Part I

Вычисление избыточного тока

Предлагается изучить вопрос о наличии избыточного тока в двух-контактном сквиде, в одном из контактов которого становятся по какким-то причинам важны высшие гармоники (надо будет разобраться с тем что это могут быть за причины..). Далее такой контакт я буду называть необычным. Прежде чем переходить к сквиду предлагается повторить выкладки касаюиеся просто классического эффекта джозефсона, понять как получаются вольт-амперные характеристики в этих случаях чтобы понять как пожно подойти к вычислению и что является причиной появления ибыточного тока.

1 Нестационарный эффект Джозефсона. RSJ-model.

В RSJ модели заменяя, джозефсоновский переход эквивалентной схемой с парралельно подклченным сопротивлением, имеем:

Ток через “чистый” дж. контакт: $I_c \sin\gamma$, где γ - разность фаз, по разные стороны от перехода.

Ток через сопротивление R: U/R, где U, связано с γ соотношением $2eU = \hbar\frac{\partial\gamma}{\partial t}$. Имеем таким образом:

$$I = I_c \sin\gamma + \frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{1}$$

Нужно заметить что с точки зрения RCSJ модели, отличающейся включенной емкостью, написанное выражение соответствует пределу малой емкости, или в терминах washboard-модели бесконечно малой массе частицы, приводящей к преобладанию вязкости над инерцией (потом хорошо бы рассмотреть общий случай)

Наша цель пока получить зависимость напряжения от времени.

Обезразмеричаем уравнение, вводя ток: $\tilde{I} = I/I_c$ и частоту: $\omega = 2eI_cR/\hbar$. Получим (далее опускаем тильду для краткости):

$$I - \sin\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{2}$$

Решение запишется в виде:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} \tag{3}$$

с точностью до произвольной константы соответствующей началу отсчета времени.

Интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки $x = \tan\frac{\gamma}{2}$,$d\gamma = \frac{2dx}{x^2+1}$, $\sin\gamma = \frac{2x}{x^2+1}$ приводится к табличному виду:

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{d\gamma}{I-\sin\gamma} = \int \frac{2dx}{I(x^2+1)-2x} = \int \frac{2I dx}{I^2x^2 - 2Ix + I^2} = \\ &= \frac{2I}{I^2-1}\int \frac{dx}{\left(\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}\right)^2+1} = \frac{2\sqrt{I^2-1}}{I^2-1}\int \frac{d\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}}{(\frac{Ix+1}{\sqrt{I^2+1}})^2+1} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{I^2-1}}\arctan\frac{I\tan\frac{\gamma}{2}-1}{\sqrt{I^2-1}} \end{aligned} \tag{4}$$

Выразим t из соотн. (4):

$$\begin{aligned} \frac{I\tan\frac{\gamma}{2}-1}{\sqrt{I^2-1}} &= \tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) \\ I\tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+1 \\ \gamma &= 2\arctan\frac{1}{I}\left\{\sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+1\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь посчитаем производную:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= 2\frac{\partial}{\partial t}\arctan\left\{\frac{\sqrt{I^2-1}}{I}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{I}\right\} \\
&= 2\frac{I^2-1}{2I}\left\{\left[\left(\frac{\sqrt{I^2-1}}{I}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{I}\right)^2+1\right]\cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)\right\}^{-1} \\
&= \frac{I^2-1}{I}\left\{\left(\frac{\sqrt{I^2-1}}{I}\sin\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{I}\cos\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)\right)^2+\cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)\right\}^{-1} \\
&= \frac{I^2-1}{I}\left\{\frac{I^2-1}{I^2}\sin^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{I^2}\cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+\cos^2\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right)+\frac{\sqrt{I^2-1}}{I^2}\sin\left(t\sqrt{I^2-1}\right)\right\}^{-1} \\
&= \frac{I^2-1}{I+\frac{1}{I}\cos\left(t\sqrt{I^2-1}\right)+\frac{\sqrt{I^2-1}}{I^2}\sin\left(t\sqrt{I^2-1}\right)}
\end{aligned}
$$

получаем выражение, которое отличается от искомого только сдвигом по времени:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{I^2-1}{I+\cos\left(t\sqrt{I^2-1}\right)} \tag{6}$$

Что с точностью до переобозначений совпадает с нужным выражением для U. Вольт амперная характеристика извлекается усреднением этого выражения по времени. Правильный ответ, в котором восстановленны все размерности выглядит так:

$$\overline{U} = R\sqrt{I^2-I_c^2}$$

2 Обыкновенный SQUID. RSJ-model.

Нетрудно убедится, что случай сквида отличается от рассмотренного ранее лешь перенормировкой частоты колебаний напряжения и критического тока.

Действительно, уравнение которое нам надо решить на этот раз имеет вид:

$$I = I_c\sin\gamma + I_c\sin(\gamma+\alpha) + \frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{7}$$

где α- разность фаз между двумя контактами сквида, связанная с магнитным потоком через его кольцо. Это уравнение приводится к виду:

$$I = I_c 2\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{8}$$

Решение этого уравнения имеет прежний вид (3), где безразмерные ток и время имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\tilde{I} &= \frac{I}{I_c'} & I_c' &= 2I_c\cos\frac{\alpha}{2} \\
\tilde{t} &= \omega' t & \omega' &= 2\omega\cos\frac{\alpha}{2}
\end{aligned} \tag{9}
$$

ВАХ будет для этого случая будет точно такая же только с перенормированным значением критического тока, который теперь изменяя магнитное поле можно менять в перделах от $-2I_c$ до $2I_c$.

3 Необычный SQUID. RSJ-model.

Попытка решения в лоб В этом случае в уравнение добавляется еще один член:

$$I = I_c\left(\sin\gamma + a\sin 2\gamma\right) + I_c\sin(\gamma+\alpha) + \frac{\hbar}{2e}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{10}$$

где a мы считаем малым параметром. Его решение имеет вид:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma - a\sin(2\gamma + \alpha)} \tag{11}$$

Раскладывая знаменатель по параметру a, проведя те же выкладки что и в предыдущих разделах получим в первом порядке:

$$t = f_0(\gamma) + a f_1(\gamma, \alpha); \tag{12}$$

$$\text{где } f_0(\gamma) \ = \frac{2}{\sqrt{I^2 - 1}} \arctan \frac{I \tan \frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2 - 1}} \tag{13}$$

$$f_1(\gamma, \alpha) = \int \frac{\sin(\alpha + 2\gamma)}{(I - \sin\gamma)^2} d\gamma \tag{14}$$

$f_1(\gamma, \alpha)$ оказывается довольно громоздкой комбинацией тригонометрических функций и делает безнадежными попытки точно выразить γ как функцию t.

Попробуем, однако решить последнее уравнение итеративно:

$$\gamma_0 = f_0^{-1}(t) = 2\arctan \frac{1}{I} \left\{ \sqrt{I^2 - 1} \tan \left(\sqrt{I^2 - 1} \frac{t}{2} \right) + 1 \right\}$$

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1; \quad \gamma_1 \ll 1$$

Подставив в уравнение (12) и раскладываясь до первого порядка получим:

$$t = f_0(\gamma_0 + \gamma_1) + a f_1(\gamma_0 + \gamma_1, \alpha) \approx f_0(\gamma_0) + f_0^{'}(\gamma_0)\gamma_1 + a f_1(\gamma_0, \alpha)$$

И таким образом для γ_1 получим:

$$\gamma_1 = -a \frac{f_1(\gamma_0, \alpha)}{f_0^{'}(\gamma_0)} \tag{15}$$

Вычисление приводит:

$$f_0^{'}(\gamma_0) = \frac{\left(\tan^2\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) + 1\right)}{I\tan^2\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) + I - 2\tan\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\omega t + 2\right) + 2\omega^2 + 1}{\left(\omega^2 + 1\right)\left(-2\omega\sin\left(\omega t + 2\right) + \cos\left(\omega t + 2\right) + 2\omega^2 + 1\right)}$$

В пределе больших токов $I \gg 1$, получим:

$$f_0(\gamma) \ = \frac{2}{\sqrt{I^2 - 1}} \arctan \frac{I \tan \frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2 - 1}} \approx \frac{\gamma}{I}$$

$$f_0^{'}(\gamma_0) \approx \frac{1}{I}$$

$$f_1(\gamma, \alpha) = \int \frac{\sin(\alpha + 2\gamma)}{(I - \sin\gamma)^2} d\gamma \approx \frac{1}{I^2} \int \sin(\alpha + 2\gamma) d\gamma = -\frac{1}{2I^2}\cos(\alpha + 2\gamma)$$

$$\gamma_1 = -a\frac{f_1(\gamma_0, \alpha)}{f_0^{'}(\gamma_0)} \approx \frac{a}{2I}\cos(\alpha + 2\gamma_0) \approx \frac{a}{2I}\cos(\alpha + 2It)$$

Собирая все вместе получим следующий ответ для γ:

$$\gamma \approx It + \frac{a}{2I}\cos(\alpha + 2It) + O(a, \frac{1}{I})T$$

$$U \approx I + a\cos(\alpha + 2It)$$

Поправка к закону Ома оказывается быстроосцилирующей при больших токах и усреднится в ноль.

4 Теория возмущений в исходном уравнении по параметру I_c/I

4.1 Обыкновенный SQUID. RSJ-model.

Попробуем получить ответ для обыкновенного сквида, проводя теорию возмущений в исходном уравнении.

Мы должны воспроизвести ряд

$$U = \sqrt{I^2 - 1} \approx I - \frac{1}{2}\frac{1}{I} + o\left(\frac{1}{I^2}\right) \tag{16}$$

Из уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= I - \sin\gamma \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \tau} &= 1 - \frac{1}{I}\sin\gamma \end{aligned}$$

В последнем уравнении выполнена замена $t = I\tau$, чтобы явно выделить малый параметр.

Строим теорию возмущений:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots$$

Нулевой порядок

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 \\ \frac{\partial \gamma_0}{\partial \tau} &= 1 \\ \gamma_0 &= \tau \end{aligned}$$

Первый порядок

$$\begin{aligned} \gamma &= \tau + \gamma_1 \\ \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\tau + \gamma_1\right) &= 1 - \frac{1}{I}\sin\left(\tau + \gamma_1\right) = 1 - \frac{1}{I}\left(\sin\tau \cancelto{1}{\cos\gamma_1} + \cos\tau \cancelto{\gamma_1}{\sin\gamma_1}\right) \approx 1 - \frac{\sin\tau}{I} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial \tau} &= -\frac{\sin\tau}{I} \\ \gamma_1 &= \frac{\cos\tau}{I} \end{aligned}$$

Второй порядок

$$\begin{aligned} \gamma &= \tau + \frac{\cos\tau}{I} + \gamma_2 \\ 1 - \frac{\sin\tau}{I} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \tau} &= 1 - \frac{1}{I}\left(\sin\left(\tau + \frac{\cos\tau}{I}\right)\cancelto{1}{\cos\gamma_2}\right) \approx 1 - \frac{\sin\tau}{I} - \frac{1}{I}\left(\cos\tau\frac{\cos\tau}{I}\right) \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial \tau} &= -\left(\frac{\cos\tau}{I}\right)^2 \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{I^2}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\sin 2\tau}{4}\right) \end{aligned}$$

Усреднение

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= It + \frac{\cos It}{I} - \frac{1}{I}\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2It}{4}\right) \\ \frac{1}{T}\int_0^T \gamma(t)dt &= I - \frac{1}{2}\frac{1}{I};\ T = \frac{2\pi}{I} \end{aligned}$$

Что воспроизводит нулевой и первый порядок точного решения 16.

4.2 Необычный SQUID.

Повторим процедуру описанную выше для уравнения 10 обезразмеренного в согласии с 9, кроме того как в прошлом пункте введем переменную τ.

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\tau} = 1 - \frac{1}{I}\sin\gamma - \frac{a}{I}\sin\left(2\gamma - \alpha\right)$$

Поскольку a тоже малый параметр, предыдущий пункт отстается в силе вплоть до второго порядка.

Второй порядок

$$\begin{aligned}
\gamma &= \tau + \frac{\cos\tau}{I} + \gamma_2 \\
1 - \frac{\sin\tau}{I} + \frac{\partial\gamma_2}{\partial\tau} &= -\frac{1}{I}\sin\left(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2\right) - \frac{a}{I}\sin\left(2\left(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2\right) - \alpha\right) \\
\frac{\partial\gamma_2}{\partial\tau} &= -\frac{\gamma_1\cos\gamma_0}{I} - \frac{a}{I}\sin\left(2\gamma_0 - \alpha\right) \\
&= -\frac{\cos^2\tau}{I^2} - \frac{a}{I}\sin\left(2\tau - \alpha\right) \\
\gamma_2 &= -\frac{1}{I^2}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\sin 2\tau}{4}\right) + \frac{a}{I}\frac{\cos\left(2\tau - \alpha\right)}{2}
\end{aligned}$$

Третий порядок

$$\begin{aligned}
\gamma &= \tau + \frac{\cos\tau}{I} - \frac{1}{I^2}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\sin 2\tau}{4}\right) + \frac{a}{I}\frac{\cos\left(2\tau - \alpha\right)}{2} + \gamma_3 \\
\frac{\partial\gamma_3}{\partial\tau} &= -\frac{\gamma_2\cos\gamma_0}{I} - \frac{\gamma_1^2\sin\gamma_0}{2I} - \frac{a}{I}\gamma_1\cos\left(2\gamma_0 - \alpha\right) \\
&=
\end{aligned}$$