Osnovne tehnike prebrojavanja

Bogdan Ljubinković, Miljan Jokić, Dalibor Nikolić, Lazar Jović, Anastazija Petrov, Marko Djordjević, Aleksa Nenadović i Meris Bilalović

Oktobar 2024, FTN

Problemi kojima ćemo se baviti

- Klasifikacija neuredjenih izbora elemenata
- m-kombinacije skupa
- m-kombinacije multiskupa elemenata
- Da li se neuredjeni izbori elemenata mogu opisati tj. prebrojati pomoću uredjenih izbora elemenata
- Rešavanje celobrojnih jednačina pomoću kombinacija multiskupa
- Odredjivanje broja monotono neopadajućih konačnih nizova brojeva pomoću kombinacija multiskupa

Definicija: Binomni koeficijent

Neka su n i m nenegativni celi brojevi, takvi da $n \geq m$.
Binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ je funkcija promenljivih n i m data pomoću formule:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m(m-1)\ldots 2 \cdot 1} = \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!}$$

Primer: Binomni koeficijent

Neka je B skup, a m nenegativan ceo broj. Simbol $\binom{B}{m}$ označava skup svih m-točlanih podskupova skupa B.

Primer: Za skup $B = \{a, b, c\}$ i m $= 2$ važi:

$$\binom{\{a, b, c\}}{2} = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

Klasifikacija neuredjenih izbora elemenata

Neuredjeni izbori obuhvataju:

- Kombinacije m elemenata iz skupa, tj. m-točlane podskupove skupa.
- Kombinacije m elemenata iz multiskupa, tj. m-točlane podmultiskupove multiskupa.

Uvod: m-kombinacije skupa

U prethodnoj lekciji smo za matematičko definisanje pojma uredjenog izbora n elemenata konačnog skupa S koristili preslikavanje f iz uredjenog skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ u skup S.

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to S$$

Na ovaj način, bili smo u mogućnosti da kažemo da je element $f(1)$ izabran prvi, element $f(2)$ drugi, a element $f(k)$ poslednji. S druge strane, kod neuredjenog izbora elemenata skupa S nije važno koji je element izabran prvi, a koji poslednji, tako da nema potrebe uvoditi preslikavanja.

Definicija: m-kombinacije skupa

Neka je $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ skup sa n različitih elemenata. m-kombinacije skupa predstavljaju neuredjeni izbor m elemenata iz skupa B, gde redosled nije važan, a svaki element može biti izabran najviše jednom.
Formula za m-kombinacije skupa glasi:

$$C(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Dokaz: broj m-kombinacija skupa

Kombinacije predstavljaju neuredjeni izbor m elemenata iz skupa B, gde redosled nije važan. Ako bismo vodili računa o redosledu, broj izbora bio bi jednak broju m-permutacija skupa, što je dato formulom $P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$.
Medjutim, budući da u kombinacijama redosled nije bitan, moramo podeliti broj m-permutacija sa brojem permutacija m izabranih elemenata, tj. sa $m!$, jer svaka permutacija m elemenata predstavlja isti izbor.
Dakle, broj m-kombinacija skupa B je:

$$C(n,m) = \frac{P(n,m)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Time smo dokazali da je broj m-kombinacija skupa B dat formulom $\frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Primer: m-kombinacije skupa

Za skup $B = \{1, 2, 3, 4\}$, broj načina da se izaberu 2 elementa je:

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

Kombinacije su: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

m-kombinacije multiskupa

Neka je $M = [b_1, b_2, \ldots, b_l]$ multiskup sa l različitih elemenata, gde se svaki element ponavlja m puta. m-kombinacije multiskupa predstavljaju neuredjeni izbor m elemenata iz multiskupa, gde je dozvoljeno ponavljanje elemenata.
Formula za broj m-kombinacija multiskupa glasi:

$$C(l, m) = \binom{m + l - 1}{m} = \frac{(m + l - 1)!}{m!(l - 1)!}$$

Dokaz: broj m-kombinacija multiskupa

Posmatrajmo multiskup $M = [b_1, b_2, \ldots, b_l]$, gde je svaki element b_l različit, a svaki element može biti izabran najviše m puta.
Tražimo broj različitih načina da se izabere m elemenata iz ovog multiskupa, pri čemu je dozvoljeno da se elementi ponavljaju.
Za dokazivanje koristićemo tehniku "zvezde i barijere" (eng. stars and bars).

Dokaz: broj m-kombinacija multiskupa

Korak 1: Problem rasporedjivanja elemenata sa ponavljanjem možemo svesti na problem raspodele m identičnih objekata (zvezdica) u l različitih grupa (jedna grupa za svaki element iz multiskupa M).
Svaki izbor elemenata multiskupa može biti predstavljen nizom zvezdica i barijera.
Zvezdice predstavljaju izabrane elemente, a barijere dele zvezdice u grupe koje odgovaraju elementima $b_1, b_2, \ldots, b_l$.

Dokaz: broj m-kombinacija multiskupa

Korak 2: Na primer, izbor 3 elemenata iz multiskupa $\{b_1, b_2\}$ može izgledati kao niz od 3 zvezdica i 1 barijere: "$**\|*$" predstavlja 2 puta izabran b_1 i 1 puta izabran b_2.
Svaka raspodela m zvezdica u l grupa može biti opisana kao niz od m zvezdica i $l-1$ barijera.

Dokaz: broj m-kombinacija multiskupa

Korak 3: Ukupan broj pozicija (za zvezdice i barijere) je $m + (l - 1) = m + l - 1$.
Dakle, tražimo broj načina da se postavi $l - 1$ barijera izmedju $m + l - 1$ pozicija.
To je upravo broj permutacija multiskupa $M = [z, b]_{m,l-1}$. Broj načina da permutujemo m zvezdica i $l - 1$ barijera na $m + l - 1$ pozicija je dat formulom za permutacije sa ponavljanjem:

$$P(m + l - 1; m, l - 1) = \frac{(m + l - 1)!}{m!(l - 1)!}$$

Dokaz: broj m-kombinacija multiskupa

Korak 4: Ova formula izračunava broj različitih rasporeda m zvezdica i $l-1$ barijera, što odgovara broju različitih m-kombinacija multiskupa.
Dakle, broj m-kombinacija multiskupa je:

$$C(l, m) = \binom{m+l-1}{m} = \frac{(m+l-1)!}{m!(l-1)!}$$

Time smo dobili konačnu formulu za broj m-kombinacija multiskupa sa ponavljanjem.

Primer: broj m-kombinacija multiskupa

Ako imamo multiskup $M = \{1, 2\}$, gde se svaki element može izabrati 2 puta, broj načina da izaberemo 2 elementa (uz dozvoljeno ponavljanje) je:

$$C(2,2) = \frac{(2+2-1)!}{2!(2-1)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

Kombinacije su: $\{1,1\}, \{1,2\}, \{2,2\}$.

Odredjivanje broja monotono neopadajućih konačnih nizova brojeva

Da bismo odredili broj monotono neopadajućih konačnih nizova koristeći kombinacije multiskupa u diskretnoj matematici, koristimo koncept kombinacije sa ponavljanjem.

Monotono neopadajući niz je niz u kojem je svaki sledeći član veći ili jednak prethodnom. Prilikom formiranja takvih nizova iz skupa brojeva, dozvoljena su ponavljanja jer uzastopni članovi mogu biti jednaki.

Odredjivanje broja monotono neopadajućih konačnih nizova brojeva

m-kombinacije multiskupa odgovaraju broju monotono neopadajućih nizova jer od svih načina na koje možemo rasporediti niz elemenata, samo jedan će biti monotono neopadajući. Dakle, redosled nije bitan, pa koristimo kombinacije.
Takodje, u monotono neopadajućem nizu jedan broj se može ponavljati više puta, pa koristimo multiskup.

Primer monotono neopadajućeg niza: $A = \{1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 7, 9\}$

Primer: Odredjivanje broja monotono neopadajućih konačnih nizova brojeva

Zadatak: Odrediti broj monotono neopadajućih nizova dužine 3 iz skupa $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Skup ima $m = 5$ elemenata, od kojih biramo $l = 3$ elementa.

Formula za m-kombinaciju multiskupa:

$$C(l, m) = \binom{m + l - 1}{m}$$

Rešenje:

$$\binom{5 + 3 - 1}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

```
def generisi_m_kombinacije_skupa(A, m):
    if m == 0:
        return [[]]

    kombinacije = []

    for i in range(len(A)):
        current = A[i]

        ostatak = A[i+1:]

        # Rekurzivno generiši (m-1)-kombinacija preostalih elemenata
        for k in generisi_m_kombinacije_skupa(ostatak, m - 1):
            # Dodavanje trenutnog elementa na kombinacije ostatka skupa
            kombinacije.append([current] + k)

    return kombinacije
```

Figure: Programerski zadatak: m-permutacije skupa.

```python
def generisi_m_kombinacije_multiskupa(A, m):
    A.sort()

    if m == 0:
        return [[]]

    kombinacije = []

    for i in range(len(A)):
        if i > 0 and A[i] == A[i - 1]:
            continue

        current = A[i]

        ostatak = A[i+1:]

        # Rekurzivno generiši (m-1)-kombinacija preostalih elemenata
        for k in generisi_m_kombinacije_multiskupa(ostatak, m - 1):
            # Dodavanje trenutnog elementa na kombinacije ostatka multiskupa
            kombinacije.append([current] + k)

    return kombinacije
```

Figure: Programerski zadatak: m-permutacije multiskupa.