

## Inversa de A utilizando la Desc.LU

$$\text{Si } A=LU \rightarrow A^{-1}=U^{-1}L^{-1}$$

Cálculo de  $U^{-1}$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} & = \begin{array}{|c|} \hline \diagdown \\ \hline \end{array} \\
 U & V & = I
 \end{array}$$

$$U_{nn} * V_{nn} = 1 \Rightarrow V_{nn} = 1/U_{nn}$$

$$U_{1:n-1,1:n-1} * V_{1:n-1,n} + V_{nn} * U_{1:n-1,n} = 0 \Rightarrow \text{Resolver } U_{1:n-1,1:n-1} * V_{1:n-1,n} = -V_{nn} * U_{1:n-1,n}$$

$$U_{1:n-1,1:n-1} * V_{1:n-1,1:n-1} = I_{n-1}$$

## Algoritmo para el cálculo de $U^{-1} \rightarrow V$

Para  $j = n, n-1, \dots, 1$

$$V_{jj} = 1/U_{jj}$$

$$y = -V_{jj} * U_{1:j-1,j}$$

$$\text{Resolver } U_{1:j-1,1:j-1}x = y$$

$$V_{1:j-1,j} = x$$

FinPara

$$\text{Coste: } \frac{n^3}{3} \text{ Flops}$$

## Cálculo de $L^{-1}$

$$M_{n-1}M_{n-2} \cdots M_1 A = U \Rightarrow$$

$$L = (M_{n-1}M_{n-2} \cdots M_1)^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1} \cdots M_{n-1}^{-1}$$

$$L^{-1} = M_{n-1}M_{n-2} \cdots M_1$$

$$\text{Si } M_j = I - re_j^T \Rightarrow M_j^{-1} = I + re_j^T$$

**Ejemplo:**

$$\text{Si } L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 4 & 5 & 1 & \\ 3 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -5 & 1 & \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & 0 & 1 & \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 6 & -5 & 1 & \\ -35 & 28 & -6 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ -4 & -5 & 1 & \\ -3 & -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

**Cálculo de  $A^{-1}=U^{-1}L^{-1}$**

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = U^{-1}M_{n-1}M_{n-2} \cdots M_1$$

Producto de  $V^*M_j$

$$VL^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} v_{11} & v_{11} & v_{11} & v_{11} \\ v_{11} & v_{11} & v_{11} & v_{11} \\ v_{11} & v_{11} & v_{11} & v_{11} \\ v_{11} & v_{11} & v_{11} & v_{11} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & -5 & 1 & \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sólo se modifica la columna j de V

$$(VM_j)_j = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \\ v_{42} \end{bmatrix} - 5 * \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \\ v_{43} \end{bmatrix} - 2 * \begin{bmatrix} v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \\ v_{44} \end{bmatrix}$$

## Algoritmo para el cálculo de $A^{-1}=U^{-1}L^{-1}$

Entrada:  $V = U^{-1}$ ,  $L$

Salida:  $A^{-1}$  almacenada en  $V$

Para  $k = n - 1, n - 2, \dots, 1$

Para  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$

Para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$V_{ik} = V_{ik} - L_{jk} * V_{ij}$$

FinPara

FinPara

FinPara

Coste total del

cálculo de  $A^{-1}$  :  $2 n^3 \text{ Flops}$

Desc. LU:  $\frac{2}{3} n^3 \text{ Flops}$

Cálculo de  $U^{-1}$  :  $\frac{1}{3} n^3 \text{ Flops}$

Cálculo de  $U^{-1}L^{-1}$  :  $n^3 \text{ Flops}$

## Desc. LU sin pivotamiento

```
function [L,U]=F_LU(A);

m=size(A,1);

for k=1:m-1
    for i=k+1:m
        A(i,k)=A(i,k)/A(k,k);
        for j=k+1:m
            A(i,j)=A(i,j)-A(i,k)*A(k,j);
        end
    end
end

U=triu(A);
L=tril(A);
for i=1:m
    L(i,i)=1;
end
```

## Cálculo de $U^{-1}$

```
function X=F_InversaU(U);

n=size(U,1);

X=zeros(n);

for k=n:-1:1
    X(k,k)=1/U(k,k);
    c=-X(k,k)*U(1:k-1,k);
    y=U(1:k-1,1:k-1)\c;
    X(1:k-1,k)=y;
end
```

## Cálculo de la inversa de A a partir de la L y la U

```
function iA=F_InvA(L,U);  
  
n=size(U,1);  
  
iA=F_InversaU(U);  
  
for k=n-1:-1:1  
    for j=k+1:n  
        iA(:,k)=iA(:,k)-L(j,k)*iA(:,j);  
    end  
end
```

# Test

```
%Testea la inversa de A obtenida por el algoritmo F_InvA  
Clear;clc;
```

```
n=1000;
```

```
% Genera la matriz A, nxn  
A=rand(n);
```

```
%Descomposicion LU de A  
[L,U]=F_LU(A);
```

```
disp('Comprueba la F-norma de A-L*U')  
norm(A-L*U,'fro')
```

```
%Calcula la inversa de A  
iA=F_InvA(L,U);
```

```
disp('Comprueba la F-norma de iA*A-I')  
norm(iA*A-eye(n),'fro')
```



# Resultados

n=10

Comprueba la F-norma  
de  $A-L*U$

ans =

1.2212e-15

Comprueba la F-norma  
de  $iA*A-I$

ans =

7.9115e-15

>>

n=100

Comprueba la F-  
norma de  $A-L*U$

ans =

9.4738e-13

Comprueba la F-  
norma de  $iA*A-I$

ans =

2.5950e-09

>>

n=1000

Comprueba la F-  
norma de  $A-L*U$

ans =

1.2273e-10

Comprueba la F-  
norma de  $iA*A-I$

ans =

1.6771e-06

>>