

Tema 2 - Algoritmica Grafurilor

Mihail Popovici, Luca Petrovici, Alexandru-Constantin Iov, George-Razvan Rusu

December 31, 2024

Problema 1 : Popovici Mihail

Implicatia directa : ($=>$)

Dacă G are cuplaj perfect, atunci $\alpha(G) = |G|/2$

Un cuplaj perfect în G este un cuplaj M cu proprietatea $|M| = |G|/2$ (fiecare nod din G este incident cu exact o muchie din cuplaj). Astfel, dacă G are cuplaj perfect, fiecare nod al său este inclus în acest cuplaj.

Pe de altă parte, într-un graf bipartit, numărul total de noduri $|G|$ este suma nodurilor din cele 2 părți ale partiției ($|G| = |S| + |T|$, unde S și T sunt mulțimile disjuncte ale nodurilor).

Având în vedere că G are cuplaj perfect, fiecare muchie a acestui cuplaj formează o pereche, unul din nodurile perechii fiind din S , iar celălalt din T , deci numărul total de muchii în cuplaj este $|G|/2$.

Implicatia inversa : ($<=$)

Dacă $\alpha(G) = |G|/2$, atunci G are un cuplaj perfect.

Pornind de la ipoteză ($\alpha(G) = |G|/2$), înseamnă că avem un cuplaj maxim M cu $|G|/2$ muchii, iar fiecare muchie din acest cuplaj acoperă noduri distincte. Deoarece $\alpha(G) = |G|/2$, acest cuplaj acoperă toate cele $|G|$ noduri $=>$ M este cuplaj perfect, toate nodurile fiind acoperite de exact o muchie.