit. Care este atenuarea minimă a fiecărui, în banda de stopare?

Se poate evalua găsind maximul spectrului în banda de stopare.

d. Introduceți o funcție de ponderare, cum ar fi, de exemplu, următoarea :

1p

$$w(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \in [0, \omega_p] \\ 5 & , \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases} . \quad (5.22)$$

Pentru o singură valoare a ordinului M , reproiectați filtre optime în sens CMMP, respectiv al normei infinit, folosind ponderile (5.22). Comparați-le cu cele de la punctele a, respectiv b. Pentru fiecare dintre filtre, ce raport este între dispersia erorii din banda de stopare și cea a erorii din banda de trecere?

Se măsoară în dB.

• Eroarea în banda de trecere:

$$\frac{e^{-j\omega M/2} - H(e^{j\omega})}{\sqrt{1 + H^2(e^{j\omega})}} \quad \forall \omega \in [0, \omega_p]$$

• Eroarea în banda de stopare:

$$\frac{0 - H(e^{j\omega})}{\sqrt{1 + H^2(e^{j\omega})}} \quad \forall \omega \in [\omega_s, \pi]$$

Funcție utilă

std

P₂.31

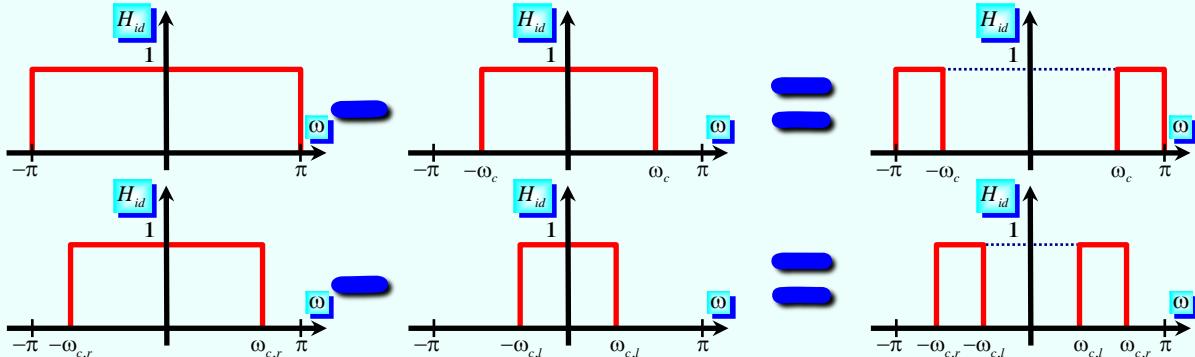
11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



e. Proiectați FTS și FTB, de ordin $M = 20$, cu specificații potrivite scopului propus.

4p

Pentru aceasta, se pot utiliza două abordări. Prima constă în adaptarea corespunzătoare a argumentelor de intrare pentru funcțiile **firls** și **remez** sau **firpm**. În a doua abordare, se consideră că oricare dintre aceste funcții poate proiecta numai FTJ, iar celelalte două filtre, FTS și FTB trebuie obținute prin diferențe de tipul : „ $FTS=1-FTJ$ ”, „ $FTB=FTJ-FTJ$ ”. Trasați răspunsurile în frecvență ale filtrelor proiectate, folosind ambele abordări, pentru a vă convinge de validitatea rezultatelor obținute. Analizați dacă există diferențe între rezultatele celor două abordări. (Puteți calcula separat distanța euclidiană dintre secvențele pondere și cea dintre răspunsurile în frecvență.)



norm

- Pentru a obține secvențele pondere ale filtrelor, trebuie folosită **TCFD inversă**.

⇒ Deduceți expresiile acestora cu creionul pe hîrtie, mai intîi.

⇒ La implementare, țineți cont că originea timpului normalizat indică axa de simetrie a secvențelor pondere (nu e neapărat amplasată la stînga!).

Faza 2 (Proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR cu răspuns ideal complex, fără restricții de fază)

Funcția MATLAB `firls_FTJ_c.m` încărcată pe platforma Moodle (<https://curs.upb.ro>) implementează Algoritmul de proiectare în sens CMMP a unui FTJ de tip FIR, fără restricții de fază, conform descrierii din suportul teoretic al acestei secțiuni. Utilizatorul trebuie să precizeze ordinul filtrului M și următorul răspuns dorit (cu valori complexe) :

$$H_c(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega K} & , |\omega| \leq \omega_p \\ 0 & , \omega_s < |\omega| \leq \pi \end{cases} . \quad (5.23)$$

Pulsăriile ω_p și ω_s , precum și întârzierea de grup K , sunt date de proiectare.

Reamintim că întârzierea de grup (*group delay*) este derivata cu semn schimbat a fazei răspunsului în frecvență al unui filtru. Mai precis :

$$grd \left[H(e^{j\omega}) \right] = -\frac{d}{d\omega} \arg \left[H(e^{j\omega}) \right], \forall \omega \in \mathbb{R}. \quad (5.24)$$

Evident, filtrele cu fază liniară au întârziere de grup constantă.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Pentru înțelegerea programului, precizăm următoarea egalitate (pe care cititorul o poate verifica singur) :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cos(n\omega)d\omega = \omega_2 Sc(n\omega_2) - \omega_1 Sc(n\omega_1). \quad (5.25)$$

Prin Sc s-a notat funcția sinus cardinal (atenuat) (adică $\sin(x)/x$). (Semnalăm că funcția MATLAB **sinc** are o definiție diferită de cea matematică : $\sin(\pi x)/(\pi x)$.) Așa cum s-a menționat, matricea \mathbf{R} , definită în (5.19), moștenește structura Toeplitz simetrică a matricei $\mathbf{C}(\omega)$ definite în (5.14). Înținând cont de forma lui Ω_{ps} (ca reuniune de două intervale închise) și de egalitatea (5.25), rezultă că elementele lui \mathbf{R} au forma următoare :

$$\omega_p Sc[(m-n)\omega_p] - \omega_s Sc[(m-n)\omega_s] + \pi\delta_0[m-n], \quad (5.26)$$

unde $m \in \overline{1, M}$ este indicele de linie, iar $n \in \overline{1, M}$ este indicele de coloană. (Oricum, datorită simetriei, semnificațiile celor doi indici se pot inversa.)

Similar, se obține vectorul \mathbf{r} definit tot în (5.19), înținând seama de expresia (5.23) a răspunsului dorit H_c și de faptul că banda de stopare nu contribuie, de fapt, la calculul integralei.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



2p

a. Folosind funcția **firls_FTJ_c.m**, proiectați mai multe FTJ cu parametrii ω_p și ω_s preluăți de la faza anterioară. Alegeti $M = 20$ și mai multe valori pentru întârzierea de grup K , astfel încât să se verifice inegalitățile $M/4 \leq K \leq 3M/4$. Trasați răspunsurile în frecvență ale filtrelor obținute și secvențele pondere aferente. Observați că fazele sunt neliniare și secvențele pondere nu mai sunt simetrice, mai puțin în cazul $K = M/2 = 10$. Apelați funcția **grpdelay** pentru a vedea deviația de la liniaritate.

3p

b. Modificați funcția **firls_FTJ_c.m** prin adăugarea unui nou argument de ieșire, **pr**, care returnează performanța relativă a filtrului proiectat (în procente). Aceasta se poate evalua astfel :

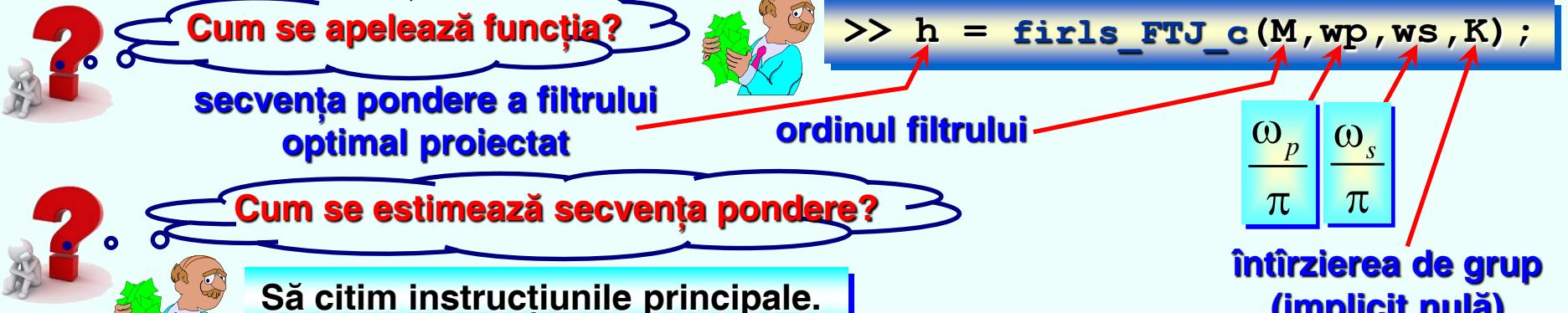
$$pr(\hat{\mathbf{h}}) = 100 \frac{\mathbf{V}_{id} - \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{h}}}{\mathbf{V}_{id}} [\%] \quad (5.27)$$

Unde :

$$\mathbf{V}_{id} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} \left| H_{id}(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega = \int_0^{\omega_p} d\omega = \omega_p \quad (5.28)$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale

Înainte de a continua pasul următor, să analizăm nucleul funcției `firls_FTJ_c`.



$M = (0 : M)'$; **Acesta este suportul secvenței pondere (coloană)**

$R = wp * \text{sinc}(M * wp) - ws * \text{sinc}(M * ws) + \text{eye}(\text{size}(M))$;

- Aici, se construiește prima coloană a matricii de inversat.

$$R_m = \frac{\omega_p}{\pi} \text{Sc}\left(m\omega_p\right) - \frac{\omega_s}{\pi} \text{Sc}\left(m\omega_p\right) + \delta_0[m] \quad \forall m \in \overline{0, M}$$

$\text{Sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$

$R = \text{toeplitz}(R)$;

- Aici, se construiește chiar matricea de inversat (Toeplitz simetrică).

$r = wp * \text{sinc}((K-M) * wp)$;

- Aici, se construiește vectorul liber.

$h = R \setminus r$;

- Aici, se estimează secvența pondere.

$$\hat{h} = R^{-1}r$$

♦ A se revedea formulele din pagina P₂.10.

$$r_m = \frac{\omega_p}{\pi} \text{Sc}\left[(K-m)\omega_p\right] \quad \forall m \in \overline{0, M}$$

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



- b. Modificați funcția `firls_FTJ_c.m` prin adăugarea unui nou argument de ieșire, `pr`, care returnează performanța relativă a filtrului proiectat (în procente). Aceasta se poate evalua astfel :

$$pr(\hat{h}) = 100 \frac{\mathbf{V}_{id} - \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{h}}}{\mathbf{V}_{id}} [\%] \quad (5.27)$$

Unde :



$$\mathbf{V}_{id} = \int_{\omega \in \Omega_{ps}} \left| H_{id}(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega = \int_0^{\omega_p} d\omega = \omega_p \quad (5.28)$$

Proiectați mai multe FTJ optime cu ajutorul noii funcții `firls_FTJ_c.m`, alegând diferite valori ale ordinului M (între 10 și 100, nu neapărat pare) și stabilind întotdeauna întârzierea de grup la mijlocul suportului secvenței pondere ($K = M/2$, chiar dacă ea nu rezultă a fi un număr întreg). Afipați răspunsurile în frecvență și secvențele pondere ale filtrelor proiectate, cu indicarea performanței relative pe primul grafic. Efectuați o comparație riguroasă între aceste filtre, cu referire la performanța relativă.

11.1 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



5p

- c. Modificați funcția `firls_FTJ_c.m` astfel încât să se poată proiecta și FTS sau FTB. (Adaptați calculul performanței relative pentru fiecare dintre cele două tipuri de filtre.) Denumiți noile funcții prin `firls_FTS_c.m`, respectiv `firls_FTB_c.m`. Comparați rezultatele obținute cu cele de la punctul e. al fazei precedente.

Pentru a rezolva acest pas, mai întîi, **citiți cu atenție (ca să înțelegeți bine!)** explicația privind **MCMMP** din debutul acestei prezentări.

Apoi, **calculați cu creionul pe hârtie** elementele generice ale matricii R și vectorului liber r, pentru fiecare dintre cele două noi filtre (FTS, FTB).

În final, implementați relațiile obținute, după exemplul FTJ.

Nu s-ar putea elimina calculul pe hârtie?

Partial, da. Uitați-vă cu atenție la explicația din finalul punctului e. al fazei precedente și observați cum s-ar putea utiliza funcția `firls_FTJ_c`.

Nu eliminați calculul performanței relative.

Recomandare

Pentru a obține punctaj cât mai mare, este bine ca raportul proiectului să conțină cât mai multe comentarii originale, legate de rezultatele obținute.

5p

Faza 3 <optională> (Proiectarea filtrelor FIR optimale, utilizând MCMMP și o mulțime finită de pulsații predefinite)

În PPFO_2CW (6.7), optimizarea se realizează pe întreaga mulțime de pulsații Ω_{ps} . Alternativ, problema poate fi tratată aproximativ, în sensul că mulțimea continuă de pulsații Ω_{ps} se înlocuiește cu o grilă discretă de pulsații $\Omega_{ps}^N \subset \Omega_{ps}$, având $N \in \mathbb{N}^*$ elemente, $\{\omega_n\}_{n=0,N-1}$. De regulă, N se alege de valoare superioară ordinului filtrului, M . Atunci, se poate formula următoarea problemă de proiectare în puncte discrete (PPFO_2CD) :

Plecând de la un răspuns dorit H_c , cunoscut în mulțimea discretă finită de pulsații $\Omega_{ps}^N = \{\omega_n\}_{n=0,N-1}$, se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență este cel mai aproape de răspunsul H_c , în sensul normei euclidiene discrete. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare :

$$\min_h \sum_{n=0}^{N-1} |H_c(\omega_n) - H(\omega_n)|^2. \quad (5.29)$$

Implementați o rutină ce rezolvă problema de optimizare PFO_2CD prin MCMMP. Apoi, rezolvați PPFO_2CD alegând diferite valori ale parametrilor M , K și N , pentru $\omega_n = n\pi/N$, $\forall n \in \overline{0, N-1}$. Comparați filtrele obținute cu cele proiectate în fazele anterioare ale proiectului.

Recomandare

Pasul cel mai important pentru rezolvarea acestei faze este cel de formulare și rezolvare a problemei de optimizare.

- Exprimăți problema de proiectare sub forma unui sistem incompatibil:

$$Y = \Phi \times \Theta$$

$M+1$

N

- Aceasta va defini criteriul pătratic.

00.0 PRJ.PS#2: Proiectarea filtrelor FIR optimale



Nu
copiați
!!!