Laboratorul 9

Determinanţi. Inversa unei matrice

1 Condensarea pivotală pentru calculul determinanţilor (Metoda lui Chio)

Prezentarea Problemei: Considerăm matricea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi ne propunem să calculăm $\det(A)$.

Prezentarea Metodei: Aplicăm formula

$$
\det(A) = \frac{1}{a_{11}^{n-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{vmatrix}, \tag{1}
$$

unde $a_{11} \neq 0$, şi în continuare se reia formula (1) pentru $n-1, n-2, ...$ până când se obţine un determinant de ordin 2.

Observaţii:

1.Dacă $a_{11} = 0$ şi există $2 \leq i \leq n$ pentru care $a_{i1} \neq 0$, atunci se permută în A liniile a şi i, iar $\det(A)$ îşi schimbă semnul.

2. Dacă $a_{11} = 0$ şi $\forall 2 \leq i \leq n$ avem $a_{i1} = 0$, atunci $\det(A) = 0$.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$
2. $det \leftarrow 1$
3. repetă
    - 3.1. dacă $a_{11} = 0$ atunci
        - 3.1.1. $i \leftarrow 2$
        - 3.1.2. cât timp $(i \leq n)$ şi $(a_{i1} = 0)$ execută
            - 3.1.2.1. $i \leftarrow i + 1$
        - 3.1.3. dacă $i > n$ atunci
            - 3.1.3.1. scrie $'det(A) = 0'$
            - 3.1.3.2. *ieşire*
        - 3.1.4. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
            - 3.1.4.1. $aux \leftarrow a_{1j}$

3.1.4.2. $a_{1j} \leftarrow a_{ij}$
3.1.4.3. $a_{ij} \leftarrow aux$
3.1.5. $det \leftarrow -det$
3.2. pentru $i = 1, 2, ..., n-2$ execută // calculăm produsul valorilor a_{11}^{n-2}
3.2.1. $det \leftarrow det \cdot a_{11}$
3.3. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută // aplicăm $a_{ij} \leftarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$, $2 \leq i, j \leq n$
3.3.1. pentru $j = 2, 3, ..., n$ execută
3.3.1.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} \cdot a_{11} - a_{i1} \cdot a_{1j}$
3.4. $n \leftarrow n - 1$
3.5. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
3.5.1. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
3.5.1.1. $a_{ij} \leftarrow a_{i+1,j+1}$
până când $(n = 1)$
4. $det \leftarrow a_{11}/det$
5. scrie $'det(A) =', det$.

Exemplu: Calculaţi determinanţii următoarelor matrice utilizând metoda Chio:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluţie:
a) Aplicăm formula (1) pentru calculul determinantului matricei A de ordin n.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Aplicând formula (1) am redus problema la a calcula un determinat de ordin 3, în locul unui determinat de ordin 4. Observăm că elementul a_{11} din determinantul de ordin 3 este 0, astfel vom schimba primele două linii ale determinatului. Prin urmare,

$$\det(A) = \frac{-1}{4} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Aplicăm din nou formula (1):

$$\det(A) = \frac{-1}{4\cdot 3^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \\ & \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \frac{-1}{12} \begin{vmatrix} 12 & -24 \\ -14 & 16 \end{vmatrix} = 12.$$

b) Deoarece primul element al matricei B este $b_{11} = 0$, vom schimba primele două linii ale determinatului şi vom schimba şi semnul determinantului, apoi aplicăm formula (1) pentru $n = 4$:

$$\det(B) = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{5^{4-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{25} \begin{vmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 6 & 14 & 13 \\ -1 & -9 & -23 \end{vmatrix}.$$

Aplicăm din nou formula (1) şi obţinem

$$\det(B) = \frac{-1}{25} \cdot \frac{1}{(-10)^{3-2}} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} -10 & 5 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 6 & 13 \end{vmatrix} \\ & \\ \begin{vmatrix} -10 & 5 \\ -1 & -9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -1 & -23 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{250} \begin{vmatrix} -170 & -130 \\ 95 & 230 \end{vmatrix} = \frac{-39100 + 12350}{250} = -107.$$

Exemple: Calculaţi determinanţii următoarelor matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

2 Metoda iterativă pentru calculul inversei unei matrice

Prezentarea Problemei: Considerăm matricea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ şi ne propunem să calculăm A^{-1}.

Prezentarea Metodei:
Pasul 1: Calculăm elementele A_1 şi A_1^{-1} după formulele

$$A_1 = a_{11} \tag{2}$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{a_{11}}. \tag{3}$$

Pasul $k+1$: Scriem matricea

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1\,k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & a_{k\,k+1} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \dots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k & u_k \\ v_k & \alpha_k \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Calculăm inversa matricei A_{k+1} cu formula

$$A_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} B_k & x_k \\ y_k & \beta_k \end{pmatrix} \tag{5}$$

unde

$$\beta_k = \frac{1}{\alpha_k - v_k \cdot A_k^{-1} \cdot u_k} \tag{6}$$

$$x_k = -\beta_k \cdot A_k^{-1} \cdot u_k \tag{7}$$

$$y_k = -\beta_k \cdot v_k \cdot A_k^{-1} \tag{8}$$

$$B_k = A_k^{-1} + \frac{x_k \cdot y_k}{\beta_k}. \tag{9}$$

Exemplu: Folosind metoda iterativă, calculaţi inversa următoarei matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluţie: Mai întâi, calculăm elementele A_1 şi A_1^{-1} după formulele (2), (3):

$$A_1 = a_{11} = 1$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{a_{11}} = 1.$$

Trecem la următorul pas, scriind matricea A_2 după formula (4):

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & u_1 \\ v_1 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Aşadar,

$$u_1 = 0$$

$$v_1 = 0$$

$$\alpha_1 = 2.$$

Mai departe, calculăm inversa matricei A_2, care va fi de forma

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix},$$

unde β_1 x_1, y_1, B_1 se determină cu formulele (6)-(9):

$$\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1 - v_1 \cdot A_1^{-1} \cdot u_1} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = -\beta_1 \cdot A_1^{-1} \cdot u_1 = 0$$

$$y_1 = -\beta_1 \cdot v_1 \cdot A_1^{-1} = 0$$

$$B_1 = A_1^{-1} + \frac{x_1 \cdot y_1}{\beta_1} = 1 + 0 = 1.$$

Prin urmare,

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & x_1 \\ y_1 & \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Trecem la următorul pas, scriind matricea A_3 după formula (4):

$$A_3 (= A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & u_2 \\ v_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Aşadar,

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = 3.$$

Mai departe, calculăm inversa matricei A_3, care va fi de forma

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} B_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

unde $\beta_2\, x_2$, y_2, B_2 se determină cu formulele (6)-(9):

$$\beta_2 = \frac{1}{\alpha_2 - v_2 \cdot A_2^{-1} \cdot u_2} = \frac{1}{3 - \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$x_2 = -\beta_2 \cdot A_2^{-1} \cdot u_2 = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$y_2 = -\beta_2 \cdot v_2 \cdot A_2^{-1} = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = A_2^{-1} + \frac{x_2 \cdot y_2}{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare,

$$A_3^{-1} = \begin{pmatrix} B_2 & x_2 \\ y_2 & \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Exersare: Folosind metoda iterativă, calculaţi inversa următoarei matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$