Kako se mogu klasifikovati neuređeni izbori elemenata

Neuređeni izbori elemenata se klasifikuju prema načinu na koji se biraju elementi i da li se dozvoljava ponavljanje elemenata. Evo osnovnih tipova klasifikacije neuređenih izbora:

- m-kombinacije skupa (kombinacije bez ponavljanja)
- m-kombinacije multiskupa (kombinacije sa ponavljanjem)

m-kombinacije skupa

Definicija: Kombinacija bez ponavljanja klase m skupa A od n elemenata jeste neuređen podskup skupa A kojisadrđi m elemenata. Redosled elemenata u podskupu nije bitan i nijedan element se ne može ponoviti.

Formula: Broj m-kombinacija bez ponavljanja se može izračunati formulom:

$$C(n,m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Ova formula nam daje tačan broj načina de se iz skupa A od n elemenata izabere podskup od m elemenata pri čemu se ne uzima u obzir redosled elemenata i ne dozvoljava ponavljanje elemenata.

Dokaz: Dokaz formule se zasniva na varijacijama bez ponavljanja. Kombinacije se razlikuju od varijacija po tome što redosled elemenata nije važan. Zato ćemo prvo razmotriti varijacije bez ponavljanja, a zatim uzeti u obzir činjenicu da redosled nije bitan.

Ako biramo m elemenata iz skupa A od n elemenata i redosled je važan (varijacije bez ponavljanja), broj mogućih izbora (varijacija) je:

$$V(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Dakle, broj varijacija bez ponavljanja je proizvod:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1)$$

Kod kombinacija, za razliku od varijacija, redosled elemenata nije važan. Dakle, kada izaberemo neki podskup od m elemenata, ne zanima nas na koji način su ti elementi poređani unutar podskupa. Za svaku kombinaciju m elemenata, postoji $m!$ različitih načina da se ti elementi poređaju (varijacija unutar kombinacije). Da bismo dobili broj kombinacija, moramo "ukloniti" ove varijacije, odnosno. moramo podeliti broj varijacija sa brojem mogućih redosleda:

$$C(n,m) = \frac{V(n,m)}{m!} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Primeri kombinacija bez ponavljanja

Primer 1: Koliko različitih kombinacija od 3 elementa može da se izabere iz sledećeg skupa $B = \{a, b, c, d, e\}$

Rešenje: Broj elemenata skupa B je $n = 5$ a biramo $m = 3$ elementa.

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$$

Postoji 10 različitih kombinacija.

Primer 2: Imamo tim od 5 programera. treba da izaberemo 2 programera koji će raditi na specijalnom projektu. Koliko različitih kombinacija programera možemo izabrati?

Rešenje: Neka je $n = 5$ (ukupan broj programera) i biramo $m = 2$ programera. Broj mogućih kombinacija je:

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 10$$

Postoji 10 različitih kombinacija za izbor tima od 2 programera.

Primer 3: Dizajner radi na kreiranju palete boja za web sajt. Ima na raspolaganju 6 boja, a potrebno je da izabere 3 boje za osnovnu paletu dizajna (redosled nije bitan). Koliko različitih kombinacija boja može da napravi?

$$Boje = \{crvena, plava, ljubičasta, roza, narandžasta, siva\}$$

Rešenje: Imamo $n = 6$ boja i biramo $m = 3$ boje za paletu. Broj mogućih kombinacija boja je:

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} = 20$$

Dizajner može napraviti 20 različitih kombinacija boja za paletu sajta.

m-kombinacije multiskupa elemenata

Definicija: Kombinacija sa ponavljanjem klase k skupa *A* od *n* elemenata je kombinacija u kojoj se elementi mogu ponavljati, a redosled nije važan.

Formula kombinacije sa ponavljanjem:

Broj načina na koje od n elemenata možemo k puta odabrati neki od tih elemenata:

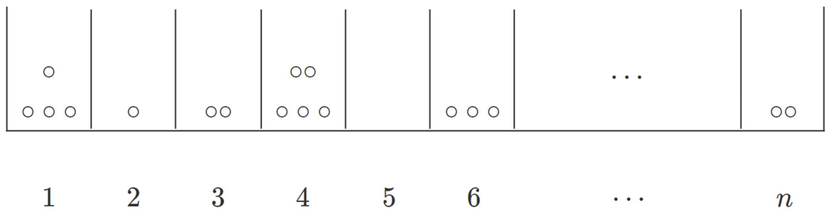
$$C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Ova formula odgovara problemima gde redosled biranja nije bitan, ali se pojedinačni elementi mogu birati više puta.

Dokaz:

Iako smo formulu za kombinacije bez ponavljanja izveli vrlo jednostavno, na osnovu varijacija bez ponavljanja, kod kombinacija s ponavljanjem ne možemo primeniti taj način, budući da kod varijacija s ponavljanjem možemo imati po više istih elemenata, pa se neće uvek isti broj varijacija preslikavati u jednu kombinaciju.

Izvođenje formule za kombinacije s ponavljanjem je složenije i potrebno je da koristimo analogiju s raspoređivanjem kuglica u kutije.



Ta analogija bi izgledala ovako: neka iz skupa od n elemenata vršimo odabir k puta, pri čemu isti element možemo izabrati i više puta. Zamislimo da imamo n praznih kutija (znači, onoliko kutija koliko ima elemenata skupa iz kojeg vršimo odabir), poređanih u niz i priljubljenih jedna uz drugu. Zamislimo, zatim, i da imamo k kuglilca, znači, onoliko kuglica koliko puta vršimo odabir. I, na kraju, zamislimo da svaki put kad odaberemo i-ti element tog skupa, ubacujemo jednu kuglicu u i-tu kutiju. Znači, ako smo izabrali 3. element, ubacujemo kuglicu u 3. kutiju, itd... Naravno, možemo istu kutiju odabrati više puta, pa će u njoj biti toliko loptica koliko smo je puta odabrali.

Nakon k izvlačenja, u svim kutijama će ukupno biti k kuglica.

Sada te kuglice u kutijama predstavimo na sledeći način. Napravimo niz od simbola $\circ$ i $|$, pri čemu simbol $\circ$ predstavlja kuglicu, a simbol $|$ predstavlja pregradni zid između dve kutije. Pri tome, levi zid prve i desni zid poslednje kutije ignorišemo. Gornja situacija s kutijama i kuglicama, predstavljena na ovaj način, izgledala bi, dakle, ovako:

$$\circ\circ\circ\circ \,\Big|\, \circ \,\Big|\, \circ\circ \,\Big|\, \circ\circ\circ\circ\circ \,\Big|\,\Big|\, \circ\circ\circ \,\Big|\, \cdots \,\Big|\, \circ\circ$$

Pošto kutija ukupno imamo *n*, znači da ćemo pregradnih zidova ukupno imati $n-1$. Kuglica imamo *k*. Znači, kuglica i pregradnih zidova (tj. simbola ∘ i simbola |) ukupno imamo $n+k-1$.
Traženi broj kombinacija s ponavljanjem od *n* elemenata *k*-te klase ovime smo sveli na broj načina na koje možemo *k* kuglica rasporediti na $n+k-1$ pozicija. Drugim rečima, od $n+k-1$ pozicija, biramo onih *k* pozicija na koje ćemo smestiti kuglice – broj načina na koje to možemo učiniti je broj kombinacija bez ponavljanja od $n+k-1$ elemenata *k*-te klase, tj. $\binom{n+k-1}{k}$. Prema tome, dobili smo formulu za broj kombinacija s ponavljanjem od *n* elemenata *k*-te klase:

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Primeri kombinacija sa ponavljanjem:

Primer 1: Od 4 elemenata {a,b,c,d} treba izabrati po dva elementa pri čemu se elementi mogu ponavljati.
Rešenje: Neka je $n = 4$, a klasa, odnosno *k* je 2.
$C_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$, postoji 10 različitih kombinacija.
To su: (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d)

Primer 2: Turista bira razglednice za svoja tri prijatelja. U suvenirnici postoji 10 različitih vrsta razglednica. Na koliko načina turista može da kupi razglednice, ako mu nije problem ni ako pokloni jednu ili više istih vrsta razglednica?
Rešenje: Naše *k* je 3, jer biramo tri razglednice, dok je $n = 10$, s obzirom da su to elementi koje možemo da biramo. Iz toga sledi da je ukupan broj načina da se izaberu razglednice: $C_{10}^3 =$
$\binom{10+3-}{3} = \binom{12}{3} = 220$

Da li se neuređeni izbori elemenata mogu opisati, to jest prebrojati preko uređenih izbora elemenata?

Možemo napraviti vezu između neuređenih izbora elemenata - kombinacija, i uređenih izbora elemenata - varijacija, kada je u pitanju prebrojavanje.

Pošto su kombinacije izbori k elemenata iz skupa od n elemenata, kao i varijacije, za ovo poređenje ćemo koristiti varijacije, a ne permutacije.

Kombinacije bez ponavljanja

$$C(n,m) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

U slučaju kombinacija bez ponavljanja, biramo k elemenata, iz skupa od n elemenata, tako da svaki element bude jedinstven. Ovo možemo da uporedimo sa varijacijama bez ponavljanja, gde se takođe uzima k elemenata iz skupa od n elemenata. Jedina razlika između ova dva izbora je u tome što kod kombinacija nije važan redosled.

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Da bismo došli od varijacija po kombinacija, potrebno je isključiti redosled. Ako raspoređujemo k elemenata nekog skupa, isključivanje redosleda znači da svaku grupu elemenata možemo da rasporedimo na k! načina. Potrebno je podeliti broj varijacija sa k! da bismo izbegli duplikate.

Dakle, kombinacije bez ponavljanja mogu da se opišu i prebroje preko varijacija bez ponavljanja kao:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{k!}$$

Kombinacije sa ponavljanjem

$$C_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

U ovom slučaju biramo k elemenata iz skupa od n elemenata tako da se oni mogu ponavljati. Ovo možemo da uporedimo sa varijacijama sa ponavljanjem. Pošto tamo svaki n element može da bude raspoređen na k mesta, formula je:

$$V_{n,k} = n^k$$

Da bismo došli do kombinacija sa ponavljanjem, potrebno je, kao i u prethodnom primeru, rešiti se duplikata, odnosno, k! načina za kombinovanje iste grupe elemenata. Time dobijamo sledeću formulu:

$$C_{n,k} = \frac{n^k}{k!}$$

Kombinacije sa ponavljanjem ipak koriste malo drugačiji princip. Ovde postoji princip raspodele, koji kaže da, ako imamo n kategorija (elemenata), potrebno nam je n-1 razdelnika da ih odvojimo. Tako da je ovde broj objekata koji delimo k elemenata PLUS n-1 razdelnika (odavde potiče taj broj k+n-1 iz formule). Pošto želimo da se rešimo k! duplikata grupa elemenata, moramo da se rešimo i (n-1)! duplikata razdelnika.

Ovim postupkom naše n postaje: k + n - 1

Konačna formula je:

C(n*, k) = C(k + n - 1, k) = (k+n-1)! / k! * (n-1)!

$$C_{n+k-1,k} = \frac{(k+n-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

Dakle, kombinacije sa ponavljanjem se mogu objasniti varijacijama sa ponavljanjem, ali se ne može direktno odatle izvući formula za njihovo izračunavanje.

Rešavanje celobrojnih jednačina pomoću kombinacija multiskupa

Rešavanje jednačina pomoću kombinacija se najčešće koristi kada su rešenja nenegativni celi brojevi.

Problem se rešava tako što ćemo ga posmatrati kao problem raspodele n identičnih kuglica (rešenje jednačine) u k različitih kutija (broj promenljivih u jednačini)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

k = 3

n = 4

I računamo broj rešenja preko formule:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$C(4+3-1,3-1) = \frac{6!}{2!\,(6-2)!}$$

= 15, i sve te kombinacije su:

(4,0,0) (3,1,0) (3,0,1) (2,2,0) (2,1,1) (2,0,2) (1,3,0)

(1,2,1) (1,1,2) (1,0,3) (0,4,0) (0,3,1) (0,2,2) (0,1,3) (0,0,4)

Određivanje broja monotono neopadajućih konačnih nizova brojeva pomoću kombinacija multiskupa

Uvod: Da bismo odredili broj monotono neopadaju´cih konaˇcnih nizova brojeva pomo´cu kombinacija multiskupa, možemo koristiti princip kombinatorike, kombinacije sa ponavljanjem

Problem: Imamo multiskup koji sadrži n različitih elemenata (npr. brojeva) i želimo formirati monotono neopadajući niz dužine k. Monotono neopadajući niz znači da se elementi mogu ponavljati, a svaki sledeći element može biti jednak ili veći od prethodnog

Pristup:

1. **Transformacija problema**: Umesto da direktno formiramo nizove, možemo reći da svaki niz predstavlja raspodelu k loptica (elementi niza) u n kanti (elementi multiskupa).
2. **Kombinatorika**: Koristimo tehniku ”stavljanja loptica u kante”, koja se u kombinatorici naziva ”kombinacije sa ponavljanjem”.

Formula: Broj načina da se rasporedi k identičnih loptica u n različitih kanti (monotono neopadajući niz) može se izračunati pomoću formule: $C(n+k-1,k)$ gde je $C(n,k)$ binomni koeficijent, definisan:

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Primer: Recimo da imamo multiskup sa n = 3 elemenata (1, 2, 3) i želimo formirati monotono neopadajući niz dužine k = 4.

$$C(4+3-1,4) = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = 15$$

Generisanje m-kombinacija skupa

Tehnika: Koristimo rekurzivno pozivanje funkcije combinations. Ako treba da napravimo kombinaciju pravog podskupa (k < n) prvo generišemo kombinacije podskupa dužine k-1 i dodajemo im element n-1. Ako je k = n, postoji samo jedan slučaj.

```
def write(niz):
    print(niz)


3 usages
def combinations(niz, n, k):
    if k == 0:
        write(niz)
    else:
        niz[k-1] = n-1
        combinations(niz, n-1, k-1)
        if n > k:
            combinations(niz, n-1, k)


if __name__ == "__main__":
    n = 6
    k = 4
    niz = [0 for i in range(k)]
    combinations(niz, n, k)
```

U ovom primeru generišemo kombinacije skupa kardinalnosti 6. A={0, 1, 2, 3, 4, 5}

Tražimo podskupove od k=4 elementa.

Po formuli, broj mogućih kombinacija je 15.

Generisanje m-kombinacija multiskupa

Tehnika: Koristimo rekurzivno pozivanje funkcije combinations. Ako je n = 1, postoji samo jedan slučaj.

```
def write(niz):
    print(niz)


3 usages
def combinations(niz, n, k):
    if k == 0:
        write(niz)
    else:
        niz[k-1] = n-1
        combinations(niz, n, k-1)
        if n > 1:
            combinations(niz, n-1, k)


if __name__ == "__main__":
    n = 3
    k = 4
    niz = [0 for i in range(k)]
    combinations(niz, n, k)
```

U ovom primeru generišemo kombinacije skupa kardinalnosti 3. A={0, 1, 2}

Tražimo podskupove od k=4 elementa.

Po formuli, broj mogućih kombinacija je 15.