Algoritmos Paralelos Matriciales en Ingeniería
Master en Computación Paralela y Distribuida

OPTIMIZACIÓN

OPTIMIZACIÓN
Introducción

Planteamiento del problema general:

Dada una función f(x)

$$f: \Re^n \longrightarrow \Re$$

Hallar $x=(x_1, ..., x_n)^T$ de forma que f(x) es un mínimo de la función f

Maximizar f(x) $\Rightarrow$ Minimizar –f(x)

OPTIMIZACIÓN
Introducción

Problema con restricciones:

Minimizar f(x) sujeto a:

$G_i(x) \geq 0$; $i=1,...m_d$

$G_i(x)=0$; $i= m_d+1,...m_i$

$x_l \leq x \leq x_u$

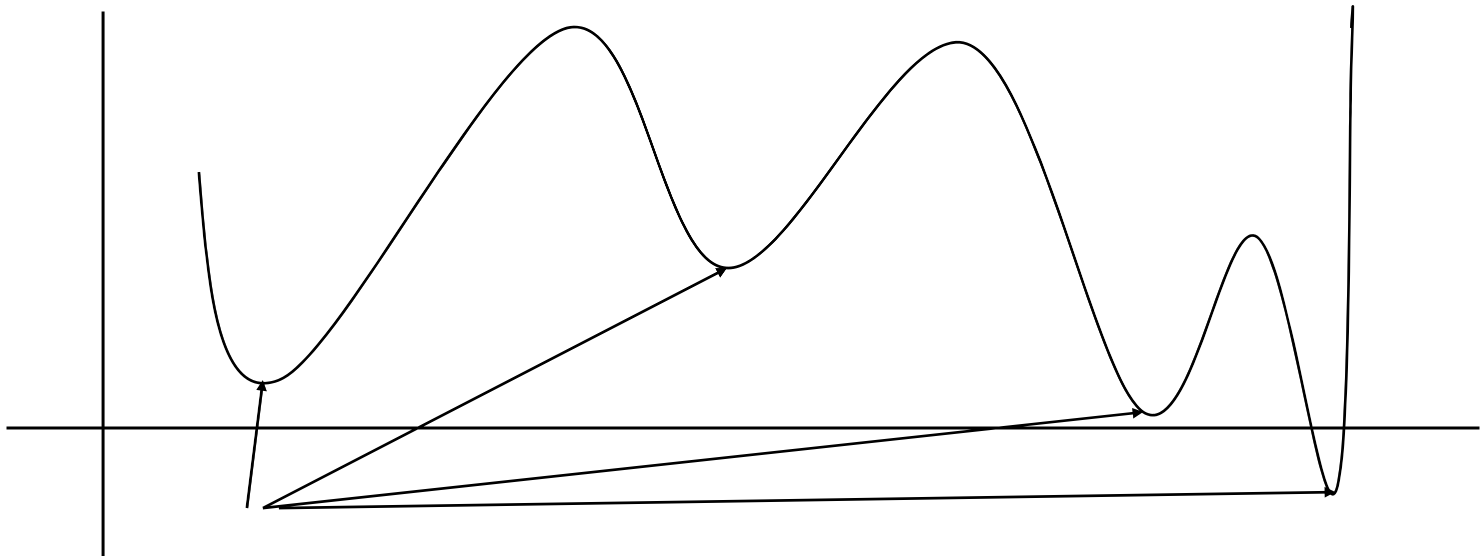
OPTIMIZACIÓN
Minimización en 1 variable

Dada una función f(x)

$$f: \Re \longrightarrow \Re$$

, hallar el mínimo: $f'(x)=0$, $f''(x)>0$

MÍNIMO LOCAL



OPTIMIZACIÓN

Minimización multidimensional (sin restricciones)

Dada una función f(x)

$$f:\Re^n \longrightarrow \Re$$

Gradiente: $\nabla f(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_N} \end{pmatrix}$

Hessiano: $H(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial X_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$

OPTIMIZACIÓN

Minimización multidimensional (introducción)

Dada una función f(x)

$$f:\Omega \longrightarrow \Re, \quad \Omega \subset \Re^n$$

Proposición (Condición necesaria de primer orden): Si $\bar{x}$ es un punto interior de Ω, y es un mínimo local de f en Ω, se cumple que $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

OPTIMIZACIÓN

Minimización multidimensional (introducción)

Condiciones suficientes de segundo orden:

Proposición (Condiciones suficientes de segundo orden):
Si $f \in C^2$ está definida en Ω, donde $\bar{x}$ es un punto interior, y además se cumple que:

1) $\nabla f(\bar{x}) = 0$
2) La matriz Hessiana $\nabla^2 f(\bar{x})$ es definida positiva

Entonces $\bar{x}$ es un mínimo local estricto de f

OPTIMIZACIÓN

Métodos QUASI-Newton (Métrica variable)

Por la condición de primer orden, en el mínimo x^* se tiene que cumplir: $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)=0$

Utilizando el método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones no lineales $\nabla f(x)=0$, obtendríamos $x^{(k+1)}$ resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$A \cdot \Delta x = -\nabla f(x^{(k)})$$

Siendo $A = \nabla^2 f(x^{(k)})$ Matriz Hessiana de $f(x)$

Y actualizando $x^{(k)}$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x$$

OPTIMIZACIÓN

Métodos QUASI-Newton (Métrica variable)

Problema 1: El método de Newton necesita tanto el cálculo del Hessiano como su factorización en cada iteración.

Problema 2: Dependiendo del valor de la aproximación inicial $x^{(0)}$, el método de Newton podría llevarnos a un máximo o a un punto de silla.

Necesitamos ir en direcciones $\boldsymbol{p}$ (que "desciendan" hacia el mínimo de f). Estas direcciones son las que cumplen:

$$p^T \cdot \nabla f < 0 \Rightarrow \left(x^{(k+1)} - x^{(k)}\right)^T \cdot \nabla f < 0$$

OPTIMIZACIÓN

Métodos QUASI-Newton (Métrica variable)

En el caso del método de Newton tenemos:

$$\nabla f = -A \cdot \left(x^{(k+1)} - x^{(k)} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x^{(k+1)} - x^{(k)} \right)^T \nabla f = -\left(x^{(k+1)} - x^{(k)} \right)^T A \cdot \left(x^{(k+1)} - x^{(k)} \right) < 0$$

Para que la dirección sea de "descenso", la matriz Hessiana A debe ser **definida positiva**. Así garantizamos que vamos hacia un mínimo (En el método de Newton, esto no está garantizado).