Laboratorul 4

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

1 Metoda de eliminare Gaussiană

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matricea asociată sistemului (1) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este vectorul ce conţine termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (1).

Exemplu de sistem de forma (1)**:**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

În acest caz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Prezentarea Metodei:
Considerăm matricea extinsă $(A \,|\, b) = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \le i \le n$.
Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A \,|\, b)$ astfel încât în $n-1$ paşi, matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \dots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde } \ A^{(1)} = (A \,|\, b). \tag{2}$$

(3) **La fiecare pas k verificăm dacă** $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \le k \le n-1.$

Dacă $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \le k \le n-1$, unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte **pivot**, pentru a obţine matricea (2) aplicăm următorul algoritm. Pentru $k = 1, 2, \dots, n-1$,

- primele k linii se copiază;

- pe coloana "k", sub pivot, elementele vor fi nule;
- restul elementelor, sub linia "k", la dreapta coloanei "k", se vor calcula cu regula dreptunghiului:

$$\begin{array}{lcccccc} & & \vdots & & \vdots & & \\ \text{linia } k & \cdots & \boxed{a_{kk}^{(k)}} & \cdots\cdots\cdots & a_{kj}^{(k)} & \ldots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \Rightarrow a_{ij}^{(k+1)} = \dfrac{a_{kk}^{(k)} a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}. \\ \text{linia } i & \cdots & a_{ik}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{ij}^{(k)} & \ldots & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \text{coloana } k & & \text{coloana } j & & \end{array}$$

Prin urmare, pentru $1 \leq k \leq n-1$, obţinem următoarele formule:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \leq i \leq k,\ i \leq j \leq n+1 \\ 0 & 1 \leq j \leq k,\ j+1 \leq i \leq n \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \leq i \leq n,\ k+1 \leq j \leq n+1. \end{cases} \tag{4}$$

Dupa ce ajungem la matricea triunghiular superioară dată de relaţia (2), obţinem sistemul triunghiular superior echivalent cu (1):

$$\begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n)} x_n = a_{1,n+1}^{(n)} \\ a_{22}^{(n)} x_1 + \ldots + a_{2n}^{(n)} x_n = a_{2,n+1}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ii}^{(n)} x_1 + \ldots + a_{in}^{(n)} x_n = a_{i,n+1}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = a_{n,n+1}^{(n)}. \end{cases} \tag{5}$$

Componentele soluţiei sistemului (5) se obţin direct, prin substituţie inversă:

$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \qquad \text{dacă } a_{nn}^{(n)} \neq 0, \tag{6}$$

pentru $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

$$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}. \tag{7}$$

Algoritmul Pseudocod

// Citim n, dimensiunea matricei A şi matricea extinsă $(A\,|\,b)$

1. citeste n, a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$
2. pentru $k = 1, 2, \ldots, n-1$ execută
   2.1. dacă $a_{kk} \neq 0$ atunci
   //Aplicăm formulele din metoda Gauss (regula dreptunghiului) si anume ultima formula din (4)
   2.1.1. pentru $i = k+1, k+2, \ldots, n$ execută

2.1.1.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
2.1.1.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută
2.1.1.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$
2.2. altfel *ieşire*
3. dacă $a_{nn} = 0$ atunci
3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
3.2. *ieşire*
//Determinăm x_n aplicând formula (6)
4. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$
//Determinăm $x_i, n-1 \geq i \geq 1$, aplicând formulele (7)
5. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
5.1. $S \leftarrow 0$
5.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută
5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$
5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
6. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
6.1. scrie $'x_i =', a_{i,n+1}$

Observaţie: Dacă pivotul $a_{kk} = 0$, în locul instructiunii 2.2. se pune următorul bloc de instructiuni
pentru $lin = k+1, k+2, ..., n$ caută $a_{lin,k} \neq 0$
schimbă între ele liniile lin şi k:

2.2. altfel
2.2.1. $lin \leftarrow k$
2.2.2. repetă
2.2.2.1. $lin \leftarrow lin + 1$
până când $a_{lin,k} \neq 0$ sau $lin > n$
2.2.3. dacă $lin > n$ atunci
2.2.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
2.2.3.2. *ieşire*
2.2.4. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
2.2.4.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
2.2.4.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$
2.2.4.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$

Exemplul 1. Rezolvaţi următorul sistem cu ajutorul **metodei de eliminare Gaussiană**

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Soluţie: Matricea corespunzătoare sistemului şi termenul liber sunt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matricea extinsă corespunzătoare sistemului este

$$A^{(1)} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Pasul 1. Pentru a obţine matricea $A^{(2)}$ alegem $a_{11}^{(1)} = 1 \neq 0$ pivot. Păstrăm linia 1 din matricea $A^{(1)}$. În prima coloană, sub pivotul $a_{11}^{(1)} = 1$, elementele vor fi nule, iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului" :

$a_{22}^{(2)} = \dfrac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \dfrac{1 \cdot 3 - 2 \cdot 2}{1} = -1, \quad a_{23}^{(2)} = \dfrac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{23}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \dfrac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{1} = -7,$

$a_{24}^{(2)} = \dfrac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{24}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \dfrac{1 \cdot 6 - 2 \cdot 7}{1} = -8, \quad a_{32}^{(2)} = \dfrac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{32}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \dfrac{1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2}{1} = 1,$

$a_{33}^{(2)} = \dfrac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{33}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \dfrac{1 \cdot 2 - (-1) \cdot 4}{1} = 6, \quad a_{34}^{(2)} = \dfrac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{34}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \dfrac{1 \cdot 0 - (-1) \cdot 7}{1} = 7.$

Obţinem matricea

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \end{array} \right).$$

Pasul 2. Alegem $a_{22}^{(2)} = -1 \neq 0$ pivot şi păstrăm liniile 1 şi 2 din matricea $A^{(2)}$. În coloana a doua, sub pivotul $a_{22}^{(2)} = -1$, elementele vor fi nule, iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului":

$a_{33}^{(3)} = \dfrac{a_{22}^{(2)} \cdot a_{33}^{(2)} - a_{32}^{(2)} \cdot a_{23}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{-1 \cdot 6 - 1 \cdot (-7)}{-1} = -1,$

$a_{34}^{(3)} = \dfrac{a_{22}^{(2)} \cdot a_{34}^{(2)} - a_{32}^{(2)} \cdot a_{24}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = \dfrac{-1 \cdot 7 - 1 \cdot (-8)}{-1} = -1.$

Obţinem matricea

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Sistemul corespunzător matricei $A^{(3)}$ este

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \\ -x_3 = -1. \end{cases}$$

Sistemul de mai sus are aceeaşi soluţie cu sistemul iniţial, dar acest sistem are formă triunghiulară. Soluţia sistemului se determina direct prin substituţie inversă:

$$\begin{cases} x_3 = -1/(-1) = 1 \\ x_2 = (-8 + 7x_3)/(-1) = (-8 + 7 \cdot 1)/(-1) = 1 \\ x_1 = (7 - 4x_3 - 2x_2)/1 = (7 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1)/1 = 1 \end{cases}$$

şi prin urmare, soluţia este

$$(x_1, x_2, x_3)^t = (1, 1, 1)^t.$$

Exemple: Rezolvaţi următoarele sisteme cu ajutorul metodei de eliminare Gaussiană

$$a)\left\{\begin{array}{l} x+2y+4z=7\\ 2x+3y+z=6\\ -x-y+2z=0\end{array}\right.\quad b)\left\{\begin{array}{l} x_1+2x_2+3x_3+x_4=7\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=8\\ 2x_1-x_2-4x_3+4x_4=1\\ 2x_1+x_3-3x_4=0\end{array}\right.\quad c)\left\{\begin{array}{l} x_1+3x_2-2x_3-4x_4=-2\\ 2x_1+6x_2-7x_3-10x_4=-6\\ -x_1-x_2+5x_3+9x_4=9\\ -3x_1-5x_2+15x_4=13.\end{array}\right.$$

Sol: a) $(1,1,1)$; b) $(1,1,1,1)$; c) $(-1,1,0,1)$.