Binomni koeficijent

Binomni koeficijenti imaju neobično veliki broj primena i sasvim sigurno su jedan od najvažnijih kombinatornih pojmova.Binomni koeficijenti predstavijaju koeficijente u razvoju stepena binoma u zbir,
prema binomnoj teoremi.
U 17. veku, Blaise Pascal uvodi binomne koeficijente u algebarskom obliku i definiciju navodimo u nastavku.

Algebarska interpretacija binomnog koeficijenta

Definicija 30 *Neka su m i n celi brojevi sa osobinom $0 \leq m \leq n$. Binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ je funkcija koja takvim parovima vrednosti n i m dodeljuje pozitivne cele brojeve na sledeći način:*

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m(m-1)\dots 2 \cdot 1}, m \geq 1.$$

Kombinatorna interpretacija binomnog koeficijenta

Binomni koeficient se kombinatorno moze interpretirati kao
1. broj m-kombinacija skupa od n elemenata, odnosno kao
2. broj m-toclanih podskupova skupa od n elemenata.

Dakle kombinatorna interpretacija se formalno moze opisati relacijom:

$$\binom{n}{m} = C(n; m).$$

Mozemo primetiti da binomni koeficijent odgovara broju kombinacija bez ponavljanje klase m od n elemenata. Broj načina da se od n elemenata izabere m elemenata jednak je broju načina da se od n elemenata izabere (preostalih) n - m elemenata.

Faktorijelna reprezentacija. Za cele brojeve n i k, $n \geqslant k \geqslant 0$ važi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{2.4}$$

Dokaz. Ova jednakost se dobija proširenjem razlomka u Definiciji 2.4.2 binomnog koeficijenta sa $(n-k)!$. Naime,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k(k-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.\end{aligned}$$

Osobine binomnog koeficijenta

1. Simetričnost

Lema. Za cele brojeve m i n sa osobinom 0 ≤ m ≤ n, važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Dokaz. Sledi direktno iz prethodne leme, faktorijalne reprezentacije

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! * (n-m)!}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! * (n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)! * m!}.$$

Ovo znači da je broj načina da se izabere m elemenata od n isti kao i broj načina da se izabere n – m elemenata od n.

2. Osobina rekurzije – Paskalov identit

Lema. Za cele brojeve m i n sa osobinom $1 \le m \le n - 1$, važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Dokaz. Dajemo dva dokaza, preko primene kombinatornih rezultata i direktno primenom definicije binomnog koeficijenta.

1. Posmatrajmo skup A sa $n \ge 1$ elemenata i izaberimo proizvoljni element a iz skupa A. Neka je

$$\begin{aligned} S_m &= \{B : B \subseteq A, |B| = m\}, \\ S_m^a &= \{B : B \subseteq A, a \in B, |B| = m\}, \\ S_m^{\bar{a}} &= \{B : B \subseteq A \setminus \{a\}, |B| = m\}. \end{aligned}$$

Tada je

$$S_m = S_m^a \cup S_m^{\bar{a}},$$

$$S_m^a \cap S_m^{\bar{a}} = \emptyset,$$

i prema principu zbira

$$|S_m| = |S_m^a| + |S_m^{\bar{a}}|.$$

Kako je broj elemenata u prethodnim skupovima jednak

$$\begin{aligned} |S_m| &= \left|\binom{A}{m}\right| = \binom{n}{m}, \\ |S_m^a| &= \left|\binom{A \setminus \{a\}}{m-1}\right| = \binom{n-1}{m-1}, \\ |S_m^{\bar{a}}| &= \left|\binom{A \setminus \{a\}}{m}\right| = \binom{n-1}{m}, \end{aligned}$$

odatle sledi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

2. Koristeći faktorijalnu reprezentaciju, dobijamo

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\ &= \frac{m \cdot (n-1)! + (n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{(m+n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}\end{aligned}$$

· Paskalov trougao

Paskalov identitet se koristi za tabelarni prikaz binomnih koeficijenata - Paskalov trougao.

(n,m)	0	1	2	3	4	5	…	$m'-1$	m'	…
0	1	–	–	–	–	–	…	…	…	…
1	1	1	–	–	–	–	…	…	…	…
2	1	2	1	–	–	–	…	…	…	…
3	1	3	3	1	–	–	…	…	…	…
4	1	4	6	4	1	–	…	…	…	…
5	1	5	10	10	5	1	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…			
$n'-1$	…	…	…	…	…	…	…	$\binom{n'-1}{m'-1}$	$\binom{n'-1}{m'}$	…
n'	…	…	…	…	…	…	…		$\binom{n'}{m'}$	…

Tabela može da se prikaže i kao jednakokraki trougao, na čijim kracima su jedinice.

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
 1  4   6   4  1
1  5  10  10  5  1
```

Formula koju smo dokazali se koristi u Paskalovom trouglu gde je svaki binomni koeficijent zbir dva koeficijenta iznad njega.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\end{array}
$$
$$\iddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$$

Algoritam i program za kreiranje Paskalovog trougla

Algoritam:

1. Inicijalizuj listu pascal sa početnim redom [1].
2. Za svaki naredni red od 1 do n - 1:
    - Dodaj broj 1 na početak reda.
    - Za svaki element u trenutnom redu, osim prvog i poslednjeg:
        - Postavi vrednost kao zbir dva elementa iz prethodnog reda.
    - Dodaj 1 na kraj reda.
3. Dodaj trenutni red u listu pascal.
4. Prikazuj svaki red iz liste pascal.

Python Program

```
def pascal_triangle(n):
    triangle = []  # Lista koja će čuvati redove trougla

    for i in range(n):
```

```
        row = [1]  # Počinjemo sa 1 na početku svakog reda
        if triangle:  # Ako trougao već sadrži redove
            last_row = triangle[-1]  # Prethodni red
            # Računamo unutrašnje elemente trenutnog reda
            row.extend([last_row[j] + last_row[j + 1] for j in range(len(last_row) -
1)])
            row.append(1)  # Dodajemo 1 na kraj reda

        triangle.append(row)  # Dodajemo red u trougao

    return triangle

# Unos broja redova i prikaz Pascalovog trougla
n = int(input("Unesite broj redova: "))
triangle = pascal_triangle(n)

for row in triangle:
    print(" ".join(map(str, row)).center(n * 2))
```

Binomna formula - tvrđenje i dokaz

Za svaki prirodan broj n veći ili jednak od nule i za sve realne brojeve a i b, važi:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

gdje je “n nad k” binomni koeficijent i računa se kao:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dokaz:
Ispod će biti dokaz binomne teoreme koristeći amtematičku indukciju.

Baza indukcije(n=1):

Ako je P(n) = (a+b)^n:

$$(a+b)^n = (a+b)^1$$
$$(a+b)^n = a + b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^{1-k}b^k$$
$$(a+b)^n = a^1b^0 + a^0b^1$$
$$(a+b)^n = a+b$$

Induktivna hipoteza: Pretpostavimo da je P(m) tačno.
Induktivni korak: Dokazujemo da je P(m+1) tačno.

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)(a+b)^m$$

Kako je P(m) tačno, slijedi:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^k\right)$$

Koristeći distributivna svojstva, slijedi:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k}b^{k+1}$$
$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a^{m-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{m+1}\binom{m}{k-1}a^{m-(k-1)}b^k$$
$$(a+b)^{m+1} = \binom{m}{0}a^{m+1}b^0 + \sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right)a^{m-k+1}b^k + \binom{m}{m}a^0b^{m+1}$$
$$(a+b)^{m+1} = a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}\right)a^{m-k+1}b^k + b^{m+1}$$

Koristeći Paskalov identitet, slijedi:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{m+1}{0}a^{m+1}b^0 + \sum_{k=1}^{m}\binom{m+1}{k}a^{m-k+1}b^k + \binom{m+1}{m+1}a^0b^{m+1}$$
$$\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}a^{m-k+1}b^k$$

Dokazali smo da je P(m+1) tačno.

Algoritam i program za razvoj binomne formule:

- Inicijalizovati rezultat kao prazan niz ili string u koji ćemo dodavati svaki član formule.
- Za svako k od 0 do n:
    1. Izračunaj binomni koeficijent pomoću formule

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

    2. Izračunaj član

$$a^{n-k}b^{k}.$$

    3. Pomnoži binomni koeficijent sa članom definisanim u drugom koraku i dodaj rezultat u niz.
- Prikazati sve članove u obliku sume.

```
from math import factorial

1 usage
def binomni_razvoj(a, b, n):
    rezultat = []
    for k in range(n + 1):
        # Izračunaj binomni koeficijent
        binomni_koeficijent = factorial(n) // (factorial(k) * factorial(n - k))

        # Kreiraj član u obliku stringa sa simbolima a i b
        clan = f"{binomni_koeficijent} * {a}^{n - k} * {b}^{k}"

        # Dodaj član u rezultat
        rezultat.append(clan)

    # Prikaz rezultata
    razvoj = " + ".join(rezultat)
    return razvoj

1 usage
def main():
    a = 'x'
    b = 'y'
    n = 4
    print(f"Razvoj izraza ({a} + {b})^{n} je: {binomni_razvoj(a, b, n)}")


# Pokretanje glavne funkcije
if __name__ == "__main__":
    main()
```

```
Razvoj izraza (x + y)^4 je: 1 * x^4 * y^0 + 4 * x^3 * y^1 + 6 * x^2 * y^2 + 4 * x^1 * y^3 + 1 * x^0 * y^4

Process finished with exit code 0
```

Korišćenje binomne formule u računarstvu:

Binomna formula ima brojne primjene u računarstvu, posebno u oblastima koje se bave kombinatorikom, statistikom, analitičkim procjenama performansi algoritama i analitičkim modelima podataka. Evo nekoliko primjera:

1. **Kombinatorika i algoritmi za pretragu**
   U algoritmima koji koriste pretrage i sortiranje, binomni koeficijenti često pomažu pri računanju broja mogućih kombinacija ili permutacija. Na primer, kod kombinatornih problema kao što su generisanje podskupova, binomni koeficijenti se koriste za određivanje broja mogućih podskupova određene veličine.
2. **Analiza složenosti algoritama**
   Binomna formula pomaže u analizi složenosti algoritama, posebno kada se analizira složenost rekurzivnih algoritama. Na primer, u algoritmima za pretragu kao što je "divide and conquer," često se koristi razvoj binomnih izraza da bi se analizirala složenost algoritma, posebno u vezi sa brojem operacija u različitim fazama rekurzije.
3. **Vjerovatnoća i statistika u mašinskom učenju**
   U oblastima kao što je mašinsko učenje, binomna raspodjela i binomni koeficijenti se koriste za procjenu vjerovatnosti određenih događaja. Na primjer, pri procjeni vjerovatnosti uspjeha u klasifikaciji ili predikciji modela, binomni koeficijenti pomažu u računanjima pri procjeni vjerovatnoće tačnih i netačnih predikcija.
4. **Kriptografija**
   U kriptografiji, posebno kod metoda koje koriste generisanje kombinacija ili rasporeda ključeva, binomni koeficijenti se koriste za procjenu broja mogućih rasporeda i za konstrukciju algoritama za šifrovanje i dešifrovanje.
5. **Teorija informacija**
   U teoriji informacija, binomni izrazi se koriste u kodiranju i kompresiji podataka, gdje se koristi analiza različitih mogućih kombinacija simbola. Na primjer, kada se izračunava koliko različitih načina postoji za kodiranje podataka koristeći određeni broj bitova, binomni koeficijenti pomažu u određivanju mogućih kombinacija koje minimiziraju grešku u prenosu podataka.
6. **Simulacije i Monte Carlo metode**
   Kod simulacija koje uključuju nasumične događaje, kao što su Monte Carlo simulacije, binomni izrazi se često koriste za modeliranje vjerovatnoće događaja.

Na primjer, u simulacijama poput bacanja novčića ili kockica, koristi se binomna raspodjela za predikciju i analizu vjerovatnoće različitih ishoda.

7. **Analitičko modelovanje mrežnih protokola**
   Kod analize mrežnih protokola, binomna formula može biti korisna za modelovanje mogućih kombinacija u paketima podataka, raspodjeli učesnika u mreži ili optimizaciji prenosa podataka.

Polinomni koeficijent

Polinomni koeficijent u matematici ima dva osnovna načina interpretacije: algebarski i kombinatorni.

1. **Algebarski pristup**:

   Polinomni koeficijent se odnosi na broj načina da se konstantni faktor u određenom terminu polinoma dobije množenjem različitih članova polinoma zajedno. U polinomnom izrazu $(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n$, koeficijent ispred monoma $x_1^{a1} x_2^{a2} ... x_k^{ak}$, određen je binomnim koeficijentom

   $\binom{n}{a1, a2, ..., ak}$, koji se može računati kao $\frac{n!}{a1!a2!...ak!}$, pod uslovom da važi $a_1 + a_2 + ... + a_k$ = n. Ovo omogućava da se utvrdi kolika je težina svakog pojedinačnog člana u proširenju polinoma.

2. **Kombinatorni pristup**:

   Kombinatorno, polinomni koeficijent može se tumačiti kao broj načina da se postavi određeni broj elemenata iz multiskupa. Na primjer, ako imamo multiskup koji sadrži *n* elemenata, gdje su elementi podijeljeni u *k* različitih tipova (svaki tip može se pojaviti određeni broj puta), onda polinomni koeficijent predstavlja broj načina da se permutuje ovaj multiskup tako da dobijemo određenu raspodjelu.

Primjer 1

Razmotrimo izraz $(x + y + z)^3$. Kada ga proširimo, dobićemo monome kao što su x^2y, xy^2, yz^2, xyz,.. . Koeficijent ispred monoma x^2y nam govori koliko načina postoji da se u procesu proširenja polinoma uzme dva puta x, jednom y i nijednom z. Zbir stepena u tom slučaju je 2 + 1 + 0 = 3. To možemo predstaviti pomoću multinomijalnog koeficijenta:

$$\binom{3}{2,1,0} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Što znači da će težina koeficijenta ispred monoma x^2y biti 3. Slično za *xyz*

$$\binom{3}{1,1,1} = 3! = 6$$

Primjer 2

Razmotrimo izraz $(x + y + z)^3$. Obzirom na zbir eksponenata 3, ovdje su svi mogući slučajevi: x^3, y^3, z^3, x^2y, xy^2, x^2z, xz^2, y^2z, yz^2, xyz.

Zamislimo da imamo multiskup {x,x,y} (tj. imamo dva puta x, jednom y). Pitanje je na koliko načina možemo da permutujemo ove elemente. Ako računamo koliko ima permutacija ovog multiskupa, dobijamo izraz:

$$\frac{3!}{2!*1!} = 3$$

Ovaj rezultat nam kaže da postoje 3 različita načina da permutujemo elemente {x,x,y}, a svaka od tih permutacija odgovara jednom pojavljivanju monoma u proširenju polinomax^2y. Opet dobijamo vrijednost 3 kao težinu koeficijenta ispred monoma. Dakle, **polinomni koeficijent** ovdje odgovara broju načina da se elementi multiskupa raspodjele u permutacije koje daju specifične eksponente, čime kombinatorno tumačimo koeficijent kao broj mogućih permutacija multiskupa sa ponavljanjima.

Osobine polinomnog koeficijenta

Teorema 1

Neka su dati brojevi $m_1,...,m_l \in N_0$ i neka je $n = m_1 +...+m_l$. Tada je:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\cdots\binom{m_l}{m_l}.$$

Dokaz: Kombinatorno, ovaj izraz predstavlja vezu između permutacija multiskupa i kombinacija bez ponavljanja. Algebarski dokaz koristi definiciju polinomnog koeficijenta i skraćivanje faktora u razlomku, kao što je prikazano u nastavku:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\cdots\binom{m_l}{m_l} &= \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!}\cdots\frac{m_l!}{m_l!0!}\\ &= \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l}\end{aligned}$$

Teorema 2

Neka su dati brojevi $m_1,...,m_l \in N_0$ i neka je $n = m_1 +...+m_l$. Ako je $\{\{m_1, m_2,...,m_l\}\} = \{\{k_1, k_2,...,k_l\}\}$, onda je:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_l}.$$

Dokaz: Iz uslova $\{\{m_1, m_2,...,m_l\}\} = \{\{k_1, k_2,...,k_l\}\}$, sledi da je $m_1!m_2!...m_l! = k_1!k_2!...k_l!$, a odatle i da su posmatrani polinomni koeficijenti jednaki.

Teorema 3

Neka su dati brojevi $m_1, \ldots, m_l \in N_0$ i neka je $n = m_1 + \ldots + m_l$. Ako je $0 < m_1, \ldots, m_l < n$, onda važi:

$$\begin{aligned}\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} &= \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} + \cdots\\ &+ \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}.\end{aligned}$$

Dokaz: Algebarski, primenom definicije polinomnog koeficijenta:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} &= \frac{(n-1)!}{(m_1-1)!m_2!\ldots m_l!} = \frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}\\ \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} &= \frac{(n-1)!}{m_1!(m_2-1)!\ldots m_l!} = \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}\\ &\ldots\\ \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1} &= \frac{(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots(m_l-1)!} = \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}\end{aligned}$$

Tako dobijamo da je suma

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l}+\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l}+\ldots+\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l}$$

jednaka

$$\frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}+\frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}+\ldots+\frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!},$$

što nakon svođenja na zajednički imenilac daje

$$\frac{(m_1+\ldots+m_l)(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}.$$

Kombinatorno, leva strana jednakosti odgovara permutacijama multiskupa $\{\{k_1,\ldots,k_1,\ldots,k_l,\ldots,k_l\}\}$. SKup svih uređenja možemo podeliti na l podskupova i da svaki od njih sadrži n-torke sa fiksiranom prvom komponentom. Ti podskupovi po parovima su disjunktni i možemo primeniti princip zbira. Odatle zaključujemo da je broj načina da se urede elementi tako da je na prvom mestu k_1 jednak broju načina da se uredi preostalih n-1 elemenata, pri čemu će na raspolaganju biti jedan manje od k_1, a to je $P(k_1 - 1, k_2,\ldots,k_l)$.

Teorema 4

Neka su dati celi brojevi $m_1, \ldots, m_l \geq 0$ i neka je je $n = m_1 + \ldots + m_l$

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}.$$

Dokaz: Uzimajući u obzir definicije faktorijela i polinomnog koeficijenta sledi:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} = \frac{n!}{m_1! \ldots m_{l-1}!0!}$$
$$= \frac{n!}{m_1! \ldots m_{l-1}!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}$$

Uvođenje polinomne formule

Polinom je matematički izraz sastavljen od varijabli i konstanti koje su povezane operacijama sabiranja, oduzimanja i množenja, kao što su $2x^2+3x+2$. Opšti oblik polinoma stepena n može se zapisati kao:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

gde su a_n , a_{n-1}, ... a_0 konstante koje nazivamo *koeficijentima*.

Jedan od najpoznatijih alata za rad sa polinomima jeste *binomna teorema*, koja nam omogućava da razvijemo izraz $(a+b)^n$ u obliku polinoma. Ovo se posebno koristi u kombinatorici, statistici i računarskim naukama za modeliranje složenih sistema i analizu podataka.

Binomna teorema

Binomna teorema nam daje način za razvijanje stepena zbira dva izraza. Konkretno, ona kaže da za svaki prirodan broj n važi:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Gde je (nk) binomni koeficijent, a računamo ga kao:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Na primer, ako želimo da razvijemo $(x+y)^3$, dobijamo:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$

Algoritam i program za razvoj polinomne formule:

- Inicijalizujemo listu koja će čuvati sve članove polinoma.
- Za svaki k od 0 do n:

  Izračunamo binomni koeficijent $(n\ kroz\ k)$

  Izračunamo član $\binom{n}{k} a^{(n-k)} b^k$

  Dodajemo ovaj član listi rezultata.
- Formirajte polinomni izraz spajanjem članova iz liste.

```
import math

def razvij_polinom(a, b, n):
    clanovi = []
    for k in range(n + 1):
        binom_koef = math.comb(n, k)
        clan = f"{binom_koef}*{a}^{n-k}*{b}^{k}"
        clanovi.append(clan)
    return " + ".join(clanovi)

```

Korišćenje polinomne formule u računarstvu:

1. **Algoritmi i Analiza Performansi**

    U analizi složenosti algoritama, polinomi se koriste za predstavljanje vremena izvršavanja ili memorijske složenosti algoritama. Na primer, ako se algoritam sastoji od ugnežđenih petlji, vreme izvršavanja često se izražava polinomnom funkcijom:

2. **Kriptografija: Polinomski Pristupi za Verifikaciju**

    U kriptografiji, polinomi se koriste za konstrukciju sistema za **verifikaciju integriteta** podataka, kao što su **kontrolne sume** i **kripto-hash funkcije**. Jedan od najpoznatijih primera je **CRC (Cyclic Redundancy Check)**, koji koristi polinomske operacije za otkrivanje grešaka u prenosu podataka.

3. **Mašinsko Učenje: Polinomska Regresija**

    U mašinskom učenju, **polinomska regresija** se koristi za modeliranje nelinearnih relacija među podacima. Za razliku od linearne regresije koja pretpostavlja linearnu zavisnost između promenljivih, polinomska regresija koristi polinome kako bi bolje modelovala složene odnose.

4. **Hashing Algoritmi i Polinomske Hash Funkcije**

    U algoritmima pretrage i strukturama podataka kao što su **heš mape** i **heš tabele**, polinomske hash funkcije koriste se za brzo generisanje heševa iz niza podataka. Heš funkcija pretvara niz karaktera (npr. reč) u jedinstveni broj koji se može koristiti za pristup podacima u konstantnom vremenu O(1).

Broj preslikavanja između dva skupa pomocu kombinatornih objekata

Broj svih preslikavanja između dva skupa ***A*** i ***B*** može se analizirati pomoću kombinatornih objekata, uzimajući u obzir različite uslove.

Ako imamo skupove ***A*** i ***B,*** gdje je $|A| = n$ i $|B| = m$, posmatraćemo sva moguća preslikavanja i injektivna preslikavanja između njih.

1. Broj svih preslikavanja

Svaki element skupa *A* može se preslikati na bilo koji od *m* elemenata skupa *B*. Dakle, za svaki element $a \in A$, postoji *m* izbora. Ukupno je m^n različitih načina da se definiše bilo kakvo preslikavanje iz *A* u *B*, jer za svakog od *n* elemenata skupa *A* imamo *m* mogućnosti u *B*.

$$|\{f: A \rightarrow B\}| = m^n$$

Dokaz:

Svako preslikavanje skupa *A* u skup *B* može se prikazati kao skup parova

$$\{(a_1, f(a_1)), \dots, (a_n, f(a_n))\}$$

,odnosno ako proizvoljno uredimo skup *A* onda funckiju možemo predstaviti kao m-torku vrijednosti funkcija u tim tackama:

Prema principu proizvoda:

$$\left(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)\right) \in B \times B \times \dots \times B = B^n$$

□

2. Broj injektivnih preslikavanja

Preslikavanje $f: A \rightarrow B$ je inejektivno ako ta svaka dva različita elementa $a_1, a_2 \in A$ i $a_1 \neq a_2$, važi da je $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Injektivno preslikavanje zahtjeva da svaki element iz skupa *A* ima jedinstvenu „sliku" u skupu *B*, da bi to bilo moguće konstruisati mora biti $1 \leq n \leq m$.

Ukoliko je ovaj zahtjev ispunjen možemo odabrati *n* različitih elemenata iz skupa *B* i zatim ih permutovati tako da svaki element iz *A* dobije jedinstvenu „sliku" u *B*. Broj injektivnih preslikavanja je tada jednak broju načina na koji možemo birati *n* elemenata od m i rasporediti ih, što je definisano kao broj varijacija bez ponavljanja.

$$\left|\left\{f: A \xrightarrow{1-1} B\right\}\right| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

<u>Dokaz:</u>

Ako preslikavanje predstavimo kao uređenu n-torku vrijednosti funckije $(f(a_1), \ . \ . \ . \ , f(a_n))$ u kojoj je svaki par komponenti različit, onda svakom preslikavanju odgovara jedna m-permutacija skupa B. Broj takvih m-permutacija jednak je $n \cdot (n-1) \cdot . \ . \ . \cdot (n-m+1)$.

□

Stirlingovi brojevi druge vrste

Stirlingovi brojevi druge vrste predstavljaju broj načina na koje se može podeliti skup sa m elemenata u n nepraznih podskupova. Drugim rečima Stirlingovi brojevi nam daju broj različitih načina na koje se m objekata može grupisati u n nepraznih grupa, gde je redosled elemenata unutar podskupova nevažan, ali je bitno da su svi podskupovi neprazni. Ovakva raspoređivanja nazivamo particijama.

Definicija: Ako je A={a_1, a_1, ..., a_m}, {B_1, ..., B_n} je particija skupa A na n podskupova ako važi:

1. $A = B_1 \ \cup \ \ldots \ \cup B_m$

2. $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \, B_1 \neq \emptyset$

3. $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \, i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$

Neka je $1 \leq n \leq m$ Broj particija skupa od m na n podskupova, $S(m, n)$ je Stirlingov broj druge vrste.

Teorema: Neka su $n, m \in N$ i $n < m$. Tada važi:

1. $S(m, m) = 1$
2. $S(m, 1) = 1$
3. $S(m, n) = S(m - 1, n - 1) + nS(m - 1, n),\ 0 < n < m$

Dokaz teoreme:

1. Ako gledamo skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, jedini način da taj skup podelimo na m nepraznih podskupova jeste da ga podelimo na skupove sa po jednim članom.

   $\{\{a_1, \{a_2\}, ..., \{a_m\}\}$

2. Ako gledamo skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, jedini način da taj skup podelimo na 1 neprazan podskup jeste taj isti skup.

   $\{A\}$

3. Gledamo skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ i fiksiramo a_1. Pretpostavljamo da je skup A razbijen na skupove $B_1, ..., B_n$. U tom slučaju imamo dve opcije:
   - ako je a_1 jedini skup nekog elementa, onda je broj takvih razbijanja jednak broju razbijanja skupa $A/\{a_1\}$ na $n - 1$ podskupova, ondnosno $S(m - 1, n - 1)$
   - ako podskup sa a_1 sadrži još neki element. Ako je ovo slučaj, preostalih $m - 1$ elemenata možemo na n skupova razbiti na $S(m - 1, n)$ načina i za svako ovo razbijanje imamo n načina da izaberemo podskup kojem ćemo dodati a_1. Broj ovih razbijanja je onda $nS(m - 1, n)$ i samo nam preostaje da saberemo ova dva slučaja

Uz pomoć prethodnih tvrđenja možemo konstruisati tablicu Stirlingovih brojeva druge vrste.

(m,n)	1	2	3	4	5	6	$\dots$
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
$\dots$							$\dots$

Veza između Stirlingovih brojeva druge vrste i surjektivnih preslikavanja

Teorema: Neka je $0 < n \leq m$. Tada je:

$$\{f: A \to B:\ f\ je\ "na"\} \ = \ n! \cdot S(m,n)$$

Dokaz teoreme:

Ako imamo m elemenata raspoređenih u n kutija, mogli bi te kutije da označimo na n! različitih načina. Svako takvo označavanje odgovara jednom bijektivnom preslikavanju skupa elemenata na skup oznaka kutija. Zato je:

$$n! \cdot S(m,n) \ = \ |\{f: A \to B: f\ je\ "na"\ preslikavanje)|$$

Na primer, broj surjektivnih preslikavanja sa skupa od 4 elementa na skup od 2 elementa biće $2! \cdot S(4,2)$.

Zadatak 1

Izračunajte Stirlingove brojeve druge vrste za sledeće vrednosti:

- $S(4,2)$
- $S(5,3)$
- $S(6,2)$

Koristićemo rekurzivnu formulu:

$$S(n, k) = k \cdot S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1)$$

Rešenje:

1. $S(4, 2)$**:**
   - $S(3, 2) = 2 \cdot S(2, 2) + S(2, 1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$
   - $S(4, 2) = 2 \cdot S(3, 2) + S(3, 1) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$
   - **Odgovor**: $S(4, 2) = 7$
2. $S(5, 3)$**:**
   - $S(4, 3) = 3 \cdot S(3, 3) + S(3, 2) = 3 \cdot 1 + 3 = 6$
   - $S(5, 3) = 3 \cdot S(4, 3) + S(4, 2) = 3 \cdot 6 + 7 = 18 + 7 = 25$
   - **Odgovor**: $S(5, 3) = 25$
3. $S(6, 2)$**:**
   - $S(5, 2) = 2 \cdot S(4, 2) + S(4, 1) = 2 \cdot 7 + 1 = 14 + 1 = 15$
   - $S(6, 2) = 2 \cdot S(5, 2) + S(5, 1) = 2 \cdot 15 + 1 = 30 + 1 = 31$
   - **Odgovor**: $S(6, 2) = 31$

Zadatak 2

Pronađite broj surjektivnih preslikavanja sa skupa veličine $n = 5$ na skup veličine $k = 3$.

Rešenje: Koristimo formulu:

$$k! \cdot S(n, k)$$

- Prvo izračunajmo $S(5, 3)$, koje je prema prethodnom zadatku $S(5, 3) = 25$.
- $k! = 3! = 6$
- Dakle, broj surjektivnih preslikavanja je:

$$3! \cdot S(5, 3) = 6 \cdot 25 = 150$$

- **Odgovor**: Broj surjektivnih preslikavanja je 150.

Zadatak 3

Pretpostavite da u školi ima 4 predmeta koje svaki od 7 učenika treba da proučava, tako da svaki predmet ima bar jednog učenika. Koliko je različitih načina da se učenici rasporede po predmetima?

Rešenje: I ovde koristimo formulu:

$$k! \cdot S(n, k)$$

- Izračunajmo $S(7, 4) = 350$
- $4! = 24$

Broj načina da se učenici rasporede je:

$$4! \cdot S(7, 4) = 24 \cdot 350 = 8400$$

- **Odgovor**: Postoji 8400 različitih načina raspodele učenika po predmetima.