9 ноября 2020 г.

С уравнениями познакомились – теперь пришло время неравенств. Задачи данного типа не отличаются какой-то особой сложностью, поэтому при достаточно уверенной теоретической базе научиться решать их не составит особого труда. Но нужно помнить об одной очень важной для ЕГЭ вещи – а именно об аккуратности и педантичности, так как подавляющее большинство ошибок совершаются именно по невнимательности будущего абитуриента.

Неравенства

Прежде чем приступить к решениям и разборам, нужно уточнить один очень важный факт:

$$\log_a x \text{ строго убывает при } a \in (0;1)$$

$$\log_a x \text{ строго возрастает при } a \in (1;\infty)$$

Ну а вот первая задача:

1. Решить неравенство:

$$\log_{x+2}(x^2-3x) \geq \log_{x+2}(-x)$$

Переменная находится в обоих частях логарифма. Благо случай достаточно легкий – основание-то одинаковое. Воспользуемся этим и перенесем все в одну часть:

$$\log_{x+2}(x^2-3x) - \log_{x+2}(-x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x+2}\frac{x^2-3x}{-x} \geq 0(*) \\ x<0 \\ x^2-3x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{x+2}(-x+3) \geq 0(*) \\ x<0 \\ x^2-3x>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad (0)$$

Решим неравенство (*). Представим в виде системы:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x+3 \geq 1 \\ x+2>1 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+3 \leq 1 \\ x+2<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \geq x \\ x>-1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 \leq x \\ x<-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-1;2]$$

Сопоставим с первоначальной системой (0):

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;2] \\ x+2 \in (0;1) \cup (1;+\infty) \\ x<0 \\ x^2-3x>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1;2] \\ x \in (-2;-1) \cup (-1;+\infty) \\ x<0 \\ x \in (-\infty;0) \cup (3;+\infty) \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1;0)$$

2. Решить неравенство:

$$\log_{x-2} 5 \leq 2$$

3. Решить неравенство

$$x^{2-4\log_2 x+\log_2^2 x} < \frac{1}{x}$$

Разбор задачи в конце документа!

4. Решить неравенство:

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}^2 -4}{\log_{\frac{1}{2}} -1} \leq 0$$

5. Решить неравенство:

$$4 \cdot 3^x \log_{\frac{1}{2}} x + 36\log_2 x + 9 \geq 3^x$$

6. Решить неравенство

$$\frac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1}-1)}{x} \geq 0$$

7. Решить неравенство:

$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2(16x) \geq 1$$

Fact : Отметим одну существенную вещь, а именно попробуем решить в общем случае неравенство вида:

$$\log_{g(x)} f(x) > 0$$

Мы знаем, что $\log_{g(x)} f(x)$ строго убывает при $g(x) \in (0;1)$, строго возрастает при g(x) > 1 . Также любой логарифм принимает нулевой значение только при $f(x)=1$. Не забывая об ОДЗ, запишем это в виде системы:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 1 \\ g(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \leq 1 \\ g(x) < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow (f(x)-1)\cdot(g(x)-1) \geq 0$$

То есть для решения изначального неравенства достаточно решить систему:

$$\begin{cases} (f(x)-1)\cdot(g(x)-1) \geq 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$$

Тригонометрия

Буквально пару слов про обратные тригонометрическиее функции.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$$

Док-во:

$$\arcsin x = \arcsin(\cos(\arccos x)) = \arcsin(\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x)) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\arctan x = \arctan(\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$$

1. Решить неравенство:

$$\frac{3\operatorname{ctg} x}{1+\operatorname{ctg} x} \leq 2$$

2. Решить неравенство:

$$\arccos x < \arcsin x$$

3. Решить уравнение:

$$\sqrt{\sin^2 x - \cos^2 x}\left(\frac{1}{\operatorname{ctg} 2x} + 1\right) = 0$$

4. Решить уравнение

$$2 \cdot \cos 2x + 4\cos(1.5\pi - x) + 1 = 0$$

И найти корни, принадлежащие отрезку $[1.5\pi; 3\pi]$

5. Решить уравнение:

$$\arcsin(\cos(2\operatorname{arcctg} x)) = 0$$

2. (Решение)

$$x^{2-4\log_2 x+\log_2^2 x} < \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^{2-4\log_2 x+\log_2^2 x} < x^{-1}$$

Как мы знаем, показательная функция a^x возрастает при $a > 1$, убывает при $0 < a < 1$, и константна при $a = 1$. Так как неравенство строгое, последний вариант отпадает. Рассмотрим первые два из них:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ 2 - 4\log_2 x + \log_2^2 x < -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;1) \\ 2 - 4\log_2 x + \log_2^2 x > -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ (\log_2 x - 3)\cdot(\log_2 x - 1) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (0;1) \\ (\log_2 x - 3)\cdot(\log_2 x - 1) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Что делать дальше, я думаю понятно.

4. (Решение)

$$4\cdot 3^x \log_{\frac{1}{2}} x + 36\cdot\log_2 x + 9 \geq 3^x \Leftrightarrow -4\cdot 3^x \log_2 x + 36\log_2 x + 9 - 3^x \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$4\log_2 x(9-3^x) + (9-3^x) \geq 0 \Leftrightarrow (4\log_2 x + 1)\cdot(9-3^x) \geq 0$$