Kombinacije

23.10.2024.

1 Kombinacije

U prethodnoj lekciji smo definisali permutacije elemenata skupa kao odabir k elemenata iz kolekcije od n elemenata, pri čemu je redosled odabira bitan. Kombinacije, s druge strane, su odabiri u kojima redosled nije bitan

1.1 Kombinacije bez ponavljanja

Definicija k-kombinacija bez ponavljanja predstavlja sve načine na koji možemo iz skupa od n različitih elemenata odabrati k elemenata, pri čemu redosled izbora elemenata nije bitan. Broj kombinacija bez ponavljanja se označava sa $C(n, k)$.

Teorema

$$C(n, k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Dokaz Podsetimo se da je broj permutacija bez ponavljanja $P(n, k)$ bio jednak $\frac{n!}{(n-k)!}$. Tih k odabranih elemenata je moguće odabrati u $P(k, k) = k!$ različitih redosleda. Kako sve te rasporede tretiramo kao iste prilikom brojanja kombinacija, broj $C(n, k)$ je $k!$ puta manji od $P(n, k)$. Dakle, ukupno imamo $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ kombinacija

Primetimo da svaka jedinstvena kombinacija k elemenata iz skupa od n elemenata predstavlja jedan podskup početnog skupa sa tačno k elemenata. Skup svih podskupova skupa A koji imaju k elemenata označavamo sa $\binom{A}{k}$

Npr. za $A = \{1, 2, 3, 4\}$ imamo da je $\binom{A}{2} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$

Analogno uvodimo oznaku za broj elemenata ovog skupa kao $\binom{n}{k}$, gde je $|A| = n$ i k broj elemenata u svakom podskupu. Dakle, imamo da je $|\binom{A}{k}| = \binom{|A|}{k} = \binom{n}{k}$. Pošto smo konstantovali da je broj k-kombinacija skupa jednak broj podskupova sa k elemenata, sledi da je $C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

Izraz $\binom{n}{k}$ se još naziva i **binomni koeficijent n nad k**

Teorema Skup A, takav da je $|A| = n$, ima ukupno 2^n različitih podskupova

Dokaz Svaki element skupa A može da pripada ili ne pripada jednom podskupu. Za svaki element možemo birati da li će pripadati ili ne jednom traženom podskupu. Kako za n elemenata pravimo izbor između dve opcije, po principu proizvoda imamo ukupno 2^n različitih ishoda - što čini ukupan broj svih podskupova

[ ]:
```python
#Funkcija za generisanje kombinacija proizvoljne dužine od zadatog skupa
def generate_combinations(arr, length, current, lastindex):
    if lastindex > len(arr):
        pass
    elif len(current) == min(len(arr), length):
        print(current)
    else:
        for i in range(lastindex, len(arr)):
            newcurrent = current.copy()
            newcurrent.append(arr[i])
            generate_combinations(arr, length, newcurrent, i + 1)

def combine(arr, k):
    generate_combinations(arr, k, [], 0)

arr = [eval(i) for i in input("Unesite elemente skupa sa razmacima: ").split()]
k = int(input("Unesite broj elemenata kombinacije: "))
combine(arr, k)
```

```
[1, 2]
[1, 3]
[1, 4]
[1, 5]
[2, 3]
[2, 4]
[2, 5]
[3, 4]
[3, 5]
[4, 5]
```

1.1.1 Jedna osobina binomnih koeficijenata i njeni različiti dokazi

Sada ćemo prikazati jednu osobinu binomnih koeficijenata i na njoj demonstrirati različite tehnike dokazivanja, jednu koja nam je dosad poznata i drugu s kojom se dosad nismo sretali.

Teorema

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Predstavićemo nacrt dokaza putem matematičke indukcije

Dokaz 1 (*matematičkom indukcijom*)

1. Bazni slučaj $n = 1$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} + \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1 + 1 = 2 = 2^1$$

2. Induktivna hipoteza $n = m$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} = 2^m$$

3. Induktivni korak $n = m + 1$ Za ovaj dokaz koristimo tvrđenje $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k}$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m}(\binom{m}{k} + \binom{m-1}{k}) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k} + \sum_{k=0}^{m}\binom{m-1}{k} = ...$$

Sada ćemo predstaviti drugi dokaz izveden od znanja iz kombinatorike, tzv. **kombinatorni dokaz**

Dokaz 2 (*kombinatorni dokaz*)

Primetimo da svaki binomni koeficijent u razvoju izraza $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ predstavlja broj podskupova sa k elemenata, gde k uzima sve vrednosti od 0 do n, odnosno, izraz s leve strane je broj svih mogućih podskupova skupa sa n elemenata - što smo već dokazali da ih za skup od n elemenata ukupno ima 2^n

1.2 Kombinacije sa ponavljanjem

Definicija k-kombinacija sa ponavljanjem predstavlja sve načine na koji možemo iz skupa od n različitih elemenata odabrati k elemenata, pri čemu redosled izbora elemenata nije bitan i jedan element možemo birati više puta.

Kombinacije s ponavljanjem dobijamo tako što iz skupa biramo jedan element, zapisujemo ga u niz i vraćamo ga nazad u skup. Taj postupak ponavljamo više puta i posle željenog broja iteracija dobijeni niz elemenata sortiramo po nekom kriterijumu (npr. leksikografski poredak). Neki primeri kombinacija s ponavljanjem 6 elemenata iz skupa $A = \{a, b, c, d\}$ su *aaabcd*, *abbccd*, *aaaaab*, *bcccdd*...

Teorema Broj k-kombinacija sa ponavljanjem je jednak sa $C(n + k - 1, k) = \binom{n+k-1}{k}$

Dokaz Neka je

$$\binom{M}{m} = \{M_1 : |M_1| = m \wedge M_1 \subseteq M\}$$

$$A = \{(a_1, \dots, a_{m+l-1}) \in \{0,1\}^{m+l-1} : \{a_1, \dots, a_{m+l-1}\} = [0,1]_{l-1,m}\}$$

Znači, $\binom{M}{m}$ je skup svih m-tačlanih podmultiskupova od M, a A je skup svih uređenih torki dužine $m + l - 1$ koje imaju tačno m komponenti jednakih 1 i preostalih $l - 1$ komponenti jednakih 0.

Definišimo preslikavanje

$$\varphi_{(b_1,\dots,b_l)} : \binom{M}{m} \to A$$

na sledeći način

$$\varphi_{(b_1,\dots,b_l)}(M_1) = (c_1, \dots, c_{m+l-1}),$$

gde je $M_1 = [b_1, \dots, b_l]_{m_1,\dots,m_l}$ i za svako $i \in \{1, \dots, l-1\}$

$$c_{(i-1)+(m_i+1)} = 0, \quad c_{(i-1)+j} = 1, \quad 0 < j \leq m_i.$$

Kako je $\varphi_{(b_1,\dots,b_l)}$ bijektivno preslikavanje,

$$\overline{C}(l; m) = \left|\binom{M}{m}\right| = |A|.$$

Broj načina da od $m + l - 1$ mesta izaberemo m za 1 i preostalih $l - 1$ za 0 jednak je

$$\overline{P}(m, l-1) = \frac{(m+l-1)!}{m!(l-1)!}.$$

[ ]:
```python
#Funkcija za generisanje kombinacija proizvoljne dužine od zadatog multiskupa
def generate_combinations(arr, length, current, lastindex, repeated):
    if lastindex > len(arr) or current in repeated:
        pass
    elif len(current) == min(len(arr), length):
        print(current)
        repeated.append(current)
    else:
        for i in range(lastindex, len(arr)):
            newcurrent = current.copy()
            newcurrent.append(arr[i])
            generate_combinations(arr, length, newcurrent, i + 1, repeated)

def combine(arr, k):
    generate_combinations(arr, k, [], 0, [])

arr = [str(i) for i in input("Unesite elemente skupa sa razmacima: ").split()]
arr.sort()
k = int(input("Unesite broj elemenata kombinacije: "))
combine(arr, k)
```

```
Unesite elemente skupa sa razmacima: a a a b b b c c c
Unesite broj elemenata kombinacije: 3
['a', 'a', 'a']
['a', 'a', 'b']
['a', 'a', 'c']
['a', 'b', 'b']
['a', 'b', 'c']
['a', 'c', 'c']
['b', 'b', 'b']
['b', 'b', 'c']
['b', 'c', 'c']
['c', 'c', 'c']
```

1.2.1 Jedna interpretacija kombinacija sa ponavljanjem - crtice i zvezdice

Primetimo da nam je svaka kombinacija sa ponavljanjem precizno određena brojem puta koliko je svaki od datih n elemenata izabran. Neka je i-ti element izabran x_i puta, $1 \leq i \leq k$. Kako biramo ukupno n elemenata, znamo da je zbir svih tih izbora jednak n, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_k = n$$

Neka je, bez gubljenja opštosti $n = 6$ i $k = 4$. Imamo

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

Posmatrajmo niz koji se sastoji od 6 zvezdica i 3 crtice

$$******|||$$

Svaka permutacija ovih elemenata nam kodira jedno rešenje jednačine $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$, npr.

$$**|***||* \equiv 2 + 3 + 0 + 1 = 6$$

Ovih permutacija imamo, po formuli za permutacije s ponavljanjem, ukupno $\frac{9!}{6!3!} = 63$

U opštem slučaju, imaćemo n zvezdica i $k-1$ crtica, gde će nam ukupan broj permutacija biti

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = \binom{k+n-1}{n}$$

što je jednako broju kombinacija sa ponavljanjem n elemenata iz skupa od k elemenata.

1.2.2 Rešavanje linearnih jednačina pomoću kombinacija multiskupa

Problem: Koliko rešenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n,$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nenegativni celi brojevi?

Rešenje: Posmatrajmo skup $X = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ako pretpostavimo da, za $1 \le i \le k$, broj x_i označava koliko je puta izabran element i iz skupa X, tada svako rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gornje jednačine odgovara tačno jednom neuređenom izboru n elemenata sa ponavljanjem iz skupa sa k elemenata.

Takođe važi i obratno: svaki neuređeni izbor n elemenata sa ponavljanjem iz skupa sa k elemenata određuje tačno jedno rešenje $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gornje jednačine.

Stoga, broj rešenja jednačine je jednak broju ovakvih neuređenih izbora, a to je:

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

Napomena: Na osnovu jedne od osobina binomnih koeficijenata (osobina simetričnosti), broj rešenja prethodne jednačine može se predstaviti i na sledeći način: $\binom{k+n-1}{k-1}$.

1.2.3 Određivanje broja monotono neopadajućih konačnih nizova brojeva

Teorema Broj monotono neopadajućih nizova dužine n sa vrednostima iz skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ je dat formulom:

$$\binom{k+n-1}{n}$$

Dokaz Monotono neopadajući nizovi su nizovi $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, gde su elementi iz skupa $\{1, 2, \dots, k\}$. Ovaj problem možemo posmatrati kao sortiranje permutacija, gde se sve permutacije sa istim elementima sortiraju u jedan fiksni redosled ili ga možemo preformulisati kao raspodelu n objekata u k kutija, što odgovara rešenju jednačine:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n, \quad x_i \geq 0$$

Broj takvih raspodela je jednak broju načina da postavimo $k-1$ razdvajajućih linija između n objekata tj. broju kombinacija sa ponavljanjem, što je binomni koeficijent:

$$\binom{k+n-1}{n}$$

Ovo je broj monotono neopadajućih nizova, što završava dokaz.