DISKRETNA MATEMATIKA: POVEZANOST GRAFOVA

Sadržaj:

- Štenja, staza, put, kontura u multigrafu
- Povezanost dva čvora
- Komponenta
- povezanosti grafa
- ...

Povezanost grafa

- Pri rešavanju realnih problema često se javlja potreba za kretanjem kroz graf preko njegovih ivica.
- Zato uvodimo pojam **šetnje po grafu**.

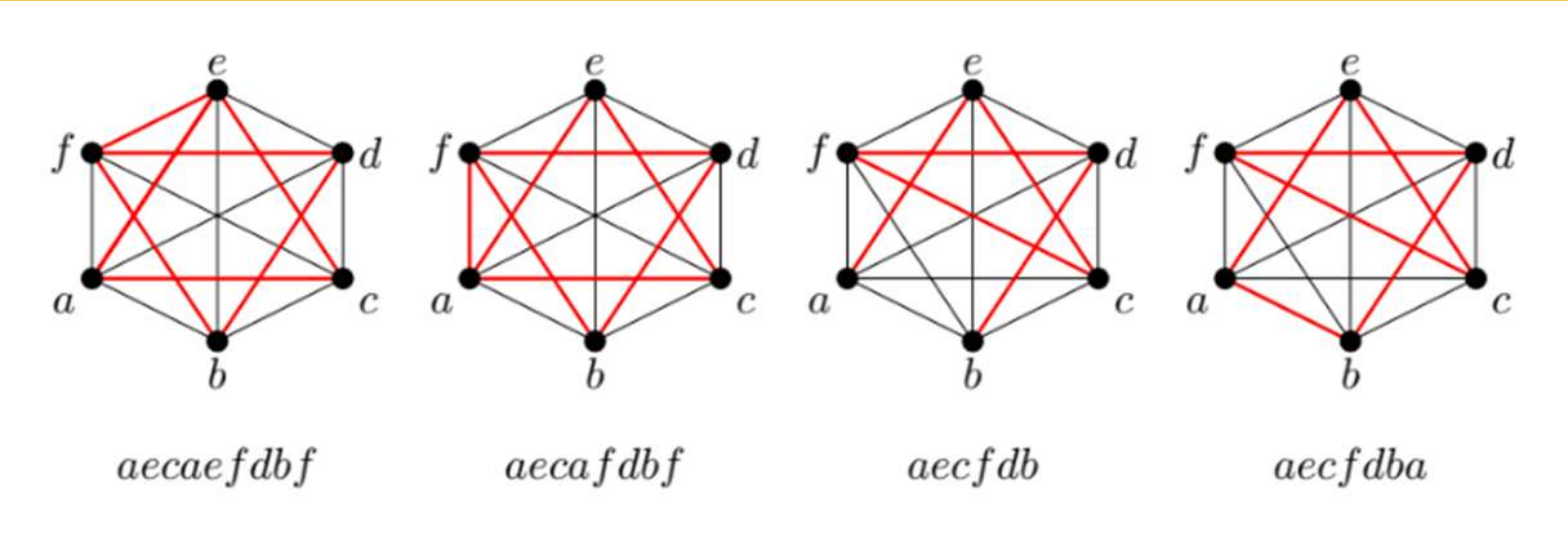
Definicija:

Neka je $G = (V, E, \psi)$ multigraf.
Neka su $e_1, \dots, e_n \in E$ i $v_0, \dots, v_n \in V$ proizvoljne grane i čvorovi sa osobinom $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, za svako $i \in \{1, \dots, n\}$.
Tada za niz $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$
kažemo da je $v_0 v_n$ - **šetnja** dužine n u grafu G između čvorova v_0 i v_n. Za čvorove v_0 i v_n kažemo da su krajnji čvorovi šetnje.

Specijalni slučajevi:
1. **staza** - ako nema ponavljanja grana, tj. ako za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sa osobinom $i \neq j$ važi $e_i \neq e_j$,
2. **put** - ako nema ponavljanja čvorova, tj. ako za sve $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sa osobinom $i \neq j$ važi $v_i \neq v_j$ (osim eventualno $v_0 = v_n$). Ako je graf G prost, pišemo:

$$v_0 v_1 \dots v_n.$$

- Ako su krajnji čvorovi šetnje jednaki, tj. $v_0 = v_n$, tada definišemo:
  - **Šetnja dužine bar jedan je zatvorena**
  - **Zatvorena staza se naziva kružna**
  - **Zatvoren put se naziva kontura**



Šetnja Staza Put Kontura

- Teorema:

  Ako u grafu postoji uv-šetnja (staza), onda postoji i uv-put

- **<u>Definicija</u>**:

- Neka je $G = (V, E, \psi)$ multigraf. Kažemo da su čvorovi u i v **povezani** ako je:
  - $u = v$ ili
  - $u \neq v$ i postoji uv-put u G.

- Kažemo da je G **povezan** ako $|V| = 1$ ili za svako $u, v \in V$ važi da su u i v povezani.

- Direktno sledi da postojanje uv-šetnje u grafu direktno implicira da su čvorovi u i v povezani

Relacija „*je povezan sa*“ je relacija <u>ekvivalencije</u> na skupu čvorova grafa

- **(R)** Refleksivnost sledi **direktno iz definicije.**
- **(S)** Neka je $u \neq v$ **i neka** uv**-put u grafu oblika** $uv_0 \dots v_{n-1}v$.
- Tada je jedan vu-put u grafu oblika $vv_{n-1} \dots v_0u$.
- **(T)** Pretpostavimo da u grafu G postoje uv-put i vw-put: $u_0u_1 \dots u_{l-1}v$ i $vv_0 \dots v_{n-1}w$.
- Tada je sa $u_0u_1 \dots u_{l-1}vv_0 \dots v_{n-1}w$ **data jedna** uw**-šetnja u grafu**, odakle je u povezan sa w.

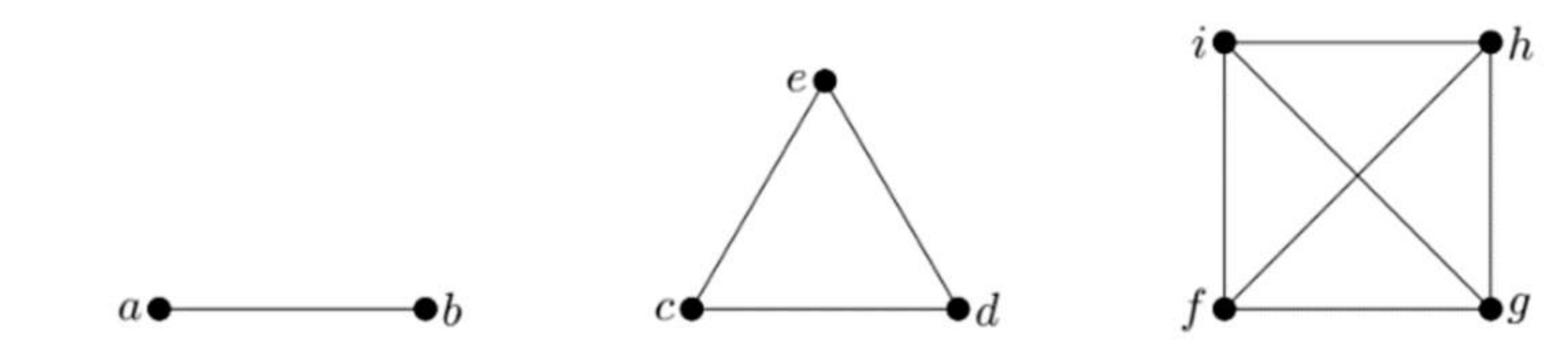
- **Relacija ekvivalencije važi jer su sve tri osobine zadovoljene.**

Komponenta povezanosti je maksimalan povezan podgraf grafa, tj. svaka komponenta povezanosti grafa je podgraf koji nije sadržan ni u jednom drugom povezanom podgrafu istog grafa.

Broj komponenti povezanosti grafa G, u oznaci ω(G), jednak je broju klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju povezanosti.

- **Primer:**

  Neka je G=({a,b,c,d,e,f,g,h,i},E) graf na slici.



Broj komponenti povezanosti datog grafa je ω(G)=3. Komponente povezanosti su podgrafovi koji su indukovani skupovima čvorova {a,b}, {c,d,e} i {f,g,h,i}.

__Teorema__:

Neka je $n \geq 2$.
Graf sa n čvorova i manje od n - 1 grana nije povezan.

Dokaz: Indukcijom po n.

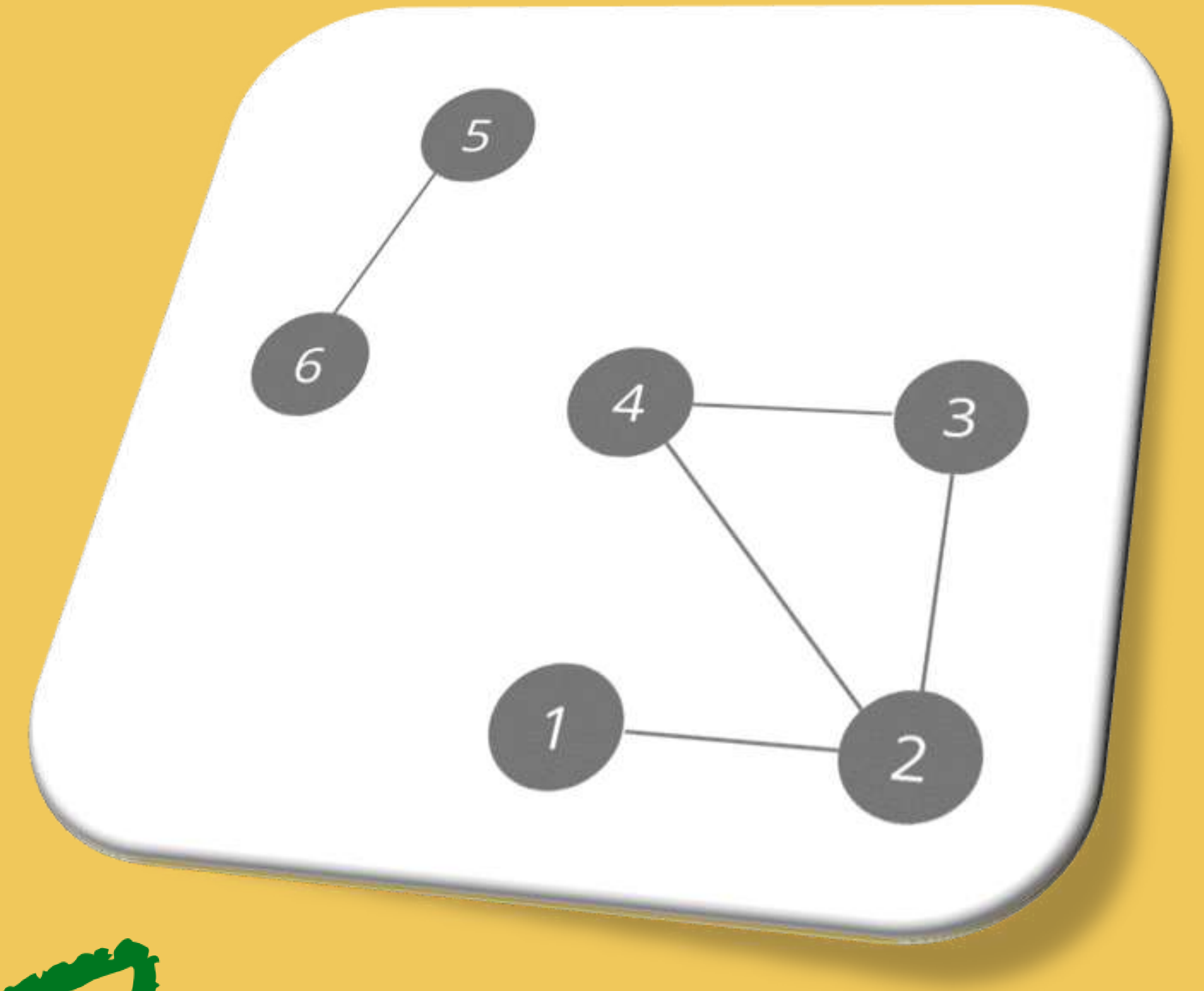
Baza n = 2: Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da graf sa n čvorova i manje od n - 1 grana nije povezan.
Induktivni korak:

Neka je G graf sa n + 1 čvorova i manje od n grana. Pokazaćemo da on nije povezan. Na osnovu Posledice 56, postoji čvor v stepena $d_G(v) \leq 1$.

- Ako je $d_G(v) = 0$, onda je broj komponenti povezanosti bar dva i graf nije povezan.
- Ako je $d_G(v) = 1$, onda graf G ima jednak broj komponenti povezanosti kao i graf $G' = G - v$.
- Kako je $G' = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{\{u, v\}\})$ za neki čvor $u \in V$, G' ima n čvorova i manje od n - 1 grana. Zaključujemo prema induktivnoj pretpostavci da G' nije povezan.
  Kako G i G' imaju jednak broj komponenti povezanosti, onda ni G nije povezan.

Primer:

Nepovezani prosti graf sa n čvorova i n-1 grana , n=6



Teorema:

Ako se iz prostog grafa koji sadrži konturu izbriše jedna grana konture, on ostaje povezan.

Dokaz:

Neka je $G = (V, E)$ prost povezan graf i neka je C kontura u grafu G, a e je grana u konturi C grafa G.
U grafu G postoji put uv:

$$P = uv_1 \ldots v_i \, v_{i+1} \ldots v_{n-1}v$$

Gledamo dva slučaja:

Grana e ne pripada uv-putu, onda je P uv put u grafu G ali bez grane $e(G - e)$

Grana e pripada uv-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura C oblika $C = v_i \, u_1 \, u_2 \ldots u_k \, v_i$.

To znači da u grafu $G - e$ postoji put Q od v_i do v_{i+1}:

$$Q = v_i \, u_1 \, u_2 \ldots u_k \, v_{i+1}.$$

Onda je $P_2 = uv_1 \ldots v_{i-1} \, Q \, v_{i+2} \ldots v_{n-1}v$, staza u grafu $G - e$ od u do v.

Hvala na pažnji!