Tema 3 - Algoritmica Grafurilor

Mihail Popovici, Luca Petrovici, Alexandru-Constantin Iov, George-Razvan Rusu

January 1, 2025

Problema 1 : Popovici Mihail

Implicatia directa : (=>)
Dacă G are cuplaj perfect, atunci $\alpha(G) = |G|/2$

Un cuplaj perfect în G este un cuplaj M cu proprietatea $|M| = |G|/2$ (fiecare nod din G este incident cu exact o muchie din cuplaj). Astfel, dacă G are cuplaj perfect, fiecare nod al său este inclus în acest cuplaj.

Pe de altă parte, într-un graf bipartit, numărul total de noduri $|G|$ este suma nodurilor din cele 2 părți ale partiției ($|G| = |S| + |T|$, unde S și T sunt mulțimile disjuncte ale nodurilor).

Având în vedere că G are cuplaj perfect, fiecare muchie a acestui cuplaj formează o pereche, unul din nodurile perechii fiind din S, iar celălalt din T, deci numărul total de muchii în cuplaj este $|G|/2$.

Implicatia inversa : (<=)
Dacă $\alpha(G) = |G|/2$, atunci G are un cuplaj perfect.

Pornind de la ipoteză ($\alpha(G) = |G|/2$), înseamnă că avem un cuplaj maxim M cu $|G|/2$ muchii, iar fiecare muchie din acest cuplaj acoperă noduri distincte. Deoarece $\alpha(G) = |G|/2$, acest cuplaj acoperă toate cele $|G|$ noduri => M este cuplaj perfect, toate nodurile fiind acoperite de exact o muchie.

Problema 3 : Alexandru-Constantin Iov

Fie G un graf cu $\chi(G) = p$.

a) Fie G un graf cu $\chi(G) = p$. Dacă G nu este deja p-minimal-cromatic, atunci, conform definiției, $\exists$ un nod v astfel încât $\chi(G-v) = p$. Eliminăm, pe rând, toate aceste noduri până când ajungem la H, subgraf al lui G, pentru care nu $\exists$ v astfel încât $\chi(H-v) = p \Rightarrow H$ este p-minimal-cromatic. În cazul în care G este deja p-minimal-cromatic, demonstrația este evidentă.

b) Presupunem prin reducere la absurd că $\exists$ un nod $v \in G$ cu $d(v) < p-1$ și G este p-minimal-cromatic. Dacă $d(v) = p-2$, acesta "forțează" $p-2$ noduri să aibă o colorare diferită de el. Dacă eliminăm nodul v din G, atunci, conform definiției unui graf p-minimal-cromatic, $\chi(G-v) = p-1$.

Vecinii fostului nod v pot folosi cel mult $p-2$ culori (sunt $p-2$ vecini și avem la dispoziție $p-1$ culori, deci destule). Atunci când adăugăm înapoi nodul v la graf, însă, acesta va putea fi colorat cu cea de-a $(p-1)$-a culoare.

De aici, va rezulta că $\chi(G) = p-1$. Observăm că am ajuns la o contradicție, deoarece $\chi(G)$ ar trebui să fie egal cu $p \Rightarrow G$ nu este p-minimal-cromatic. Prin contrazicerea presupunerii, dacă $\exists$ un nod $v \in G$ cu $d(v) < p-1$, G nu este p-minimal-cromatic $\Rightarrow$ Daca G este p-minimal-cromatic, atunci δ (G) $\geq p-1$.

c) **Implicatia directa** (=>) Dacă G este 3-minimal-cromatic atunci G este un circuit impar indus.

Mai întâi, pentru că $\chi(G) = 3$, G trebuie să conțină cel puțin un circuit impar, întrucât acesta este unitatea de bază necesară pentru a 3-colora un graf. Dacă nu ar conține unul, atunci graful ar fi bipartit, și ar putea fi colorat cu 2 culori, deci $\chi(G) = 2$.

Pentru a fi minimal, $\chi(G-v) = 2$, adică bipartit, $\forall v \in V(G)$. Din acest lucru, rezultă faptul că G conține un singur circuit impar. Mai mult, acest circuit trebuie, la rândul său, să fie indus. Dacă circuitul nu ar fi indus, atunci ar exista riscul ca graful $G - v$ să conțină la rândul lui un alt circuit impar, deci ar fi tot 3-colorabil, nu 2-colorabil, lucru ce contrazice definiția unui graf p-minimal-colorabil.

În concluzie, dacă G este 3-minimal-cromatic, atunci G este un circuit impar indus.

Implicatia indirecta (<=) Daca G este un circuit impar indus, atunci este 3-minimal-cromatic.

Evident, dacă G este un circuit impar indus, acesta va fi colorat cu 3 culori. De exemplu, pentru circuitul $1-2-3-1$, culorile vor fi alb - negru - gri - alb, adică 3, din cauza faptului că ultimul nod este adiacent cu primul. Astfel, este indeplinită prima condiție pentru un graf 3-minimal-cromatic. Dacă scoatem orice nod din circuitul indus, atunci vom obține un lanț de lungime pară, care poate fi colorat doar cu 2 culori, îndeplinind și cea de-a doua condiție pentru un graf 3-minimal-colorabil.

În concluzie, dacă G este un circuit impar indus, atunci este 3-minimal-cromatic.