Laboratorul 8

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

1 Metoda Seidel-Gauss pentru rezolvarea iterativă a sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathcal{M}_n$ este matricea sistemului (1) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să aproximăm $x \in \mathbb{R}^n$ soluţia unică a sistemului (1) cu o precizie dată ε.

Prezentarea Metodei: Pentru $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ aproximaţia iniţială a soluţiei sitemului (1), ales arbitrar (de exemplu vectorul nul), calculăm

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \Big/ a_{ii}, 1 \le i \le n,\ k \ge 0,$$

până când este îndeplinită condiţia

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon,$$

unde ε reprezintă precizia cu care dorim să obţinem soluţia sistemului. Atunci $x \simeq x^{(k+1)}$.
Observatie: O condiţie suficientă pentru obţinerea soluţiei sitemului (1), cu precizia ε, este ca matricea A să fie dominant diagonală pe linii sau coloane şi strict dominant diagonală pe cel puţin una din linii sau coloane.

Algoritmul Pseudocod
1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i, j \le n$, b_i, $1 \le i \le n$, ε, $itmax$, x_i, $1 \le i \le n$
2. $it \leftarrow 0$
3. repetă
   3.1. $max \leftarrow 0$
   3.2. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
      3.2.1. $y_i = x_i$
   3.3. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
      3.3.1. $s1 \leftarrow 0$
      3.3.2. $s2 \leftarrow 0$
      3.3.3. pentru $j = 1, 2, ..., i-1$ execută
         3.3.3.1. $s1 \leftarrow s1 + a_{ij} \cdot y_j$
      3.3.4. pentru $j = i+1, ..., n$ execută
         3.3.4.1. $s2 \leftarrow s2 + a_{ij} \cdot x_j$

3.3.5. $y_i \leftarrow (b_i - s1 - s2)/a_{ii}$
3.3.6. dacă $max < |y_i - x_i|$ atunci
3.3.6.1. $max \leftarrow |y_i - x_i|$
3.4. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
3.4.1. $x_i \leftarrow y_i$
3.5. $it \leftarrow it + 1$
până când $(max \leq \varepsilon)$ sau $(it > itmax)$
4. dacă $it > itmax$ atunci
4.1. scrie *'Nu se poate obţine soluţia în'*, itmax, *'iteraţii, cu precizia'*, ε
4.2. *ieşire*
5. scrie (*'Soluţia obţinută în* ',it, *'iterţii cu precizia'*,ε, 'este', x_i, $1 \leq i \leq n$)

Exemplu: Utilizând metoda Seidel-Gauss, să se determine soluţia următorului sistem cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -3. \end{cases}$$

Sol: Avem că

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Observăm că matricea A este strict dominant diagonală pe linii şi deci, putem aplica metoda Seidel Gauss.

Scriem sistemul iniţial în forma echivalentă

$$\begin{cases} x_1 = (5 + 3x_2 + x_3)/5 \\ x_2 = (2x_1 - x_3)/4 \\ x_3 = (-3 - 2x_1 + 2x_2)/(-5). \end{cases}$$

Alegem arbitrar $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aproximaţie iniţială şi considerăm recurenţa

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(5 + 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)}\right)/5 \\ x_2^{(k+1)} = \left(2x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)/4 \\ x_3^{(k+1)} = \left(-3 - 2x_1^{(k+1)} + 2x_2^{(k+1)}\right)/(-5). \end{cases}$$

Pentru $k = 0$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \left(5 + 3x_2^{(0)} + x_3^{(0)}\right)/5 = (5 + 3 \cdot 0 + 0)/5 = 1 \\ x_2^{(1)} = \left(2x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right)/4 = (2 \cdot 1 - 0)/4 = 0.5 \\ x_3^{(1)} = \left(-3 - 2x_1^{(1)} + 2x_2^{(1)}\right)/(-5) = (-3 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0.5)/(-5) = 0.8. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(1)}-x_i^{(0)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(1)}-x_1^{(0)}\right|, \left|x_2^{(1)}-x_2^{(0)}\right|, \left|x_3^{(1)}-x_3^{(0)}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{|1-0|, |0.5-0|, |0.8-0|\right\} = 1 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 1$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \left(5 + 3x_2^{(1)} + x_3^{(1)}\right)/5 = \left(5 + 3\cdot 0.5 + 0.8\right)/5 = 1.46 \\ x_2^{(2)} = \left(2x_1^{(2)} - x_3^{(1)}\right)/4 = \left(2\cdot 1.46 - 0.8\right)/4 = 0.53 \\ x_3^{(2)} = \left(-3 - 2x_1^{(2)} + 2x_2^{(2)}\right)/(-5) = \left(-3 - 2\cdot 1.46 + 2\cdot 0.53\right)/(-5) = 0.972. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(2)}-x_i^{(1)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(2)}-x_1^{(1)}\right|, \left|x_2^{(2)}-x_2^{(1)}\right|, \left|x_3^{(2)}-x_3^{(1)}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{|1.46-1|, |0.53-0.5|, |0.972-0.8|\right\} = 0.46 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 2$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = \left(5 + 3x_2^{(2)} + x_3^{(2)}\right)/5 = \left(5 + 3\cdot 0.53 + 0.972\right)/5 = 1.5124 \\ x_2^{(3)} = \left(2x_1^{(3)} - x_3^{(2)}\right)/4 = \left(2\cdot 1.5124 - 0.972\right)/4 = 0.5132 \\ x_3^{(3)} = \left(-3 - 2x_1^{(3)} + 2x_2^{(3)}\right)/(-5) = \left(-3 - 2\cdot 1.5124 + 2\cdot 0.5132\right)/(-5) = 0.99968. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(3)}-x_i^{(2)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(3)}-x_1^{(2)}\right|, \left|x_2^{(3)}-x_2^{(2)}\right|, \left|x_3^{(3)}-x_3^{(2)}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{|1.5124-1.46|, |0.5132-0.53|, |0.99968-0.972|\right\} = 0.0524 > \varepsilon = 0.01.$$

Pentru $k = 3$ obţinem

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = \left(5 + 3x_2^{(3)} + x_3^{(3)}\right)/5 = \left(5 + 3\cdot 0.5124 + 0.99968\right)/5 = 1.507856 \\ x_2^{(4)} = \left(2x_1^{(4)} - x_3^{(3)}\right)/4 = \left(2\cdot 1.507856 - 0.99968\right)/4 = 0.504008 \\ x_3^{(4)} = \left(-3 - 2x_1^{(4)} + 2x_2^{(4)}\right)/(-5) = \left(-3 - 2\cdot 1.507856 + 2\cdot 0.504008\right)/(-5) = 1.001539. \end{cases}$$

Verificăm condiţia de oprire

$$\max_{1\le i\le 3}\left|x_i^{(4)}-x_i^{(3)}\right| = \max\left\{\left|x_1^{(4)}-x_1^{(3)}\right|, \left|x_2^{(4)}-x_2^{(3)}\right|, \left|x_3^{(4)}-x_3^{(3}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{|1.507856-1.5124|, |0.504008-0.5132|, |1.001539-0.99968|\right\} = 0.009192 < \varepsilon = 0.01.$$

Deci, soluţia sistemului cu precizia $\varepsilon = 10^{-2}$ este

$$\begin{cases} x_1^{(4)} = 1.507856 \\ x_2^{(4)} = 0.504008 \\ x_3^{(4)} = 1.001539. \end{cases}$$

Exemple: Să se determine soluţiile următoarelor sisteme cu preciziile $\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-7}, \varepsilon = 10^{-10}$

$$a) \begin{cases} 10x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 10,25 \\ 10x_2 - 3x_3 = -22,75 \\ -2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 40 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = -30 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = -132 \\ x_2 + 4x_3 + x_4 = -132 \\ x_3 + 2x_4 = -30 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} -4x_1 + x_2 = -25 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -30 \\ 4x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases}$$