Máster Universitario en Computación Paralela y Distribuida
Algoritmos Paralelos Matriciales en Ingeniería

Tema 3.

Conceptos básicos sobre el cálculo de Valores y Vectores Propios

Conceptos básicos sobre el cálculo de Valores y Vectores Propios

Bibliografía recomendada

J.Wilkinson. “The Algebraic Eigenvalue Problem”. Oxford Univ. Press. 1965
G.H.Golub and C.F. Van Loan. "Matrix Computations" The Johns Hopkins Univ. Press, 3rd Ed. Baltimore, 1996.
B.N. Datta, “Numerical Linear Algebra and Applications”, Brooks/Cole Publishing Company, Boston, 1994.
J.J. Dongarra et al., “Numerical Linear Algebra for High-Performance Computers” ,SIAM, Philadelphia, 1998.
B.Parlett. “The Symmetric Eigenvalue Problem”. Prentice-Hall Inc

Lecturas recomendadas:

G.H.Golub and C.F. Van Loan. "Matrix Computations" The Johns Hopkins Univ. Press, 3rd Ed. Baltimore, 1996. **Capítulos 7 y 8**
J.Wilkinson. “The Algebraic Eigenvalue Problem”. Oxford Univ. Press. 1965. **Capítulo 1 y retazos**

Valores y Vectores Propios

$$Sean\ A \in C^{n\times n}, v \in C^n \,/\, v \neq 0, \lambda \in C$$

$Si\ Av = \lambda v$ decimos que

$$\lambda\ es\ un\ valor\ propio\ de\ A\ y\ v\ es\ su\ correspondiente\ vector\ propio$$

$$\lambda(A) \equiv \{Valores\ propios\ de\ A\} \equiv Espectro\ de\ A$$

Ecuación característica de A

$$Av - \lambda v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + (-1)^n \lambda^n = 0$$

Teorema de Abel:
No se pueden resolver de forma general, ecuaciones polinómicas de grado mayor que 4 mediante fórmulas que contengan únicamente un número finito de +, -, x, : , $\sqrt{}$

Transformaciones de semejanza:
A es semejante a B si:

$$B = XAX^{-1}$$

Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A

Teorema fundamental de invariancia

Dada la matriz

$$X \in C^{n\times n}, invertible \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \text{ es valor propio de } A \\ v \text{ es vector propio de } A \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} \lambda \text{ es valor propio de } XAX^{-1} \\ Xv \text{ es vector propio de } XAX^{-1} \end{array}$$

Idea básica para el cálculo de valores y vectores propios

$$A \xrightarrow{\text{Transformación de Semejanza}} Forma\ condensada \xrightarrow{\text{Transformación de Semejanza}} Forma\ canónica$$

Definiciones:
Forma canónica: se pueden obtener los valores propios en un número finito de pasos
Forma condensada: forma matricial no canónica pero próxima a la canónica

Matriz conjugada traspuesta: $A^H = \overline{A}^T$

Matriz Hermitiana: A es hermitiana si $A^H = \overline{A}^T$

Matriz Unitaria: A es unitaria si $A^H = A^{-1}$

Círculos de Gershgorin:
Proposición: Cada valor propio de *A* está situado dentro de, al menos, un disco de centro a_{ii} y radio $\sum_{i \neq j} |a_{ij}|$

Proposición: Si un número ***s*** de discos del teorema anterior forman un dominio conexo, aislado de otros discos, entonces precisamente ***s*** valores propios de *A* pertenecen al dominio conexo.

Matriz *companion* de una matriz: matriz asociada a un polinomio característico:

Sea $A \in C^{n\times n}$.

Si expresamos la ecuación característica de *A* así:

$$(-1)^n\left[\lambda^n - p_{n-1}\lambda^{n-1} - p_{n-2}\lambda^{n-2} - \ldots - p_0\right] = 0$$

Se dice que las matrices

$$\begin{bmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} & \cdots & p_1 & p_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ .. & .. & \ldots & .. & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & p_2 \\ .. & .. & \ldots & .. & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & p_{n-1} \end{bmatrix}$$

están en forma *companion.* Estas matrices tienen la misma ecuación característica que *A.*

Descomposición QR compleja

Matrices de Householder Complejas

$$P = I - 2ww^H \text{ con } w^H w = 1$$

Propiedades

- Las matrices de Householder Complejas son unitarias:

$$P^H P = PP^H = I$$

- Si $y = Px$ entonces $y^H y = x^H x$ y $x^H y = x^H Px$ es un número real

- Si $y = Px$ entonces $2(y-x)^H x = 2(y^H x - x^H x) =$

$$= y^H x + x^H y - x^H x - y^H y = -(y-x)^H (y-x)$$

Descomposición QR compleja

- Como elegir P para que $y = Px$

Puesto que $y = Px = (I - 2ww^H)x = x - 2(w^H x)w \Rightarrow y - x = -2(w^H x)w$
hay que elegir

w en la dirección de y-x:

$w = k(y\text{-}x) = Me^{i\alpha}(y - x)/\|x - y\|$ con $w^H w = 1$, y por tanto $M = 1$.

Es decir:
$$w = e^{i\alpha} \frac{(y - x)}{\sqrt{(y - x)^H (y - x)}}$$

Entonces
$$Px = (I\text{-}2ww^H)x = x - \frac{2(y - x)(y - x)^H}{\|y - x\|^2} x = x - \frac{(y - x)(2(y - x)^H x)}{\|y - x\|^2} =$$
$$= x + \frac{(y - x)(y - x)^H (y - x)}{\|y - x\|^2} = x + (y - x) = y$$

Descomposición QR compleja

- Como elegir P para que $y = Px = ke_1$

es decir, para que haga ceros en las (n-1) primeras componentes de x:

Hay que elegir

w en la dirección de y-x y el vector y en la dirección de e_1

Sugerencia:

$$\text{Si } x = [r_i e^{i\vartheta_i}] \quad \text{elegir } y = \pm\|x\| e^{i\vartheta_1} e_1 \text{ y } w = \frac{(x\text{-}y)}{\|x\text{-}y\|}$$

Entonces

$$Px = x - \frac{(x-y)2(x-y)^H x}{\|x-y\|^2} = x - (x-y) = y = ke_1$$

$$\text{ya que } \frac{2(x-y)^H x}{\|x-y\|^2} = \frac{2(x \pm \|x\| e^{i\vartheta_1} e_1)^H x}{(x \pm \|x\| e^{i\vartheta_1} e_1)^H (x \pm \|x\| e^{i\vartheta_1} e_1)} = \frac{2(\|x\|^2 \pm \|x\| r_1)}{(\|x\| \pm 2\|x\| r_1 + \|x\|)} = 1$$

Algoritmo de triangularizacion de Householder: QR compleja

Entrada: $A \in C^{m \times n}$

Salida:$R \in C^{m \times n}$, tal que R es triangular superior y sobreimprime A

$R = A;$

Para $\mathrm{j} = 1,2,\ldots,\mathrm{n}$

$x = R(j{:}m,j);$

Si $x_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$ calcula c y s, parte real e imaginaria de $e^{i\vartheta_1} = c + s*i$

$\mathrm{y} = [\|\mathrm{x}\|(c + s*i),0,0,\ldots,0]^T \in C^{(m-j+1)}$

$$\mathrm{w} = \frac{\mathrm{x - y}}{\|\mathrm{x - y}\|}$$

Para k = j : n

$\mathrm{R(j:m,k) = R(j:m,k) - 2 * w^H R(j:m,k) * w}$

finpara

finpara

$$D = diag\left(\frac{R_{11}}{|R_{11}|},\frac{R_{22}}{|R_{22}|},\ldots,\frac{R_{nn}}{|R_{nn}|}\right)$$

$R = D^H R$

Reducción a formas condensadas

Matriz de Hessenberg

Irreducida:

Superior $a_{ij} = 0, i > j+1$ $\qquad a_{i+1,i} \neq 0, i = 1,2,\ldots,n-1$

Inferior $a_{ij} = 0, j > i+1$ $\qquad a_{j,j+1} \neq 0, j = 1,2,\ldots,n-1$

Reducción ortogonal de semejanza a la forma de Hessenberg

$$P_{n-2}\ldots P_2 P_1 \begin{bmatrix} x & \boxed{x \quad x \quad x} \\ \boxed{x} & x & \boxed{x \quad x} \\ x & \boxed{x} & x & x \\ x & x & x & x \end{bmatrix} P_1^H P_2^H \ldots P_{n-2}^H = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix}$$

$Householder(\beta, v, x, i)$

$$\rho = \mathrm{sgn}(x_i)(\sum_{j=i}^{n} x_i^2)^{1/2}$$

$$\beta = \rho(\rho + x_i)$$

$$v = [0\,0\ ..\ 0\ \rho + x_i\ x_{i+1}\ ..x_n]^T$$

$Para\ i = 1,2,..,n-2$

$\quad Householder(\beta, v, A_i, i+1)$

$\quad Para\ j = i.i+1,..,n$

$\qquad AplicaHouseholder(\beta, v, A_j)$

$\quad Para\ k = 1,2,..,n$

$\qquad AplicaHouseholderT(\beta, v, A_{(k)})$

AplicaHouseholder (β, v, y)

$$\gamma = (1/\beta)v^T y$$

$$y = y - \gamma v$$

AplicaHouseholderT (β, v, y^T)

$$\gamma = (1/\beta)v^T y$$

$$y = y - \gamma v$$

Reducción a formas canónicas

Reducción a la forma diagonal: $X^{-1}AX = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

Proposición: Si $A \in C^{n\times n}$ tiene n valores propios distintos entonces el conjunto de sus vectores propios es Linealmente Independiente

Proposición: Si $A \in C^{n\times n}$ tiene n valores propios distintos entonces existe una matriz $X \in C^{n\times n}$. no singular, tal que $X^{-1}AX = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

Proposición: Si $A \in C^{n\times n}$ tiene un conjunto de n vectores propios Linealmente Independientes entonces existe una matriz $X \in C^{n\times n}$. no singular tal que $X^{-1}AX = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$

Proposición: Existen matrices no singulares para las que no es posible encontrar un conjunto de n vectores propios Linealmente Independientes. Ejemplo: la **matriz simple de Jordan de orden *r***

$$A_r = \begin{bmatrix} a & 1 & & \\ & a & .. & \\ & & .. & 1 \\ & & & a \end{bmatrix} \in C^{r\times r}$$

Matriz defectiva: No puede ser diagonalizada utilizando transformaciones de semejanza

Proposición:
Toda matriz $A \in C^{n\times n}$ puede ser reducida a la ***Forma Canónica de Jordan*** utilizando transformaciones de semejanza, es decir, si A tiene r valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ con multiplicidades $m_1, m_2, ..., m_r$, con $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$, existe una transformación de semejanza X tal que

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & .. & \\ & & & B_r \end{bmatrix}$$

y $B_i = diag(J_{f_1(\lambda_i)}(\lambda_i), J_{f_2(\lambda_i)}(\lambda_i), ..., J_{f_s(\lambda_i)}(\lambda_i))$ con $f_1(\lambda_i) + f_2(\lambda_i) + ..., + f_s(\lambda_i) = m_i$

siendo $J_{f_j(\lambda_i)}(\lambda_i)$ formas simples de Jordan correspondientes $valor\ propio\ \lambda_i$

Reducción a formas canónicas

Reducción a la forma triangular:

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} \lambda_1 & y & .. & y \\ & \lambda_2 & .. & y \\ & & .. & .. \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Proposición: Dada $A \in C^{n\times n}$ existe una matriz $X \in C^{n\times n}$, no singular, tal que $X^{-1}AX$ es triangular superior

Corolario: Dada $A \in C^{n\times n}$ existe una matriz unitaria, $P \in C^{n\times n}$ tal que $P^H AP$ es triangular superior

Definición: Forma Real de Schur
Sea $A \in \Re^{n\times n}$. Si

$$A = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & .. & T_{1r} \\ & T_{22} & .. & T_{2r} \\ & & .. & .. \\ & & & T_{rr} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{con } T_{ii} \in \Re^{1\times 1} \\ \text{OR} \quad T_{ii} \in \Re^{2\times 2}, \quad \forall i \end{array}$$

se dice que A tiene la **Forma Real de Schur**

Proposición: Si A es una matriz nxn **Real** existe $X \in \Re^{n\times n}$, no singular (ortogonal) tal que $X^{-1}AX = T \in \Re^{n\times n}$ estando T en **Forma Real de Schur**

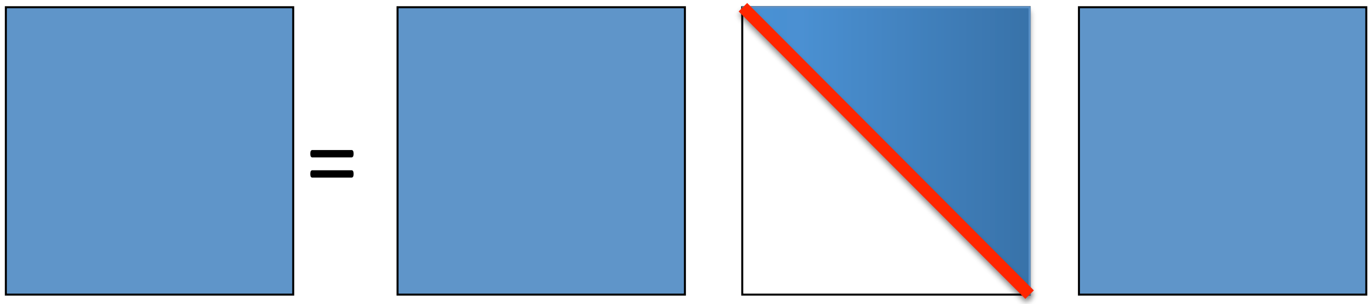
Proposición: Si A tiene la **Forma Real de Schur,**

$$\lambda(A) = \lambda(T_{11}) \cup \lambda(T_{rr}) \cup ... \cup \lambda(T_{rr})$$

La Descomposición en Valores Propios

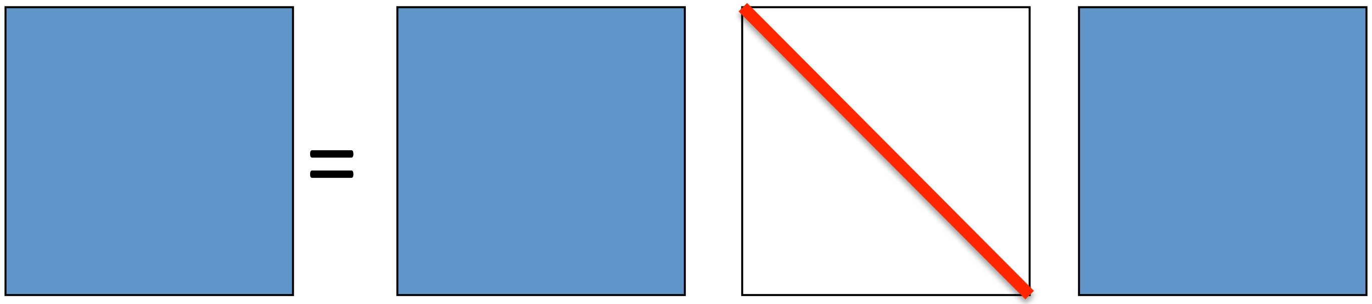
A no simétrica $A \neq A^T$

$Q^T Q = I$



A $\qquad Q$ $\qquad \Lambda$ $\qquad Q^T$

A simétrica $A = A^T$



A $\qquad Q$ $\qquad \Lambda$ $\qquad Q^T$

Ejemplos

```
A =

     2     4     5
     3     1     4
     5     7     2
```

```
>> eig(A)

ans =

   10.9226
   -1.9226
   -4.0000
```

```
>> [V,S]=eig(A)

V =

   -0.5815   -0.8461   -0.4082
   -0.4492    0.4212   -0.4082
   -0.6783    0.3268    0.8165

S =

   10.9226         0         0
         0   -1.9226         0
         0         0   -4.0000

>>
>> V'*V

ans =

    1.0000    0.0811   -0.1330
    0.0811    1.0000    0.4403
   -0.1330    0.4403    1.0000
```

```
>> norm(A*V-V*S,'fro')

ans =

   4.5152e-15

>>
```

Ejemplos

```
A =

     7     4     2
     3     5     1
     4     8     6
```

```
>> eig(A)
ans =
   12.263
   2.8687 +   0.64391i
   2.8687 -   0.64391i
```

```
>> [V,S]=eig(A)
V =
 Columns 1 through 2                              Column 3

   0.54451      -0.13273 -    0.17844i     -0.13273 +    0.17844i
   0.33104      -0.29208 +    0.16293i     -0.29208 -    0.16293i
   0.77067       0.91579                    0.91579

S =
 Columns 1 through 2                   Column 3

   12.263        0                          0
     0         2.8687 +   0.64391i          0
     0           0                        2.8687 -   0.64391i
```

```
>> norm(A*V-V*S,'fro')
ans =

 8.6369e-015
```

```
>> V'*V
ans =
 Columns 1 through 2                                           Column 3

   1                          0.53681 -   0.043226i    0.53681 +   0.043226i
 0.53681 +   0.043226i          1                      0.88322 +   0.04781i
 0.53681 -   0.043226i     0.88322 -    0.04781i          1
```

Ejemplos

```
A =

     1     3     5
     3     4     2
     5     2     7
```

```
>> eig(A)

ans =

   -2.3146
    3.0227
   11.2919
```

```
>> [V,S]=eig(A)

V =

   -0.8688   -0.0506    0.4925
    0.2844   -0.8653    0.4128
    0.4053    0.4987    0.7662


S =

   -2.3146         0         0
         0    3.0227         0
         0         0   11.2919

>> V'*V

ans =

    1.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    1.0000
```

```
>> norm(A*V-V*S,'fro')

ans =

   1.2658e-15
```

Ejemplos

```
A =

     3     1     1
     1     5     2
     1     2     8
```

```
>> eig(A)

ans =

    2.5789
    4.1331
    9.2880
```

```
>> [V,S]=eig(A)

V =

    0.9355    0.2843    0.2098
   -0.3507    0.8196    0.4531
   -0.0432   -0.4974    0.8664

S =

    2.5789         0         0
         0    4.1331         0
         0         0    9.2880

>> V'*V

ans =

    1.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000    0.0000
    0.0000    0.0000    1.0000
```

```
>> norm(A*V-V*S,'fro')

ans =

   2.4425e-15
```

Algoritmos para el cálculo de Valores y Vectores Propios

Método de la Potencia

Sea $A \in C^{n \times n}$ una matriz cuyos valores propios verifican $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n|$

y sea $q \in C^n$ un vector complejo cualquiera.

Entonces $\lim_{i \to \infty} A^i q \to v_1$, siendo v_1 la dirección del vector propio dominante v_1

Algoritmo iterativo de la Potencia

$Elegir\ q \in C^n$

$Para\ i = 1,2,\ldots,\ hasta\ convergencia$

$z = Aq$

$q = z / \|z\|_2$

$\lambda = q^H Aq$

$Finpara$

Algoritmo iterativo de la Potencia Inversa

$Elegir\ q \in C^n$

$Para\ i = 1,2,\ldots,\ hasta\ convergencia$

Resolver $Az = q$

$q = z / \|z\|_2$

$\lambda = q^H Aq$

$Finpara$

Algoritmos para el cálculo de Valores y Vectores Propios

Algoritmo iterativo de la Potencia con desplazamiento

$Elegir\ q \in C^n$

$Para\ i = 1, 2, ..., \ hasta\ convergencia$

$\quad Elegir\ el\ desplazamiento\ \alpha \in C$

$\quad z = (A - \alpha I)q$

$\quad q = z / \|z\|_2$

$\quad \lambda = q^H A q$

$Finpara$

Algoritmo Iteración Inversa

$Elegir\ q \in C^n$

$Para\ i = 1, 2, ..., \ hasta\ convergencia$

$\quad Elegir\ el\ desplazamiento\ \alpha$

$\quad$ Resolver $(A - \alpha I)z = q$

$\quad q = z / \|z\|_2$

$\quad \lambda = q^H A q$

$Finpara$

Ejercicios propuestos

1. Escribe un programa en Matlab que reduzca una matriz cuadrada, real, a la forma de Hessenberg superior utilizando transformaciones de semejanza ortogonales
2. Escribe un programa en Matlab que reduzca una matriz simétrica, real, a la forma de tridiagonal utilizando transformaciones de semejanza ortogonales 3.
3. Escribe un programa en Matlab que calcule la triangularización compleja de una matriz utilizando matrices de Householder complejas.
4. Escribe un programa en Matlab que calcule la triangularización compleja de una matriz utilizando matrices de Givens complejas.
5. Escribe un programa en Matlab que calcule el valor propio dominante de una matriz real.
6. Escribe un programa en Matlab que calcule r<n valores propios de una matriz real, nxn.
7. Escribe un programa en Matlab que calcule el valor propio de menor módulo de una matriz real.
8. Escribe un programa en Matlab que calcule el valor propio dominante de una matriz real utilizando desplazamiento
9. Escribe una función en Matlab que tome como entrada una matriz y una aproximación a un valor propio y devuelva el vector propio correspondiente.
10. Escribe una función en Matlab que tome como entrada una matriz y dibuje en el plano complejo los círculos de Gershgorin y la posición de los valores propios