Zadatak br.4

Grupa 4

Oktobar 2024

1 Binomni Koeficijenti

1.1 Uvod

Binomni koeficijenti $\binom{n}{m}$ imaju neobicno veliki broj primena i sasvim sigurno su jedan od najvaznijih kombinatornih pojmova. Oni predstavljaju koeficijente u razvoju stepena binoma u zbir, prema binomnoj teoremi kao sto cemo videti malo kasnije. Istorijski gledano, postoje nagovestaji da se binomna teorema znala jos u 4. veku pre nove ere, ali se binomni koeficijenti u algebarskom obliku kakve ih mi znamo uvode u tek u 17. veku od strane Blaise Pascala, prema kome je i jedna od osobina binomnih koeficijenata dobila naziv.

1.2 Definicija

Definicija: Neka su m I n nenegativni celi brojevi pri čemu važi n ¿= m . Binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ je funkcija promenljivih m i n koja takvim parovima vredosti dodeljuje pozititivne cele brojeve na sledeci nacin:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}$$

Treba skrenuti pažnju na posebnu vrstu binomnog koeficijenta i njegovu vrednost, a to je:

$$\binom{n}{0} = 1$$

1.3 Lema

Najjednostavnija reprezentacija binomnih koeficijenata jeste pomocu faktorijela. Za cele brojeve m i n sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Dokaz. Za $m \in \{0, n\}$ imamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{n!} = 1 = \binom{n}{0}$$

Ako je $1 \leq m \leq n-1$ mnozenjem brojioca i imenioca sa (n-m)! dobijamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)(n-m)!}{m(m-1)...2*1*(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

□

1.4 Definicija

U prethodnoj lemi smo binomni koeficijent predstavili pomocu faktorijela, tj. algebarski, ali se on moze i predstaviti kombinatorno kao broj m-kombinacija skupa od n elemenata, tj. kao broj m-toclanih podskupova skupa od n elemenata. Kombinatorna interpretacija binomnog koeficijenta se moze zapisati na sledeci nacin:

$$\binom{n}{m} = C(n;m) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}$$

1.5 Lema - Uslov Simetricnosti

Na osnovu prethodne definicije binomnog koeficijenta na kombinatorni nacin, mozemo zakljuciti da binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ odgovora broju kombinacija bez ponavljanja klase m od n elemenata. Broj nacina da se iz skupa od n elemenata izabere m elemenata jednak je broju nacina da se od n elemanata izabere n-m elemenata. Prema tome, sledi sledeca lema o Uslovu Simetricnosti:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Dokaz. 1. Algebarski dokaz:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

2. Sa druge strane, kombinatorno posmatrano uslov simetricnosti znaci da je broj m-toclanih podskupova skupa A sa n elemenata jednak broju podskupova sa n-m elemenata. Ovo se moze dokazati veoma jednostavno, sve sto treba da uradimo je da svakom m-toclanom podskupu dodelimo njegov komplement u skupu A. □

1.6 Lema - Adiciona Formula (Paskalov identitet)

Kao sto je nagovesteno na pocetku dokumenta, sada sledi Paskalov identitet, tj. adiciona formula. Za cele brojeve m i n, $1 \leq m \leq n-1$ vazi:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Dokaz. I u ovom slucaju dajemo 2 dokaza - algebarski i kombinatorni. Prvo ce slediti dokaz uz pomoc direktne primene definicije binomnog koeficijenta definisanog preko faktorijela. A zatim ce sledciti kombinatorni dokaz.

1. Algebarski dokaz:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}+\frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\ &= \frac{m*(n-1)!+(n-m)*(n-1)!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{(m+n-m)*(n-1)!}{m!(n-m)!}=\binom{n}{m}\end{aligned}$$

2. Kombinatorni dokaz: Leva strana jednakosti tj. $\binom{n}{m}$ predstavlja broj m-toclanih podskupova nekog n-toclanog skupa A. Izaberimo proizvoljni element $a \in A$. Sada m-toclane podskupove skupa A mozemo da podelimo u dve grupe u zavisnosti od toga da li sadrze element a ili ne. Podskupovi koji ne sadrze a su upravo svi m-toclani podskupovi skupa A \a, pa je njihov broj $\binom{n-1}{m}$. Ako je B neki m-toclani podksup skup A koji sadrzi a, tada podskupu B mozemo da pridruzimo podskup B' = B \a koji sadrzi m-1 elemenata. Ovo pridruzivanje je bijekcija izmedju svih m-toclanih podskupova skupa A koji sadrze a i svih podskupova sa m-1 elemenata skupa A\a. Broj takvih podskupova je jednak $\binom{n-1}{m-1}$.

□

2 Polinomni koeficijent

2.1 Uvod

Polinomni koeficijenti predstavljaju osnovni koncept u kombinatorici i algebri koji se odnosi na broj načina raspodele elemenata u različite grupe sa zadatim brojem ponavljanja. Iako su najpoznatiji kao prirodni nastavak binomnih koeficijenata, polinomni koeficijenti se koriste za opisivanje mnogo složenijih situacija, poput izbora sa ponavljanjem i permutacija multiskupova. Oni omogućavaju precizan proračun u problemima gde imamo više vrsta objekata koji se mogu ponavljati, pružajući alat za rešavanje zadataka u oblastima od verovatnoće do fizike i teorije brojeva.

2.2 Kombinatorna definicija

Polinomni koeficijent definišemo koristeći permutacije multiskupa kao broj načina na koje možemo odabrati i rasporediti elemente iz skupa s ponavljanjem.

Za multiskup sa elementima $x_1, x_2, \ldots, x_k$ i brojevima ponavljanja $a_1, a_2, \ldots, a_k$ polinomni koeficijent je definisan kao:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1!a_2!, \ldots, a_k!}$$

gde je $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

Ovaj izraz daje broj različitih načina na koje možemo rasporediti n elemenata u k grupa, gde se svaka grupa i-tog elementa pojavljuje a_i puta.

2.3 Algebarska definicija

Algebarski, polinomni koeficijent može se definisati kao koeficijent monoma $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$ u razvoju binoma $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$, gde je:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2!, \ldots, a_k!}$$

Algebarski, ovaj koeficijent predstavlja broj načina na koje možemo odabrati a_1 elemenata iz prvog faktora, a_2 elemenata iz drugog faktora, i tako dalje, tako da ukupno imamo n elemenata.

2.4 Osobine polinomnog koeficijenta

Teorema 1 Neka su dati brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N_0$ i neka je $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Tada je:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n}{a_1} \binom{n - a_1}{a_2} \binom{n - (a_1 + a_2)}{a_3} \ldots \binom{a_k}{a_k}$$

Dokaz. Ako se primeni definicija binomnih koeficijenata na desnu stranu, po jedan cinilac iz imenioca se uvek skrati sa sa brojiocem iz narednog razlomka

$$\begin{aligned} \binom{n}{a_1} \binom{n - a_1}{a_2} \ldots \binom{a_k}{a_k} &= \frac{n!}{a_1!(n - a_1)!} \frac{(n - a_1)!}{a_2!(n - a_1 - a_2)!} \ldots \frac{a_k!}{a_k! 0!} \\ &= \frac{n!}{a_1! a_2!, \ldots, a_k!} \\ &= \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} \end{aligned} \quad (1)$$

□

Teorema 2 Neka su dati brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N_0$ i neka je $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Ako je $\{\{a_1 + a_2 + \ldots + a_k\}\} = \{\{m_1 + m_2 + \ldots + m_k\}\}$ onda je:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_k}$$

Dokaz. Iz uslova $\{\{a_1 + a_2 + \ldots + a_k\}\} = \{\{m_1 + m_2 + \ldots + m_k\}\}$ direktno sledi da je $a_1! a_2!, \ldots, a_k! = m_1! m_2!, \ldots, m_k!$, a odatle da su i posmatrani polinomni koeficijenti jednaki. □

Teorema 3 Neka su dati celi brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k \geq 0$ i neka je $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Tada je:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, 0} = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}}$$

Dokaz. Na osnovu definicije polinomnog koeficijenta i definicije faktorijela dobijamo:

$$\begin{aligned}\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, 0} &= \frac{n!}{a_1!a_2!, \ldots, a_{k-1}!0!} \\ &= \frac{n!}{a_1!a_2!, \ldots, a_{k-1}!} = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}}\end{aligned}$$

□

3 Polinomna formula - uvod i zadaci

Monom je broj ili proizvod broja i jedne ili više promenljivih. Promenljivu ili proizvod promenljivih u monomu najčešće nazivamo promenljivi deo, a broj nazivamo konstanta ili koeficijent monoma. Zbir dva neslična monoma naziva se binom, zbir tri neslična monoma naziva se trinom, a zbir više nesličnih monoma naziva se polinom. Polinome nazivamo još i celi algebarski izrazi. Polinomi mogu biti sa jednom promenljivom ili više njih. Polinom jedne promenljive, ako je ta promenljiva x, najčešće označavamo $f(x)$.

Neka su $n, k \in \mathbb{N}$. Tada za sve $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{C}$ važi:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{(n_1, n_2, \ldots, n_k)} \binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k},$$

pri čemu se sumiranje vrši po svim k-torkama $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ nenegativnih celih brojeva, takvih da je $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati uopštavanjem kombinatornog dokaza binomne teoreme.

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = (x_1+x_2+\cdots+x_k)(x_1+x_2+\cdots+x_k)\ldots(x_1+x_2+\cdots+x_k).$$

Oslobađanjem od zagrada, posle izvršenih k^n množenja, dobijamo sabirke oblika $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$. Za svaku k-torku $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ nenegativnih celih brojeva, takvih da je $n_1+n_2+\cdots+n_k = n$, monom $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ se u dobijenoj sumi pojavljuje kao sabirak onoliko puta koliko imamo mogućnosti da se od ponuđenih n zagrada za sabirak x_1 odlučimo n_1 puta, za sabirak x_2, od preostalih $n - n_1$ zagrada, se odlučimo n_2 puta, za x_3, od $n - n_1 - n_2$ zagrada, se odlučimo n_3 puta, itd. Prema principu proizvoda sledi da se monom $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ kao sabirak u gornjoj sumi pojavljuje

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

puta. □

Za proizvoljan prost broj p i $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \cdots + x_k^p \pmod{p}.$$

Dokaz.

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^p = \sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_k),n_i\geq 0,n_1+n_2+\cdots+n_k=p} \binom{p}{n_1 n_2 \ldots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

To je jednako:

$$x_1^p+x_2^p+\cdots+x_k^p+\sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_k),0\leq n_i<p,n_1+n_2+\cdots+n_k=p} \binom{p}{n_1 n_2 \ldots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

Prema Fermatovom malom teoremu, jer je p prost broj, polinomijalni koeficijenti $\binom{p}{n_1 n_2 \ldots n_k}$ su deljivi sa p, za svaku k-torku $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ prirodnih brojeva strogo manjih od p. Dakle,

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^p \equiv x_1^p + x_2^p + \cdots + x_k^p \pmod{p}.$$

□

Zadatak

Neka su x i y realni brojevi. Pronađi sve članove razvijenog oblika izraza $(x + y)^4$ koristeći polinomnu formulu.

Rešenje

Prema polinomnoj formuli, razvijamo izraz $(x + y)^4$ kao zbir svih mogućih članova oblika $x^{n_1} y^{n_2}$, gde su n_1 i n_2 nenegativni celi brojevi, takvi da $n_1 + n_2 = 4$.

Dakle:

$$(x + y)^4 = \sum_{n_1+n_2=4} \binom{4}{n_1\, n_2} x^{n_1} y^{n_2}.$$

Izračunaćemo svaki član posebno:

- Kada je $n_1 = 4$ i $n_2 = 0$: $\binom{4}{4\,0} x^4 y^0 = 1 \cdot x^4 = x^4$.
- Kada je $n_1 = 3$ i $n_2 = 1$: $\binom{4}{3\,1} x^3 y^1 = 4 \cdot x^3 y$.
- Kada je $n_1 = 2$ i $n_2 = 2$: $\binom{4}{2\,2} x^2 y^2 = 6 \cdot x^2 y^2$.
- Kada je $n_1 = 1$ i $n_2 = 3$: $\binom{4}{1\,3} x^1 y^3 = 4 \cdot x y^3$.
- Kada je $n_1 = 0$ i $n_2 = 4$: $\binom{4}{0\,4} x^0 y^4 = 1 \cdot y^4 = y^4$.

Konačno, razvijen izraz je:

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.$$

Zadatak

Izračunaj sve članove razvijenog oblika izraza $(2x-3y)^5$ koristeći polinomnu formulu.

Rešenje

Koristimo polinomnu formulu za razvijanje izraza $(2x-3y)^5$, koja daje sve moguće članove oblika $(2x)^{n_1}(-3y)^{n_2}$, gde su n_1 i n_2 nenegativni celi brojevi takvi da $n_1+n_2=5$.

Tada važi:

$$(2x-3y)^5 = \sum_{n_1+n_2=5} \binom{5}{n_1\, n_2} (2x)^{n_1}(-3y)^{n_2}.$$

Izračunaćemo svaki član posebno:

- Kada je $n_1=5$ i $n_2=0$: $\binom{5}{5\,0}(2x)^5(-3y)^0 = 1\cdot 32x^5 = 32x^5$.
- Kada je $n_1=4$ i $n_2=1$: $\binom{5}{4\,1}(2x)^4(-3y)^1 = 5\cdot 16x^4\cdot(-3y) = -240x^4y$.
- Kada je $n_1=3$ i $n_2=2$: $\binom{5}{3\,2}(2x)^3(-3y)^2 = 10\cdot 8x^3\cdot 9y^2 = 720x^3y^2$.
- Kada je $n_1=2$ i $n_2=3$: $\binom{5}{2\,3}(2x)^2(-3y)^3 = 10\cdot 4x^2\cdot(-27y^3) = -1080x^2y^3$.
- Kada je $n_1=1$ i $n_2=4$: $\binom{5}{1\,4}(2x)^1(-3y)^4 = 5\cdot 2x\cdot 81y^4 = 810xy^4$.
- Kada je $n_1=0$ i $n_2=5$: $\binom{5}{0\,5}(2x)^0(-3y)^5 = 1\cdot(-243y^5) = -243y^5$.

Konačno, razvijen izraz je:

$$(2x-3y)^5 = 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4 - 243y^5.$$

4 Binomna formula

Uzmimo x, y i n tako da $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Tada važi:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m$$

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati indukcijom:
1. Za $n=1$ važi: $(x+y)^1 = x+y$
2. Pretpostavimo da za $n=k$ važi:

$$(x+y)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}y + \binom{k}{2}x^{k-2}y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}xy^{k-1} + \binom{k}{k}y^k$$

3. Treba da dokažemo za n = k + 1:
Uzećemo našu induktivnu pretpostavku i pomnožiti levu i desnu stranu sa x i sa y.

$$x(x+y)^k = \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \binom{k}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}x^2y^{k-1} + \binom{k}{k}xy^k$$

$$y(x+y)^k = \binom{k}{0}x^k y + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \binom{k}{2}x^{k-2}y^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

Kada saberemo jednačine vidimo da sa leve strane imamo $(x+y)(x+y)^k$ a sa desne strane možemo primeniti Paskalov identitet nad koeficijentima uz članove polinoma.
Tako dobijamo

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1} \\ &=\end{aligned}$$

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1}\binom{k+1}{m}x^{k+1-m}y^m$$

□

5 Algoritam za razvoj binomne i polinomne forme

5.1 Uvod

Razvoj binomne i polinomne forme igra ključnu ulogu u matematici i statistici, sa primenama u teoriji verovatnoće, kombinatorici, i analizi podataka. Algoritmi za razvoj ovih oblika zasnovani su na binomnim koeficijentima i omogućavaju nam da proširimo izraze kao što su $(a+b)^n$ ili polinome viših stepena na eksplicitne oblike.

5.2 Matematička pozadina

Osnovna formula za razvoj binoma poznata je kao binomna formula:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

gde je $\binom{n}{k}$ binomni koeficijent, definisan kao:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za polinome viših stepena, postupak se proširuje primenom binomne formule na svaki deo polinoma.

5.3 Algoritam u jeziku Java

- Primer Java algoritma za razvoj binomne forme sa unosom vrednosti za a, b i n:

```java
// Java program za razvoj binomne forme (a + b)^n sa unosom
    vrednosti
import java.math.BigInteger;
import java.util.Scanner;

public class BinomialExpansion {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);

        // Unos vrednosti za a, b i n
        System.out.print("Unesite vrednost za a: ");
        int a = scanner.nextInt();

        System.out.print("Unesite vrednost za b: ");
        int b = scanner.nextInt();

        System.out.print("Unesite stepen n: ");
        int n = scanner.nextInt();

        // Ispisujemo razvoj binomne forme
        System.out.println("Razvoj binoma (a + b)^" + n + " je: " +
            binomialExpansion(a, b, n));
    }

    // Metoda za razvoj binomne forme
    public static String binomialExpansion(int a, int b, int n) {
        StringBuilder result = new StringBuilder();
        for (int k = 0; k <= n; k++) {
            BigInteger coefficient = binomialCoefficient(n, k);
            int termA = n - k;
            int termB = k;
            result.append(coefficient).append("*a^").append(termA).append("*b^").append(termB);
            if (k < n) result.append(" + ");
        }
        return result.toString();
    }
```

```
    // Metoda za racunanje binomnog koeficijenta
    public static BigInteger binomialCoefficient(int n, int k) {
        BigInteger result = BigInteger.ONE;
        for (int i = 1; i <= k; i++) {
            result = result.multiply(BigInteger.valueOf(n - i +
                1)).divide(BigInteger.valueOf(i));
        }
        return result;
    }
}
```

5.4 Objasnjenje algoritma i rezultati

Rezultati algoritma prikazuju sve članove razvoja binomne forme $(a+b)^n$ u zavisnosti od datih vrednosti za a, b i n. Na primer, za $a = 2$, $b = 3$, i $n = 4$, dobijamo razvoj:

$$(2+3)^4 = 1 \cdot 2^4 \cdot 3^0 + 4 \cdot 2^3 \cdot 3^1 + 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 2^0 \cdot 3^4$$

Ovaj algoritam koristi rekurzivne pozive za računanje binomnih koeficijenata i proširenje izraza korak po korak.

Specifični koraci algoritma su sledeći:

1. Iteracija kroz sve moguće vrednosti za k od 0 do n.
2. Računanje binomnog koeficijenta za svaku vrednost k koristeći rekurzivnu funkciju.
3. Generisanje svakog člana razvoja, gde svaki član sadrži koeficijent i stepene za a i b.
4. Sastavljanje rezultata u tekstualni izraz koji predstavlja prošireni oblik binoma.

6 Stirlingovi brojevi druge vrste

6.1 Uvod

Do sada smo pričali o raznim problemima prebrojavanja, međutim još nije razmotren slučaj u kome određujemo broj načina da se m različitih objekata rasporedi u n jednakih kutija tako da nijedna ne bude prazna. Takvo raspoređivanje objekata nazivamo particijama.

6.2 Particije skupa

Definicija: Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Kazemo da je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ particija skupa A na n podskupova ako vazi:

$$A = B_1 \cup \cdots \cup B_n$$
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} B_i \neq \emptyset$$
$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} i \neq j \ B_i \cap B_j = \emptyset$$

Za broj svih particija skupa uvodimo posebnu oznaku koju nazivamo Stirlingov broj druge vrste.

Definicija: Neka je $1 \leq n \leq m$. Broj particija skupa od m elemenata na n podskupova, u oznaci S(m,n) naziva se Stirlingov broj druge vrste.

Zadatak 1. *Neka je $A = \{a, b, c\}$. Napisati sve particije skupa A na dva (neprazna) podskupa.*

Resenje. Skup A možemo napisati kao uniju 1,2 ili 3 neprazna disjunktna skupa na sledeće nacine:

$$A = \{a, b, c\}$$
$$A = \{a\} \cup \{b, c\}$$
$$A = \{b\} \cup \{a, c\}$$
$$A = \{c\} \cup \{a, b\}$$
$$A = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$$

□

6.3 Računanje Stirlingovih brojeva

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka je $n \neq m$. Tada je:

$$\text{S(m,m)} = 1$$
$$\text{S(m,1)} = 1$$
$$\text{S(m,n)} = \text{S(m-1, n-1)} + \text{nS(m-1,n)},\ 0 < n < m$$

Dokaz. Ako posmatramo skup $A = a_1, a_2, \ldots, a_m$ onda je jedino moguce razbijanje tog skupa na m nepraznih podskupova oblika:

$$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_m\}\}$$

Ako posmatramo skup $A = a_1, a_2, \ldots, a_m$ onda je jedino moguce razbijanje tog skupa na 1 neprazan podskup oblika:

$$\{A\}$$

Posmatrajmo skup $A = a_1, a_2, \ldots, a_m$ i fiksirajmo a_1. Pretpostavimo da je skup A razbijen na podskupove $B_1, \ldots, B_n$. Imamo dve opcije:

- ako je a_1 jedini element nekog podskupa, onda je broj takvih razbijanja jednak broju razbijanja skupa A/a_1 na n-1 podskupova. Takvih razbijanja ima S(m-1, n-1)

- ako podskup koji sadrzi a_1 sadrzi bar jos jedan element, broj nacina da razbijemo preostalih m-1 elemenata na n skuova jednak je S(m-1, n) i za svako takvo razbijanje imamo n razlicitih nacina da izaberemo podskup kojem cemo dodati element a_1. Znaci broj takvih razbijanja jednak je nS(m-1, n)

□

Koristeci prethodne osobine mozemo formirati tablicu Stirlingovih brojeva druge vrste

n	$T_1(n,1)$	$T_1(n,2)$	$T_1(n,3)$	$T_1(n,4)$	$T_1(n,5)$	$T_1(n,6)$	$T_1(n,7)$	$T_1(n,8)$
1	1							
2	1	2						
3	1	6	6					
4	1	14	36	24				
5	1	30	150	240	120			
6	1	62	540	1560	1800	720		
7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	
8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320

Slika 1: Tablica stirlingovih brojeva druge vrste

6.4 Injektivno preslikavanje

Veza između broja injektivnih preslikavanja i Stirlingovih brojeva druge vrste glasi:
Teorema Neka je $0 < n \leq m$. Tada je:

$$\{f : A \to B : fje"na"\} = n! \cdot S(m, n)$$

Dokaz. Ako je m elemenata rasporedjeno u n jednakih (nepraznih) kutija, onda bismo te kutije mogli da oznacimo na n! različitih načina. Svako označavanje odgovara jednom bijektivnom preslikavanju skupa elemenata na skup oznaka kutija. Tako je:

$$n! \cdot S(m, n) = |\{f : A \to B : fje"na"preslikavanje\}|$$

□

Dodatno objasnjenje, intuicija, zakonitosti, komentar itd

6.5 Primeri

Zadatak 2. *Postavka zadatka [?]*

Resenje. Resenje zadatka □

Zadatak 3. *Postavka zadatka [1]*

Resenje. Resenje zadatka □

7 Broj injektivnih i sirjektivnih preslikavanja

7.1 interpretacija svih preslikavanja

Neka imamo dva skupa, skup A od n članova, i skup B od m članova. Za svaki od n elemenata u skupu A možemo da izaberemo jedan od m elemenata iz skupa B, i svaki od njih je dostupan za svaki od n elemenata skupa A:

$$((f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)) \in B \times \cdots \times B$$

.

Dakle, prema pravilu proizvoda, broj mogućih preslikavanja iz skupa A u skup B biće:

$$|B \times \cdots \times B| = |B|^m = n^m.$$

[2]

Zadatak 4. *Neka je $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b\}$. Onda su moguća preslikavanja skupa A u skup B:*

$$f_1 : \{1 \to a, 2 \to a\}$$
$$f_2 : \{1 \to a, 2 \to b\}$$
$$f_3 : \{1 \to b, 2 \to a\}$$
$$f_4 : \{1 \to b, 2 \to b\}$$

Ukupno imamo $m^n = 2^2 = 4$ preslikavanja. [1]

7.2 interpretacija injektivnih preslikavanja

Neka imamo dva skupa, skup A od n članova i skup B od m članova i neka važi $n <= m$. Broj svih preslikavanja gde važi da ako $a_1 \neq a_2$, tada $f(a_1) \neq f(a_2)$, tj. injektivnih preslikavanja $f : A \xrightarrow{\text{1-1}} B$, jednak je:

$$|\{f : A \xrightarrow{\text{1-1}} B\}| = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Da bismo konstruisali injektivno preslikavanje, svaki element skupa A mora biti preslikan u jedinstveni element u B. Ovo preslikavanje možemo predstaviti kao niz m-torki elemenata iz B, pri čemu su svi elementi različiti:

$$(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_m)) \in B^m$$

Na osnovu principa proizvoda, za izbor slike prvog elementa $f(a_1)$ imamo n mogućnosti, zatim za izbor slike drugog elementa $f(a_2)$ imamo $n-1$ mogućnosti jer je jedan element već zauzet, zatim za $f(a_3)$ imamo $n-2$ mogućnosti, i tako dalje.

Prema tome, broj načina da se izabere injektivno preslikavanje jednak je:

$$|\{f : A \xrightarrow{\text{1-1}} B\}| = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

[1]

Zadatak 5. *Neka su dati skupovi:*

$$A = \{a_1, a_2\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

Da bi preslikavanje $f : A \to B$ bilo injektivno, različiti elementi iz A moraju imati različite slike u B. Sve moguće injektivne funkcije f su:

1. $f(a_1) = b_1, \quad f(a_2) = b_2$
2. $f(a_1) = b_1, \quad f(a_2) = b_3$
3. $f(a_1) = b_2, \quad f(a_2) = b_1$
4. $f(a_1) = b_2, \quad f(a_2) = b_3$
5. $f(a_1) = b_3, \quad f(a_2) = b_1$
6. $f(a_1) = b_3, \quad f(a_2) = b_2$

Dakle, postoji ukupno 6 injektivnih preslikavanja, formulom:

$$\frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{6}{1} = 6$$

iz skupa A u skup B kada je $|A| = 2$ i $|B| = 3$.
[4]

8 Paskalov trougao

Paskalov trougao je trouglasta struktura brojeva koja ima značajne primene u algebri i kombinatorici. Svaki red Paskalovog trougla sadrži binomne koeficijente, koji se koriste u razvoju binoma, kao i u mnogim kombinatornim problemima.

Pascalov trougao počinje sa jedinicom na vrhu, a svaki sledeći red generiše se tako da svaki broj predstavlja zbir dva broja iz prethodnog reda, koji se nalaze iznad i levo od tog broja.

8.1 Algoritam za kreiranje Paskalovog trougla

Za generisanje Paskalovog trougla do željenog broja redova n, koristićemo sledeći algoritam:

1. Počinjemo sa prvim redom Paskalovog trougla koji sadrži samo jedan element (1).
2. Za svaki sledeći red, dodajemo 1 na početku i na kraju reda.
3. Srednje elemente novog reda popunjavamo tako što računamo zbir odgovarajućih elemenata iz prethodnog reda (onih koji su direktno iznad i levo iznad).
4. Ponavljamo postupak sve dok ne generišemo traženi broj redova n.

Na primer, početni redovi Paskalovog trougla izgledaju ovako:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

8.2 Python program za kreiranje Paskalovog trougla

Sledeći Python kod implementira algoritam za generisanje Paskalovog trougla do željenog reda n:

Listing 1: Python kod za kreiranje Paskalovog trougla

```python
def kreiraj_pascalov_trougao(n):
    trougao = [[1]] # Prvi red

    for i in range(1, n):
        red = [1] # Poetak reda
        prethodni_red = trougao[i - 1]

        # Izraunavanje srednjih elemenata
        for j in range(1, i):
            red.append(prethodni_red[j - 1] + prethodni_red[j])

        red.append(1) # Kraj reda
        trougao.append(red)

    return trougao

# Prikaz Paskalovog trougla
n = 5 # Zameniti sa eljenim brojem redova
```

```python
pascalov_trougao = kreiraj_pascalov_trougao(n)

for red in pascalov_trougao:
    print(red)
```

8.3 Objašnjenje koda

Funkcija `kreiraj_pascalov_trougao(n)` generiše Pascalov trougao do n-tog reda. Prvi red trougla sadrži samo jedan element, `[1]`. Svaki sledeći red počinje i završava se jedinicom, dok se srednji elementi izračunavaju kao zbir odgovarajućih elemenata iz prethodnog reda. Na kraju, trougao se prikazuje kao lista listi, gde svaki unutrašnji niz predstavlja jedan red trougla.

Kada pozovemo funkciju sa određenim brojem redova, dobijamo Pascalov trougao u obliku liste listi koje možemo prikazati u konzoli. Na primer, za `n = 5`, dobijamo sledeći trougao:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

8.4 Zaključak

Pascalov trougao je moćan alat u matematici i programiranju, sa primenama u kombinatorici i teoriji verovatnoće. Ovaj Python program predstavlja jednostavan i efikasan način za generisanje Paskalovog trougla do željenog reda. Koristeći ovu strukturu, možemo izračunati binomne koeficijente i analizirati različite kombinatorne probleme.

Reference

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete mathemathics and its appliacations Seventh Edition*, McGraw-Hill, 2012

[2] Dragan Stevanović i Miroslav Ćirić i Slobodan Simić i Vladimir Baltić, *DISKRETNA MATEMATIKA OSNOVE KOMBINATORIKE I TEORIJE GRAFOVA*, Matematički institut u Beogradu, 2007

[3] Sussana S. Epp, *Discrete Mathematics with Applications*, Cengage Learning, Inc. 2019

[4] Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics, Fifth Edition*, Pearson Education,2009

[5] Jiri Matoušek, Jaroslav Nešetril *Invitation to Discrete Mathematics, 2nd edition*, Oxford University Press, 2008

[6] Jovanka Pantović, Skrita: Polinomna formula, Fakultet Tehničkih Nauka, Univerzitet u Novom Sadu

[7] Jovanka Pantović, Skrita: Funkcije, Fakultet Tehničkih Nauka, Univerzitet u Novom Sadu