**Part I**

# Вычисление избыточного тока

Предлагается изучить вопрос о наличии избыточного тока в двух-контактном сквиде, в одном из контактов которого становятся по какким-то причинам важны высшие гармоники (надо будет разобраться с тем что это могут быть за причины..). Далее такой контакт я буду называть необычным. Прежде чем переходить к сквиду предлагается повторить выкладки касаюиеся просто классического эффекта джозефсона, понять как получаются вольт-амперные характеристики в этих случаях чтобы понять как пожно подойти к вычислению и что является причиной появления ибыточного тока.

## 1 Нестационарный эффект Джозефсона. RSJ-model.

В RSJ модели заменяя, джозефсоновский переход эквивалентной схемой с парралельно подклченным сопротивлением, имеем:

Ток через "чистый" дж. контакт: $I_c \sin\gamma$, где $\gamma$ - разность фаз, по разные стороны от перехода.

Ток через сопротивление $R$: $U/R$, где $U$, связано с $\gamma$ соотношением $2eU = \hbar\frac{\partial\gamma}{\partial t}$. Имеем таким образом:

$$I = I_c \sin\gamma + \frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{1}$$

Нужно заметить что с точки зрения RCSJ модели, отличающейся включенной емкостью, написанное выражение соответствует пределу малой емкости, или в терминах washboard-модели бесконечно малой массе частицы, приводящей к преобладанию вязкости над инерцией (потом хорошо бы рассмотреть общий случай)

Наша цель пока получить зависимость напряжения от времени.

Обезразмеричаем уравнение, вводя ток: $\tilde{I} = I/I_c$ и частоту: $\omega = 2eI_cR/\hbar$. Получим (далее опускаем тильду для краткости):

$$I - \sin\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t}$$

Решение запишется в виде:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} \tag{2}$$

с точностью до произвольной константы соответствующей началу отсчета времени.

Интеграл с помощью универсальной тригонометрической подстановки $x = \tan\frac{\gamma}{2}$,$d\gamma = \frac{2dx}{x^2+1}$, $\sin\gamma = \frac{2x}{x^2+1}$ приводится к табличному виду:

$$\begin{aligned} t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma} &= \int \frac{2dx}{I(x^2+1) - 2x} = \int \frac{2Idx}{I^2x^2 - 2Ix + I^2} = \\ = \frac{2I}{I^2-1}\int \frac{dx}{\left(\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}\right)^2 + 1} &= \frac{2\sqrt{I^2-1}}{I^2-1}\int \frac{d\frac{Ix-1}{\sqrt{I^2-1}}}{(\frac{Ix+1}{\sqrt{I^2+1}})^2 + 1} = \\ = \frac{2}{\sqrt{I^2-1}}\arctan\frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} \end{aligned} \tag{3}$$

Выразим $t$ из соотн. 3:

$$\begin{aligned} \frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} &= \tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) \\ I\tan\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1 \\ \gamma &= 2\arctan\frac{1}{I}\left\{\sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

Введем обозначение: $\sqrt{I^2-1}=c$. В конечном итоге взяв производную:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\{2\arctan\left(\frac{c\tan\left(\frac{ct}{2}\right)+1}{\sqrt{c^2+1}}\right)\right\} \\
&= \frac{c^2}{\sqrt{1+c^2}}\frac{1}{\frac{\left(c\tan\left(\frac{ct}{2}\right)+1\right)^2}{c^2+1}+1}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}ct\right)} \\
&= \frac{c^2\sqrt{c^2+1}}{\left(c\sin\left(\frac{1}{2}ct\right)+\cos\left(\frac{1}{2}ct\right)\right)^2+(c^2+1)\cos^2\left(\frac{1}{2}ct\right)} \\
&= \frac{c^2\sqrt{c^2+1}}{\frac{1}{2}\left(2c\sin(ct)-(c^2-1)\cos(ct)+c^2+1\right)+(c^2+1)\frac{1}{2}\left(\cos(ct)+1\right)} \\
&= \frac{c^2\sqrt{c^2+1}}{c^2+c\sin(ct)+\cos(ct)+1}
\end{aligned}$$

получаем выражение, которое отличается от искомого только сдвигом по времени:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{c^2+2}{\sqrt{c^2+1}+\cos(ct)}=\frac{I^2+1}{I+\cos\left(\sqrt{I^2-1}t\right)} \tag{5}$$

Что с точностью до переобозначений совпадает с нужным выражением для $U$. Ну не совсем. Но вычисления правильные с точностью до “где-то потерян знак”. Вольт амперная характеристика извлекается усреднением этого выражения по времени. Правильный ответ, в котором восстановленны все размерности выглядит так:

$$\overline{U}=R\sqrt{I^2-I_c^2}$$

# 2 Обыкновенный SQUID. RSJ-model.

Нетрудно убедится, что случай сквида отличается от рассмотренного ранее лешь перенормировкой частоты колебаний напряжения и критического тока.

Действительно, уравнение которое нам надо решить на этот раз имеет вид:

$$I=I_c\sin\gamma+I_c\sin(\gamma+\alpha)+\frac{\hbar}{2e}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{6}$$

где $\alpha$- разность фаз между двумя контактами сквида, связанная с магнитным потоком через его кольцо. Это уравнение приводится к виду:

$$I=I_c 2\sin(\gamma+\frac{\alpha}{2})\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\hbar}{2eR}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{7}$$

Решение этого уравнения имеет прежний вид 2, где безразмерные ток и время имеют вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \frac{I}{I_c'} & I_c' &= 2I_c\cos\frac{\alpha}{2} \\
\tilde{t} &= \omega' t & \omega' &= 2\omega\cos\frac{\alpha}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

ВАХ будет для этого случая будет точно такая же только с перенормированным значением критического тока, который теперь изменяя магнитное поле можно менять в перделах от $-2I_c$ до $2I_c$.

# 3 Необычный SQUID. RSJ-model.

В этом случае в уравнение добавляется еще один член:

$$I=I_c\left(\sin\gamma+a\sin 2\gamma\right)+I_c\sin(\gamma+\alpha)+\frac{\hbar}{2e}\frac{\partial\gamma}{\partial t} \tag{9}$$

где $a$ мы считаем малым параметром. Его решение имеет вид:

$$t = \int \frac{d\gamma}{I - \sin\gamma - a\sin(2\gamma + \alpha)}$$

Раскладывая знаменатель по параметру $a$ получаем в первом порядке:

$$t = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{I^2-1}}\arctan\frac{I\tan\frac{\gamma}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}}}_{\text{прежнее решение}} + af(\gamma,\alpha); \qquad \text{где } f(\gamma,\alpha) = a\int\frac{\sin(\alpha+2\gamma)}{(I-\sin\gamma)^2}d\gamma \tag{10}$$

$f(\gamma,\alpha)$ оказывается довольно громоздкой комбинацией тригонометрических функций и делает безнадежными попытки точно выразить $\gamma$ как функцию $t$.

Попробуем, однако решить последнее уравнение итеративно:

$$\gamma_0 = 2\arctan\frac{1}{I}\left\{\sqrt{I^2-1}\tan\left(\sqrt{I^2-1}\frac{t}{2}\right) + 1\right\}$$
$$\gamma_1 = \gamma_0 + \gamma_1; \quad \delta \ll 1$$

Подставим в 4 и разложимся по $\delta$:

$$\frac{2}{\sqrt{I^2-1}}\arctan\frac{I\tan\frac{\gamma_0+\gamma_1}{2} - 1}{\sqrt{I^2-1}} = t + \frac{\delta\left(\tan^2\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)+1\right)}{I\tan^2\left(\frac{\gamma_0}{2}\right) + I - 2\tan\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)} = t + \gamma_1\frac{\cos(\omega t+2) + 2\omega^2 + 1}{(\omega^2+1)\left(-2\omega\sin(\omega t+2) + \cos(\omega t+2) + 2\omega^2+1\right)}$$

Где введено обозначение: $\omega = \sqrt{I^2-1}$ Подставляя в уравнение 10 получим:

$$t = t + \gamma_1\frac{\cos(\omega t+2) + 2\omega^2 + 1}{(\omega^2+1)\left(-2\omega\sin(\omega t+2) + \cos(\omega t+2) + 2\omega^2+1\right)} + a\frac{\partial}{\partial\gamma}f(\gamma,\alpha)\mid_{\gamma=\gamma_0};$$
$$\gamma_1 = a\frac{\partial}{\partial\gamma}f(\gamma,\alpha)\mid_{\gamma=\gamma_0} \times \frac{(\omega^2+1)\left(-2\omega\sin(\omega t+2) + \cos(\omega t+2) + 2\omega^2+1\right)}{\cos(\omega t+2) + 2\omega^2+1}$$

Напряжение получится после дифференциирования этого выражения по времени. Наша задача - определить во что усреднится это выражение после интегрирования по периоду.

Иначе говоря если избыточный ток есть то он пропорционален:

$$\delta I \sim a\frac{2\pi}{\omega}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\sin(\alpha + \arctan\frac{1}{\omega^2+1}\left\{\omega\tan\left(\frac{\omega t}{2}\right)+1\right\})}{(\omega^2+1-\sin 2\arctan\frac{1}{\omega^2+1}\left\{\omega\tan\left(\frac{\omega t}{2}\right)+1\right\})^2}\frac{(\omega^2+1)\left(-2\omega\sin(\omega t+2) + \cos(\omega t+2) + 2\omega^2+1\right)}{\cos(\omega t+2) + 2\omega^2+1}\right\}dt$$