2 ноября 2020 г.

Тема сегодняшней пары – логарифмические, показательные, тригонометрические уравнения и неравенства. Данные задачи из второй части ЕГЭ не являют собой какую-то неразрешимую проблему, тем более что последние несколько лет наблюдается тенденцию упрощения задачи 13 и 15, что, собственно, не очень хорошо. Но сегодня не об этом – предлагаю перейти к практике.

1 Логарифм

Первое, что стоит отметить, так это то, что логарифм имеет очень строгое ОДЗ. Выражение $\log_a b$ определено только тогда, когда $\underline{b > 0 \text{ и } a \in (0;1)\cup(1;+\infty)}$

Найти область определения:

$$f(x) = \log_{x^2-2x+2}(\sqrt{1-x^2})$$
$$f(x) = \log_{\sin x}\left((x-\frac{7\pi}{30})(\frac{37\pi}{31}-x)\right)$$
$$f(x) = \log_{\ln x}(x^2+x-20)$$
$$f(x) = \log_{\sin x}\cos x$$

Разберу только первый. Выпишем ОДЗ в виде системы неравентсв:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} > 0 \\ x^2-2x+2 > 0 \\ x^2-2x+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(1+x) > 0 \\ (x-1)^2+1 > 0 \text{ – верно } \forall x \\ (x-1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

Вот такая системка. Отсюда легко получить окончательный ответ

$$\begin{cases} x \in (-1;1) \\ x \in \mathbb{R} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;1)$$

Остальные примеры немного более показательные, поэтому рекомендованы к решению.

Время перчислить свойства

Properties :

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

$$\log_{y^n} x = \frac{1}{n} \log_y x$$

$$\log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$$

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$$

$$z^{\log_y x} = x^{\log_y z}$$

$$x^{log_x y} = y$$

Fact : Логарифмическая является обратной к показательной. В самом деле, пусть у нас есть $f(x) = \log_a x$ и $g(x) = a^x$. Тогда

$$g(f(x)) = a^{\log_a x} = x$$

$$f(g(x)) = \log_a a^x = x \log_a a = x \cdot 1 = x$$

При этом $E_f = \mathbb{R}, D_f = \mathbb{R}_+$ и $E_g = \mathbb{R}_+, D_g = \mathbb{R}$. Что и требовалось доказать

Fact : $f(x) = \log_a b$ Тогда если $a > 1$, то $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}_+$, если $a \in (0;1)$, то $f(x)$ убывает на $\mathbb{R}_+$.

Действительно, как мы знаем, обратные функции сохраняют монотонность исходной. a^x возрастает при $a > 1$ и убывает при $a \in (0;1)$. Из этого получаем монотонность логарифма.

А теперь к задачам:

1. Решить уравнение

$$\log_5(2 - x) = \log_{25} x^4$$

И найти корни, принадлежащие отрезку $\left[\log_9 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$

2. Решить уравнение

$$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0$$

И найти корни, принадлежащие отрезку $\left[2; \sqrt{10}\right]$

3. Решить уравнение

$$6\log_8^2 x - 5\log_8 x + 1 = 0$$

И найти корни, принадлежащие отрезку $[2; 2.5]$

4. Решить уравнение

$$1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$$

И найти корни, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$

5. Решить уравнение

$$\log_7(x+2) = \log_{49} x^4$$

6. Решить уравнение

$$4^{x^2-2x+1} + 4^{x^2-2x} = 20$$

7. Решить уравнение

$$\log_3(x^2 - 2x) = 1$$

И найти корни, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,2; \log_2 5]$

2 Тригонометрия

Ну тут особо комментировать нечего: больше практики – лучше результат. Поэтому:

1. Решить уравние

$$\sqrt{3}\tan(5\pi + 2x) = 3$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $[\pi; \frac{5\pi}{2}]$

2. Решить уравнение

$$9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $[\frac{5\pi}{2}; 4\pi]$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2}\sin^2 x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$

4. Решить уравнение

$$\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $(-2\pi; -\pi)$

5. Решить уравнение

$$4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $(-2\pi; -\pi)$

6. Решить уравнение

$$\cos 2x + \sin^2 x = 0,5$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$

7.Решить уравнение

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $[-4\pi; \frac{5\pi}{2}]$

8. Решить уравнение

$$\frac{3^{\cos x}}{9^{\cos^2 x}} = 4^{2\cos^2 x - \cos x}$$

И указать корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}]$