Contents

Part I
Вычисление избыточного тока

Предлагается изучить вопрос о наличии избыточного тока в двух-контактном сквиде, в одном из контактов которого становятся по какким-то причинам важны высшие гармоники (надо будет разобраться с тем что это могут быть за причины..). Далее такой контакт я буду называть необычным. Прежде чем переходить к сквиду предлагается повторить выкладки касаюиеся просто классического эффекта джозефсона, понять как получаются вольт-амперные характеристики в этих случаях чтобы понять как пожно подойти к вычислению и что является причиной появления ибыточного тока.

1 Нестационарный эффект Джозефсона. RSJ-model.

В RSJ модели заменяя, джозефсоновский переход эквивалентной схемой с парралельно подклченным сопротивлением, имеем:

Ток через "чистый" дж. контакт: $I_c \sin\gamma$, где γ - разность фаз, по разные стороны от перехода.

Ток через сопротивление R: U/R, где U, связано с γ соотношением $2eU = \hbar\frac{\partial\gamma}{\partial t}$. Имеем таким образом:

$$I = I_c \sin\gamma + \frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{1}$$

Нужно заметить что с точки зрения RCSJ модели, отличающейся включенной емкостью, написанное выражение соответствует пределу малой емкости, или в терминах washboard-модели бесконечно малой массе частицы, приводящей к преобладанию вязкости над инерцией (потом хорошо бы рассмотреть общий случай)

Наша цель пока получить зависимость напряжения от времени.

Обезразмеричаем уравнение, вводя ток: $\tilde{I} = I/I_c$ и частоту: $\omega = 2eI_cR/\hbar$. Получим (далее опускаем тильду для краткости):

$$I - \sin\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{2}$$

Решение запишется в виде:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} \tag{3}$$

с точностью до произвольной константы соответствующей началу отсчета времени.

Интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки $x = \tan\frac{\gamma}{2}, d\gamma = \frac{2dx}{x^2+1}$, $\sin\gamma = \frac{2x}{x^2+1}$ приводится к табличному виду:

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} = \int \frac{2dx}{I(x^2+1) - 2x} = \int \frac{2I dx}{I^2x^2 - 2Ix + I^2} = \\ &= \frac{2I}{I^2-1} \int \frac{dx}{\left(\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{I^2-1}}{I^2-1} \int \frac{d\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}}{(\frac{Ix+1}{\sqrt{I^2+1}})^2 + 1} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{I^2-1}} \arctan \frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим t из соотн. (4):

$$\begin{aligned} \frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} &= \tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) \\ I\tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1 \\ \gamma &= 2\arctan\frac{1}{I}\left\{\sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь посчитаем производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\gamma}{\partial t} &= 2\frac{\partial}{\partial t}\arctan\left\{\frac{\sqrt{I^2-1}}{I}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{I}\right\} \\ &= 2\frac{I^2-1}{2I}\left\{\left[\left(\frac{\sqrt{I^2-1}}{I}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{I}\right)^2 + 1\right]\cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)\right\}^{-1} \\ &= \frac{I^2-1}{I}\left\{\left(\frac{\sqrt{I^2-1}}{I}\sin\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{I}\cos\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)\right)^2 + \cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)\right\}^{-1} \\ &= \frac{I^2-1}{I}\left\{\frac{I^2-1}{I^2}\sin^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{I^2}\cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + \cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + \frac{\sqrt{I^2-1}}{I^2}\sin\left(t\sqrt{I^2-1}\right)\right\}^{-1} \\ &= \frac{I^2-1}{I + \frac{1}{I}\cos\left(t\sqrt{I^2-1}\right) + \frac{\sqrt{I^2-1}}{I^2}\sin\left(t\sqrt{I^2-1}\right)} \end{aligned}$$

получаем выражение, которое отличается от искомого только сдвигом по времени:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{I^2-1}{I + \cos\left(t\sqrt{I^2-1}\right)} \tag{6}$$

Что с точностью до переобозначений совпадает с нужным выражением для U. Вольт амперная характеристика извлекается усреднением этого выражения по времени. Правильный ответ, в котором восстановленны все размерности выглядит так:

$$\overline{U} = R\sqrt{I^2 - I_c^2}$$

2 Обыкновенный SQUID. RSJ-model.

Нетрудно убедится, что случай сквида отличается от рассмотренного ранее лешь перенормировкой частоты колебаний напряжения и критического тока.

Действительно, уравнение которое нам надо решить на этот раз имеет вид:

$$I = I_c \sin\gamma + I_c \sin(\gamma + \alpha) + \frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{7}$$

где α- разность фаз между двумя контактами сквида, связанная с магнитным потоком через его кольцо. Это уравнение приводится к виду:

$$I = I_c 2\sin(\gamma + \frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{8}$$

Решение этого уравнения имеет прежний вид (3), где безразмерные ток и время имеют вид:

$$\tilde{I} = \frac{I}{I_c^{'}} \qquad I_c^{'} = 2I_c \cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\tilde{t} = \omega^{'} t \qquad \omega^{'} = 2\omega\cos\frac{\alpha}{2} \tag{9}$$

ВАХ будет для этого случая будет точно такая же только с перенормированным значением критического тока, который теперь изменяя магнитное поле можно менять в перделах от $-2I_c$ до $2I_c$.

3 Необычный SQUID. RSJ-model.

Попытка решения в лоб В этом случае в уравнение добавляется еще один член:

$$I = I_c(\sin\gamma + a\sin 2\gamma) + I_c\sin(\gamma+\alpha) + \frac{\hbar}{2e}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{10}$$

где a мы считаем малым параметром. Его решение имеет вид:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma - a\sin(2\gamma + \alpha)} \tag{11}$$

Раскладывая знаменатель по параметру a, проведя те же выкладки что и в предыдущих разделах получим в первом порядке:

$$t = f_0(\gamma) + af_1(\gamma,\alpha); \tag{12}$$
$$\text{где } f_0(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{I^2-1}}\arctan\frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} \tag{13}$$
$$f_1(\gamma,\alpha) = \int \frac{\sin(\alpha+2\gamma)}{(I-\sin\gamma)^2}d\gamma \tag{14}$$

$f_1(\gamma,\alpha)$ оказывается довольно громоздкой комбинацией тригонометрических функций и делает безнадежными попытки точно выразить γ как функцию t.

Попробуем, однако решить последнее уравнение итеративно:

$$\gamma_0 = f_0^{-1}(t) = 2\arctan\frac{1}{I}\left\{\sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1\right\}$$
$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1; \quad \gamma_1 \ll 1$$

Подставив в уравнение (12) и раскладываясь до первого порядка получим:

$$t = f_0(\gamma_0+\gamma_1) + af_1(\gamma_0+\gamma_1,\alpha) \approx f_0(\gamma_0) + f_0^{'}(\gamma_0)\gamma_1 + af_1(\gamma_0,\alpha)$$

И таким образом для γ_1 получим:

$$\gamma_1 = -a\frac{f_1(\gamma_0,\alpha)}{f_0^{'}(\gamma_0)} \tag{15}$$

Вычисление приводит:

$$f_0'(\gamma_0) = \frac{\left(\tan^2\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)+1\right)}{I\tan^2\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)+I-2\tan\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\omega t+2\right)+2\omega^2+1}{\left(\omega^2+1\right)\left(-2\omega\sin\left(\omega t+2\right)+\cos\left(\omega t+2\right)+2\omega^2+1\right)}$$

В пределе больших токов $I \gg 1$, получим:

$$\begin{aligned}
f_0(\gamma) \ &= \frac{2}{\sqrt{I^2-1}}\arctan\frac{I\tan\frac{\gamma}{2}-1}{\sqrt{I^2-1}} \approx \frac{\gamma}{I} \\
f_0'(\gamma_0) &\approx \frac{1}{I} \\
f_1(\gamma,\alpha) &= \int\frac{\sin(\alpha+2\gamma)}{(I-\sin\gamma)^2}d\gamma \approx \frac{1}{I^2}\int\sin(\alpha+2\gamma)d\gamma = -\frac{1}{2I^2}\cos(\alpha+2\gamma) \\
\gamma_1 &= -a\frac{f_1(\gamma_0,\alpha)}{f_0'(\gamma_0)} \approx \frac{a}{2I}\cos(\alpha+2\gamma_0) \approx \frac{a}{2I}\cos(\alpha+2It)
\end{aligned}$$

Собирая все вместе получим следующий ответ для γ:

$$\begin{aligned}
\gamma &\approx It + \frac{a}{2I}\cos(\alpha+2It) + O(a,\frac{1}{I})T \\
U &\approx I + a\cos(\alpha+2It)
\end{aligned}$$

Поправка к закону Ома оказывается быстроосцилирующей при больших токах и усреднится в ноль.

4 Теория возмущений в исходном уравнении по параметру I_c/I

4.1 Обыкновенный SQUID. RSJ-model.

Общая итеративная формула. Попробуем получить ответ для обыкновенного сквида, проводя теорию возмущений в исходном уравнении.

Мы должны воспроизвести ряд

$$U = \sqrt{I^2-1} \approx I - \frac{1}{2}\frac{1}{I} - \frac{1}{8}\frac{1}{I^3} - \frac{1}{16}\frac{1}{I^5}o\left(\frac{1}{I^2}\right)$$

Из уравнения

$$\begin{aligned}
\dot\gamma &= I - \sin\gamma \\
\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} &= 1 - \frac{1}{I}\sin\gamma
\end{aligned}$$

В последнем уравнении выполнена замена $t = I\tau$, чтобы явно выделить малый параметр.

Строим теорию возмущений:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$$

Предположим, что нам известен ряд для γ вплоть до $n-1$ порядка. Получим формулу для n-того прпрприближения.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\tau}\left(\gamma_0+\dots+\gamma_n\right) = 1 - \frac{1}{I}\sin\left(\gamma_0+\dots+\gamma_n\right) = 1 - \frac{1}{I}\sin\left(\gamma_0+\dots+\gamma_{n-1}\right)\cancelto{1}{\cos\gamma_n} + \cancelto{0}{\frac{1}{I}\cos\left(\gamma_0+\dots+\gamma_n\right)\sin\gamma_n} \\
&\frac{d}{d\tau}\left(\gamma_0+\dots+\gamma_n\right) = 1 - \frac{1}{I}\sin\left(\gamma_0+\dots+\gamma_{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Ровно тоже самое соотношение верно и для всех порядков меньших n и в частности для $n-1$:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\gamma_0+\dots+\gamma_{n-1}\right) = 1 - \frac{1}{I}\sin\left(\gamma_0+\dots+\gamma_{n-2}\right)$$

Комбинируя два последних равентсва получим:

$$\frac{d\gamma_n}{d\tau} = \frac{1}{I}\left(\sin\left(\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-2}\right) - \sin\left(\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-1}\right)\right) = \frac{1}{I}\sin\left(\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-2}\right)\overbrace{\left\{1 - \cos\gamma_{n-1}\right\}}^{\sim\gamma_{n-1}^2} - \frac{1}{I}\cos\left(\gamma_0 + \dots + \gamma_{n-2}\right)\sin\gamma_{n-1}$$
$$\approx -\frac{1}{I}\gamma_{n-1}\cos\gamma_0$$

$$\frac{d\gamma_n}{d\tau} = -\frac{1}{I}\gamma_{n-1}\cos\gamma_0 \tag{16}$$

Первые порядки. Выполняя вычисления до первого порядка напрямую, а далее используя полученную выше формулу (16) получим для первых поправок к γ:

- Нулевой порядок

$$\frac{d\gamma_0}{d\tau} = 1$$
$$\gamma_0 = \tau$$

- Первый порядок

$$\frac{d\gamma_1}{d\tau} = -\frac{1}{I}\sin\gamma_0 = -\frac{1}{I}\sin\tau$$
$$\gamma_1 = \frac{1}{I}\cos\tau$$

- Второй порядок

$$\frac{d\gamma_2}{d\tau} = -\frac{1}{I^2}\cos^2\tau$$
$$\gamma_2 = -\frac{1}{I^2}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\sin 2\tau}{4}\right)$$

- Третий порядок

$$\frac{d\gamma_3}{d\tau} = -\frac{1}{I^3}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\sin 2\tau}{4}\right)\cos\tau$$
$$\gamma_3 = \frac{1}{I^3}\left(\frac{1}{2}\tau\sin\tau - \frac{1}{6}\cos^3\tau + \frac{\cos\tau}{2}\right)$$

- Четвертый порядок

$$\frac{d\gamma_4}{d\tau} = -\frac{1}{I^4}\left(\frac{1}{2}\tau\sin\tau - \frac{1}{6}\cos^3\tau + \frac{\cos\tau}{2}\right)\cos\tau$$
$$\gamma_4 = -\frac{1}{I^4}\left(\frac{3\tau}{16} + \frac{7}{48}\sin 2\tau - \frac{1}{192}\sin 4\tau - \frac{1}{8}\tau\cos 2\tau\right)$$

Нетрудно убедиться в том, что члены уже четвертого порядка дают ошибку. Изучая полученный ряд можно установить следующее:

- Четность порядков как функций t чередуется, как это видно из общей формулы (16).
- В нечетных порядках присутствует линейный член. Поэтому вклад в напряжение при усреднении от 0 до 2π дают только они.
- Произвольный порядок имеет следующий вид:

$$\gamma_n(t) = \frac{1}{I^n}\left(c_n\theta\left((-1)^{n+1}\right)t + \sum_{q=1}^{n} P_q^1(t)\cos qt + Q_q^1(t)\sin qt\right),$$

  где $P_n^1(t)$ и $Q_n^1(t)$ – многочлены первой степени по t, а тета-функция учитывает отсутствие линейного члена в четных порядках. Такой же вид имеет и общее решение представленное в виде такого ряда.
- Такая теория есть по сути не что иное как разложение на больших токах интеграла (3), поптыка чего была сделана в пункте 3.

5 Численный счет

5.1 Постановка вопроса

Исходное уравнение (7), является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, численное решение которого не представляет трудностей. Поэтому вопрос о существовании избыточного тока был изучен численно. А именно изучалось следующее уравнение с нулевым начальным условием $\varphi(0) = 0$:

$$\frac{d\varphi}{dt} + I(\varphi) = I, \tag{17}$$

где в качестве $I(\varphi)$ использовалась следующая модельная функция:

$$I(\varphi) = \sin\varphi + a\sin(2\varphi + \phi) + b\sin(3\varphi + \phi)\,.$$

Для этого уравнения исследовались следующие вопросы:

1. Существование избыточного тока при $I \gg I_c$
2. Закон обращения $U(I)$ в ноль при $I \sim I_c$.
3. Зависимость I_c^+и I_c^-от магнитного потока ϕ.

5.2 Результаты

5.2.1 Избыточный ток при $I \gg I_c$

Для различных ток-фазовых соотношений были получены решения ур-я (17), после чего был взят предел $t \to \infty$, при которых линейная часть решения "забивает" коэффициент при которой дает напряжения. Далее от полученного таким образом напряжения при больших токах была отнята линейная часть. В результате для всех тестовых функций $I(\varphi)$ на больших токах, не было обнаружено константной части, т. е. избыточного тока.

5.2.2 Поведение $U(I)$ вблизи I_c

Была обнаружена следующая тенденция: при увеличении роли побочных гармоник (параметров a и b) крит. индекс уменьшается от своего классического значения. При этом обнаруженно следующее противоречие: при увеличении a (при $b = 0$) прит индекс уменьшается непрерывно от своего "классического значения 0.5 при $a = 0$, до 0.4 при $a = 50$. Казалось бы при $a = 50 \gg 1$ пожно пренебречь основной гармоникой, после чего уравнение сводится исходному невозмущенному с $a = 0$, с точностью до переобозначений переменных и параметров и крит индекс должен быть 0.5

6 Разложение по положениям полюсов

Заметим, что после тригонометрической подстановки, выражения для точного решения выглядят как интегралы от рациональных функций. Изучим поведение полюсов этих функций в зависимости от параметров.

6.1 Невозмущенная модель

6.1.1 Точные формулы

Согласно пункту 1 решение имеет вид:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} = \int \frac{2dx}{I(x^2+1) - 2x} \tag{18}$$

и нам нужно изучать корни многочлена $I(x^2 + 1) - 2x$. Они имеют следующий вид:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - I^2}}{I}.$$

Разложим на больших токах $I \gg 1$:

$$x_{1,2} = \frac{1}{I} \pm \sqrt{\frac{1}{I^2} - 1} = \pm i + \frac{1}{I} \pm i \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n c_n \left(\frac{1}{I}\right)^{2n}$$

где $c_n = \frac{(2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n}$. Видно что на больших токах полюса подинтегрального выражения приближаются к точкам $\pm i$. Нулевое приближение дает ожидаемый результат:

$$t \approx \frac{1}{I} \int \frac{2dx}{x^2+1} = \frac{2}{I} \arctan x = \frac{\gamma}{I}.$$

Разложим теперь (18) по степени отклонения от полюсов $\delta(I) = x_{1,2} \mp i$:

$$t = \frac{1}{I} \int \frac{2dx}{(x-i-\delta)(x+i-\delta)} = \frac{1}{I} \int \frac{2dx}{(x-\delta)^2+1} = -\frac{1}{I} \arctan(\delta - x) \tag{19}$$

6.1.2 Первый порядкок

Используя разложение в ряд для δ:

$$\delta = \frac{1}{I} + \frac{i}{2I^2} + \frac{i}{8I^4} + \frac{i}{16I^6} + o\left(\frac{1}{I^8}\right),$$

для первых двух порядков получим:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{I} \arctan(\delta - x) = \frac{1}{I} \arctan x - \frac{1}{I} \frac{\delta}{1+x^2} = \frac{\varphi}{I} - \frac{\delta}{I} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \\ t &= \frac{\varphi}{I} - \frac{1}{I^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

И соответственно для функции φ будем иметь:

$$\varphi_0 = It$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{I} \cos^2 \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = \frac{1}{I} \cos^2 \frac{It}{2}$$

Как в прошлой редакции теории возмущений во втором порядке отсутствует нужный нам линейный член.

6.1.3 Второй и третий порядки

Раскладывая (19) дальше, получаем:

- Во втором порядке

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{I} \left(\arctan x - \frac{\delta}{1+x^2} - \delta^2 \frac{x}{(1+x^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{I} \left(\varphi - \delta \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{\delta^2}{2} \sin \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{I} \left(\varphi - \frac{1}{I} \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2I^2} \left(i \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{I} \left(\varphi - \frac{1}{I} \left[\cos^2 \frac{It}{2} - \frac{1}{2} \sin It \left(\varphi_1 + \cancelto{0}{\varphi_2} \right) \right] - \frac{1}{2I^2} \left(i \left[\cos^2 \frac{It}{2} - \cancelto{0}{\frac{1}{2} \sin It \left(\varphi_1 + \varphi_2 \right)} \right] + \sin It \cos^2 \frac{It}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{I} \left(\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{1}{I} \left[\cos^2 \frac{It}{2} - \frac{1}{2} \varphi_1 \sin It \right] - \frac{1}{2I^2} \left(i \cos^2 \frac{It}{2} + \sin It \cos^2 \frac{It}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

получаем, следующий результат:

$$\varphi_2 = \frac{1}{I^2} \frac{i}{2} \cos^2 \frac{It}{2}$$

- В третьем порядке

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{1}{I}\left(\arctan x - \frac{\delta}{1+x^2} - \delta^2\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{\delta^3}{3}\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\right) = \\
&= \frac{1}{I}\left(\varphi - \delta\cos^2\frac{\varphi}{2} - \frac{\delta^2}{2}\sin\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2} + \frac{\delta^3}{3}\cos^4\frac{\varphi}{2}(2\cos\varphi - 1)\right) = \\
&= \frac{1}{I}\left(\varphi - \frac{1}{I}\cos^2\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2I^2}\left(i\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin\varphi\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{3I^3}\cos^4\frac{\varphi}{2}(2\cos\varphi - 1)\right) \\
\varphi_3 &= -\frac{1}{3I^3}\cos^4\frac{It}{2}(2\cos It - 1) - \frac{1}{I}\left(\frac{\varphi_2}{2}\sin It + \frac{\varphi_1^2}{4}\cos It\right) - \frac{\varphi_1}{2I^2}\left(\frac{i}{2}\sin It + \frac{1}{2}\sin^2 It - \cos It\cos^2\frac{It}{2}\right) \\
\varphi_3 &= \frac{1}{I^3}\cos^2\frac{It}{2}\left(\cos^2\frac{It}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\cos It\right) - \frac{1}{4}\sin^2 It\right) - \frac{i}{2I^3}\cos^2\frac{It}{2}\sin It
\end{aligned}
$$

Итого получили следующее разложение:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

$$\varphi_0 = It$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{I}\cos^2\frac{It}{2}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{I^2}\frac{i}{2}\cos^2\frac{It}{2}$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{I^3}\cos^2\frac{It}{2}\left(\cos^2\frac{It}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\cos It\right) - \frac{1}{4}\sin^2 It\right) - \frac{i}{2I^3}\cos^2\frac{It}{2}\sin It$$

Замечаем два очевидных факта:

- Не видать линейного члена, все порядки кроме нулевого целиком осциллирующие
- Появились мнимые поправки