# dm5

grupa10

Novembar 2024

## 1 Rekurentne relacije

Kada imamo neki broj pocetnih clanova i neki broj neodredjenih clanova, ako te neodredjene clanove mozemo da odredimo koristeci neku vrstu relacije koja koristi barem jedan pocetni clan, onda kazemo da je niz opisan pomocu rekuretne relacije.

**Definicija 1** *Neka je* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, \dots)$ *niz kompleksnih brojeva. Ako postoji funkcija* $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *sa osobinom da za svako* $n \geq k$ *vazi*

$$a_n = F(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}),$$

*onda kazemo da je ovo rekurentna relacija reda k koja opisuje niz* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$

Najjednostavniji primeri bi bili aritmeticki i geometrijski niz.

**Primer 1** *Recimo da imamo sledece nizove:*
*(i) aritmeticki niz ciji je prvi clan a, a razlika je d*
*(ii) geometrijski niz ciji prvi clan je a, a kolicnik je 1*

(i) Za clanove aritmetickog niza vazi:

$$a_0 = a \tag{1}$$
$$a_n = a_{n-1} + d, n \geq 1 \tag{2}$$

(ii) Za clanove geometrijskog niza vazi:

$$a_0 = b \tag{3}$$
$$a_n = q \cdot a_{n-1}, n \geq 1 \tag{4}$$

**Primer 2** *Niz brojeva*

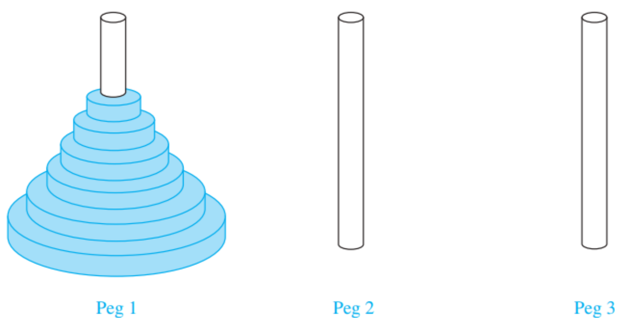
$$\{0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$$

*predstavlja Fibonacijev niz. Pocetni clanovi su 0 i 1, a svi ostali su odredjeni tako sto sabiramo poslednja dva. Clanovi ovog niza se mogu zapisati kao:*

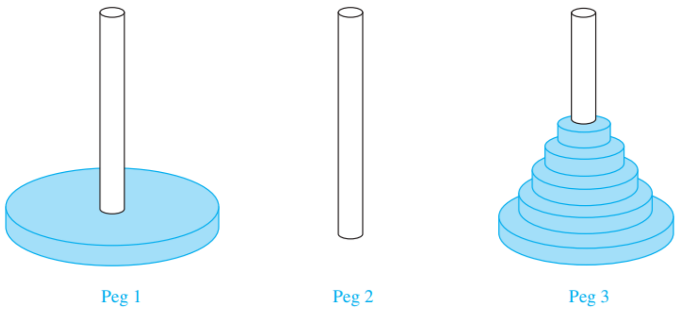
$$f_0 = 0 \tag{5}$$
$$f_1 = 1 \tag{6}$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2 \tag{7}$$

**Primer 3** *Hanojska kula - recimo da imamo tri stapa, gde na jednom od stapova ima n diskova gde je svaki sledeci disk veci od prethodnog. Koliko nam treba poteza da pomerimo sve diskove na neki drugi stap ako:*

1. *u svakom potezu mozemo pomeriti tacno jedan disk*
2. *veci disk nikada ne sme da se stavi na manji*




Slika 1: Pocetno stanje Hanojske kule




Slika 2: Stanje kule nakon $h_{n-1}$ poteza

Resenje: Neka je $h_n$ najmanji broj poteza koji je potreban da bi se n diskova prebacilo sa jednog stapa na drugi. Da bismo prebacili n = 1 disk potreban nam je jedan potez, odnosno $h_1 = 1$. Za n = 2, potrebno nam je $h_2 = 3$ poteza. Treba primetiti da ako imamo n diskova, prvo je potrebno pomeriti sve diskove koji su na tom poslednjem n-tom disku, kako bismo pomerili taj disk, pa onda vratili sve diskove nazad na najveci disk. Ovo se moze zapisati kao $h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1}$ odnosno kao $h_n = 2h_{n-1} + 1$

Treba napomenuti da su svi primeri koji su navedeni zapravo zapisani **generatorno** ,odnosno da bismo izrazili neki n-ti element, eksplicitno su nam bili potrebni neki elementi koji su prethodili taj element. Ovakav nacin trazenja elemenata niza nije efikasan ako trazimo neke krajnje elemente niza jer bismo prvo morali da nadjemo sve elemente pre tog kojeg trazimo.

**Definicija 2** *Ako zelimo da izrazimo neki element rekurentnog niza kao funkciju a koja zavisi od svog rednog broja u nizu, onda se ta funkcija naziva **resenje rekurentne relacije***, odnosno ako imamo funkciju $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, gde je $n \in \mathbb{N}_0$, ta funkcija glasi:

$$a_n = a(n)$$

**Primer 4** *Da bismo nasli resenje rekurente relacije Hanojske kule, mozemo da koristimo metodu* ***zamene unazad***:

$$
\begin{aligned}
h_n &= 2h_{n-1} + 1 && (8)\\
&= 2(2h_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 h_{n-2} + 2 + 1 && (9)\\
&= 2^2(2h_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 h_{n-3} + \cdots + 2 + 1 && (10)\\
&\vdots && (11)\\
&= 2^{n-1} h_1 + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 && (12)\\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 && (13)\\
&= 2^n - 1 && (14)
\end{aligned}
$$

U prethodnom primeru, dosli smo do pretpostavke kog oblika je resenje rekurentne relacije. U sledecem primeru cemo formalno verifikovati da nije doslo do greske u zakljucivanju (posebno u delu koji sadrzi "...")

**Primer 5** *Neka je* $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *zadat na sledeci nacin:*

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 1 && (15)\\
h_n &= 2h_{n-1} + 1, n \geq 2 && (16)
\end{aligned}
$$

*Dokazati da je* $h_n = 2^n - 1$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$

Resenje: Indukcijom po n.

Baza n = 1: $h_1 = 2^1 - 1 = 1$

Induktivna pretpostavka $(T_n)$: $h_n = 2^n - 1$

Induktivni korak $(T_n \to T_{n+1})$

Koristeci datu rekurentnu relaciju i induktivnu pretpostavku, pokazacemo da je $h_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2h_n + 1 && (17)\\
&= 2 \cdot (2^n - 1) + 1 && (18)\\
&= 2^{n+1} - 2 + 1 && (19)\\
&= 2^{n+1} - 1 && (20)
\end{aligned}
$$

# 2 Linearne rekurente relacije

## 2.1 Metoda zamene unazad

Recimo da zelimo da vidimo koji je $n$-ti fibonacijev broj. Formula za to je:

$$
\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\
&= (f_{n-2} + f_{n-3}) + f_{n-2} \quad \textit{zamenimo} \\
&= 2f_{n-2} + f_{n-3} \quad \textit{sredimo} \\
&= 2(f_{n-3} + f_{n-4}) + f_{n-3} \quad \textit{zamenimo} \\
&= 3f_{n-3} + 2f_{n-4} \quad \textit{sredimo} \\
&= 3(f_{n-4} + f_{n-5}) + 2f_{n-4} \quad \textit{zamenimo} \\
&= 5f_{n-4} + 3f_{n-5} \quad \textit{sredimo} \\
&= 5(f_{n-5} + f_{n-6}) + 3f_{n-5} \quad \textit{zamenimo} \\
&= 8f_{n-5} + 5f_{n-6} \quad \textit{sredimo}
\end{aligned}
$$

Kako da prepoznamo sablon? Koeficijenti posle sredjivanja su (2,1), (3,2), (5, 3), (8, 5). Ovo lici na svaka 2 uzastopna fibonacijeva broja

| $n$ | Fibonacci($n$) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 5 |
| 6 | 8 |
| 7 | 13 |
| 8 | 21 |
| 9 | 34 |
| 10 | 55 |

Table 1: Tabela fibonacijevih brojeva

Izgleda kao da se koeficijenti pojavljuju u vidu parova ($f_k$, $f_{k-1}$)

$$
\begin{aligned}
&= f_k f_{n-k} + f_{k-1} f_{n-(k+1)} \quad k = n-1 \\
&= f_{n-1} f_{n-(n-1)} + f_{n-1-1} f_{n-(n-1+1)} \\
&= f_{n-1} f_1 + f_{n-2} f_0 \\
&= f_{n-1} + f_{n-2}
\end{aligned}
$$

Vratili smo se gde smo poceli. Ova metoda kojom smo pokusali da pronadjemo zatvorenu formu za $f_n$ ne radi.

## 2.2 Homogene linearne jednacine sa konstantim koeficijentima

**Definicija 3** Rekurenta relacija nekog niza $a_n$ je *homogena* ako svaki clan sa desne strane jednakost rekurentne formule sadrzi faktor $a_j$ za neki prirodan broj $j$

**Definicija 4** Rekurenta relacija sadrzi *konstante koeficijente* ako se $n$ ne pojavljuje ni uz jedan clan $a_j$ (osim kao subskript)

**Definicija 5** Rekurenta relacija je *linearna* ako svaki clan sadrzi najvise jedan faktor $a_j$ i nijedan faktor $a_j$ se ne pojavljuje kao delilac, eksponent ili deo neke slozenije funkcije

| Rekurentna relacija | Homogena | Linearna | Konstanti koef. |
|---|---|---|---|
| $a_n = 5a_{n-1} + 7$ | ne: $+7$ | da | da |
| $a_n = (n^2+4)a_{n-1}+8a_{n-2}$ | da | da | ne: $n^2+4$ |
| $a_n = 5a_{n-1}+3n$ | ne: $+3n$ | da | da: $3n$ nije koeficijent $a_j$ |
| $a_n = 3a_{n-1}a_{n-2}+4a_{n-3}$ | da | ne: $a_{n-1}a_{n-2}$ | da |
| $a_n = 4a_{n-1}^2+5a_{n-2}$ | da | ne: $a_{n-1}^2$ | da |
| $a_n = \sin(a_{n-1})+n$ | ne: $+n$ | ne: $\sin(a_{n-1})$ | da |
| $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ | da | da | da |

Table 2: Primeri

**Definicija 6** Rekurenta linearna homogena relacija sa konstantim koeficijentima je *stepena* $k$ ako moze da se zapise u obliku:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

za neko $1 \leq k$ i $c_k \neq 0$.

Konstanta $k$ se zove stepen rekurente relacije, a $c_j$ su koeficijenti.

| Rekurentna relacija | Stepen |
|---|---|
| $a_n = 3a_{n-1} + 7a_{n-2}$ | 2 |
| $a_n = 5a_{n-1}$ | 1 |
| $a_n = 3a_{n-1}$+$4a_{n-3}$ | 3 |
| $a_n =$ -3$a_{n-2} + 6a_{n-3} - 9a_{n-5}$ | 5 |

Table 3: Primeri

Primetimo da je $a_n = 0$ uvek resenje svake linearne homogene relacije sa konstantim koeficijentima, koje se obicno naziva i **trivijalno resenje**

## 2.3 karakteristicna jednacina

Pretpostavimo da postoji realan (kompleksan) broj $r \neq 0$ takav da

$$a_n = r^n \; za \; svako \; n > k$$

Sada kada zamenimo to za svaki element dobijamo

$$\begin{aligned} r^n &= c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + ... + c_k r^{n-k} \\ &= r^{n-k}(c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} ... + c_{k-1} r + c_k) \end{aligned}$$

Sledi:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - ... - c_{k-1} r - c_k = 0$$

**Definicija 7** Karakteristicna jednacina rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

je:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k_2} - ... - c_{k-1} x - c_k = 0$$

**Teorema** Pretpostavimo da karakteristicna jednacina rekurente relacije stepena $k$ ima $k$ razlicitih korena $r_1, r_2, ..., r_k$. Tada za bilo koji odabir konstanti $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k$ mozemo zatvorenom formom da generisemo resenje rekurente relacije oblikom:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + ... + \alpha_k r_k^n$$

Medjutim, ukoliko je dato prvih $k$ elemenata niza $a_0, a_1, ..a_{k-1}$, onda je uvek moguce naci jedinstvene koeficijente $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k$ za koje vazi teorema.

**Dokaz(1)** Dokazacemo za rekurentnu relaciju koja je stepena 2. Koristi se ista ideja za vece $k$. Rekurentna relacija je oblika:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Njena karakteristicna jednacina je oblika:

$$x^2 - c_1 x - c2 = 0$$

Sa korenima $r_1$ i $r_2$. Zelimo da dokazemo da vazi:

$$a_n = \alpha_1 r1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Zamenom i pretpostavkom da je $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, pa onda sredjivanjem sledi:

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \\ &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= (c_1 \alpha_1 r_1^{n-1} + c_2 \alpha_1 r_1^{n-2}) + (c_1 \alpha_2 r_2^{n-1} + c_2 \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c2) \end{aligned}$$

Sada, desnu stranu kada prebacimo levo, a levi deo zamenimo pretpostavkom, nastaje:

$$\begin{aligned} \alpha_1 r1^n + \alpha_2 r_2^n - (\alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c2)) = 0 \\ \alpha_1 r_1^{n-2}(r_1^2 - c_1 r_1 - c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(r_2^2 - c_1 r_2 - c_2) = 0 \end{aligned}$$

Znamo da je $r_1^2 - c_1 r_1 - c_2 = 0$ i da je $r_2^2 - c_1 r_2 - c_2 = 0$, jer su to koreni karakteristicne jednacine. Dokaz je ovim zavrsen.
**Dokaz(2)** Za dokazivanje drugog dela, moramo da izaberemo konstante tako da prvih $k$ elemenata zadovoljava relaciju.

$$\begin{aligned} \alpha_1 r_1^0 + \alpha_2 r_2^0 + ... + \alpha_k r^0 = a_0 \\ \alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 + ... + \alpha_k r^1 = a_1 \\ ... \\ \alpha_1 r_1^{k-1} + \alpha_2 r_2^{k-1} + ... + \alpha_k r^{k-1} = a_{k-1} \end{aligned}$$

Ovako smo dobili sistem od $k$ linearnih jednacina sa nepoznatim $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{k-1}$. Pomocu Vandermondove teoreme mozemo dokazati da je ovaj sistem jedinstveno odredjen, pa je i ovaj dokaz zavrsen.

**Teorema** Ako karakteristicna jednacina:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k_2} - ... - c_{k-1} x - c_k = 0$$

Ima korene $r_1, r_2, ...r_l$ redom visestrukosti $k_1, k_2, ...k_l$ tada je opste resenje rekurente relacije dato oblikom

$$\begin{aligned} a_n = &(\alpha_{11} + \alpha_{12}n + ... + \alpha_{1k}n^{k_1-1})x_1^n + \\ &(\alpha_{21} + \alpha_{22}n + ... + \alpha_{2k}n^{k_2-1})x_2^n + \\ &...+ \\ &(\alpha_{l1} + \alpha_{l2}n + ... + \alpha_{lk}n^{k_l-1})x_l^n + \end{aligned}$$

Isto kao prethodno, konstante $\alpha_{11}, \alpha_{12}..., \alpha_{lk}$ su jedinstevno odredjene pocetnim uslovima.

## 2.4 Nehomogene linearne rekurente relacije sa konstantim koeficijentima

U ovom delu cemo posmatrati rekurente relacije oblika

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k} + f(n)$$

gde su $c_1, c_2, ..., c_k$ konstante, $k >= 1, c_k \neq 0$, a $f$ funkcija skupa prirodnih brojeva Ukoliko zamenimo $f(n)$ sa nulom, smatracemo da je to odgovarajuca rekurenta relacija.

**Teorema** Ako je $a_n^(p_1)$ parikularno resenje nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada za svako resenje $a_n$ njene jednacine postoji resenje $a_n^(h)$ odgovarajuce homogene rekurentne relacije sa osobinom

$$a_n = a_n^(h) + a_n^(p1), n >= 0$$

**Teorema** Neka je

$$f(n) = (b_mn^m + b_{m-1}n^{m-1} + ... + b_1n + b_0)s^n, b_i \in \mathbb{R}$$

Ako je $s$ koren karakteristicne jednacine visestrukosti $l$ (ako nije koren, tada je $l = 0$), onda postoji partikularno resenje oblika

$$a_n^p = n^l(c_mn^m + c_{n-1}n^{m-1} + ... + c_1n + c_0)s^n$$

**Teorema** Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom resenja nehomogenih rekurentnih relacija

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k} + f_1(n),$$
$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + ... + c_ka_{n-k} + f_2(n)$$

onda je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ resenje nehomogene rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n)$$

# 3 Analiza vremenske složenosti algoritama

## 3.1 Binarna pretraga

Binarna pretraga je rekurzivno definisan algoritam za pretragu koji radi nad sortiranom nizu. Radi u sledećim koracima:

1. Gledaj broj u sredini niza, $a$. Ako je $a$ manji od broja kojeg tražimo, odbacujemo sve brojeve pre $a$. Ako je veći, odbacujemo sve brojeve posle $a$. Ako je jednak, vraćamo poziciju i algoritam je završen.

2. Rekurzivno radi korak 1. nad novim podnizom, sve dok ili nadjemo broj koji smo tražili, ili nam ponestane brojeva u nizu.

Kako je algoritam rekurzivno definisan, njegovo vreme izvršavanja (runtime) možemo prikazati preko rekurentne relacije:

$$T(n) = T(\frac{n}{2}) + c$$

Zato što svaki put uzimamo sredinu elemenata, svaki put delimo niz na dve polovine. Ukupno vreme izvršavanja za $n$ elemenata je vreme izvršavanja za $\frac{n}{2}$ elemenata, plus koliko nam je potrebno da poredimo sredinu sa traženim brojem, to jest konstantno vreme $c$.
Rešavajući relaciju dobijamo:

$$T(n) = T(1) + c \log n$$

To jest:

$$T(n) = O(\log n)$$

## 3.2 Divide-and-conquer algoritmi

Divide-and-conquer algoritmi po definiciji rade rekurentno. Osnovna ideja je da se problem podeli na male pod-probleme koji se lakše rešavaju, sa dodatnom napomenom da će se rešenja pod-problema morati spojiti u kompletno rešenje na kraju. Znači, koraci ovakvog algoritma su:

1. Podeli ulaz na dva ili više manjih delova sa istom strukturom.

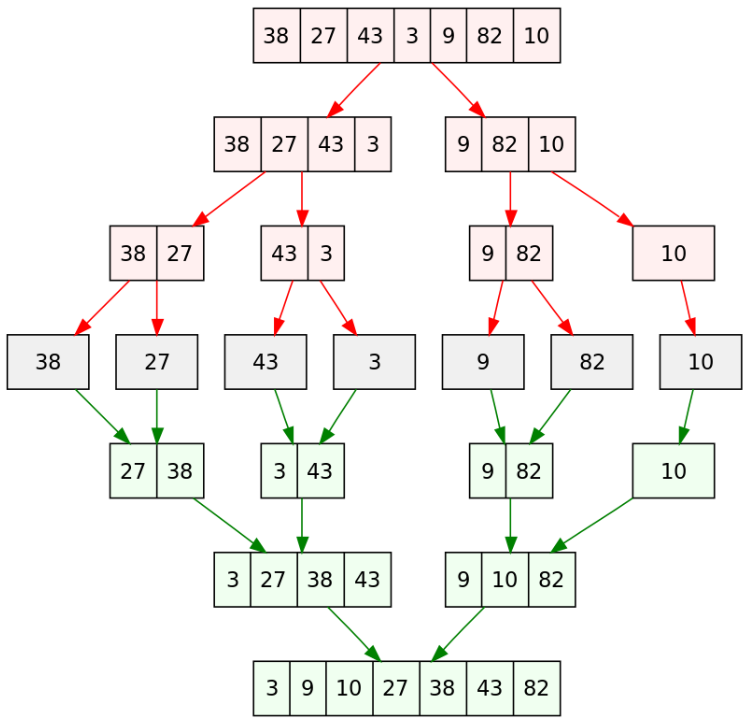
2. Rekurzivno izvrši algoritam nad delovima, dok oni nisu dovoljno mali da se reše.

3. Spoji rešenja u kompletno rešenje početnog ulaza.

### 3.2.1 Mergesort

Konkretan primer divide-and-conquer algoritma, mergesort radi na sledeći način:

1. Prepolovi ulaz.
2. Rekurzivno pozovi funkciju nad polovinama.
3. Spoji sortirane nizove.




Bazični slučaj je kada je niz dužine 1, jer je takav niz po definiciji sortiran. Funkcija spajanja će raditi tako što poredi prve elemente iz oba ulazna niza i manji stavlja u izlazni niz dok oba ulaza nisu prazna.

Za ovaj algoritam odgovara rekurentna relacija:

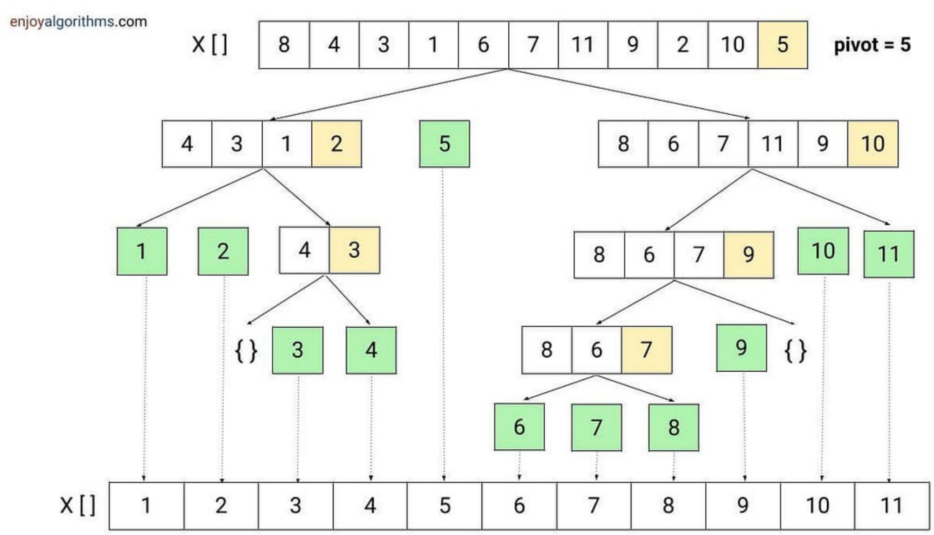
$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$$

To jest, trebaće nam onoliko vremena da odradimo mergesort nad nizom od $n$ podataka koliko nam bude trebalo da odradimo mergesort nad njegovim polovinama, i još da te polovine spojimo, što se odvija u O(n) vremenu. Rešavanjem ove relacije dobijamo:

$$T(n) = nT(1) + O(n)\log n$$
$$T(n) = O(n \log n)$$

### 3.2.2 Quicksort

Quicksort radi slično kao i mergesort, sa razlikom da ne delimo niz na pola, već uzimamo nasumičan elemenat $a$ (pivot), i delimo niz na elemente koji su veći od $a$ i one koji su manji od $a$.




Sa tim da je biranje pivota nasumično, razmatraćemo najgori i prosečan slučaj odvojeno.
U prosečnom slučaju, pivot će biti izabran tako da podeli niz na dva jednaka dela. Ovde imamo istu situaciju kao i u mergesort:

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$$

Umesto spajanja, kao što je bilo u mergesort-u, O(n) ovde predstavlja vreme za deljenje niza. Sa tim da je relacija ista, i vremenska složenost quicksort-a u prosečnom slučaju je ista kao i vremenska složenost mergesort-a, to jest $O(n \log n)$.

U najgorem slučaju, uvek biramo pivot koji je najveći ili najmanji broj u nizu, i relacija izgleda ovako:

$$T(n) = T(n-1) + O(n)$$

Rešavanjem ove relacije, dobijamo:

$$T(n) = T(1) + O(n)(n-1)$$

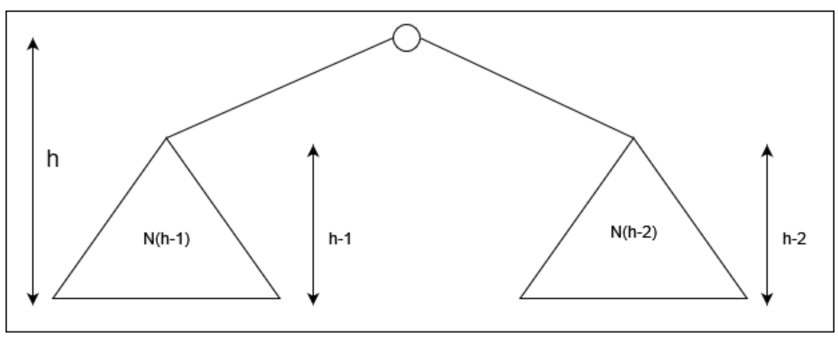
To jest, u najgorem slučaju vremenska složenost algoritma je $O(n^2)$. Medjutim, ovaj slučaj nije preterano verovatan (šansa da slučajno izaberemo najmanji ili najveći broj $n$ puta zaredom je $\frac{2^{n-1}}{n!}$), pa se često uzima da je složenost algoritma $O(n \log n)$.

# 4 AVL binarna stabla

Recimo da hoćemo da otkrijemo kolika nam je visina AVL stabla sa $n$ čvorova u najgorem slučaju.
Da bi postigli ovo, gledamo suprotno: ako imamo visinu $h$, koji je najmanji broj čvorova? Minimalan broj čvorova za neku visinu ćemo označiti sa $N(h)$.

Uzmimo AVL stablo. Koren ima visinu $h$, i po definiciji visine jedno od njegove dece ima visinu $h-1$. U AVL stablu se visina dece ne može razlikovati za više od jedan, tako da za visinu drugog deteta možemo uzeti ili $h-1$ ili $h-2$.

Da bi obezbedili najgori slučaj, gledamo da stablo ne bude balansirano, tj. da je visina drugog deteta $h-2$.



N(h)

Ovim smo zapravo definisali rekurentnu relaciju:

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1$$

To jest broj čvorova u stablu visine $h$ je zbir broja čvorova u svojim podstablima, plus koren. Bazni slučajevi relacije su $N(1) = 1$ i $N(2) = 2$. Izrazimo $N(h-1)$ i vraćamo u jednačinu:

$$N(h-1) = N(h-2) + N(h-3) + 1$$
$$N(h) = (N(h-2) + N(h-3) + 1) + N(h-2) + 1 = 2N(h-2) + N(h-3) + 1$$

Sa tim da je $N(h-3) \geq 1$, možemo izvući:

$$N(h) > 2N(h-2)$$

Iz ovoga vidimo da se $N(h)$ barem duplira kada se visina poveća za dva. Tako da:

$$N(h) > 2^{\frac{h}{2}}$$
$$\log_2 N(h) > \frac{h}{2}$$
$$h < 2\log_2 N(h)$$

Iz ovoga vidimo da je visina stabla sigurno manja od logaritma broja čvorova u najgorem slučaju, to jest visina je $O(\log n)$.

# 5 Primjena rekurentnih relacija u računarstvu

## 5.1 Fibonačijev niz

Fibonačijev niz je niz brojeva u kojem je svaki broj zbir dva prethodna broja. Niz počinje sa dva inicijalna uslova:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$

Svaki sledeći član niza se izračunava tako što se saberu prethodna dva:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Primjer Fibonačijevog niza:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

Fibonačijev niz ima osobinu zlatnog presjeka, jer ako se podijele uzastopni članovi niza njihov međusoban odnos teži zlatnom presjeku $\phi \approx 1.618$. Osobina zlatnog presjeka se pojavljuje u prirodi, arhitekturi i umjetnosti u velikoj mjeri.

## 5.2 Faktorijel broja

Faktorijel broja $n$, označava se sa $n!$ i predstavlja proizvod svih pozitivnih cijelih brojeva do tog broja, zajedno sa njim. Formalno, faktorijel se definiše kao:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{ako je } n > 0 \end{cases}$$

Primjeri faktorijela broja:

- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Kao što se da vidjeti, faktoijel raste eksponencijalno što je jedna od glavnih osobina faktorijela.

**Algorithm 1** Generisanje fibonacijevih brojeva

```
function Fibonacci(n)
    if n = 0 then return 0
    else if n = 1 then return 1
    else
        a ← 0
        b ← 1
        for i = 2 to n do
            c ← a + b
            a ← b
            b ← c
        end forreturn b
    end if
end function
```

**Algorithm 2** Racunanje faktorijala

```
function Factorial(n)
    if n = 0 then return 1
    elsereturn n×Factorial(n − 1)
    end if
end function
```

## 5.3 Hanoi kule

Problem Hanoi kula je klasičan problem koji demonstrira moć rekurzije i rekurentih relacija kako bi se riješili složeniji problemi.

Ako imamo tri stuba i određeni broj diskova različitih veličina koji su poredani tako da su diskovi na prvom stubu i da je uvijek manji disk iznad većeg. Poenta je da diskove premjestimo sa prvog na treći stub ali tako da se pridžavamo pravila:

1. U jednom potezu moeže da se prjemjesti samo jedan disk.

2. Veći disk ne smije da bude postavljen iznad manjeg.

Analiza problema pomoću rekurzije:

Ako imamo $n$ diskova:

1. Prvo ćemo da premjestimo $n-1$ diskova sa prvog stuba na pomoćni stub(drugi stub), tako da treći stub ostane slobodan

2. Zatim premještamo najveći(n-ti) disk sa prvog stuba direktno na treći stub.

3. Na kraju premještamo $n-1$ diskova sa drugog stuba na treći stub, koristeći prvi stub kao pomoćni.

Problem se razlaže na na manji problem sa $n-1$ diskova, čime se postiže struktura koja se može modelovati rekurentnom relacijom.

Neka je $T(n)$ minimalan broj poteza potreban za premještanje $n$ diskova sa jednog stuba na drugi, s tim da se pridržavamo pravila.

Na osnovu opisanih koraka dobija se rekurentna relacija:

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$$

gjde: je

$T(n-1)$ broj poteza potrebnih da se $n-1$ diskova premjesti na pomoćni stub

Množimo sa 2 jer radimo isti proces dva puta(prvo premještamo s prvog na drugi stub, a zatim sa drugog na treći stub)

Dodajemo 1 potez za premještanje najvećeg diska direktno na treći stub

Imamo početni, osnovni slučaj kada imamo samo jedan disk $n = 1$ i potreban je samo jedan potez:

$$T(1) = 1$$

Iz relacije $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$, dobijaju se sljedeći rezultati

$T(2) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$T(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$T(4) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

Možemo da uočimo da je

$$T(n) = 2^n - 1$$

**Algorithm 3** Hanoi kule

**function** HANOI($n$, *source*, *target*, *auxiliary*)
    **if** $n = 1$ **then**
        Premesti diskove sa *source* na *target*
    **else**
        HANOI($n-1$, *source*, *auxiliary*, *target*) ▷ Premesti $n-1$ disk na *auxiliary*
        Premesti disk sa *source* na *target* ▷ Premesti najveci disk
        HANOI($n-1$, *auxiliary*, *target*, *source*) ▷ Premesti $n-1$ diskove sa *auxiliary* na *target*
    **end if**
**end function**

# 6 Zadaci

Homogenu linearna rekurentna relacija je definisana kao:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

sa početnim uslovima

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

Pronadjite prvih pet članova.

## Rešenje

1. Početni članovi su:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

2. Izračunavamo sledeće članove:

$$a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 14 + 6 = 20$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 40 + 21 = 61$$

Dakle, prvi članovi su:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 20, \quad a_4 = 61.$$

# 7 Zadatak

Definišite homogenu linearnu rekurentnu relaciju:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

sa početnim uslovima:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$$

Pronadjite rešenje rekurentne relacije.

## Rešenje

### 1. Karakteristična jednačina

Prvo, formiramo karakterističnu jednačinu:

$$r^2 - 2r - 1 = 0.$$

Rešavamo kvadratnu jednačinu:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle, rešenja su:

$$r_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad r_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

## 2. Opšte rešenje

Homogeno rešenje je:

$$a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n,$$

gde su $A$ i $B$ konstante koje ćemo odrediti iz početnih uslova.

## 3. Odredjivanje konstanti

Koristimo početne uslove da pronadjemo $A$ i $B$.

Za $n = 0$:

$$a_0 = 1 = A(1+\sqrt{2})^0 + B(1-\sqrt{2})^0 = A + B.$$

Za $n = 1$:

$$a_1 = 1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}).$$

Sada imamo sistem:

1. $A + B = 1$
2. $A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) = 1$

## 4. Rešavanje sistema

Iz prve jednačine:

$$B = 1 - A$$

Uvrstimo u drugu:

$$A(1+\sqrt{2}) + (1-A)(1-\sqrt{2}) = 1.$$

Raširimo i pojednostavimo:

$$A(1+\sqrt{2}) + 1 - A(1-\sqrt{2}) = 1.$$

Smanjujemo:

$$A\sqrt{2} + 1 = 1 \implies A\sqrt{2} = 0 \implies A = 0.$$

Iz prve jednačine:

$$B = 1 - 0 = 1.$$

### 5. Zaključak

Rešenje je:

$$a_n = 0 \cdot (1+\sqrt{2})^n + 1 \cdot (1-\sqrt{2})^n = (1-\sqrt{2})^n.$$

# 8 Zadatak

Definišite nehomogenu linearnu rekurentnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + n, \quad n \geq 2$$

sa početnim uslovima

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$$

Pronadjite prvih pet članova rekurentne relacije.

## Rešenje

### 1. Homogena relacija

Prvo rešavamo odgovarajuću homogenu relaciju:

$$a_n^h = 2a_{n-1}^h + a_{n-2}^h.$$

Karakteristična jednačina je:

$$r^2 - 2r - 1 = 0.$$

Rešavamo kvadratnu jednačinu koristeći formulu:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle, rešenja su:

$$r_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad r_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Homogeno rešenje je:

$$a_n^h = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n,$$

gde su $A$ i $B$ konstante koje ćemo odrediti iz početnih uslova.

## 2. Posebno rešenje

Sada tražimo posebno rešenje $a_n^p$. S obzirom na to da je $f(n) = n$, pretpostavićemo oblik:

$$a_n^p = Cn + D,$$

gde su $C$ i $D$ konstante. Uvrstimo $a_n^p$ u rekurentnu relaciju:

$$Cn + D = 2(C(n-1) + D) + C(n-2) + D + n.$$

Raširimo i pojednostavimo:

$$Cn + D = 2(Cn - C + D) + Cn - 2C + D + n.$$

$$Cn + D = 2Cn - 2C + 2D + Cn - 2C + D + n.$$

$$Cn + D = 3Cn - 4C + 3D + n.$$

Sada uporedimo koeficijente:

$$C = 3C + 1 \implies 2C = -1 \implies C = -\frac{1}{2},$$

$$D = -4C+3D \implies D = -4\left(-\frac{1}{2}\right)+3D \implies D = 2+3D \implies -2D = 2 \implies D = -1.$$

Dakle, posebno rešenje je:

$$a_n^p = -\frac{1}{2}n - 1.$$

## 3. Ukupno rešenje

Ukupno rešenje je:

$$a_n = a_n^h + a_n^p = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n - \frac{1}{2}n - 1.$$

## 4. Odredjivanje konstanti

Sada koristimo početne uslove da pronadjemo $A$ i $B$.

Za $n = 0$:

$$a_0 = 1 = A(1+\sqrt{2})^0+B(1-\sqrt{2})^0-\frac{1}{2}(0)-1 \implies 1 = A+B-1 \implies A+B = 2.$$

Za $n = 1$:

$$a_1 = 1 = A(1+\sqrt{2})^1+B(1-\sqrt{2})^1-\frac{1}{2}(1)-1 \implies 1 = A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2})-\frac{1}{2}-1.$$

Uredjujemo:

$$1+\frac{1}{2} = A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2}) \implies \frac{3}{2} = A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2}).$$

Sada imamo sistem:
1. $A+B=2$ 2. $A(1+\sqrt{2})+B(1-\sqrt{2})=\frac{3}{2}$
Rešavanjem ovog sistema dobijamo vrednosti za $A$ i $B$.

## 5. Prvi članovi

Nakon što nadjemo $A$ i $B$, možemo izračunati prvih pet članova rekurentne relacije koristeći ukupno rešenje.

1. Za $n = 2$:

$$a_2 = 2a_1 + a_0 + 2 = 2(1) + 1 + 2 = 5.$$

2. Za $n = 3$:

$$a_3 = 2a_2 + a_1 + 3 = 2(5) + 1 + 3 = 14.$$

3. Za $n = 4$:

$$a_4 = 2a_3 + a_2 + 4 = 2(14) + 5 + 4 = 37.$$

Dakle, prvih pet članova rekurentne relacije su:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 14, \quad a_4 = 37.$$