Zadatak 2

Grupa 4

Oktobar 2024

Uvod

Klasifikacija uredjenih izbora elemenata u matematici koristi se u kombinatorici i zavisi od toga da li je redosled elemenata važan i da li su dozvoljena ponavljanja. Ove klasifikacije se odnose na varijacije, permutacije i kombinacije, a svaka ima preciznu definiciju i formulu za izračunavanje broja mogućih izbora.

1. Varijacije bez ponavljanja

Varijacije bez ponavljanja su uredjeni izbori elemenata gde redosled igra ulogu i svaki element može biti izabran samo jednom. Ako imamo skup od n elemenata i biramo k elemenata, broj varijacija bez ponavljanja je dat formulom:

$$V(n,\,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Gde je *n!* faktorijel broja n, odnosno proizvod svih celih brojeva od 1 do n. Ova formula potiče iz činjenice da nakon izbora prvog elementa, preostaje *n - 1* mogućnost za drugi, *n – 2* za treći, i tako dalje, sve dok ne izaberemo k elemenata.

Primer: Ako biramo 3 elementa iz skupa *{ A, B, C, D }*, redosled je važan, a elementi se ne ponavljaju, tada imamo:

$$V(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} \;= 124 \;= 24\,varijacije.$$

2. Varijacije s ponavljanjem

Kod varijacija s ponavljanjem redosled je i dalje bitan, ali elementi mogu biti izabrani više puta. Broj varijacija s ponavljanjem za k izbora iz skupa od n elemenata dat je formulom:

$$V'(n,\,k) = n^k$$

Ovde svaka od k pozicija može biti popunjena bilo kojim od n elemenata, jer su dozvoljena ponavljanja.

Primer: Ako biramo 2 elementa iz skupa $\{\ A,\ B,\ C\ \}$, pri čemu su ponavljanja dozvoljena, tada imamo:

$$V'(3,\,2) = \,3^2 = \,9\,mogucnosti.$$

3. Permutacije

Permutacije su specijalni slučaj varijacija bez ponavljanja gde biramo sve elemente skupa. Drugim rečima, permutacije predstavljaju uredjene kombinacije svih elemenata skupa. Broj permutacija za n elemenata je:

$$P(n) = \,n!$$

Ovo predstavlja broj različitih načina na koji možemo rasporediti svih n elemenata.

Primer: Za skup $\{\ A,\ B,\ C\ \}$, broj permutacija je:

$$P(3) = \,3! \,= \,6$$

Permutacije su: $(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)$

4. Permutacije sa ponavljanjem

Permutacije sa ponavljanjem su situacija kada imamo skup u kojem se neki elementi ponavljaju. U tom slučaju, formula za broj permutacija se razlikuje, jer ne moramo svaki element smatrati jedinstvenim. Broj permutacija skupa od n elemenata, gde se neki elementi ponavljaju, izračunava se kao:

$$P(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$

Gde je $k_1, k_2, \ldots, k_r$ broj pojavljivanja svakog od ponavljajućih elemenata.

Primer: Uzmimo skup $\{A, A, B\}$, gde se slovo A pojavljuje dva puta, a slovo B jednom. Broj različitih permutacija sa ponavljanjem biće:

$$P(3; 2, 1) = \frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Permutacije su:

$$(A, A, B), (A, B, A), (B, A, A)$$

Opšti slučaj Ako imamo skup sa n elemenata, gde se određeni elementi ponavljaju, možemo koristiti gornju formulu da izračunamo broj različitih permutacija tog skupa. Na primer, za skup $\{A, A, A, B, B\}$, broj permutacija je:

$$P(5; 3, 2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{120}{6 \times 2} = 10$$

Permutacije su:

$(A, A, A, B, B), (A, A, B, A, B), (A, A, B, B, A), (A, B, A, A, B), (A, B, A, B, A), (A, B, B, A, A), (B, A, A, A, B),$

M-permutacije multiskupa od n elemenata

Uvod

Posmatrajmo skup $A = \{a, b, c\}$. Koliko različitih tročlanih uredjenih nizova možemo formirati od ovih elemenata ako su ponavljanja dozvoljena? Na primer, nizovi poput (a, a, b), (b, c, a), i (c, c, c) predstavljaju validne tročlane varijacije. Budući da je za svaku poziciju moguće izabrati bilo koji od tri elementa, ukupan broj mogućnosti je $3 \times 3 \times 3 = 3^3$. Ovaj jednostavan primer može se rešiti bez poteškoća, ali šta ako se broj elemenata ili dužina niza poveća? Da li postoji opšta formula koja nam omogućava da brzo izračunamo broj mogućih uredjenih nizova u ovakvim situacijama?

Odgovor leži u konceptu m-permutacija, poznatih i kao varijacije sa ponavljanjem. m-permutacije omogućavaju nam da izračunamo broj mogućih načina da od n elemenata formiramo uredjen niz dužine m, pri čemu je dozvoljeno ponavljanje elemenata. Ove varijacije sa ponavljanjem su ključni alat u kombinatorici, pružajući jednostavan način da se prebroje sve moguće varijacije kada se elementi mogu birati više puta, što je značajno u raznim matematičkim i primenjenim disciplinama.

Definicija

Neka je dat skup $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ sa $n \geq 1$ elemenata i neka je

$$M = [b_1, \ldots, b_l]_{m_1,\ldots,m_l},$$

multiskup u kojem se svaki element b_i pojavljuje tačno m_i puta.

m**-permutacija elemenata multiskupa** $M = [b_1, \ldots, b_l]_{m_1,\ldots,m_l}$ je bilo koja uredjena m-torka elemenata iz M, tj. bilo koja uredjena m-torka u kojoj je svaka komponenta element iz skupa B.

Broj m-Permutacija Multiskupa

Broj m-permutacija multiskupa $M = [b_1, \ldots, b_n]_{m_1,\ldots,m_l}$ označavamo sa

$$P(n; m).$$

Prilikom svakog odabira biramo izmedju n elemenata iz B, posto imamo m odabira dolazimo do broja:

$$P(n; m) = n \times n \times n \times ... \times n = n^m.$$

Proof. Svaki element skupa $B \times \ldots \times B$ predstavlja jednu m-permutaciju multiskupa M. Broj takvih m-torki elemenata iz B je na osnovu principa proizvoda:

$$|B \times \ldots \times B| = |B|^m = n^m.$$

$\square$

Neka je N skup sa n elemenata (koji može da bude i prazan, tj. n $\geq$ 0) i neka je M skup sa m elemenata, m ≥ 1. Broj svih mogućih preslikavanja $f : \mathbb{N} \to M$ jednak je m^n.

Dokaz. Za dokaz koristimo metod matematičke indukcije po n.

Šta teorema tvrdi za $n = 0$? U ovom slučaju, posmatramo sva preslikavanja f skupa $N = \emptyset$ u neki skup M. Definicija preslikavanja nam kaže da takvo f mora da bude skup uredjenih parova (x, y) tako da $x \in N = \emptyset$ i $y \in M$. Pošto prazan skup nema elemenata, f ne može da sadrži nijedan takav uredjen par, pa je jedina mogućnost da je $f = \emptyset$ (nema uredjenih parova).

S druge strane, $f = \emptyset$ zadovoljava definiciju preslikavanja. Prema tome, postoji tačno jedno preslikavanje $f : \emptyset \to M$. Ovo se slaže sa formulom, jer je $m^0 = 1$ za $m \geq 1$, pa zaključujemo da smo proverili slučaj $n = 0$ kao bazu indukcije.

Dalje, pretpostavimo da je teorema dokazana za sve $n \leq n_0$ i sve $m \geq 1$. Neka je $n = n_0 + 1$ i posmatrajmo skup N sa n elemenata i skup M sa m elemenata. Izaberimo proizvoljan element $a \in N$.

Za opis preslikavanja $f : N \to M$ potrebno je znati vrednost $f(a) \in M$ i preslikavanje $f' : N \setminus \{a\} \to M$. Vrednost $f(a)$ može da se izabere na m načina, a za izbor f' imamo m^{n-1} mogućnosti po induktivnoj hipotezi, pa sada po principu proizvoda dobijamo da je ukupan broj mogućnosti za f jednak $m \cdot m^{n-1} = m^n$.

□

Primeri

Primer 1: Koliko različitih kombinacija kugli sladoleda možete odabrati ako imate tri ukusa i možete birati tri kugle, pri čemu su ponavljanja dozvoljena?

Odgovor i pojašnjenje:

Pošto su na raspolaganju tri ukusa (čokolada, vanila i jagoda) i biramo tri kugle, za svaku kuglu možemo odabrati bilo koji od tri ukusa. Dakle, broj mogućih kombinacija je:

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$$

To znači da postoji 27 različitih kombinacija tročlanih nizova ukusa, uključujući i one gde se svi ukusi ponavljaju (npr. (čokolada, čokolada, čokolada)) i one gde su svi različiti (npr. (čokolada, vanila, jagoda)). Ovo je primer varijacija sa ponavljanjem jer se isti ukus može odabrati više puta.

Primer 2: Koliko različitih trojki možemo dobiti bacanjem tri kockice?

Odgovor i pojašnjenje:

Svaka kockica ima šest mogućih ishoda (1, 2, 3, 4, 5, 6), i bacamo tri kockice, tako da za svaku kockicu imamo 6 mogućnosti. Ukupan broj različitih trojki koje možemo dobiti je:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$$

Na primer, možemo dobiti rezultate kao što su $(1, 2, 3)$, $(4, 4, 5)$, ili $(6, 6, 6)$. Ovo je varijacija sa ponavljanjem jer se svaka vrednost može pojaviti na različitim pozicijama u nizu.

M-permutacija skupa od n elemenata

Uvod

Posmatrajmo skup jednocifrenih brojeva bez nule: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Koliko četvorocifrenih brojeva se mogu napraviti od ovih cifara ukoliko one mogu da se ponavljaju, a koliko ukoliko ne mogu da se ponavljaju? U prvom slučaju, za izbor svake cifre imamo 9 mogućnosti, te je rešenje $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$, tj. 9^4. U drugom slučaju, gde cifre ne mogu da se ponavljaju, za prvu cifru imamo 9 mogućnosti, za drugu 8, treću 7 i poslednju 6, te je rešenje u ovom slučaju $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Ovaj primer je relativno jednostavan i može se rešiti zdravom logikom, ali da li postoji uopštenje ovog problema? Odgovor je da naravno postoji i kada govorimo o primeru formiranja četvorocifrenog broja bez ponavljanja govorimo o m-permutacija skupa od n elemenata, gde je m broj dobijenih četvorocifrenih brojeva, a n broj cifara koje su nam na raspologanju. Drugi naziv za m-permutacija skupa od n elemenata jeste varijacije bez ponavljanja.

Definicija:

Posmatrajmo skup $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ i neka je $1 \leq m \leq n$. Tada je m-permutacija elementata skupa A bilo koja m-torka elementata skupa A u kojoj su svaka dva elementa medjusobno različita.

Teorema

Broj m-permutacija skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ jednak je $P(n; m) = n(n - 1) \ldots (n - m + 1)$

Dokaz

Baza indukcije $m = 1$: Uredjena torka sa jednim elementom je sam taj element. Broj načina da se izabere taj element jedan je broju elemenata iz početnog skupa, tj. jednak je n.

Induktivna hipoteza: Tvrdjenje važi za $P(n'; m)$ za svako $n' \geq m$.

Induktivni korak: Dokazaćemo da tvrdjenje važi za $P(n; m + 1)$ za svako $n \geq m + 1$. Treba da pokažemo da je broj uredjenih torki dužine $m + 1$ skupa A sa osobinom da je svaki par komponenti medjusobno različit jednak $P(n; m + 1) = n \cdot (n - 1) \ldots (n - (m + 1) + 1) = n \cdot (n - 1) \ldots (n - m)$

Svaka uredjena torka sa datom osobinom pripada skupu $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ gde je

$$A_1 = \{(a_1, b_2, \ldots, b_{m+1}) : (b_2, \ldots, b_{m+1}) \text{ je m-permutacija skupa } A \setminus \{a_1\}\}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \{(a_n, b_2, \ldots, b_{m+1}) : (b_2, \ldots, b_{m+1}) \text{ je m-permutacija skupa } A \setminus \{a_n\}\}.$$

Prema induktivnoj hipotezi, za svako i koje pripada $\{1, \ldots, n\}$, broj elemenata u A_i jednak je broju m-permutacija elemenata skupa $A \setminus \{a_i\}$, tj. $P(n-1; m) = (n-1) \cdot \ldots \cdot ((n-1) - m + 1) = (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m)$ $(n - 1 \geq m)$.

Prema principu sume broj $(m + 1)$ permutacija je

$$
\begin{aligned}
P(n; m+1) &= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| \\
&= (P(n-1; m)) + \ldots + (P(n-1; m)) \\
&= n \cdot P(n-1; m) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m),
\end{aligned}
$$

što je trebalo i pokazati.

Neka je N skup sa n elemenata i neka je M skup sa m elemenata, $n, m \geq 0$. Broj svih injektivnih preslikavanja $f : N \to M$ jednak je:

$$
\prod_{i=0}^{n-1} (m - i) = m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m - n + 1)
$$

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po n. Prazno preslikavanje je injektivno, pa stoga za $n = 0$ postoji tačno jedno injektivno preslikavanje, i ovo se slaže sa dogovorom da se vrednost praznog proizvoda definiše kao 1. Znači, formula važi za $n = 0$.

Iz prethodne teoreme znamo da ne postoji injektivno preslikavanje za $n > m$ i ovo se takodje slaže sa gornjom formulom (jer se tada u njoj pojavljuje činilac 0).

Posmatrajmo sada skup N sa n elemenata, $n \geq 1$, i skup M sa m elemenata, $m \geq n$. Fiksirajmo element $a \in N$ i izaberimo proizvoljno vrednost $f(a) \in M$ na jedan od m mogućih načina.

Preostaje nam da izaberemo injektivno preslikavanje iz $N \setminus \{a\}$ u $M \setminus \{f(a)\}$. Po induktivnoj hipotezi, postoji $(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$ mogućnosti za ovaj izbor, pa stoga vidimo da postoji ukupno $m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$ injektivnih preslikavanja $f : N \to M$.

$\square$

Primeri

Koliko različitih četvorocifrenih brojeva se može formirati od cifara 1, 2, 3, 4, 5, 6 ako se svaka cifra koristi samo jednom?

$P(6; 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Koliko različitih reči od 5 slova možemo formirati od slova A, B, C, D, E, F, G, pod uslovom da se svako slovo koristi samo jednom?

$P(7; 5) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Na koliko načina možemo rasporediti 3 različita učesnika na 5 različitih pozicija, tako da svaka pozicija bude popunjena različitim učesnikom?

$P(5;3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Na koliko načina možemo odabrati i poredjati 4 različite karte iz špila od 52 karte?

$P(52;4) = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6,497,400$

Na koliko načina možemo rasporediti predsednika, potpredsednika i sekretara iz grupe od 8 kandidata?

$P(8;3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

U školi postoji 10 različitih knjiga. Na koliko različitih načina možemo izabrati 3 knjige i poredjati ih na policu?

$P(10;3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Permutacija skupa od n elemenata

Bijektivno preslikavanje konačnog skupa X na samog sebe naziva se permutacija skupa X. Permutacija konačnog skupa, kao bijektivno preslikavanje, je ujedno i injekcija, što znači da permutacija predstavlja poseban slučaj uredjenog izbora elemenata bez ponavljanja kod koga se bira svih n od n elemenata.

ABCD	ABDC	ACBD	ACDB
ADBC	ADCB	BACD	BADC
BCAD	BCDA	BDAC	BDCA
CABD	CADB	CBAD	CBDA
CDAB	CDBA	DABC	DACB
DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

Posledica: Broj permutacija skupa X sa n elemenata, kao specijalan slučaj teoreme koja se nalazi u odeljku M-permutacije skupa od n elemenata, jednak je:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

Broj $n!$ se čita kao faktorijel. Posebno za $n = 0$ važi $0! = 1$.

Primer: Pčela treba da skupi polen sa sedam različitih cvetova pre nego što se vrati u košnicu. Kada pčela uzme polen sa nekog cveta, ona se više ne vraća na taj cvet. Na koliko načina ona može da obidje svih sedam cvetova?

Kada jednom skupi polen sa nekog cveta, pčela više nema razloga da se vraća na isti cvet. Zbog toga će pčela obići svaki cvet tačno jedanput, pa je traženi broj jednak broju uredjenih izbora bez ponavljanja 7 od 7 elemenata, odnosno broju permutacija od 7 elemenata. Stoga je broj mogućih obilazaka jednak:

$$7! = 5040.$$

Permutacije multiskupa od n elemenata

Permutacija multiskupa se od permutacije skupa razlikuje po tome što treba uzeti u obzir limitarano ponavljanje odredjenih elemenata, tj. njihov multiplicitet. Ovakve permutacije nazivaju se i permutacije sa ponavljanjem, i koriste se za razne probleme u kojima se odredjeni elementi pojavljuju više puta.

Primer

Jedan takav problem jeste recimo odredjivanje broja reči koje mogu nastati preuredjivanjem redosleda slova u reči "BANANA" tako da je svako slovo jedinstveno. Dakle, indeksiraćemo ih, pa imamo A_1, A_2 i A_3, kao i N_1, N_2 i B_1. U ovom slučaju broj rešenja će biti obična permutacija, s obzirom da je svako slovo jedinstveno, i to rešenje je 6!.

Ako bismo sada uzeli bilo koju reč koja može da nastane od neindeksirane reči "BANANA", na primer "ANANBA", jasno je da će slovo A da se nalazi na tri različite pozicije, N na dvije, i B na jednoj. Od koliko indeksiranih riječi "ANANBA" možemo da dobijemo neindeksiranu riječ "ANANBA"? Slova A_1, A_2, A_3 zauzimaće tri pozicije, i moći će da se raspodele na 3! načina, slova N_1, N_2 na 2! načina, i slovo B_1 na 1! način. To znači da neindeksirana riječ "ANANBA" ima 3!2!1! različitih indeksiranih vrsta. Ovo je slučaj za sve neindeksirane riječi, što znači da do rešenja dolazimo tako što ukupan broj indeksiranih reči podelimo sa 3!2!1!, tj. rešenje je:

$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

[2]

Teorema

Broj permutacija multiskupa sa n elemenata, u kojem se prvi element sadrzi n_1 puta, drugi element n_2, puta, ... a k-ti element n_k puta jednak je:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

[1]

Dokaz: Primetimo da postoji $\binom{n}{n_1}$ načina da se n_1 kopija prvog elementa rasporedi medju n pozicija u permutaciji. Nakon toga, preostaje $n - n_1$ slobodnih pozicija, medju kojima se n_2 kopija drugog elementa može rasporediti na $\binom{n-n_1}{n_2}$ načina, ostavljajući $n - n_1 - n_2$ slobodnih pozicija. Nastavljajući na ovaj način, rasporedjujući kopije elemenata, na kraju dolazimo do k-tog elementa, čije se n_k kopija mogu rasporediti na $\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$ načina. Prema principu proizvoda, broj traženih permutacija može se izračunati po formul:

$$[0.9]\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdot\dots\cdot\binom{n-n_1-\cdots-n_{k-2}}{n_{k-1}}\cdot\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(}{n_3!(n}$$

[2]

Definicija

Multinomijalni koeficijent $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ se definiše pomoću

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}$$

[2]

Mnogi problemi prebrojavanja mogu biti rešeni enumeracijum načina na koje različiti objekti mogu biti raspodeljeni u različite kutije, pri čemu nije bitan redosled stavljanja.

Teorema

Broj načina da se n različitih objekata raspodeli u k različitih kutija, tako da se n_i objekata smesti u kutiju i, gde je $i = 1, 2, \ldots, k$, jednak je:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

[1] **Dokaz:** Neka objekte poredjamo u niz, a kutije označimo brojevima $1, 2, \ldots, k$. Neka je u prvu, drugu, ..., k-tu kutiju stavljeno $n_1, n_2, \ldots, n_k$ objekata. Za prvu kutiju, u kojoj je stavljeno n_1 objekata, biće $\binom{n}{n_1}$ mogućih slučajeva, s obzirom da redosled nije bitan. Dalje, za drugu kutiju biće $\binom{n-n_1}{n_2}$ slučajeva, i tako dalje do poslednje kutije, za koju će biti $\binom{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}}{n_k}$ slučajeva. Znajući ovo, zaključujemo na osnovu prethodno dokazane teoreme da je rešenje:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

[1]

Primer

Koliko postoji načina da se podeli po 5 karata svakom od četvorice igrača iz standardnog špila od 52 karte?

Rešenje: Koristićemo princip proizvoda za rešavanje ovog problema. Za početak, prvi igrač može dobiti 5 karata na $\binom{52}{5}$ načina. Drugi igrač može dobiti 5 karata na $\binom{47}{5}$ načina, jer je ostalo samo 47 karata. Treći igrač može dobiti 5 karata na $\binom{42}{5}$ načina, a četvrti igrač može dobiti 5 karata na $\binom{37}{5}$ načina. Dakle, ukupan broj načina da se podeli po 5 karata četvorici igrača je:

$$\frac{52!}{5!47!} \cdot \frac{47!}{5!42!} \cdot \frac{42!}{5!37!} \cdot \frac{37!}{5!32!} = \frac{52!}{(5!)^4 32!}$$

[1]

Algoritmi za generisanje objekata

Algorithm 1 Sledeća permutacija

$n \leftarrow$ length of arr
$i \leftarrow n - 2$
while $i \geq 0$ **and** $arr[i] \geq arr[i+1]$ **do**
  $i \leftarrow i - 1$
end while
if $i == -1$ **then**
  return False {Nema sledeće permutacije (već je poslednja)}
end if
$j \leftarrow n - 1$
while $arr[j] \leq arr[i]$ **do**
  $j \leftarrow j - 1$
end while
Swap $arr[i]$ and $arr[j]$
Reverse the subarray from $i + 1$ to $n - 1$
return True

Algorithm 2 Permutacije multiskupa

Sort the array arr
Yield $arr[:]$
while There exists a next permutation (using **sledeca_permutacija** function) **do**
  Yield $arr[:]$
end while

Algorithm 3 Varijacije bez ponavljanja (m-permutacije)

```
n ← length of arr
used ← [False] × n
rez ← []
Backtrack function (depth):
if depth == m then
    Yield  rez[:]
else
    for i ← 0 to n − 1 do
        if not used[i] then
            used[i] ← True
            rez.append(arr[i])
            Yield from Backtrack(depth + 1)
            rez.pop()
            used[i] ← False
        end if
    end for
end if
Yield from Backtrack(0)
```

Algorithm 4 Kombinacije bez ponavljanja

```
n ← length of arr
rez ← []
Backtrack function (start, depth):
if depth == k then
    Yield  rez[:]
else
    for i ← start to n − 1 do
        rez.append(arr[i])
        Yield from Backtrack(i + 1, depth + 1)
        rez.pop()
    end for
end if
Yield from Backtrack(0, 0)
```

Razni primeri

Primer 1 Broj reči od četiri slova koje se mogu formirati koristeći svako slovo iz skupa a, b, c, d, e najviše jednom je $P(5,4)$, a ovo je jednako $\frac{5!}{(5-4)!} = 120$. Broj reči od pet slova je $P(5,5)$, što je takodje 120.

Primer 2 Koliki je broj načina da se 26 slova engleskog alfabeta poredjaju tako da se dva samoglasnika ne nadju jedan pored drugog? Razmišljamo o dva glavna zadatka koja treba uraditi:

1. Prvi zadatak je da odlučimo kako poredjati suglasnike medju sobom. Ima ih 21, i tako 21! permutacije suglasnika. Copy

2. Pošto ne možemo imati dva uzastopna samoglasnika u našem konačnom redosledu, samoglasnici moraju biti na 5 od 22 mesta pre, izmedju i posle suglasnika. Naš drugi zadatak je da stavimo samoglasnike na ova mesta. Ima 22 mesta za a, zatim 21 za e, 20 za i, 19 za o i 18 za u. To jest, drugi zadatak se može izvršiti u:

   $P(22,5) = \frac{22!}{17!}$ načina.

Principom množenja utvrdjujemo da je broj načina da se poredjaju slova abecede bez dva uzastopna samoglasnika $21! \cdot \frac{22!}{17!}$.

Primer 3 Koliki je broj ogrlica koje se mogu napraviti od 20 perli različitih boja? Ima 20! permutacija 20 perli. Pošto se svaka ogrlica može rotirati bez promene rasporeda perli, broj ogrlica je najviše $\frac{20!}{20} = 19!$. Pošto ogrlica može da se okrene i bez promene rasporeda, ukupan broj ogrlica, po principu deljenja, je $\frac{19!}{2}$.

Primer 4 Koliko se različitih reči može formirati od slova reči "MATEMATIKA"? Slovo M se ponavlja 2 puta, slovo A 3 puta, T – 2 puta, E – jedanput, I – jedanput i K jedanput. $n = 2+3+2+1+1+1 = 10$ Rešenje je: [$\mathrm{P}_{2,3,2,1,1}(10) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!}$]

Primer 5 Uzmimo multiskup $S = 3 \cdot a, 2 \cdot b, 4 \cdot c$ od devet elemenata tri tipa. Naći broj 8-permutacija multiskupa S. Za slučaj $2a, 2b, 4c$ imamo: [$8!\frac{}{2!2!4! = 420]Za}$3a, 1b, 4c: [$\frac{8!}{3!1!4!} = 280]Za$3a, 2b, 3c: [$\frac{8!}{3!2!3!} = 560$]

Pa je ukupan broj permutacija $420 + 280 + 560 = 1260$.

Primer 6 Da li medju brojevima $1, 2, \ldots, 10^{10}$ ima više onih koji sadrže cifru 9 u decimalnom zapisu ili onih koji je ne sadrže? Ako broj ne sadrži cifru 9 u decimalnom zapisu, onda su sve njegove cifre u skupu $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Ovakvih brojeva sa najviše deset cifara ima ukupno: [$9^{10} - 1 + 1 = 3,486,784,401$]

Sada vidimo da brojeva koji sadrže cifru 9 u svom zapisu ima: [$10^{10} - 9^{10} = 6,513,215,599$]

što je znatno više nego brojeva koji ne sadrže cifru 9.

References

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete mathemathicx and its appliacations Seventh Edition*, McGraw-Hill, 2012

[2] Dragan Stevanović i Miroslav Ćirić i Slobodan Simić i Vladimir Baltić, *DISKRETNA MATEMATIKA OSNOVE KOMBINATORIKE I TEORIJE GRAFOVA*, Matematički institut u Beogradu, 2007

[3] Sussana S. Epp, *Discrete Mathematics with Applications*