Laboratorul 2

Rezolvarea ecuaţiilor neliniare

1 Metoda aproximaţiilor succesive pentru rezolvarea numerică iterativă a ecuaţiilor neliniare

Prezentarea Problemei: Considerăm ecuaţia

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^1([a, b])$. Ne propunem să aproximăm soluţia ecuaţiei (1), $x^* \in [a, b]$.

Prezentarea Metodei: Metoda aproximaţiilor succesive constă în transformarea ecuaţiei (1) într-o formă echivalentă

$$x = g(x).$$

Construim şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad n \geq 0, \tag{2}$$

unde x_0 este aproximaţia iniţială a soluţiei exacte x^*.

Observaţii

1. O condiţie suficientă pentru asigurarea convergenţei şirului (2) este aceea ca funcţia g să fie contracţie pe intervalul $[a, b]$.
2. Dacă g este derivabilă pe $[a, b]$, atunci g este contracţie dacă şi numai dacă

$$|g'(x)| \leq q < 1, \quad \forall x \in [a, b].$$

Criteriul de oprire:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

sau

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}|} \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*,$$

unde ε este precizia de calcul.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte x_0, ε, $itmax$; declară g
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
    3.1. $x_1 \leftarrow g(x_0)$
    3.2. $d \leftarrow |x_1 - x_0|$
    3.3. $x_0 \leftarrow x_1$
    3.4. $it \leftarrow it + 1$

până când $(d \leq \varepsilon)$ sau $(it > itmax)$

4. dacă $it > itmax$ atunci
   4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
   4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iterţii cu precizia'*,ε, 'este', x_1).

Observaţie: În C, funcţia $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x+3}}$ se declară astfel:

```
float g(float x)
  {
return   4./sqrt(x+3);
   }
```

Funcţii matematice	În C sau C++
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\sqrt[3]{x}$	cbrt(x)
$\sqrt[7]{x}$	pow(x, 1./7)
e^x	exp(x)
a^x	pow(a,x)
$\ln x$	log(x)
$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	log(x)/log(a)

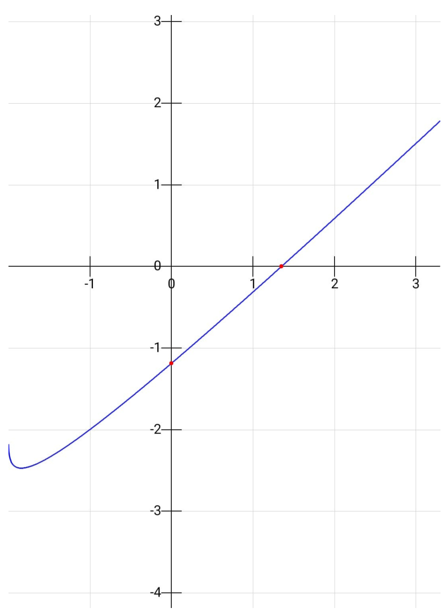
Exemplul 1. Folosind metoda aproximaţiilor succesive să se aproximeze rădăcina ecuaţiei

$$x = \sqrt[4]{x+2},$$

cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$.

Soluţie: Considerăm funcţia

$$f(x) = x - \sqrt[4]{x+2}, \quad x \geq 0.$$



Căutăm a, b astfel încât $f(a)f(b) < 0$.

$$f(0) = -\sqrt[4]{2} < 0,$$
$$f(1) = 1 - \sqrt[4]{3} < 0,$$
$$f(2) = 2 - \sqrt[4]{4} = 2 - \sqrt{2} > 0.$$

Deci, rădăcina ecuaţiei este în intervalul $x^* \in [1, 2]$.

Scriem ecuaţia noastră în forma echivalentă

$$x = g(x),$$

unde $g(x) = \sqrt[4]{x+2}, \quad x \in [1, 2]$.

Arătăm că funcţia g este contracţie pe intervalul $[1, 2]$, adică $|g'(x)| < 1$, pentru orice $x \in [1, 2]$. Avem că

$$\left|g'(x)\right| = \left|\frac{1}{4}(x+2)^{-\frac{3}{4}}\right| = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x+2)^3}} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{(1+2)^3}} < 1, \text{ pentru orice } x \in [1, 2],$$

deoarece funcţia $\frac{1}{4\sqrt[4]{x+2}^3}$ este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$. Astfel functia g este contracţie pe intervalul $[1, 2]$.

Fie $x_0 = 2$ ales arbitrar din intervalul $[1, 2]$ şi considerăm recurenţa

$$x_{n+1} = g(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = \sqrt[4]{x_n + 2}, \qquad n \geq 0.$$

Pentru $n = 0$, avem că

$$x_1 = g(x_0) = \sqrt[4]{x_0 + 2} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} = 1.414214.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_1 - x_0| = |1.414214 - 2| = 0.585786 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$x_2 = g(x_1) = \sqrt[4]{x_1 + 2} = \sqrt[4]{3.414214} = 1.359323.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_2 - x_1| = |1.359323 - 1.414214| = 0.054891 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 2$, avem că

$$x_3 = g(x_2) = \sqrt[4]{x_2 + 2} = \sqrt[4]{3.359323} = 1.353826.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_3 - x_2| = |1.353826 - 1.359323| = 0.005497 < \varepsilon = 0.01.$$

Deci

$$x_3 = 1.353826,$$

aproximează rădăcina ecuaţiei cu eroarea $\varepsilon = 10^{-2}$.

Exemplul 2. Folosind metoda aproximaţiilor succesive să se aproximeze rădăcina ecuaţiei

$$x^3 + 3x^2 = 16,$$

cu precizia $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Soluţie: Considerăm funcţia

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 16, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Căutăm a, b astfel încât $f(a)f(b) < 0$.

$$f(0) = -16 < 0,$$

$$f(1) = 1 + 3 - 16 = -12 < 0,$$

$$f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 16 = 4 > 0.$$

Deci, rădăcina ecuaţiei este in intrvalul $x^* \in [1, 2]$.

Scriem ecuaţia noastră în forma echivalentă $x = g(x)$. Avem că

$$x^3 + 3x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2(x+3) = 16 \Leftrightarrow x + 3 = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{16}{x^2} - 3}_{=g(x)} \Leftrightarrow x = g(x),$$

unde $g(x) = \frac{16}{x^2} - 3$.

Verificăm dacă funcţia g este contracţie pe intervalul $[1, 2]$, adica $|g'(x)| < 1$, pentru orice $x \in [1, 2]$. Avem că

$$\left|g'(x)\right| = \left|-\frac{32}{x^3}\right| \geq \frac{32}{2^3} > 1, \text{ pentru orice } x \in [1, 2],$$

deoarece funcţia $\frac{32}{x^3}$ este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$. Astfel functia g nu este contracţie pe intervalul $[1, 2]$.

În acest caz scriem ecuaţia în forma echivalentă

$$x = h(x),$$

unde $h(x) = g^{-1}(x)$ este funcţia inversă a funcţiei g. Mai precis, scoatem x din partea dreaptă a ecuaţiei

$$x = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{16}{x^2} - 3 \Leftrightarrow x + 3 = \frac{16}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+3} = \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow \frac{16}{x+3} = x^2 \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x+3}} = x \Leftrightarrow x = h(x),$$

unde $h(x) = \frac{4}{\sqrt{x+3}}$, $x \in [1, 2]$.

Verificăm dacă funcţia $h = \frac{4}{\sqrt{x+3}} = 4(x+3)^{-\frac{1}{2}}$ este contracţie pe intervalul $[1, 2]$, adică $|h'(x)| < 1$, pentru orice $x \in [1, 2]$. Avem că

$$\left|h'(x)\right| = \left|4\left(-\frac{1}{2}\right)(x+3)^{-\frac{3}{2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{(x+3)^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{(1+3)^3}} < 1, \text{ pentru orice } x \in [1, 2].$$

Astfel functia h este contracţie pe intervalul $[1, 2]$.

Fie $x_0 = 1$ ales arbitrar din intervalul $[1, 2]$ şi considerăm recurenţa

$$x_{n+1} = h(x_n) \Leftrightarrow x_{n+1} = \frac{4}{\sqrt{x_n + 3}}, \qquad n \geq 0.$$

Pentru $n = 0$, avem că

$$x_1 = h(x_0) = \frac{4}{\sqrt{x_0 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{1 + 3}} = 2.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_1 - x_0| = |2 - 1| = 1 > \varepsilon = 0.008.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$x_2 = h(x_1) = \frac{4}{\sqrt{x_1 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{2 + 3}} = 1.788854.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_2 - x_1| = |1.788854 - 2| = 0.211146 > \varepsilon = 0.008.$$

Pentru $n = 2$, avem că

$$x_3 = h(x_2) = \frac{4}{\sqrt{x_2 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{1.788854 + 3}} = 1.827865.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_3 - x_2| = |1.827865 - 1.788854| = 0.039011 > \varepsilon = 0.008.$$

Pentru $n = 3$, avem că

$$x_4 = h(x_3) = \frac{4}{\sqrt{x_3 + 3}} = \frac{4}{\sqrt{1.827865 + 3}} = 1.820465.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_4 - x_3| = |1.820465 - 1.827865| = 0.0074 < \varepsilon = 0.008.$$

Deci

$$x_4 = 1.820465,$$

aproximează rădăcina ecuaţiei cu eroarea $\varepsilon = 8 \cdot 10^{-3}$.

Exersare:

1. Să se aproximeze rădăcina ecuaţiei $x = \sqrt[4]{x} + 2$, cu eroarea $\varepsilon = 10^{-3}$.

Sol: 1. $x^* \backsimeq 3.353$.