Laboratorul 5

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

1 Metoda Gauss, cu pivotare parţială/totală la fiecare etapă

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este matricea sistemului (1) şi $b = (b_i)_{1\leq n\leq n} \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).

Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (1).

Reamintim metoda de bază a lui Gauss:
Considerăm matricea extinsă $(A\,|\,b) = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n+1}}$, unde $a_{i,n+1} = b_i$, $1 \leq i \leq n$.
Metoda Gauss constă în prelucrarea matricei extinse $(A\,|\,b)$ astfel încât în $n-1$ paşi, matricea A devine superior triunghiulară:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \dots & a_{1,n-1}^{(n)} & a_{1,n}^{(n)} & a_{1,n+1}^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \dots & a_{2,n-1}^{(n)} & a_{2,n}^{(n)} & a_{2,n+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1}^{(n)} & a_{n-1,n}^{(n)} & a_{n-1,n+1}^{(n)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right) = A^{(n)}, \quad \text{unde} \;\; A^{(1)} = (A\,|\,b). \tag{2}$$

$$\textbf{La fiecare pas } k \textbf{ verificăm dacă } a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \leq k \leq n-1. \tag{3}$$

Dacă $a_{kk}^{(k)} \neq 0, 1 \leq k \leq n-1$, (unde elementul $a_{kk}^{(k)}$ se numeşte **pivot**), pentru a obţine matricea (2) aplicăm următorul algoritm. Pentru $k = 1, 2, \dots, n-1$,,

- primele k linii se copiază;
- pe coloana "k", sub pivot, elementele vor fi nule;

- restul elementelor, sub linia "k", la dreapta coloanei "k", se vor calcula cu regula dreptunghiului:

$$\begin{array}{lccccc}
 & & \vdots & & \vdots & \\
\text{linia } k & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{kj}^{(k)} & \ldots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
\text{linia } i & \cdots & a_{ik}^{(k)} & \cdots\cdots\cdots & a_{ij}^{(k)} & \ldots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
 & & \text{coloana } k & & \text{coloana } j &
\end{array} \Rightarrow a_{ij}^{(k+1)} = \frac{a_{kk}^{(k)} a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}.$$

Prin urmare, pentru $1 \le k \le n-1$, obţinem următoarele formule:

(4)
$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} a_{ij}^{(k)} & 1 \le i \le k,\ i \le j \le n+1 \\ 0 & 1 \le j \le k,\ j+1 \le i \le n \\ a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \cdot a_{kj}^{(k)} & k+1 \le i \le n,\ k+1 \le j \le n+1. \end{cases}$$

După ce ajungem la matricea triunghiular superioară dată de relaţia (2), obţinem sistemul triunghiular superior echivalent cu (1):

(5)
$$\begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n)} x_n = a_{1,n+1}^{(n)} \\ a_{22}^{(n)} x_1 + \ldots + a_{2n}^{(n)} x_n = a_{2,n+1}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ii}^{(n)} x_1 + \ldots + a_{in}^{(n)} x_n = a_{i,n+1}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = a_{n,n+1}^{(n)}. \end{cases}$$

Aplicând fomulele (4) obţinem matricea superior triunghiulară data de relaţia (2). Sistemul corespunzător matricei (2) este un sitem superior triunghiular echivalent cu sistemul (1):

(6)
$$\begin{cases} a_{11}^{(n)} x_1 + a_{12}^{(n)} x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n)} x_n = a_{1,n+1}^{(n)} \\ a_{22}^{(n)} x_1 + \ldots + a_{2n}^{(n)} x_n = a_{2,n+1}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{ii}^{(n)} x_1 + \ldots + a_{in}^{(n)} x_n = a_{i,n+1}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^{(n)} x_n = a_{n,n+1}^{(n)}. \end{cases}$$

Componentele soluţiei sistemului (6) se obţin direct, prin substituţie inversă, aplicând formulele:

(7)
$$x_n = a_{n,n+1}^{(n)} / a_{nn}^{(n)}, \quad \text{dacă } a_{nn}^{(n)} \neq 0,$$

pentru $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

(8)
$$x_i = \left(a_{i,n+1}^{(n)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(n)} \cdot x_j \right) / a_{ii}^{(n)}.$$

Metoda Gauss cu pivotare parţială sau totală la fiecare pas face o îmbunătăţire numerică a metodei descrise mai sus prin alegerea unui pivot mai bun la fiecare pas. Modalitatea de alegere a pivotului face diferenţa între pivotarea parţială şi pivotarea totală.

1.1 Pivotare parţială

Pentru metoda Gauss cu pivotare parţială la fiecare pas, în loc de (3), vom proceda după cum urmează:

★La fiecare pas k, pentru $1 \leq k \leq n-1$, se alege ca pivot elementul $a^{(k)}_{i_k,k}$, $k \leq i_k \leq n$, cu proprietatea

$$\left|a^{(k)}_{i_k k}\right| = \max_{k \leq i \leq n} \left|a^{(k)}_{ik}\right|.$$

Observaţii:

1) Dacă $a^{(k)}_{i_k,k} = 0$, atunci sistemul (1) nu are soluţie unică.

2) Dacă $a^{(k)}_{i_k,k} \neq 0$, rolul pivotului este jucat de $a^{(k)}_{i_k,k}$. Dacă, în plus, $i_k \neq k$, trebuie să mutăm $a^{(k)}_{i_k,k}$ pe poziţia lui $a^{(k)}_{k,k}$, permutând liniile k şi i_k în matricea $A^{(k)}$.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n+1$
2. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
    2.1. $piv \leftarrow |a_{kk}|$
    2.2. $lin \leftarrow k$
    2.3. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
        2.3.1. dacă $piv < |a_{ik}|$ atunci
            2.3.1.1. $piv \leftarrow |a_{ik}|$
            2.3.1.2. $lin \leftarrow i$
    2.4. dacă $piv = 0$ atunci
        2.4.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
        2.4.2. *ieşire*
    2.5. dacă $lin \neq k$ atunci
        2.5.1. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
            2.5.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
            2.5.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$
            2.5.1.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$
    2.6. pentru $i = k+1, k+2, ..., n$ execută
        2.6.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$
        2.6.2. pentru $j = k+1, k+2, ..., n+1$ execută
            2.6.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$
3. dacă $a_{nn} = 0$ atunci
    3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
    3.2. *ieşire*
4. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$
5. pentru $i = n-1, n-2, ..., 1$ execută
    5.1. $S \leftarrow 0$
    5.2. pentru $j = i+1, i+2, ..., n$ execută
        5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$
    5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
6. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
    6.1. scrie $'x_i ='$, $a_{i,n+1}$.

Exemplul 1. Folosind metoda lui **Gauss cu pivotare parţială la fiecare etapă** rezolvaţi următorul sistem

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Soluţie: Matricea extinsă corespunzătaoare sistemului dat este

$$A^{(1)} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Căutăm elementul cu valoarea cea mai mare în modul din coloana 1 a matricei $A^{(1)}$, i.e.

$$\max_{1\le i\le 4} \left|a_{i1}^{(1)}\right| = \max\left\{\left|a_{11}^{(1)}\right|, \left|a_{21}^{(1)}\right|, \left|a_{31}^{(1)}\right|, \left|a_{41}^{(1)}\right|\right\} = \left|a_{21}^{(1)}\right| = 3.$$

Schimbăm linia 1 cu linia 2 în $A^{(1)}$ şi obţinem

$$A^{(1)} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{3} & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Alegem $a_{11}^{(1)} = 3 \neq 0$ pivot şi păstrăm linia 1 din matricea $A^{(1)}$. In prima coloană, sub pivot, elementele vor fi nule iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului":

$$a_{22}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 2 - 2\cdot 3}{3} = 0, \qquad a_{23}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{23}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 3 - 2\cdot 2}{3} = \frac{5}{3},$$

$$a_{24}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{24}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 1 - 2\cdot 1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad a_{25}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{25}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \cdot a_{15}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 6 - 2\cdot 2}{3} = \frac{14}{3},$$

$$a_{32}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{32}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 0 - 1\cdot 3}{3} = -1, \qquad a_{33}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{33}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 0 - 1\cdot 2}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$a_{34}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{34}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 1 - 1\cdot 1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad a_{35}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{35}^{(1)} - a_{31}^{(1)} \cdot a_{15}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 0 - 1\cdot 2}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$a_{42}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{42}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 1 - 1\cdot 3}{3} = 0, \qquad a_{43}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{43}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{13}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 1 - 1\cdot 2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$a_{44}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{44}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{14}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 0 - 1\cdot 1}{1} = \frac{1}{3}, \qquad a_{45}^{(2)} = \frac{a_{11}^{(1)} \cdot a_{45}^{(1)} - a_{41}^{(1)} \cdot a_{15}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{3\cdot 2 - 1\cdot 2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Prin urmare, obţinem matricea

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right).$$

Căutăm elementul cu valoarea maximă în modul

$$\max_{2\le i\le 4}\left|a_{i2}^{(2)}\right| = \max\left\{\left|a_{22}^{(2)}\right|, \left|a_{32}^{(2)}\right|, \left|a_{42}^{(2)}\right|\right\} = \left|a_{32}^{(2)}\right| = |-1|.$$

Schimbăm linia 2 cu linia 3 în $A^{(2)}$ şi obţinem

$$A^{(2)} \overset{L_2\leftrightarrow L_3}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right).$$

Observăm că pe coloana 2 sub pivotul $a_{22}^{(2)} = -1$ toate elementle sunt nule şi astfel

$$A^{(3)} = A^{(2)}.$$

Căutăm

$$\max_{3\le i\le 4}\left|a_{i3}^{(3)}\right| = \max\left\{\left|a_{33}^{(3)}\right|, \left|a_{43}^{(3)}\right|\right\} = \left|a_{33}^{(3)}\right| = \left|\frac{5}{3}\right|.$$

Aici nu sunt necesare schimbări de linii, deoarece elementul cu valoarea cea mai mare în modul este pe poziţia 3×3.

Alegem $a_{33}^{(3)} = \frac{5}{3}$ pivot şi păstrăm liniile 1, 2 şi 3 neschimbate din $A^{(3)}$. În coloana 3, sub pivot, elementele vor fi nule, iar restul elementelor se calculează cu "regula dreptunghiului":

$$a_{44}^{(4)} = \frac{a_{33}^{(3)}\cdot a_{44}^{(3)} - a_{43}^{(3)}\cdot a_{34}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{5},$$

$$a_{45}^{(4)} = \frac{a_{33}^{(3)}\cdot a_{45}^{(3)} - a_{43}^{(3)}\cdot a_{35}^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{14}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5}.$$

Obţinem

$$A^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Sistemul corespunzător matricei $A^{(4)}$ este

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_2 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{14}{3} \\ -\frac{2}{5}x_4 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Soluţia sistemului se obţine direct prin substituţie inversă:

$$\begin{cases} x_4 = \frac{2}{5}/\left(-\frac{2}{5}\right) = -1 \\ x_3 = \left(\frac{14}{3} - \frac{1}{3}x_4\right)/\frac{5}{3} = \left(\frac{14}{3} - \frac{1}{3}\cdot(-1)\right)/\frac{5}{3} = 3 \\ x_2 = (-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_3)/(-1) = (-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{2}{3}\cdot 3)/(-1) = -2 \\ x_1 = (2 - x_4 - 2x_3 - 3x_2)/3 = (2 - (-1) - 2\cdot 3 - 3\cdot(-2))/3 = 1, \end{cases}$$

şi prin urmare, soluţia este

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exerciţii: Folosind metoda lui Gauss cu pivotare parţială la fiecare etapă rezolvaţi următoarele siteme de ecuaţii liniare

$$a)\begin{cases} x_1+2x_2+x_4=3\\ x_1+3x_4=4\\ -2x_1+x_2+3x_3-4x_4=-2\\ 2x_2-x_3+3x_4=4 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3+x_4=6\\ 3x_1+3x_2+2x_3+x_4=2\\ x_1+x_4=0\\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 2x+3y-z=4\\ x-2y+z=6\\ -x-12y+5z=10. \end{cases}$$

1.2 Pivotare totală

În cazul metodei lui Gauss cu pivotare totală la fiecare pas în loc de (3) vom proceda după cum urmează:

★La fiecare pas k, pentru $1 \le k \le n-1$, se alege ca pivot elementul $a^{(k)}_{i_k,j_k}$, $k \le i_k \le n$, $k \le j_k \le n$, care are proprietatea

$$\left|a^{(k)}_{i_k j_k}\right| = \max_{\substack{k\le i\le n\\ k\le j\le n}} \left|a^{(k)}_{ij}\right|.$$

Observaţii:

1) Dacă $a^{(k)}_{i_k,j_k}=0$, $\forall k \le i_k, j_k \le n$, atunci sistemul (1) nu are soluţie unică.

2) Dacă $a^{(k)}_{i_k,j_k} \neq 0$ şi $i_k \neq k$ sau $j_k \neq k$ atunci se permută liniile k şi i_k, apoi se permută coloanele k şi j_k în matricea $A^{(k)}$, după care se aplică formulele (4), (7) şi, în final (8).

3) Dacă s-au realizat permutări de coloane, atunci acestea vor influenţa obţinerea soluţiei sistemului (1). Astfel după aplicarea formulelor (7), se permută componentele soluţiei, corespunzător permutărilor de coloane, de la ultima realizată până la prima.

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$
2. $npc \leftarrow 0$
3. pentru $k = 1, 2, ..., n-1$ execută
    3.1. $piv \leftarrow |a_{kk}|$
    3.2. $lin \leftarrow k$
    3.3. $col \leftarrow k$
    3.4. pentru $j = k, k+1, ..., n$ execută
        3.4.1. pentru $i = k, k+1, ..., n$ execută
            3.4.1.1. dacă $piv < |a_{ij}|$ atunci
                3.4.1.1.1. $piv \leftarrow |a_{ij}|$
                3.4.1.1.2. $lin \leftarrow i$
                3.4.1.1.3. $col \leftarrow j$
    3.5. dacă $piv = 0$ atunci
        3.5.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
        3.5.2. *ieşire*
    3.6. dacă $lin \neq k$ atunci
        3.6.1. pentru $j = k, k+1, ..., n+1$ execută
            3.6.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$

3.6.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{lin,j}$

3.6.1.3. $a_{lin,j} \leftarrow aux$

3.7. dacă $col \neq k$ atunci

3.7.1. $npc \leftarrow npc + 1$

3.7.2. $c[npc, 1] \leftarrow k$

3.7.3. $c[npc, 2] \leftarrow col$

3.7.4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută

3.7.4.1. $aux \leftarrow a_{ik}$

3.7.4.2. $a_{ik} \leftarrow a_{i,col}$

3.7.4.3. $a_{i,col} \leftarrow aux$

3.8. pentru $i = k + 1, k + 2, ..., n$ execută

3.8.1. $a_{ik} \leftarrow a_{ik}/a_{kk}$

3.8.2. pentru $j = k + 1, k + 2, ..., n + 1$ execută

3.8.2.1. $a_{ij} \leftarrow a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj}$

4. dacă $|a_{nn}| = 0$ atunci

4.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*

4.2. *ieşire*

5. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$

6. pentru $i = n - 1, n - 2, ..., 1$ execută

6.1. $S \leftarrow 0$

6.2. pentru $j = i + 1, i + 2, ..., n$ execută

6.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$

6.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$

7. dacă $npc \neq 0$ atunci

7.1. pentru $i = npc, npc - 1, ..., 1$ execută

7.1.1. $aux \leftarrow a_{c[i,1],n+1}$

7.1.2. $a_{c[i,1],n+1} \leftarrow a_{c[i,2],n+1}$

7.1.3. $a_{c[i,2],n+1} \leftarrow aux$

8. scrie $'x_i =', a_{i,n+1}, 1 \leq i \leq n.$

Exemplul 2. a) Folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare etapă rezolvaţi următorul sitem de ecuaţii liniare

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = -3 \\ 2x_1 - 3x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

b) Determinaţi valoarea determinantului matricei A, corespunzătoare sistemului de mai sus.

Sol: a) Matricea extinsă corespunzătoare sistemului dat este

$$A^{(1)} = (A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Căutăm elementul cu proprietatea

$$\left|piv^{(1)}\right| = \max_{1 \leq i,j \leq 4} \left|a_{ij}^{(1)}\right| = \left|a_{22}^{(1)}\right| = 4.$$

Pivotul $piv^{(1)}$ va fi $a_{22}^{(1)} = 4$.

Prima oară schimbăm linia 1 cu linia 2 (şi am observat că acest lucru nu modifică soluţia sistemului), apoi schimbăm coloana 1 cu coloana 2 în $A^{(1)}$,dar acest lucru înseamnă schimbarea lui x_1 cu x_2, deci acest lucru va trebui reamintit la sfârşit! Obţinem matricea

$$A^{(1)} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\boxed{C_1 \leftrightarrow C_2}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{4} & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Alegem $a_{11}^{(1)} = 4 \neq 0$ pivot şi observăm că

$$A^{(2)} = A^{(1)}.$$

Căutăm elementul cu proprietatea

$$\left|piv^{(2)}\right| = \max_{2 \leq i,j \leq 4} \left|a_{ij}^{(2)}\right| = \left|a_{34}^{(2)}\right| = |-3|.$$

Schimbăm linia 2 cu linia 3 şi coloana 2 cu coloana 4 în $A^{(2)}$, şi obţinem

$$A^{(2)} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\boxed{C_2 \leftrightarrow C_4}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right).$$

Alegem $a_{22}^{(2)} = -3 \neq 0$ pivot şi păstrăm liniile 1 şi 2 din $A^{(2)}$. În a doua coloană, sub pivot elementele vor fi zero, iar restul elementelor se determină cu "regula dreptunghiului". Obţinem matricea:

$$A^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \end{array}\right).$$

Căutăm elementul cu proprietatea

$$\left|piv^{(3)}\right| = \max_{3 \leq i,j \leq 4} \left|a_{ij}^{(3)}\right| = \left|a_{34}^{(3)}\right| = |-2|.$$

Schimbăm coloana 3 cu coloana 4 în $A^{(3)}$ şi obţinem

$$A^{(3)} \overset{\boxed{C_3 \leftrightarrow C_4}}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Alegem $a_{33}^{(3)} = -2 \neq 0$ pivot şi oţinem

$$A^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Deducem soluţia intermediară

$$\begin{cases} x_4 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1, \end{cases}$$

şi schimbăm componentele în următoarea ordine

$$\begin{cases} \text{componenta } 3 \leftrightarrow \text{componenta } 4 \text{ (since } C_3 \leftrightarrow C_4) \\ \text{componenta } 2 \leftrightarrow \text{componenta } 4 \text{ (since } C_2 \leftrightarrow C_4) \\ \text{componenta } 1 \leftrightarrow \text{componenta } 2 \text{ (since } C_1 \leftrightarrow C_2). \end{cases}$$

Mai precis, avem că

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \overset{C_3 \leftrightarrow C_4}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \overset{C_2 \leftrightarrow C_4}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1 \end{cases} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\Rightarrow} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Deci, soluţia sistemului este

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

b) $det(A) = (-1)^{2+3} a_{11}^{(4)} \cdot a_{22}^{(4)} \cdot a_{33}^{(4)} \cdot a_{44}^{(4)} = -4 \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{3} = -8.$

Exerciţii: Folosind metoda lui Gauss cu pivotare totală la fiecare etapă rezolvaţi următoarele sitemele de ecuaţii liniare

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_4 = -2 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x - 2y + z = 6 \\ -x - 12y + 5z = 10. \end{cases}$$