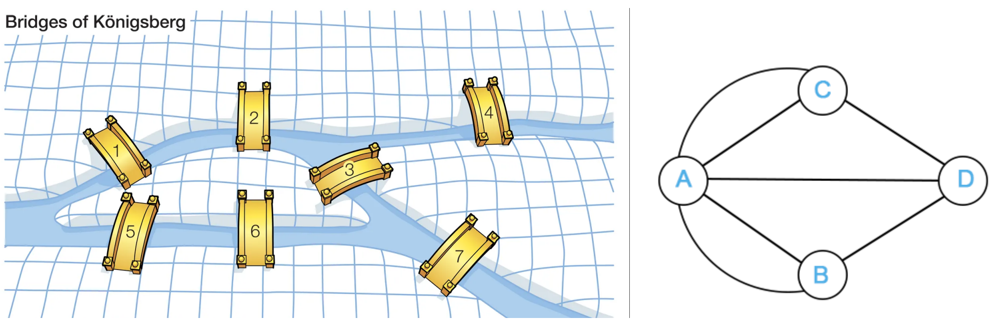
1 Teorija Grafova

1.1 Problem Sedam Mostova

Prusijski grad Konigsberg (danas Kaliningrad) je imao 7 mostova. Gradjani su se pitali da li je moguće preći svih 7 mostova i vratiti se u početnu poziciju, tako da se nijedan most ne predje dvaput. Taj problem je rešio Euler, i njegovo rešenje je jedan od prvih primera teorije grafova. On je prvo napravio abstraktnu verziju problema - zato što nije bitno kako se krećeš po ostrvima, samo koje mostove prelaziš, problem se može gledati kao 4 tačke i 7 grana koje ih povezuju.



Euler je onda primetio da se u svaku tačku koja nije početna ili završna mora ući mostom i izaći mostom. Sa tim da se svaki most mora preći samo jednom, to znači da broj ulaza i izlaza sa ostrva moraju biti jednaki - tj. svaka tačka koja nije početna ili završna mora imati paran broj grana. Sa tim da svaka tačka u problemu ima tri grane, to znači da je nemoguće rešiti problem.

1.2 Primena

Teorija grafova se danas koristi za modelovanje raznih pojava. Na primer:

- WWW: Može da se modeluje koristeći svaku web stranicu kao čvor. Ako na stranici a postoji link ka stranici b, onda postoji grana izmedju a i b.
- Transportne mreže: Na primer, putevi se mogu prikazati kao grane, dok su reskrsnice čvorovi.
- Dizajn softvera: tzv. "Module Dependency Graph" prikazuje kako moduli zavise jedni od drugih. Svaki čvor je modul, dok su grane zavisnosti.

1.3 Definicija

Graf je uredjena trojka $G = (V, E, \psi)$, gde:

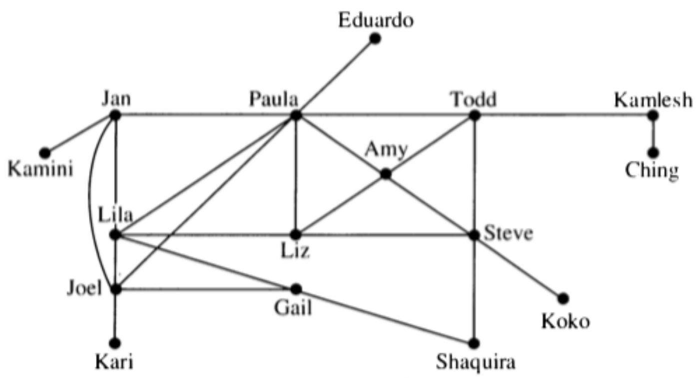
1. $V \neq \emptyset$, skup čvorova.
2. E, skup grana, $E \cap V = \emptyset$.
3. ψ funkcija incidencije.

1.3.1 Neusmeren graf

Neusmeren graf je graf u kome je funkcija incidencije u formi

$$\psi : E \to (\{u, v\} : u, v \in V)$$

, tj. grane ne razlikuju svoje čvorove. Na primer, graf poznanstva (gde su čvorovi ljudi, a grana znači da se ljudi poznaju) je neusmeren.

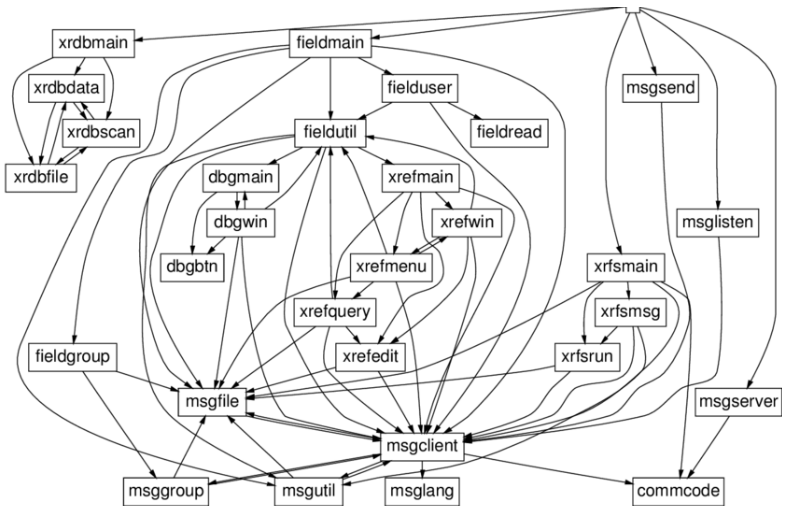


1.3.2 Usmeren graf

Usmeren graf je graf u kome je funkcija incidencije u formi:

$$\psi : E \to ((u, v) : u, v \in V)$$

Zato što funkcija slika u uredjen skup, ima razlike izmedju krajnjih čvorova jedne grane. Na primer, module dependency grafovi su usmereni: ako modul a zavisi od modula b, obrnuto ne mora da važi.



1.3.3 Prost graf

Prost graf je graf u kojem izmedju dva čvora može postojati samo jedna grana, i čvor ne može imati granu sam sa sobom. Može se definisati kao uredjen par $G = (V, E)$ gde:

- $V \neq \emptyset$, skup čvorova.
- E, skup grana, $E \subseteq \binom{V}{2}$.

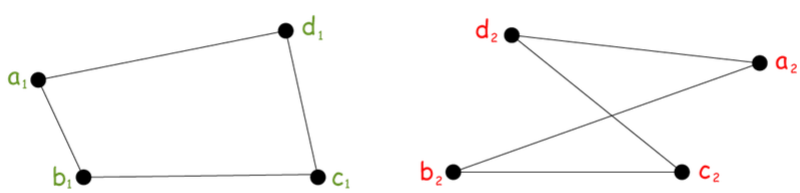
1.4 Jednakost grafova

Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su jednaki ako $V_1 = V_2$ i $E_1 = E_2$.

1.5 Izomorfnost grafova

Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su izomorfni ako postoji injektivna funkcija $f : V_1 \to V_2$ koja ima osobinu da ako i samo ako postoji grana u E_1 izmedju $a, b \in V_1$, onda postoji grana u E_2 izmedju $f(a), f(b)$.

Na primer, sledeća dva grafa su izomorfna:



Koristeći:

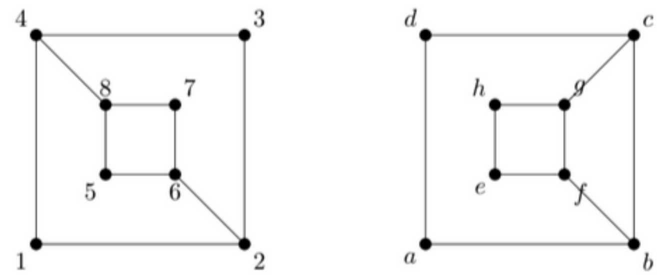
$$f = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

1.6 Uslovi izomorfnosti

Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su izomorfni. Tada važi:

1. $|V_1| = |V_2|$
2. $|E_1| = |E_2|$
3. $\deg(v) = \deg(f(v)), v \in V_1, f(v) \in V_2$

tj. grafovi moraju imati isti broj grana, isti broj čvorova, i svaki čvor v more imati isti broj izlazećih grana kao $f(v)$. Ovo su potrebni uslovi, ali nisu dovoljni. Na primer:



Ova dva grafa imaju isti broj čvorova (8), isti broj grana (10), i grafovski multiskup je isti, 3,3,3,3,2,2,2,2. Ipak, ovi grafovi nisu izomorfni.

1.7 Teorema

Relacija izomorfisma je relacija ekvivalencije na skupu grafova.

1.7.1 Dokaz

Dokazaćemo da je relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna. Koristiću ϕ da označuje relaciju izomorfisma.

1. **Refleksija**: Trivijalno se dokazuje koristeći $f(v) = v$.

2. **Simetričnost**: Gledamo grafove G_1 i G_2, gde važi $G_1 \phi G_2$, tj. postoji $f : V_1 \to V_2$ koja ispunjava uslov izomorfnosti. Ona ima oblik:

$$f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots \end{pmatrix}$$

   Da bi dokazali da važi $G_2 \phi G_1$, moramo da nadjemo odgovarajuću funkciju $g : V_1 \to V_2$. Za to možemo koristiti inverznu funkciju f', tj.:

$$g = f' = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \cdots \end{pmatrix}$$

   Gledamo nasumične povezane čvorove $v_1, v_2 \in V_1$ i $u_1 = f(v_1)$ i $u_2 = f(v_2)$. Po definiciji funkcije *f*, postoji i grana koja povezuje u_1 i u_2. Čvorovi se preslikavaju nazad u v_1 i v_2 koristeći funkciju g, i već znamo da izmedju tih čvorova postoji grana, tako da je osobina funkcije održana.

3. **Tranzitivnost**: Gledamo grafove G_1, G_2 i G_3, gde važi $G_1 \phi G_2$ i $G_2 \phi G_3$. To znači da postoje funkcije $f : V_1 \to V_2$ i $g : V_2 \to V_3$ koje ispunjavaju uslove izomorfnosti. One imaju oblik:

$$f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \dots \end{pmatrix}$$

Da bi dokazali da važi $G_1 \phi G_3$ gledamo nasumične povezane čvorove $v_1, v_2 \in V_1$, $u_1 = f(v_1)$ i $u_2 = f(v_2)$ i $w_1 = g(u_1)$ i $w_2 = g(u_2)$. Za funkciju $h : V_1 \to V_3$ uzimamo $h(v) = g(f(v))$. Izmedju v_1 i v_2 postoji grana. Po definicijama funkcija f i g, to znači da grane postoje i izmedju grana u_1 i u_2, i w_1 i w_2.

$$h(v_1) = g(f(v_1)) = g(u_1) = w_1$$
$$h(v_2) = w_2$$

Znamo da izmedju w_1 i w_2 postoje grana, tako da je osobina održana. $\square$

1.8 Podgraf

1.8.1 Definicija

Podgraf grafa $G = (V, E)$ je graf $H = (V_1, E_1)$, gde su $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$.

1.8.2 Pokrivajući podgraf

Za podgraf $H = (V_1, E_1)$ grafa $G = (V, E)$ se kaže da je pokrivajuć ako $V_1 = V$.

1.8.3 Indukovani podgraf

Gledamo graf $G = (V, E)$. Podgraf indukovan skupom čvorova $W \subseteq V$ je graf $H = (W, E_1)$, gde skup grana E_1 sadrži granu iz E ako i samo ako su oba kraja grane u W.