Zadatak #8

Definicija šetnje, staze, puta i konture u multigrafu

Povezani grafovi

Povezani graf je neusmeren graf u kojem postoji **put** između svaka dva čvora. Drugim rečima, za svaki par čvorova *u* i *v*, postoji niz grana koji povezuje *u* i *v*. Ako se graf ne može podeliti na dva nepovezana dela, on je povezan.

- **Potpuno povezan graf** je graf u kojem postoji grana između svakog para čvorova.
- **Slabo povezan graf** je usmeren graf u kojem se ignorisanjem usmerenja može dobiti povezani graf.
- **Jako povezan graf** je usmeren graf u kojem postoji put između bilo koja dva čvora, uz poštovanje usmerenja grana.

Osobine povezanih grafova

- **Broj komponenti povezanosti** – ako graf nije povezan, može se podeliti na više disjunktnih podgrafova koji su povezani. Svaki takav podgraf se naziva **komponenta povezanosti**.
- **Minimalne grane za povezanost** – za graf sa n čvorova, minimalni broj grana za povezani graf je $n-1$. Takav graf se naziva **stablo**.
- **Redosled i veličina**:
  - **Redosled (*n*)**: Broj čvorova u grafu.
  - **Veličina (*m*)**: Broj grana u grafu.

Ako možeš nacrtati graf tako da su svi čvorovi međusobno povezani direktno ili indirektno (preko drugih čvorova), graf je povezan. Ako bilo koji čvor ostane izolovan ili postoji deo grafa koji nije povezan s ostatkom, graf nije povezan.

Formule

- Broj grana u potpuno povezanom grafu:

$$m = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

- Broj grana u drvetu**:**

$$m = n - 1$$

- Proveravanje povezanosti (matrica susedstva) – ako matrica susedstva A zadovoljava sledeće svojstvo za svaki *i* i *j*:

$$A^k[i][j] > 0 \text{ za neko } k > 0$$

Tada postoji put između čvorova *i* i *j*.

Primer

1. **Povezan graf**

- Čvorovi: V={A,B,C,D}
- Grane: E={(A,B),(B,C),(C,D),(A,D)}
- Svi čvorovi su međusobno povezani. Na primer, iz čvora *A* možemo doći do *C* preko B.

2. **Nepovezan graf**

- Čvorovi: V={A,B,C,D,E}
- Grane: E={(A,B),(B,C)}
- Čvor D i E nisu povezani s ostalima. Graf ima 2 komponente povezanosti: {A,B,C} i {D,E}

Definicije šetnje, staze, puta i konture u multigrafu

1. **Šetnja**

- Šetnja u grafu je niz čvorova i grana:
$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$$
gde su v_1, v_2,…, v_k čvorovi, a e_1, e_1,…, e_{k-1} grane, tako da svaka grana e_i povezuje čvor v_i sa v_{i*1}.

- Osobine šetnje:
  - Može da prolazi više puta kroz isti čvor ili istu granu.
  - Nije nužno da se čvorovi i grane razlikuju.

2. **Staza**

- Staza je šetnja u kojoj se grane ne ponavljaju, tj. svaka grana se koristi samo jednom.
$$v_1, v_2, \dots, v_k$$
- Osobine staze:
  - Grane su jedinstvene (ne ponavljaju se), ali čvorovi mogu da se ponavljaju.
  - Staza se koristi za proučavanje veza u grafu bez ponavljanja grana.

3. **Put**

- Put je šetnja u kojoj se ni čvorovi ni grane ne ponavljaju.
$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k$$
- Osobine puta:
  - Svaki čvor i svaka grana se posete najviše jednom.
  - Put je najrestriktivniji oblik šetnje jer nema ponavljanja ni čvorova ni grana.

4. **Kontura:**

  - Kontura (ciklus) je šetnja koja počinje i završava se u istom čvoru, a sve ostale grane se ne ponavljaju.

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_{k-1}, v_k, e_k, v_1$$

- Osobine konture:
  - Početni i krajnji čvor su isti ($v_1 = v_k$).
  - Grane ne smeju da se ponavljaju.
  - Koristi se za proučavanje kružnih struktura u grafovima.

Jednostavno objašnjenje:

- **Šetnja**: Ideš od čvora do čvora kroz graf i možeš se ponovo vraćati istim čvorovima i granama.
  - Primer. Idemo kroz čvorove i grane $A \to B \to C \to A \to B$.
- **Staza**: Kao šetnja, ali svaka grana se koristi samo jednom.
  - Primer: $A \to B \to C \to D$ ali ne možemo ponovo koristiti granu BC.
- **Put**: Kao staza, ali ni čvorovi ni grane se ne ponavljaju.
  - Primer: $A \to B \to C \to D$, ali ne možemo ponovo posetiti A ili B.
- **Kontura**: Počinješ i završavaš u istom čvoru, bez ponavljanja grana.
  - Primer: $A \to B \to C \to A$.

Primer u multigrafu

- Čvorovi: $V = \{A, B, C\}$
- Grane: $E = e_1: (A, B), e_2: (B, C), e_3: (C, A), e_4: (A, B)$

1. Šetnja: $A \to B \to C \to A \to B$ (možemo koristiti granu e_4).
2. Staza: $A \to B \to C \to A$ (svaka grana se koristi samo jednom).
3. Put: $A \to B \to C$ (bez ponavljanja čvorova ili grana).
4. Kontura: $A \to B \to C \to A$ (početni i krajnji čvor su isti, a grane se ne ponavljaju).

Definicija dva povezana čvora u grafu

U neusmerenom grafu, dva čvora u i v su povezana ako postoji niz čvorova $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$

$u_0 = u$

$u_k = v$

Svaka dva utastopna čvora u_i I u_{i+1} su povezana granom.

Drugim rečima, postoji sekvenca grana koja vodi od čvora u do čvora v.

U usmerenom grafu. Dva čvora u i v su povezana ako postoji orijentisani put.

Niz čvorova $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$, gde:

$u_0 = u$

$u_k = v$

Postoji usmerena grana (u_i, u_{i+1}) za svako i (od 0 do k-1)

Ako su svi čvorovi u grafu međusobno povezani orijentisanim putevima, kaže se da je graf jako povezan.

Dokaz da je relacija „je povezan sa" relacija ekvivalencije

Definicija relacije „je povezan sa":

Neka je G = (V, E) graf, gde je V skup čvorova, a E skup grana grafa. Za čvorove *u*, *v* ∈ V kažemo da je *u* povezan sa *v* (označavamo kao $u \sim v$) ako postoji put u grafu G koji spaja čvorove *u* i *v*. Ova relacija se definiše na skupu čvorova V.

Cilj je pokazati da relacija "je povezan sa" zadovoljava sledeća svojstva:

1. Refleksivnost: Za svaki čvor *u* ∈ V važi $u \sim u$.
2. Simetričnost: Za svaki par čvorova *u*, *v* ∈ V, ako je $u \sim$ v, onda je i $v \sim u$.
3. Tranzitivnost: Za svaki trio čvorova *u, v, w* ∈ V, ako je $u \sim v$ i $v \sim w$, onda je $u \sim w$.

- **Dokaz refleksivnosti:**
  Relacija je refleksivna ako svaki čvor *u* ∈ V ispunjava $u \sim u$. U grafu, trivijalan put dužine 0 počinje i završava u istom čvoru *u*, bez prelaska preko bilo koje grane. Po definiciji puta, to znači da je svaki čvor povezan sam sa sobom. Stoga, refleksivnost je zadovoljena.

- **Dokaz simetričnosti:**
  Relacija je simetrična ako za svaki par čvorova *u*, *v* ∈ V važi: ako je $u \sim v$, onda je i $v \sim u$. Pretpostavimo da postoji put P u grafu G koji povezuje čvorove *u* i *v*. Put P se može pratiti u obrnutom smeru, od *v* ka *u*, jer su grane grafa dvosmerne (u neorijentisanom grafu). Prema tome, ako postoji put od *u* do *v*, postoji i put od *v* do *u*, što dokazuje simetričnost relacije.

- **Dokaz tranzitivnosti:**
  Relacija je tranzitivna ako za svaki trio čvorova $u, v, w \in V$ važi: ako je $u \sim v$ i $v \sim w$, onda je $u \sim w$. Pretpostavimo da postoji put P_1 od u do v, i put P_2 od v do w. Spajanjem ovih puteva dobijamo novi put koji povezuje čvorove u i w (put prolazi kroz v). Prema tome, ako je $u \sim v$ i $v \sim w$, zaključujemo da je $u \sim w$. Time je dokazana tranzitivnost.

Zaključak:
Pokazano je da relacija "je povezan sa" zadovoljava refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost. Prema definiciji, to znači da je ova relacija relacija ekvivalencije na skupu čvorova V grafa G.

Definicija komponente povezanosti grafa

Komponente povezanosti su ključan koncept u teoriji grafova, koji opisuje povezanost čvorova u grafu. Razumevanje ovog koncepta omogućava analizu strukture grafa i identifikaciju delova koji su međusobno povezani.

Šta je komponenta povezanosti?

Komponenta povezanosti u nesmerenom grafu je maksimalan skup čvorova takav da:

1. Između svakog para čvorova u toj komponenti postoji put.
2. Nijedan čvor izvan komponente nije povezan sa čvorovima u njoj.

U suštini, svaka komponenta povezanosti predstavlja podgraf u kojem su svi čvorovi međusobno povezani, dok su čvorovi iz različitih komponenti nepovezani.

Formalna definicija:

Neka je $G = (V, E)$ neusmereni graf, gde:

- V je skup čvorova (tačaka),
- E je skup grana (veza) između čvorova.

Komponenta povezanosti $C \subseteq V$ zadovoljava:

1. Za svaki par čvorova $u, v \in C$, postoji put od u do v (povezanost unutar komponente).
2. Ako je $w \in V \setminus C$, tada ne postoji grana između w i bilo kog čvora u C (odvojenost od ostatka grafa).

Algoritmi za pronalaženje komponenti povezanosti

Postoji nekoliko algoritama za pronalaženje komponenti povezanosti u grafu:

1. DFS (Depth First Search) ili BFS (Breadth First Search)

- Prolazi se kroz čvorove grafa koristeći DFS ili BFS.
- Svaka neposećena komponenta se tretira kao nova komponenta povezanosti.
- Složenost: O(V+E), gde su V čvorovi, a E grane.

2. Tarjanov algoritam (za usmerene grafove)

- Koristi DFS za pronalaženje snažno povezanih komponenti.
- Efikasan za velike grafove.
- Složenost: O(V+E).

3. Disjoint Set Union (DSU) ili Union-Find struktura

- Koristi se za dinamičko spajanje i proveru povezanosti.
- Efikasno za grafove gde se grane dodaju ili uklanjaju u toku izvršavanja programa.
- Složenost: skoro konstantna $O(\alpha(V))$, gde je α inverzna Ackermann-ova funkcija.

Praktične primene:

1. Analiza društvenih mreža

- Identifikacija zajednica (grupa prijatelja) koje su međusobno povezane.

2. Mreže komunikacija

- Analiza stabilnosti mreže (koji delovi će ostati povezani nakon ispadanja određenih čvorova).

3. Grafovi transporta

- Pronalaženje izolovanih područja u mreži puteva ili železničkih pruga.

4. Obrada slika

- Identifikacija povezanih područja piksela na slici.

Dokaz da prost graf sa n cvorova i manje od n-1 grana nije povezan

TEOREMA: Graf sa n čvorova i manje od n-1 grana nije povezan

Def: **Povezan graf** - Graf u kom postoji put između svaka dva čvora

Ova teorema se dokazuje matematičkom indukcijom po n.

Baza indukcije: n = 2

* n >= 2 jer ne možemo pričati o grafu sa jednim ili sa nula čvorova

Ako n = 2, tada je broj grana m < 2 - 1 => m < 1 => m = 0
Graf sa nula grana nije povezan. □

Indukciona pretpostavka:

Pretpostavimo da za graf od n čvorova i manje od n-1 grana važi da nije povezan.

Indukcioni korak:

Pokazaćemo da za graf od n+1 čvorova i manje od n grana važi da nije povezan.

Koristićemo osobinu grafa koja kaže da, ako za graf G(V, E) važi da je |V| > |E| (broj čvorova veći od broja grana), onda postoji čvor v tako da je deg(v) <= 1. Odnosno, postoji čvor v koji je izolovani ili viseći čvor.

Def: **Viseći čvor** - čvor koji ima samo jednu ulaznu(izlaznu) granu.
Def: **Izolovani čvor -** čvor koji nema ni jednu ulaznu(izlaznu) granu.

Razlikujemo dva slučaja:

1. deg(v) = 0

   Ako je stepen čvora nula, to znači da nijedan drugi čvor iz grafa nema put do njega, što je kontradiktorno sa osobinom povezanog grafa.
   Dakle, graf nije povezan. □

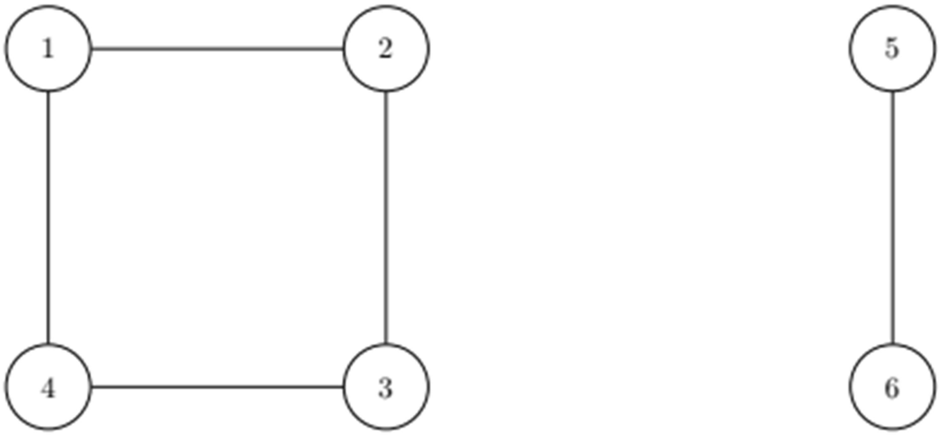
2. deg(v) = 1

   Posmatraćemo graf G'(V(G)\{v}, E(G)\'{uv}), gde je u neki čvor iz V koji je povezan sa visećim čvorom v.
   Ako je |V(G)| = n+1 onda je |V(G')| = n+1-1 = n
   Ako je |E(G)| < n onda je |V(G')| < n-1

Zbog pretpostavke indukcije, graf G’ nije povezan.
Pošto G i G’ imaju jednu komponentu povezanosti i ta komponenta već nije povezana kada uklonimo viseći čvor, dodavanje tog čvora neće uticati na povezanost komponente. Dakle, graf G nije povezan. □

Primer prostog grafa sa n čvorova i bar n-1 grana koji nije povezan

Primer prostog grafa koji ima n = 6 čvorova i n -1 = 5 grana, a nije povezan



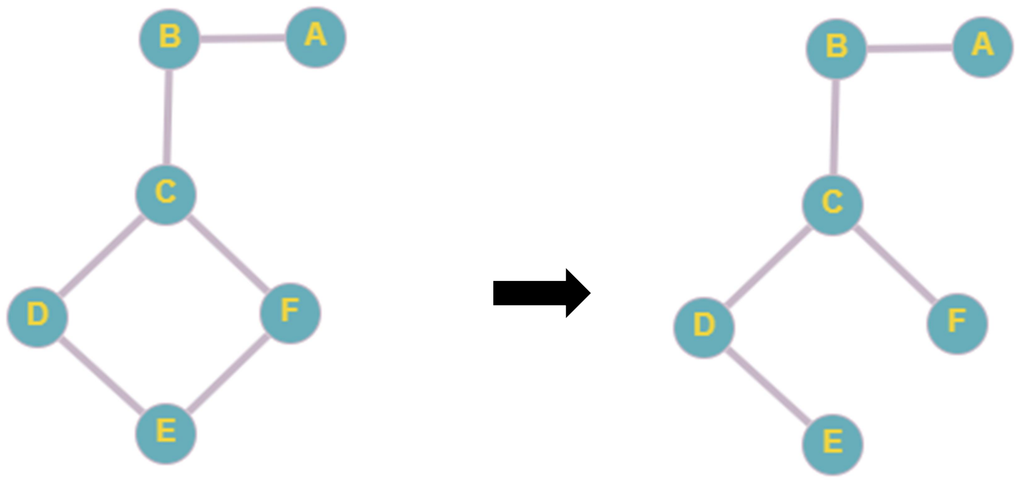
Skup čvorova ovog grafa je:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Skup grana ovog grafa je:

$$E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}.$$

Dokaz da brisanjem jedne grane konture iz prostog grafa on ipak ostaje povezan



Pretpostavićemo kontradikciju: **Naš graf više nije povezan.**

→Postoji neki par čvorova koji nije povezan.

→Obrisana grana konture je bila jedina koja je povezivala jedan od ta dva čvora sa ostatkom

→Nismo imali konturu na početku

→Ali pošto jesmo imali konturu, to znači da smo imali i drugu granu koja izlazi iz „izolovanog“ čvora i spaja se sa početnim čvorom konture

→Čvor nije izolovan

→Graf je povezan !kontradikcija □