Part I

Вычисление избыточного тока

Предлагается изучить вопрос о наличии избыточного тока в двух-контактном сквиде, в одном из контактов которого становятся по какким-то причинам важны высшие гармоники (надо будет разобраться с тем что это могут быть за причины..). Далее такой контакт я буду называть необычным. Прежде чем переходить к сквиду предлагается повторить выкладки касаюиеся просто классического эффекта джозефсона, понять как получаются вольт-амперные характеристики в этих случаях чтобы понять как пожно подойти к вычислению и что является причиной появления ибыточного тока.

1 Нестационарный эффект Джозефсона. RSJ-model.

В RSJ модели заменяя, джозефсоновский переход эквивалентной схемой с парралельно подклченным сопротивлением, имеем:

Ток через "чистый" дж. контакт: $I_c \sin\gamma$, где γ - разность фаз, по разные стороны от перехода.

Ток через сопротивление R: RU, где U, связано с γ соотношением $2eU = \hbar\frac{\partial\gamma}{\partial t}$. Имеем таким образом:

$$I = I_c \sin\gamma + \frac{\hbar}{2e}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{1}$$

Нужно заметить что с точки зрения RCSJ модели, отличающейся включенной емкостью, написанное выражение соответствует пределу малой емкости, или в терминах washboard-модели бесконечно малой массе частицы, приводящей к преобладанию вязкости над инерцией (потом хорошо бы рассмотреть общий случай)

Наша цель пока получить зависимость напряжения от времени.

Обезразмеричаем уравнение, вводя ток: $\tilde{I} = I/I_c$ и частоту: $\omega = 2eI_c/\hbar$. Получим (далее опускаем тильду для краткости):

$$I - \sin\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t}$$

Решение запишется в виде:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} \tag{2}$$

с точностью до произвольной константы соответствующей началу отсчета времени.

Интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки $x = \tan\frac{\gamma}{2}$,$d\gamma = \frac{2dx}{x^2+1}$, $\sin\gamma = \frac{2x}{x^2+1}$ приводится к табличному виду:

$$\begin{aligned} t &= \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} = \int \frac{2dx}{I(x^2+1) - 2x} = \int \frac{2I dx}{I^2x^2 - 2Ix + I^2} = \\ &= \frac{2I}{I^2-1}\int \frac{dx}{\left(\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{I^2-1}}{I^2-1}\int \frac{d\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}}{(\frac{Ix+1}{\sqrt{I^2+1}})^2+1} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{I^2-1}}\arctan\frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} \end{aligned} \tag{3}$$

Выразим t из соотн. 3:

$$\begin{aligned} \frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} &= \tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) \\ I\tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1 \\ \gamma &= 2\arctan\frac{1}{I}\left\{\sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

Введем обозначение: $\sqrt{I^2-1}=c$. В конечном итоге взяв производную:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{2\arctan\left(\frac{c\tan\left(\frac{ct}{2}\right)+1}{\sqrt{c^2+1}}\right)\right\} \\
&= \frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}\frac{1}{\frac{\left(c\tan\left(\frac{ct}{2}\right)+1\right)^2}{c^2+1}+1}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}ct\right)} \\
&= \frac{c^2\sqrt{c^2+1}}{\left(c\sin\left(\frac{1}{2}ct\right)+\cos\left(\frac{1}{2}ct\right)\right)^2+(c^2+1)\cos^2\left(\frac{1}{2}ct\right)} \\
&= \frac{c^2\sqrt{c^2+1}}{\frac{1}{2}\left(2c\sin(ct)-(c^2-1)\cos(ct)+c^2+1\right)+(c^2+1)\frac{1}{2}\left(\cos(ct)+1\right)} \\
&= \frac{c^2\sqrt{c^2+1}}{c^2+c\sin(ct)+\cos(ct)+1}
\end{aligned}$$

получаем выражение, которое отличается от искомого только сдвигом по времени:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{c^2+2}{\sqrt{c^2+1}+\cos(ct)}=\frac{I^2+1}{I+\cos\left(\sqrt{I^2-1}t\right)} \tag{5}$$

Что с точностью до переобозначений совпадает с нужным выражением для U. Ну не совсем. Но вычисления правильные с точностью до “где-то потерян знак”. Вольт амперная характеристика извлекается усреднением этого выражения по времени. Правильный ответ, в котором восстановленны все размерности выглядит так:

$$\overline{U}=R\sqrt{I^2-I_c^2}$$

При $I\gg I_c$ получается закон Ома, если же I превышает I_c лишь на малое $\delta I\ll I_c$, то зависимость коренной вид: $\overline{U}\approx R\sqrt{2I_c\delta I}$, если же ток меньше критического, то ток становится полностью сверхпроводящим, падение напряжения пропадает. Видно что из-за сверхпроводящей природы вблизи I_c появляется избыточный ток: $I_{\text{изб}}=\frac{U}{R}\left(\sqrt{1+\left(\frac{RI_c}{U}\right)^2}-1\right)$, который вдали от критической точки на при больших напряжениях на джозефсоновском контакте спадает степенным образом, приближая вольт-амперную характеристику к закону Ома: $I_{\text{изб}}\approx\frac{1}{2}\left(\frac{RI_c}{U}\right)^2$