Tema 2 - Algoritmica Grafurilor

Mihail Popovici, Luca Petrovici, Alexandru-Constantin Iov, George-Razvan Rusu

December 29, 2024

Problema 1 : Iov Alexandru-Constantin

Subpunctul a

Implicatia directa : (=>)

Ipoteza : F^* este o acoperire minimala (relativ la incluziune) de cardinal minim.
Concluzie : $\exists$ M^* cuplaj de cardinal maxim, a.i. $M^* \subseteq F^*$

Înainte de a începe demonstrația, trebuie enunțată Teorema Norman-Rabin: Fie G un graf de ordin n, fară noduri izolate. Dacă M^* este un cuplaj de cardinal maxim în G și F^* este o acoperire cu muchii minimă a lui G, atunci:

$$|M^*| + |F^*| = \text{n}$$

Unde n este numărul de noduri al grafului G.

Din teoremă reiese că $|M^*|$ = n - $|F^*|$, deci pentru a avea un cuplaj de cardinal cât mai mare, trebuie să avem o acoperire cu cardinalul cât mai mic. Astfel, cele două concepte sunt în strânsă legătură.

M^* unește cât mai multe noduri printr-un număr minim de muchii și nu există în graf nici un alt cuplaj care să facă acest lucru într-un mod mai eficient. F^* minimal și de cardinal minim va fi obținut din M^* prin legarea nodurilor din mulțimea E(M^*) cu nodurile din mulțimea S(M^*) prin câte o muchie fiecare. Astfel, dacă F^* este minimală și de cardinal minim, $\exists$ M^* cuplaj de cardinal maxim, a.i. $M^* \subseteq F^*$.

Implicatia inversa : (<=)

Ipoteza : $\exists$ M^* cuplaj de cardinal maxim, a.i. $M^* \subseteq S^*$
Concluzie : S^* este o acoperire minimală (relativ la incluziune) de cardinal minim.

Dacă F^* este minimal, înseamnă că F^* - {e} nu mai este acoperire, $\forall$ e $\in$ E(G).

Presupunem prin reducere la absurd că F^* este minimal și $\exists$ M^* cuplaj de cardinal maxim, a.i. $M^* \subseteq F^*$, dar F^* nu este de cardinal minim $\Rightarrow$ $\exists$ $F^{'}$ a.i. $|F^{'}| < |F^*|$. Însă, la implicația directă am demonstrat că dacă $F^{'}$ este minimal și de cardinal minim, atunci $M^* \subset F^{'}$. Dar $M^* \subset F^*$ și F^* minimal, $|F^{'}| < |F^*|$ $\Rightarrow$ imposibil, deoarece $F^* \setminus$ {e} nu mai este acoperire $\Rightarrow$ Dacă $\exists$ M^* cuplaj de cardinal maxim, a.i. $M^* \subseteq S^*$ atunci S^* este o acoperire minimală (relativ la incluziune) de cardinal minim.

Subpunctul b

Implicatia directa : (=>)

Ipoteză : Un cuplaj maximal M^* este de cardinal maxim
Concluzie : $\exists$ F^* acoperire cu muchii de cardinal minim, a.i.
$M^* \subseteq F^*$

Demonstrația acestei implicații este similară cu demonstrația implicației directe la subpunctul a). F^* se asigură că toate nodurile au gradul cel puțin 1, utilizand un număr minimal de muchii. Cuplajul M^* poate fi obținut din acoperirea F^* prin ștergerea muchiilor adiacente cu noduri cu gradul ¿ 1, obtinandu-se în final cuplajul de cardinal maxim și maximal M^*. În concluzie, dacă M^* este un cuplaj maximal de cardinal maxim, atunci $\exists$ F^* acoperire cu muchii de cardinal minim, a.î. $M^* \subseteq F^*$.

Implicatia inversa : (<=)

Ipoteză : $\exists$ F^* acoperire cu muchii de cardinal minim, a.î.
$M^* \subseteq F^*$
Concluzie : Un cuplaj maximal M^* este de cardinal maxim

Dacă M^* este maximal, înseamnă că M^* + {e} nu mai este cuplaj, $\forall$ e $\in$ E(G).

Presupunem prin reducere la absurd că M^* este maximal și $\exists$ F^* acoperire cu muchii de cardinal minim, a.i. $M^* \subseteq F^*$, dar M^* nu este de cardinal maxim. Însă, la "=>" am demonstrat că dacă $M^{'}$ este de cadinal maxim, atunci $M^{'} \subset F^*$. Dar $M^* \subset F^*$, M^* maximal și $|M^{'}| > |M^*|$ $\Rightarrow$ imposibil, deoarece M^* + {e} nu mai este cuplaj $\Rightarrow$ contradicție, deci daca $\exists$ F^* acoperire cu muchii de cardinal minim, a.î. $M^* \subseteq F^*$ atunci un cuplaj maximal M^* este de cardinal maxim.

Problema 2 : Rusu Răzvan

Subpunctul a

Pentru a determina un arbore parțial de cost maxim în G vom folosi o variație a algoritmului lui Kruskal. Astfel, în loc de a sorta muchiile în ordine crescătoare a costurilor, le vom ordona în mod descrescător.

sort $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ // $a.i.$ $c(e_1) \geq c(e_2) ... \geq c(e_m)$
$T \leftarrow \emptyset; i \leftarrow 1;$
$while$ $(i \leq m)$ do
    if $(\langle T \cup \{e_i\} \rangle_G$ nu are circuite $)$ $then$
        $T \leftarrow T \cup \{e_i\};$
    $i++;$

Subpunctul b

Implicatia directa :

Ipoteza : x și y sunt conectate în G_α
Concluzie : x și y sunt conectate în T_α

Din ipoteză, x și y sunt conectate în G_α. Deci există un drum P_{xy} între x și y în G_α, format din muchii e_1, e_2, ..., e_k, unde $c(e_i) \geq \alpha$ pentru fiecare muchie. Prin definiție, T este conex și conține un set de muchii care asigură conectivitatea nodurilor din G, dar selectează numai muchii de cost maxim în sensul construirii arborelui. În procesul de construire al lui T, orice muchie care nu este inclusă în T fie:

1) Nu este necesară pentru conectivitate, adică există alte muchii care asigură legătură între componentele respective

2) Este înlocuită cu o muchie de cost mai mare sau egal, deoarece T maximizează costul muchiilor incluse.

Astfel, pentru orice muchie e_i din drumul P_{xy} din G_α, dacă e_i nu se află în T, trebuie să existe în T un drum alternativ care conectează aceleași componente și care utilizează doar muchii de cost $\geq \alpha$.

Deoarece P_{xy} este format exclusiv din muchii cu cost $\geq \alpha$, drumul dintre x și y în G_α este reprodus în T_α, întrucât T_α conține suficiente muchii pentru a conservă conectivitatea nodurilor din T.

În concluzie, dacă x și y fac parte din aceeași componentă conexă în G_α, atunci aparțin aceleiași componente conexe în T_α.

Implicația inversa :

Ipoteza : x și y sunt conectate în T_α
Concluzie : x și y sunt conectate în G_α

T este un arbore parțial al lui G, deci T conectează toate nodurile din G și este un subgraf al lui G. Fiindcă T_α păstrează doar muchiile din T cu $c(e) \geq \alpha$, iar G_α conține toate muchiile cu această proprietate, toate muchiile din T_α sunt incluse și în G_α. Deoarece T_α este subarbore al lui T și G_α este subgraf al lui G, toate conexiunile între nodurile din T_α sunt valabile și în G_α.

Subpunctul c

Inițial vom folosi algoritmul lui Kruskal modificat de la subpunctul a) pentru a construi arborele parțial de cost maxim, T, din G, urmând să parcurgem drumul de la s la t astfel:

$vec \leftarrow \emptyset;$
$for\ ((u, v) \in T)\ do$
  $//construim\ listele\ de\ adiacenta$
  $add\ u\ to\ vec[v];$
  $add\ v\ to\ vec[u];$

$//definim\ functia\ DFS$
$method\ DFS(current\_node, last\_node, target, path):$
  $if\ (current\_node == target)\ then$
    $return\ true;$
  $for\ (v \in vec[current\_node])\ do$
    $if\ (v! = last\_node)\ then$
      $path \leftarrow path \cup (current\_node, v)$
      $if\ (DFS(v, current\_node, target, path) == true)\ then$
        $return\ true;$
      $else$
        $path \leftarrow path \setminus (current\_node, v)$
  $return\ false;$

$path \leftarrow \emptyset;$
$DFS(s, NONE, t, path);$

$//parcurgem\ muchiile\ din\ path\ si$

$//o\ alegem\ pe\ cea\ cu\ costul\ cel\ mai\ mic$
$min \leftarrow \infty$
$for\ (e \in path)\ do$
$\quad if\ (c(e) < min)\ then$
$\quad\quad min \leftarrow c(e)$
//astfel, cantitatea maxima dintr-un produs care poate
//fi transportat de la s la t se gaseste in
//variabila min

Problema 3 : Popovici Mihail

Subpunctul a

$$c(T|e) = \sum_{e' \in E(T) \setminus \{e\}} c(e') = \sum_{e' \in E(T)} c(e') - c(e) = c(T) - c(e)$$

Subpunctul b

Fie T un arbore parțial de cost minim al lui G, având costul minim $c(T)$. Conform subpuctului a, prin contractarea muchiei e, obținem $c(T|e) = c(T) - c(e)$. Să presupunem prin reducere la absurd că $T|e$ **NU** este un arbore parțial de cost minim al lui $G|e$. Atunci ar exista un alt arbore parțial $T'|e$ a lui $G|e$, cu $c(T'|e) < c(T|e)$.

Dacă $T'|e$ este un arbore de cost mai mic în $G|e$, atunci putem extinde acest arbore în G adăugând înapoi muchia e pentru a obține un arbore T' al lui G. Costul acestui arbore T' ar fi:

$$c(T') = c(T'|e) + c(e)$$

Deoarece $c(T'|e) < c(T|e)$, rezulta că:

$$c(T'|e) < c(T|e) + c(e) = c(T)$$

Aceasta contrazice ipoteza că T este un arbore parțial de cost minm al lui G. Prin urmare, $T|e$ trebuie să fie un arbore parțial de cost minim al lui $G|e$.

Problema 4 : Petrovici Luca

Subpunctul a

Implicatia directa :

Ipoteza: G are o d-tăietură nevidă
Concluzia: G nu este tare conex

Știm din ipoteză ca G are o d-taietură nevidă, deci există o submulțime de arce $F \subseteq E$ cu proprietatea că există o bipartiție (A, B) a lui $V(A, B \neq \emptyset)$ așa încât $F = \{uv, \in E : u \in A, v \in B\}$ și $\{vu, \in E : u \in A, v \in B\} = \emptyset$. Deci, există cel puțin două noduri $x \in A$ și $y \in B$ cu arcul xy și niciun alt arc din B în A. Acest lucru permite parcurgerea din x în y, dar nu și invers, deci G nu este tare conex.

Implicatia inversa :

Ipoteza: G nu este tare conex
Concluzia: G are o d-tăietură nevidă

Știm din ipoteză ca G nu este tare conex, adică G conține cel puțin două noduri x și y între care există arcul xy și nu există niciun yx-drum. Considerăm mulțimile $A = \{u : \exists uy\text{-drum în } G\} \cup \{x\}$ și $B = \{v : \exists yv\text{-drum în } G\} \cup \{y\}$ (fiindcă G este slab conex, știm că $A \cup B = V$ și $A \cap B = \emptyset$). În acest fel, vor exista doar arce de la A la B (printre care și xy) și niciun arc de la B la A, adică G conține măcar d-tăietura nevidă descrisă de mulțimile A și B.

Subpunctul b

Demonstrăm că (i) este echivalent cu (ii).

Fiecare digraf G slab-conex poate fi văzut ca o înlănțuire de componente tare-conexe. Drumurile dintre 2 componentele tare-conexe vor avea acelasi sens de parcurgere (altfel ar fi o singură componentă tare-conexă, nu două), condiție de formare de d-tăieturi. Pentru că se îndeplinește această condiție, toate arcele care formează acele drumuri vor fi incluse în d-tăieturi și implicit într-un d-separator. Prin contractare, lungimea drumurilor va scădea cu 1 la fiecare pas, până când componentele tare-conexe vor avea un nod în comun și vor deveni o singură componentă tare-conexă. Acest proces se repetă până când digraful va avea o singură componentă tare-conexă, deci acesta va fi tare-conex. În concluzie, contractarea tuturor arcelor din d-separator va conduce la formarea unui digraf tare-conex.

Demonstrăm că (i) este echivalent cu (iii).

(i) $\rightarrow$ (iii): Prin definiție, o d-tăietură partiționează digraful în două submulțimi de noduri (A și B) cu proprietatea că există xy-drumuri, dar niciun yx-drum ($x \in A, y \in B$). Am putea spune că d-tăieturile descriu partiționări ale digrafului în care parcurgerea se face într-un singur sens. Din faptul că J este un d-separator rezultă că J conține măcar o muchie din fiecare d-tăietură. Adăugarea arcelor inverse celor din J ar permite parcurgerea în ambele sensuri între mulțimile oricărei partiționări ale digrafului, așadar, digraful ar deveni tare conex.

(iii) $\rightarrow$ (i): Presupunem prin reducere la absurd că prin adăugarea tuturor arcelor inverse celor din J la G se obține un digraf tare conex, iar J nu este un d-separator. Deoarece J nu este un d-separator, înseamnă că $\exists F$ d-taietură a.î. $F \cap J = \emptyset$. Din asta, rezultă că bipartiția (A, B), conectată de arcele din F va conține xy-drumuri, dar niciun yx-drum ($x \in A, y \in B$), deci, G nu este tare-conex. Am ajuns la o contradicție, deci dacă prin adăugarea tuturor arcelor inverse celor din J la G se obține un digraf tare conex, atunci J este un d-separator.

Din faptul că (i) este echivalent cu (ii) și (i) este echivalent cu (iii), rezulta că (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

Subpunctul c

Fie $\mathcal{F}$ o familie de cardinal maxim (pe care îl notăm cu p) de d-tăieturi disjuncte două cate două. Prin definiție, un d-separator intersectează toate d-tăieturile digrafului, așadar d-separatorul va avea cardinalul minim egal cu p (în cazul în care intersectează exact o singură muchie din fiecare d-tăietură din $\mathcal{F}$).