Laboratorul 7

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

1 Metoda Jacobi pentru rezolvarea iterativă a sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n$ este matricea sistemului (1) şi $b = (b_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să aproximăm $x \in \mathbb{R}^n$ soluţia unică a sistemului (1) cu o precizie dată ε.

Prezentarea Metodei: Pentru $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ aproximaţia iniţială a soluţiei sitemului (1), ales arbitrar (de exemplu vectorul nul), calculăm

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Bigg/ a_{ii}, 1 \leq i \leq n,\ k \geq 0,$$

până când este îndeplinită condiţia

$$\max_{1\leq i\leq n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon,$$

unde ε reprezintă precizia cu care dorim să obţinem soluţia sistemului. Atunci $x \backsimeq x^{(k+1)}$.

Definiţie: Matricea A este dominant diagonală pe linii dacă

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pentru orice } \ 1 \leq i \leq n.$$

Matricea A este dominant diagonală pe coloane dacă

$$|a_{jj}| \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pentru orice } \ 1 \leq j \leq n.$$

Observaţie: O condiţie suficientă pentru obţinerea soluţiei sitemului (1), cu precizia ε, este ca matricea A să fie strict dominant diagonală pe linii sau coloane.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte n, a_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, b_i, $1 \leq i \leq n$, ε, $itmax$, x_i, $1 \leq i \leq n$
2. $it \leftarrow 0$

3. repetă
    3.1. $max \leftarrow 0$
    3.2. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
        3.2.1. $S \leftarrow 0$
        3.2.2. pentru $j = 1, 2, ..., n$ execută
            3.2.2.1. dacă $j \neq i$ atunci
                3.2.2.1.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot x_j$
        3.2.3. $y_i \leftarrow (b_i - S)/a_{ii}$
        3.2.4. dacă $max < |y_i - x_i|$ atunci
            3.2.4.1. $max \leftarrow |y_i - x_i|$
    3.3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
        3.3.1. $x_i \leftarrow y_i$
    3.4. $it \leftarrow it + 1$
până când $(max \leq \varepsilon)$ sau $(it > itmax)$
4. dacă $it > itmax$ atunci
    4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
    4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iterţii cu precizia'*,ε, 'este', x_i, $1 \leq i \leq n$)

Observaţii:

1. it este o variabilă ce numără iteraţiile; ea nu poate depăşi valoare $itmax$ care reprezintă numărul maxim de iteraţii în care dorim să obţinem soluţia (de exemplu $itmax = 100$).

2. În vectorul x se stochează iniţial aproximaţia iniţială a soluţiei, apoi iteraţia veche, cea nouă şi soluţia finală.

3. În vectorul y se stochează iteraţia nouă.

Exemplu: Utilizând metoda lui Jacobi, să se determine soluţia următorului sistem cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$$

Sol: Avem că

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Verificăm dacă matricea A este dominant diagonală pe linii:

$$\left.\begin{array}{l} |a_{11}| = 5 \\ |a_{12}| + |a_{13}| = |-3| + |-1| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$

$$\left.\begin{array}{l} |a_{22}| = 4 \\ |a_{21}| + |a_{23}| = |-2| + |1| = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$

$$\left.\begin{array}{l} |a_{33}| = 5 \\ |a_{31}| + |a_{33}| = |2| + |-2| = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|.$$

Deci, matricea A este strict dominant diagonală pe linii şi putem aplica metoda Jacobi. Observăm că matricea A nu este dominant diagonală pe coloane.

Scriem sistemul iniţial în forma echivalentă

$$\begin{cases} x_1 = (5 + 3x_2 + x_3)/5 \\ x_2 = (2x_1 - x_3)/4 \\ x_3 = (-3 - 2x_1 + 2x_2)/(-5). \end{cases}$$

Alegem arbitrar $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aproximaţie iniţială şi considerăm recurenţa

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(5 + 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/5 \\ x_2^{(k+1)} = \left(2x_1^{(k)} - x_3^{(k)}\right)/4 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-3 - 2x_1^{(k)} + 2x_2^{(k)}\right)/(-5). \end{cases}$$

Pentru $k = 0$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \left(5 + 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0 + 0)/5 = 1 \\ x_2^{(1)} = \left(2x_1^{(0)} - x_3^{(0)}\right)/4 = (2 \cdot 0 - 0)/4 = 0 \\ x_3^{(1)} = \left(-3 - 2x_1^{(0)} + 2x_2^{(0)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0)/(-5) = 0.6. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$d\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right) = \max_{1 \le i \le 3} \left|x_i^{(1)} - x_i^{(0)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right|\right\} =$$

$$= \max\{|1 - 0|, |0 - 0|, |0.6 - 0|\} = 1 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 1$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \left(5 + 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0 + 0.6)/5 = 1.12 \\ x_2^{(2)} = \left(2x_1^{(1)} - x_3^{(1)}\right)/4 = (2 \cdot 1 - 0.6)/4 = 0.35 \\ x_3^{(2)} = \left(-3 - 2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0)/(-5) = 1. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$d\left(x^{(2)} - x^{(1)}\right) = \max_{1 \le i \le 3} \left|x_i^{(2)} - x_i^{(1)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right|\right\} =$$

$$= \max\{|1.12 - 1|, |0.35 - 0|, |1 - 0.6|\} = 0.4 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 2$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \left(5 + 3x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0.35 + 1)/5 = 1.41 \\ x_2^{(3)} = \left(2x_1^{(2)} - x_3^{(2)}\right)/4 = (2 \cdot 1.12 - 1)/4 = 0.31 \\ x_3^{(3)} = \left(-3 - 2x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 1.12 + 2 \cdot 0.35)/(-5) = 0.908. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$d\left(x^{(3)} - x^{(2)}\right) = \max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(3)} - x_i^{(2)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right|, \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right|, \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right|\right\} =$$

$$= \max\{|1.41 - 1.12|, |0.31 - 0.35|, |0.908 - 1|\} = 0.19 > \varepsilon = 0.01.$$

$$\vdots$$

Aplicând raţionamentul de mai sus găsim soluţia cu precizia $\varepsilon = 0.01$, la pasul 14

$$\begin{cases} x_1^{(14)} = 1.495639 \\ x_2^{(14)} = 0.503865 \\ x_3^{(14)} = 1.004191. \end{cases}$$

Obs: Soluţia exactă a sistemului este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple: Să se determine soluţiile următoarelor sisteme cu preciziile $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-5}$.

$$a)\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -132 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -132 \\ x_3 + 2x_4 = -30 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} -4x_1 + x_2 = -25 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -30 \\ 4x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases}$$