Seminarul 3

1. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?

2. O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

3. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:
a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?
b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?

4. O urnă conține o bilă cu cifra 1, două bile cu cifra 2, trei bile cu cifra 3 și patru bile cu cifra 4. Se extrag aleator fără repunerea bilei patru bile pentru a forma un cod X cu 4 cifre. Calculați probabilitățile evenimentelor $X = 1234$ și $X = 4321$.

• **Modelul binomial:** În cadrul unui experiment pot să apară evenimentele A (*succes*) sau $\bar{A}$ (*insucces*). Un succes are loc cu $P(A) = p$, un insucces are loc cu $P(\bar{A}) = 1 - p$. Probabilitatea de a obţine k succese în n repetări independente ale experimentului este

$$b(k; n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \{0, \ldots, n\}.$$

▷ Acest model corespunde distribuţiei binomiale.

5. Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este 0,06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcţională dacă cel puţin 11 sunt operaţionale. 4 componente independente sunt instalate într-un calculator. Calculați probabilitățile evenimentelor:
A:"O componentă este funcțională."
B:"Exact două componente sunt funcționale în calculator."
C:"Cel puțin o componentă este funcțională în calculator."

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1, \ldots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1, r}, \\ &\quad\ \text{din } n \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i = \overline{1, r}$.
▷ Cazul $r = 2$ corespunde distribuţiei binomiale.

6. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?

• **Modelul urnei cu bile de 2 culori şi bilă nereturnată:** fie $n_1, n_2, n \in \mathbb{N}$ cu $n \leq n_1 + n_2$ şi fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $k \leq n_1$ şi $n - k \leq n_2$; considerând o urnă, care are iniţial n_1 bile albe şi n_2 bile negre, avem

$$\begin{aligned} p(k;n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k \text{ bile albe din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k} \cdot C_{n_2}^{n-k}}{C_{n_1+n_2}^{n}}. \end{aligned}$$

▷ Acest model corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.

7. Dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc se extrag aleator fără returnare 13 cărţi (*bridge hand*). Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "Nu se extrage nicio treflă."
b) B: "Se extrag 5 inimi."
c) C: "Se extrage cel mult un as."

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:** fie n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1, r}$;

$$\begin{aligned} p(k_1, \ldots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1,r}, \\ &\quad \text{din } n = k_1 + \ldots + k_r \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase,} \\ &\quad \text{în care ordinea de extragere a bilelor de diverse culori nu contează} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\ldots+n_r}^{n}}. \end{aligned}$$

▷ Cazul $r = 2$ corespunde **distribuţiei hipergeometrice**.
Observaţie: Extragerea fără returnare (engl. *sampling without replacement*) este folosită în **metoda validării încrucişate** (engl. *k-fold cross validation*): În cazul validării încrucişate eşantionul original de date este împărțit aleatoriu în k sub-eşantioane de dimensiuni egale. Din cele k sub-eşantioane, un singur sub-eşantion este folosit ca date de validare pentru testarea modelului, iar celelalte $k - 1$ sub-eşantioane sunt utilizate ca date de antrenament. Procesul de validare încrucişată se repetă de k ori, fiecare dintre cele k sub-eşantioane fiind utilizat exact o dată ca date de validare.

8. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?

9. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "exact două numere sunt pare."
b) B: "1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori."
c) C: "exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4".

10. Se generează aleator un cod C alegând, cu returnare, 6 caractere din lista de caractere: 0, 1, 2, 3, 4, 5, x, y, z. Calculați probabilitățile:
a) $P(C = 01234z)$.
b) $P($"exact 4 caractere din C sunt cifre impare"$)$.

c) P("C are cel mult 4 cifre").
d) P("C nu are litere alăturate și nu are cifre alăturate").
Exemple: $5z4x0y$, $x0y1x2$ etc.
e) P("C nu are litere, știind că exact 4 caractere din C sunt cifre impare").

11. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$). Cinci persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: "exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş".
b) B: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş".
c) C: "3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese".

12. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:
a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?
b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?