Laboratorul 10

Determinarea coeficienţilor polinomului caracteristic

1 Metoda Krylov

Prezentarea Problemei: Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ne propunem să determinăm coeficienţii polinonului caracteristic

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Prezentarea Metodei:
1) Se alege arbitrar, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ nenul;
2) Calculăm

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)}, \quad 1 \le k \le n$$

3) Rezolvăm sistemul liniar

(1)
$$\left(y^{(n-1)}y^{(n-2)}...y^{(1)}y^{(0)}\right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = -y^{(n)}.$$

Observaţii:
i) Dacă sistemul (1) nu are solutie unică, se alege alt $y^{(0)}$ nenul şi se reia algoritmul.
ii) Dacă sistemul (1) are soluţie unică, atunci componentele soluţiei sitemului, $c_1, c_2, ...c_n$, sunt coeficienţii polinomului caracteristic.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i, j \le n$
2. citeşte $y_{i,n}$, $1 \le i \le n$ {reprezintă $y^{(0)}$, nenul}
// *calculăm* $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n-1)}$, *folosind* $y^{(k)} = A \cdot y^{(k-1)}$, $1 \le k \le n$
3. pentru $j = n-1, n-2, ..., 1$ execută
    3.1. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
        3.1.1. $y_{ij} \leftarrow 0$
        3.1.2. pentru $k = 1, 2, ..., n$ execută
            3.1.2.1. $y_{ij} \leftarrow y_{ij} + a_{ik} \cdot y_{k,j+1}$
// *calculăm* $y^{(n)}$, *folosind* $y^{(n)} = A \cdot y^{(n-1)}$, *şi păstrăm* $-y^{(n)}$
4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
    4.1. $y_{i,n+1} \leftarrow 0$
    4.2. pentru $k = 1, 2, ..., n$ execută
        4.2.1. $y_{i,n+1} \leftarrow y_{i,n+1} + a_{ik} \cdot y_{k1}$
    4.1. $y_{i,n+1} \leftarrow -y_{i,n+1}$
// *rezolvăm sistemul a cărui matrice extinsă este* $(y_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n+1}}$, *folosind una din medodele studiate:*

- *Metoda lui Gauss cu pivotare parţială la fiecare pas*

- *Metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare pas*
- *Factorizarea LR*

Exemplu: Utilizând metoda lui Krylov, determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzători matricei

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Este matricea A inversabilă? Dacă A este inversabilă, detrminaţi-i inversa utilizând metoda lui Krylov.

Soluţie: Alegem arbitrar $y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi considerăm recurenţa vectorială

$$y^{(k+1)} = A \cdot y^{(k)}.$$

Calculăm $y^{(1)}, y^{(2)}$ şi $y^{(3)}$:

$$y^{(1)} = A \cdot y^{(0)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$y^{(2)} = A \cdot y^{(1)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix},$$

$$y^{(3)} = A \cdot y^{(2)} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ -42 \\ 63 \end{pmatrix}.$$

Rezolvăm sistemul liniar

$$\left(y^{(2)} y^{(1)} y^{(0)} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = -y^{(3)},$$

care este echivalent cu

$$\begin{pmatrix} 25 & -5 & 1 \\ -8 & 2 & 0 \\ 11 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -125 \\ 42 \\ -63 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Observăm că $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ este vectorul ce conţine coeficienţii polinomului caracteristic.

Sistemul (2) se scrie în forma echivalentă

$$\begin{cases} 25c_1 - 5c_2 + c_3 = -125 \\ -8c_1 + 2c_3 = 42 \\ 11c_1 - c_2 = -63 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 6 \\ c_2 = 3 \\ c_3 = -10. \end{cases}$$

Polinomul caracteristic corespunzător matricei A este

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10.$$

Pentru a determina valorile proprii, rezolvăm ecuaţia

$$p_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -5.$$

Deoarece valorile proprii sunt numere reale şi distincte, metoda Krylov ne permite sa calculăm vectorii proprii corespunzători valorilor proprii.

Pentru valoarea proprie $\lambda_1 = 1$, calculăm

$$q_1(\lambda) = \frac{p_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 7\lambda + 10.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 1$ este

$$y^{(2)} + 7y^{(1)} + 10y^{(0)} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = -2$, calculăm

$$q_2(\lambda) = \frac{p_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_2} = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 4\lambda - 5.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = -2$ este

$$y^{(2)} + 4y^{(1)} - 5y^{(0)} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pentru valoarea proprie $\lambda_3 = -5$, calculăm

$$q_3(\lambda) = \frac{p_A(\lambda)}{\lambda - \lambda_3} = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_3 = -5$ este

$$y^{(2)} + y^{(1)} - 2y^{(0)} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Mai mult, cum termenul liber al polinomului caracteristic, $c_3 = -10$ este nenul, atunci matricea A este inversabilă şi inversa sa este dată de formula

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_3}(A^2 + c_1 A + c_2 I_3) = \frac{1}{10}(A^2 + 6A + 3I_3) =$$

$$= \frac{1}{10}\left[\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 4 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exersare: Utilizând metoda lui Krylov, determinaţi valorile şi vectorii proprii corespunzători matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$