Laboratorul 6

Rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

1 Factorizarea LR Doolittle a matricelor aplicată la rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare

Prezentarea Problemei: Considerăm sistemul liniar

$$A \cdot x = b, \tag{1}$$

unde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este matricea sistemului (1) şi $b \in \mathbb{R}^n$ este termenul liber al sistemului (1).
Ne propunem să determinăm, dacă este posibil, $x \in \mathbb{R}^n$, unde x este soluţia unică a sistemului (1).

Prezentarea Metodei:

Metoda facotrizării LR Doolittle constă în descomunerea matricei A în forma

$$A = L \cdot R, \text{unde}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ l_{21} & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & 1 \end{pmatrix} \text{-matrice inferior triunghiulară;} \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & ... & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & ... & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & r_{nn} \end{pmatrix} \text{-matrice superior triunghiulară.}$$

Elementele matricelor L şi R se determină aplicând următoarele formule

$$\begin{cases} r_{1j} = a_{1j}, & 1 \le j \le n \\ l_{i1} = a_{i1}/r_{11}, & 2 \le i \le n \\ r_{kj} = a_{kj} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{kh} \cdot r_{hj}, & 2 \le k \le n, \quad k \le j \le n. \\ l_{ik} = \left(a_{ik} - \displaystyle\sum_{h=1}^{k-1} l_{ih} \cdot r_{hk} \right) / r_{kk}, & 2 \le k \le n, \quad k+1 \le i \le n. \end{cases} \tag{2}$$

Observaţii:

1) Orice matrice A nesingulară admite o factorizare LR, eventual după permutări convenabile ale liniilor.

2) Ordinea în care sunt calculate elementele matricelor L şi R, în formulele (2), este: prima linie din R, prima coloană din L, a doua linie din R, a doua coloană din L, etc.
Aplicând metoda Doolittle (formulele (2)) matricei sistemului (1), obţinem

$$A \cdot x = b \Longleftrightarrow L \cdot \underbrace{R \cdot x}_{=y} = b.$$

Pentru determinarea soluţiei x se rezolvă succesiv sistemele

$$\begin{cases} L \cdot y = b \\ R \cdot x = y. \end{cases}$$

Componentele soluţiei intermediare sistemului inferior triunghiular $L \cdot y = b$ se obţin prin substituţie directă:

$$\begin{cases} y_1 = b_1, \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k, \quad i = 2, 3, ..., n. \end{cases} \tag{3}$$

Sistemul superior triunghiular $R \cdot x = y$ se rezolvă prin substituţie inversă:

$$\begin{cases} x_n = y_n / r_{nn}, \\ x_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} \cdot x_k \right) / r_{ii}, \quad i = n-1, n-2, ..., 1. \end{cases} \tag{4}$$

Algoritmul Pseudocod

1. citeşte n, a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n+1$
2. dacă $a_{11} = 0$ atunci
   2.1. $i \leftarrow 1$
   2.2. repetă
      2.2.1. $i \leftarrow i + 1$
      până când $a_{i1} \neq 0$ sau $i > n$
   2.3. dacă $i > n$ atunci
      2.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
      2.3.2. ieşire
   2.4. pentru $j = 1, 2, ..., n+1$ execută
      2.4.1. $aux \leftarrow a_{1j}$
      2.4.2. $a_{1j} \leftarrow a_{ij}$
      2.4.3. $a_{ij} \leftarrow aux$
3. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută
   3.1. $a_{i1} \leftarrow a_{i1}/a_{11}$
4. pentru $k = 2, 3, ..., n$ execută
   4.1. $i \leftarrow k$
   4.2. repetă
      4.2.1. $S \leftarrow 0$; $piv \leftarrow 0$
      4.2.2. pentru $h = 1, 2, ..., k-1$ execută
         4.2.2.1. $S \leftarrow S + a_{ih} \cdot a_{hk}$
      4.2.3. $piv \leftarrow a_{ik} - S$
      4.2.4. $i \leftarrow i + 1$
      până când $piv \neq 0$ sau $i > n$
   4.3. dacă $piv = 0$ atunci
      4.3.1. scrie *'Sistemul nu are soluţie unică'*
      4.3.2. *ieşire*
   4.4. dacă $i \neq k + 1$ atunci

4.4.1. pentru $j = 1, 2, ...n + 1$ execută
4.4.1.1. $aux \leftarrow a_{kj}$
4.4.1.2. $a_{kj} \leftarrow a_{i-1,j}$
4.4.1.3. $a_{i-1,j} \leftarrow aux$
4.5. pentru $j = k, k + 1, ..., n$ execută
4.5.1. $S \leftarrow 0$
4.5.2. pentru $h = 1, 2, ..., k - 1$ execută
4.5.2.1. $S \leftarrow S + a_{kh} \cdot a_{hj}$
4.5.3. $a_{kj} \leftarrow a_{kj} - S$
4.6. pentru $i = k + 1, k + 2, ..., n$ execută
4.6.1. $S \leftarrow 0$
4.6.2. pentru $h = 1, 2, ..., k - 1$ execută
4.6.2.1. $S \leftarrow S + a_{ih} \cdot a_{hk}$
4.6.3. $a_{ik} \leftarrow (a_{ik} - S)/a_{kk}$
5. pentru $i = 2, 3, ..., n$ execută
5.1. $S \leftarrow 0$
5.2. pentru $k = 1, 2, ..., i - 1$ execută
5.2.1. $S \leftarrow S + a_{ik} \cdot a_{k,n+1}$
5.3. $a_{i,n+1} \leftarrow a_{i,n+1} - S$
6. $a_{n,n+1} \leftarrow a_{n,n+1}/a_{nn}$
7. pentru $i = n - 1, n - 2, ..., 1$ execută
7.1. $S \leftarrow 0$
7.2. pentru $j = i + 1, i + 2, ..., n$ execută
7.2.1. $S \leftarrow S + a_{ij} \cdot a_{j,n+1}$
7.3. $a_{i,n+1} \leftarrow (a_{i,n+1} - S)/a_{ii}$
8. pentru $i = 1, 2, ..., n$ execută
8.1. scrie $'x_i ='$, $a_{i,n+1}$.

Exemplu: Rezolvaţi următorul sistem cu ajutorul metodei de factorizare LR Doolittle

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -8 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = -14. \end{cases}$$

Proof. Matricea extinsă este

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -8 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 6 & 6 & -14 \end{array} \right).$$

Verificăm dacă determinanţii din colţ ai matricei A sunt nenuli.
$\Delta_1 = -1 \neq 0$,
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$
Deoarece determinantul $\Delta_2 = 0$, interschimbăm linia 2 cu linia 3 în matricea extinsă $\overline{A}$, şi obţinem

$$\overline{A} \overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & -8 \\ -2 & 6 & 6 & -14 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

Avem
$\Delta_1 = -1 \neq 0$,
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$,
$\Delta_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$.

Deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \neq 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ admite o factorizare LR. Mai precis, căutăm două matrice

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix},$$

astfel încât $L \cdot R = A$.

În continuare, când înmulţim linia i din matricea L cu coloana j din matricea R, vom nota $L_i(L) \times C_j(R)$.

Determinăm elementele primei linii din matricea R:
$L_1(L) \times C_1(R) \Rightarrow r_{11} = a_{11} = -1$.
$L_1(L) \times C_2(R) \Rightarrow r_{12} = a_{12} = 2$.
$L_1(L) \times C_3(R) \Rightarrow r_{13} = a_{13} = 3$.

Determinăm elementele primei coloane din matricea L:
$L_2(L) \times C_1(R) \Rightarrow l_{21}r_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{r_{11}} = \frac{-2}{-1} = 2$.
$L_3(L) \times C_1(R) \Rightarrow l_{31}r_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{r_{11}} = \frac{1}{-1} = -1$.

Determinăm elementele celei de-a doua linii din matricea R:
$L_2(L) \times C_2(R) \Rightarrow l_{21}r_{12} + r_{22} = a_{22} \Rightarrow r_{22} = a_{22} - l_{21}r_{12} = 6 - 2 \cdot 2 = 2$.
$L_2(L) \times C_3(R) \Rightarrow l_{21}r_{13} + r_{23} = a_{23} \Rightarrow r_{23} = a_{23} - l_{21}r_{13} = 6 - 2 \cdot 3 = 0$.

Determinăm elementele celei de-a doua coloane din matricea L:
$L_3(L) \times C_2(R) \Rightarrow l_{31}r_{12} + l_{32}r_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31}r_{12})/r_{22} = (-2 - (-1) \cdot 2)/2 = 0$.

Determinăm elementele liniei 3 din matricea R:
$L_3(L) \times C_3(R) \Rightarrow l_{31}r_{13} + l_{32}r_{23} + r_{33} = a_{33} \Rightarrow r_{33} = a_{33} - l_{31}r_{13} - l_{32}r_{23} = -1 - (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 0 = 2$.

Deci,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemul nostru $Ax = b$ este echivalent cu

$$L \cdot R \cdot x = b.$$

Dacă notăm $R \cdot x = y$, unde $y \in \mathbb{R}^3$, pentru a găsi soluţia $x \in \mathbb{R}^3$, trebuie să rezolvăm următoarele două sisteme triunghiulare :

$(S1) L\cdot y = b,$
$(S2) R\cdot x = y.$

Sistemul inferior triunghiular $(S1)$ este echivalent cu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -14 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Observăm că termenul liber b este ales din matricea extinsă $\overline{A}$ în care s-au interschimbat linii. Soluţia y se obţine prin substituţie directă

$$\begin{cases} y_1 = -8 \\ y_2 = -14 - 2y_1 = 2 \\ y_3 = 4 + y_1 - 0y_2 = -4. \end{cases}$$

Sistemul superior triunghiular $(S2)$ este echivalent cu

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Soluţia x se obţine prin substituţie inversă

$$\begin{cases} x_3 = -4/2 = -2 \\ x_2 = (2 - 0\cdot x_3)/2 = 1 \\ x_1 = (-8 - 3x_3 - 2x_2)/(-1) = 4. \end{cases}$$

Deci,
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ □

Exersare: Folosind metoda factorizării LR Doolittle rezolvaţi următoarele sisteme

$a)\begin{cases} 2x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + z = -2 \\ x = -1. \end{cases}$ $b)\begin{cases} 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 6 \\ -5x_3 - 7x_4 = -8 \end{cases}$ $c)\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + \frac{9}{2}x_3 + x_4 = \frac{7}{2} \\ x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$