Покажите, что $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{-|t|}-1)}$ есть характеристическая функция обобщенного распределения Пуассона, порожденного распределением Коши.

<u>Решение</u>

Пусть $Y = x_1 + x_2 + ... + x_n$, x_i задается распределением Коши, плотность которого:

$$f_{x_i}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Выразим характеристическую функцию для Y:

$$\varphi_Y(t) = E[e^{itY}] = Ee^{it\sum_{j=1}^{\Pi_\lambda} x_j} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} Ee^{it\sum_{j=1}^{n} x_j} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \varphi_{\sum_{j=1}^{n} x_j}(t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} (\varphi_x(t))^n = e^{\lambda(\varphi_x(t)-1)} \quad (1)$$

Воспользуемся х.ф. распределения Коши:

$$\phi(t) = e^{-|t|}$$

Подставим в (1):

$$\varphi_Y(t) = e^{\lambda(e^{-|t|}-1)}$$

читд

Найдем функцию распределения для сложного Пуассоновского распределения, и из нее выразим плотность.

$$Y = x_1 + ... + x_n$$

$$F(a) = P(Y < a) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\Pi_\lambda = n, x_n < a) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\Pi_\lambda = n)P(x_n < a) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{a} \frac{n}{n^2+x^2} dx$$

Продифференцируем:

$$F'_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2+a^2}$$