

Operatorii de Recombinare și Mutație în Algoritmii Genetici

Asist. univ. dr. Mihai Tudor

Departamentul de Matematică, Universitatea din Craiova, România
Specializarea Matematică-Informatică

Schema generală a unui Algoritm Genetic

Orice algoritm genetic are la baza proiectării sale următorii pași:

1. Inițializarea populației
2. Evaluarea fitness-ului
3. Selecția părinților
4. Crossover
5. Mutația
6. Înlocuirea populației
7. Repetăm pașii 2-6 până la criteriul de oprire

Tranziția de la Biologie la Matematică

Analogia Cromozom-Soluție

- ▶ În biologie:
 - ▶ Cromozom = secvență de gene (A, T, G, C);
 - ▶ Fiecare genă controlează o trăsătură specifică;
 - ▶ Combinația de gene determină fenotipul (aspectul organism).
- ▶ În algoritmi genetici:
 - ▶ Cromozom = secvență de "gene" (0, 1 sau numere reale);
 - ▶ Fiecare "genă" reprezintă o variabilă a problemei;
 - ▶ Combinația de "gene" determină valoarea funcției obiectiv.

Tranziția de la Biologie la Matematică

Exemplu: Mapare Biologie — Algoritmi Genetici

Maximizarea funcției $f(x, y) = x^2 + y^2$ pe domeniul $[-10, 10] \times [-10, 10]$

Biologie	→	Algoritmi Genetici
Cromozomul matern	→	Soluția 1: (-3, 7)
Cromozomul patern	→	Soluția 2: (5, -2)
Genele pentru trăsătura 1	→	Valorile pentru variabila x
Genele pentru trăsătura 2	→	Valorile pentru variabila y
Crossing-over genetic	→	Crossover algoritmic
Descendenții	→	Soluții noi: (-3, -2), (5, 7)

Operatori Crossover

Definiție 1: Operatorul crossover este o funcție probabilistică

$$C: X \times X \times [0, 1] \rightarrow X \times X, \quad (x_1, x_2, P_c) \mapsto (y_1, y_2)$$

unde,

- ▶ $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ sunt cromozomii părinți;
- ▶ $P_c \in [0, 1]$ este probabilitatea de crossover
- ▶ $y_1, y_2 \in \mathcal{X}$ sunt cromozomii descendenți
- ▶ X este spațiul de căutare cromozomilor

Proprietăți Matematice Fundamentale:

- ▶ Conservarea lungimii - lungimea cromozomilor rămâne constantă.

$$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \forall (y_1, y_2) = C(x_1, x_2, P_c): \quad |y_1| = |y_2| = |x_1| = |x_2| = p$$

Operatori Crossover

- Conservarea materialului genetic - genele descendenților provin exclusiv de la părinți.

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, l\} : (y_1[i], y_2[i]) \in \{(x_1[i], x_2[i]), (x_2[i], x_1[i])\}$$

- Crossover-ul nu poate reduce diversitatea sub cea inițială, dar poate să o mărească prin crearea de noi combinații.

Fie $S = \{x_1, x_2\}$ mulțimea părinților și $D = \{y_1, y_2\}$ mulțimea descendenților.
Atunci:

$$\text{Diversitatea}(D) \geq \min(\text{Diversitatea}(S), \text{Diversitatea}_{\text{MaxPosibilă}})$$

- **Teorema Schemelor (Holand, 1975):** Schemele cu fitness mare și lungime mică au probabilitate crescută de a fi păstrate și propagate prin crossover.

Conceptul de "Schemă": O schemă H este un șablon care descrie anumite poziții ale cromozomului.

Exemplu: $H = 1 * 01*$, unde $*$ = wildcard

Cromozomii care se potrivesc: 10010, 10011, 11010, 11011

Operatori Crossover

Tipuri de operatori de crossover

✓ Single-Point Crossover

Algorithm:

1. Alegem aleatoriu un punct de tăiere $k \in \{1, 2, \dots, l - 1\}$, unde l este lungimea cromozomului;
2. Schimbăm segmentele din dreapta punctului de tăiere.

Exemplu:

Părinții:

$$x_1 = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$$

$$x_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

Punct de tăiere: $k = 4$:

$$x_1 = (1, 0, 1, 1 | 0, 1, 1, 0)$$

$$x_2 = (0, 1, 0, 0 | 1, 0, 0, 1)$$

Descendenții:

$$y_1 = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1)$$

$$y_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$$

Operatori Crossover

Formalizare matematică:

$$y_1[i] = \begin{cases} x_1[i], & \text{dacă } i \leq k \\ x_2[i], & \text{dacă } i > k \end{cases}$$

$$y_2[i] = \begin{cases} x_2[i], & \text{dacă } i \leq k \\ x_1[i], & \text{dacă } i > k \end{cases}$$

unde, $S = \{x_1, x_2\}$ mulțimea părinților și $D = \{y_1, y_2\}$ mulțimea descendenților

✓ Two-Point Crossover

Algorithm:

1. Alege aleatoriu două puncte de tăiere k_1, k_2 cu $k_1 < k_2$;
2. Schimbă segmentul dintre cele două puncte.

Operatori Crossover

Exemplu:

Părinții:

$$x_1 = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$$

$$x_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

Punct de tăiere: $k_1 = 2$, $k_2 = 6$:

$$x_1 = (1, 0 | 1, 1, 0, 1 | 1, 0)$$

$$x_2 = (0, 1 | 0, 0, 1, 0 | 0, 1)$$

Descendenții:

$$y_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$$

$$y_2 = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$$

Operatori Crossover

✓ Uniform Crossover

Algorithm:

1. Pentru fiecare poziție i , se generează un bit aleatoriu b_i ;
2. Dacă $b_i = 1$, schimbă genele dintre părinți la poziția i .

Exemplu:

Părinții:

$$x_1 = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0)$$

$$x_2 = (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$$

Masca: $(1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0)$:

Descendenții:

$$y_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \quad // \text{ schimbăm unde masca are bitul egal cu 1}$$

$$y_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$$

