Laboratorul 3

Rezolvarea ecuaţiilor neliniare

1 Metoda lui Newton (metoda tangentei)

Prezentarea Problemei: Considerăm ecuaţia

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^2([a, b])$. Ne propunem să aproximăm soluţia ecuaţiei (1), $x^* \in [a, b]$.

Prezentarea Metodei: Metoda lui Newton constă în construirea şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0, \tag{2}$$

unde x_0 este aproximaţia iniţială a soluţiei exacte x^*.

Observaţie: O condiţie suficientă pentru asigurarea convergenţei şirului (2) este aceea ca funcţia f să satisfacă condiţiile:

i) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

ii) $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$;

iii) $f''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$.

În acest caz, pentru orice $x_0 \in [a, b]$ cu $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ metoda lui Newton converge la soluţia unică x^* a ecuaţiei (1).

Criteriul de oprire:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \backsimeq x^*.$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte x_0, ε, $itmax$; declară f
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
    3.1. $x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
    3.2. $d \leftarrow |x_1 - x_0|$
    3.3. $x_0 \leftarrow x_1$
    3.4. $it \leftarrow it + 1$
până când $(d \leq \varepsilon)$ sau $(it > itmax)$
4. dacă $it > itmax$ atunci

4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε

4.2. *ieşire*

5. scrie (*'Soluţia obţinută în '*,it, *'iteraţii cu precizia'*, ε, 'este', x_1).

Exemplul 1. Folosind metoda lui Newton să se aproximeze rădăcina ecuaţiei

$$xe^x - 1 = 0,$$

cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$.

Soluţie: Considerăm funcţia

$$f(x) = xe^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verificăm dacă funcţia f îndeplineşte condiţiile $i) - iii)$.

i) Căutăm a, b astfel încât $f(a)f(b) < 0$.

$$f(0) = -1 < 0,$$

$$f(1) = e - 1 > 0,$$

Deci, intervalul căutat este $[0, 1]$.

ii) Verificăm condiţia $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

$$f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x + 1).$$

Studiem ecuaţia $e^x(x + 1) = 0$.

$$e^x(x + 1) = 0 \Longleftrightarrow x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \notin [0, 1].$$

Cum $-1 \notin [0, 1]$ rezultă că $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

iii) Verificăm condiţia $f''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

$$f''(x) = e^x(x + 1) + e^x = e^x(x + 2).$$

Studiem ecuaţia $e^x(x + 2) = 0$.

$$e^x(x + 2) = 0 \Longleftrightarrow x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \notin [0, 1].$$

Rezultă că $f''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

Cum sunt îndeplinite toate cele 3 condiţii, căutăm $x_0 \in [0, 1]$ astfel încât $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.
Fie $x_0 = 1$.

$$f(1) = e - 1 > 0.$$

$$f''(1) = 3e > 0.$$

$$f(1) \cdot f''(1) > 0.$$

Aşadar, $x_0 = 1$ este o alegere bună.

Fie acest $x_0 = 1$ ales din intervalul $[0, 1]$ şi considerăm recurenţa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n e^{x_n} - 1}{e^{x_n}(x_n + 1)} \qquad n \geq 0.$$

Pentru $n = 0$, avem că

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{e-1}{2e} = \frac{2e - e + 1}{2e} = \frac{e+1}{2e}.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_1 - x_0| = |\frac{e+1}{2e} - 1| = |\frac{1-e}{2e}| = 2.33538714 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{e+1}{2e} - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = ...$$

.

.

.

Continuăm iteraţiile până când

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

iar soluţia va fi $x_{n+1} \backsimeq x^*$.

Exemplul 2. Folosind metoda lui Newton să se aproximeze rădăcina ecuaţiei

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 5 = 0,$$

cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$.

Soluţie: Considerăm funcţia

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 5, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Verificăm dacă funcţia f îndeplineşte condiţiile $i) - iii)$.

i) Căutăm a, b astfel încât $f(a)f(b) < 0$.

$$f(0) = -5 < 0,$$

$$f(1) = 1 - 2 + 2 - 5 = -4 < 0,$$

$$f(2) = 8 - 8 + 4 - 5 = -1 < 0,$$

$$f(3) = 27 - 18 + 6 - 5 = 10 > 0.$$

Deci, intervalul căutat este $[2, 3]$.

ii) Verificăm condiţia $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [2, 3]$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2.$$

Studiem ecuaţia $3x^2 - 4x + 2 = 0$. Cum $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$ rezultă că ecuaţia nu are soluţii reale, deci $f'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [2, 3]$.

iii) Verificăm condiţia $f''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [2, 3]$.

$$f''(x) = 6x - 4.$$

Studiem ecuaţia $6x - 4 = 0$.

$$6x - 4 = 0 \Longleftrightarrow 6x = 4 \Longleftrightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \notin [2, 3].$$

Rezultă că $f''(x) \neq 0$ pentru orice $x \in [2, 3]$.

Cum sunt îndeplinite toate cele 3 condiţii, căutăm $x_0 \in [2, 3]$ astfel încât $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.
Fie $x_0 = 3$.

$$f(x_0) = 10.$$

$$f''(x_0) = 14.$$

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Aşadar, $x_0 = 3$ este o alegere bună.

Fie acest $x_0 = 3$ ales din intervalul $[2, 3]$ şi considerăm recurenţa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n^2 + 2x_n - 5}{3x_n^2 - 4x_n + 2} \qquad n \geq 0.$$

Pentru $n = 0$, avem că

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 - 5}{3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 2} = 3 - \frac{10}{17} = \frac{41}{17}.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_1 - x_0| = |\frac{41}{17} - 3| = \frac{10}{17} = 0.588235294 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1052.52482.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_2 - x_1| = |1052.52482 - \frac{41}{17}| = 1050.12306 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 2$, avem că

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = ...$$

.
.
.
Continuăm iteraţiile până când
$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$
iar soluţia va fi $x_{n+1} \simeq x^*$.

Observaţie

Metoda lui Newton are 2 dezavantaje:

1) ca să conveargă în general trebuie să luăm x_0 destul de aproape de rădăcină, însă pentru aceasta este nevoie de un studiu atent al funcţiei f.

2) pentru a calcula iteraţiile trebuie să cunoaştem derivata lui f. De aceea, s-au propus modificări ale metodei lui Newton care să evite calculul derivatei. O astfel de metodă este *metoda secantei*.

2 Metoda secantei

Prezentarea Problemei: Considerăm ecuaţia

$$f(x) = 0, \tag{3}$$

unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C([a, b])$. Ne propunem să aproximăm soluţia ecuaţiei (3), $x^* \in [a, b]$.

Prezentarea Metodei: Metoda secantei constă în construirea şirul de aproximaţii succesive $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \geq 1, \tag{4}$$

unde x_0 şi x_1 sunt două aproximaţii iniţiale ale soluţiei exacte x^*.
Criteriul de oprire:
$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon \Rightarrow x_{n+1} \simeq x^*.$$

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte x_0, x_1, ε, $itmax$; declară f
2. $it \leftarrow 2$
3. repetă
   3.1. $x \leftarrow x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$
   3.2. $d \leftarrow |x_1 - x_0|$
   3.3. $x_0 \leftarrow x_1$
   3.4. $x_1 \leftarrow x$

3.5. $it \leftarrow it + 1$
până când ($d \leq \varepsilon$) sau ($it > itmax$)
4. dacă $it > itmax$ atunci
   4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
   4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iteraţii cu precizia'*, ε, 'este', x).

Exemplul 1. Folosind metoda secantei să se aproximeze rădăcina ecuaţiei

$$xe^x - 1 = 0,$$

cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$, ştiind aproximaţiile iniţiale $x_0 = 0$ şi $x_1 = 1$.

Soluţie: Considerăm funcţia

$$f(x) = xe^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Considerăm recurenţa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n e^{x_n} - 1)(x_n - x_{n-1})}{x_n e^{x_n} - x_{n-1} e^{x_{n-1}}} \qquad n \geq 1.$$

Pentru $n = 1$, avem că

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 e^{x_1} - 1)(x_1 - x_0)}{x_1 e^{x_1} - x_0 e^{x_0}} = 1 - \frac{e-1}{e} = \frac{e - e + 1}{e} = \frac{1}{e}.$$

Verificăm condiţia de oprire

$$|x_2 - x_1| = |\frac{1}{e} - 1| = 0.632120559 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $n = 2$, avem că

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2 e^{x_2} - 1)(x_2 - x_1)}{x_2 e^{x_2} - x_1 e^{x_1}} = ...$$

.
.
.
Continuăm iteraţiile până când

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

iar soluţia va fi $x_{n+1} \backsimeq x^*$.