dm3

grupa 10

Oktobar 2024

1 Klasifikacija

Kombinacije su izbor elemenata u kojem biramo elemente tako sto zanemarujemo njihov redosled. Razlikujemo dve vrste kombinacija:

1. bez ponavaljanja elemenata (kombinacije skupa)
2. sa ponavljanjem (kombinacije multiskupa)

1. Primer: Na koliko nacina mozemo da izaberemo 3 osobe iz grupe od 4 osoba?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje moramo da nadjemo broj podskupova sa 3 elementa koji sadrze svih 4 elemenata (osoba). Vidimo da ima 4 takva podskupa, jer mozemo da napravimo 4 podskupa gde u svakom podskupu izbacujemo 1 element.

2. Primer: Na koliko nacina mozemo da izaberemo 4 vocke tako da mozemo da biramo izmedju jabuka, narandzi i kruski i ako se vocke mogu ponavljati gde raspored vocki, odnosno redosled na koji smo ih birali nije bitan?

Da bismo resili ovaj zadatak izlistajmo sve nacine da izaberemo vocke. Postoji 15 nacina: 4 jabuke - 4 narandze - 4 kruske - 3 jabuke, 1 narandza - 3 jabuke, 1 kruska - 3 narandze, 1 jabuka - 3 narandze, 1 kruska - 3 kruske, 1 jabuka - 3 kruske, 1 narandza - 2 jabuke, 2 narandze - 2 jabuke, 2 kruske - 2 narandze, 2 kruske - 2 jabuke, 1 narandza, 1 kruska - 2 narandze, 1 jabuka, 1 kruska - 2 kruske, 1 jabuka, 1 narandza

2 Kombinacije bez ponavljanja

Ovakav tip kombinacije takodje nazivamo i **r-kombinacija** elemenata gde r zapravo predstavlja broj elemenata koji biramo iz nekog skupa.

Broj r-kombinacija skupa sa n brojem elemenata se zapisuje kao C(n,r). Treba naglasiti da se C(n,r) takodje zapisuje kao $\binom{n}{r}$ sto se naziva **binomni koeficijent.**

Teorema 1. *Broj r-kombinacija n elemenata, gde je $n \in \mathbb{N}$ i $r \in \mathbb{N}$ gde je $r \leq n$ odredjujemo sa formulom:*

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Dokaz: P(n, r) r-permutacije skupa mogu se dobiti formiranjem C(n, r) r-kombinacija skupa, a zatim uredjivanjem elemenata u svakoj r-kombinaciji, sto se moze uraditi na P(r, r) nacina. Shodno tome, prema principu proizvoda, vazi:

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r).$$

Ovo implicira da je:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{\frac{r!}{(r-r)!}} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Takodje mozemo koristiti princip deljenja za brojanje kako bismo konstruisali dokaz ove teoreme. Posto redosled elemenata u kombinaciji nije bitan, a postoji $P(r,r)$ nacina da se uredi r elemenata u r-kombinaciji od n elemenata, svaka od $C(n,r)$ r-kombinacija skupa sa n elemenata odgovara tacno $P(r,r)$ r-permutacijama. Dakle, prema principu deljenja, vazi $C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)}$, sto implicira, kao i ranije, da je:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Takodje je bitno naglasiti da ovu formulu mozemo zapisati kao:

$$C(n,r) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{r!}$$

2.1 Neuređeni izbori bez ponavljanja primjeri

Primjer 1: Tokom noći, lopov je upao u galeriju sa 20 umjetničkih dijela. Međutim, on u svom rancu ima mjesta za tačno 3 premdeta. Na koliko načina on može da izabere predmete koje će ukrasti?

Rješenje: Lopov treba da napravi neuređeni izbor 3 elementa bez ponavljanja iz skupa od 20 elemenata. On to može da uradi na

$$203 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,140$$

načina.

Primjer 2: Iz odjeljenja od 9 dječaka i 11 djevojčica treba izabrati komisiju za izbor najljepše đačke torbe koja će se sastojati od 3 dječaka i 4 djevojčice. Na koliko načina je moguće formirati ovakvu komisiju?

Rješenje: Po principu proizvoda, ovaj broj je jednak proizvodu broja

$$93$$

neuređenih izbora 3 elementa bez ponavljanja iz skupa od 9 elemenata i broja

$$114$$

neuređenih izbora 4 elementa bez ponavljanja iz skupa od 11 elemenata:

$$93 \cdot 114 = 84 \cdot 330 = 2\,7720$$

3 Kombinacije sa ponavljanjem

U slucaju da imamo skup u kojem elementi mogu da se ponavljaju, pricamo o **r-kombinacijama multiskupa**.

Teorema 2. *Postoji C(n+r-1,r) = C(n+r-1, n-1) kombinacija skupa sa n elemenata gde se elementi mogu ponavljati.*

Obrazlozenje: Da bismo objasnili zasto je ovo formula za kombinacije sa ponavljanjem, mozemo da zamislimo da imamo skup {A,B,C}. Ako biramo recimo 5 elemenata, neke od kombinacija bi bile:

$$AABBC$$
$$ABBBC$$
$$AAABC$$
$$ABCCC$$

Izmedju svakog ponavljanja mozemo da zamislimo kao da imamo neku liniju koja ih razdvaja. Tako bi ovo izgledalo na sledeci nacin:

$$AA|BB|C$$
$$A|BBB|C$$
$$AAA|B|C$$
$$A|B|CCC$$

Bez elemenata mozemo ovo da zamislimo samo kao:

..|..|.
.|...|.
...|.|.
.|.|...

Odnosno kao 5 pozicija plus broj linija koji ih razdvaja, u ovoj slucaju 2:
....
Gde od 7 mesta biramo 2 pozicije na koje bismo postavili linije. Specificno u ovom primeru ima $\binom{7}{2}$ kombinacija odnosno 21 kombinacija.

Primer 1. Odrediti broj kombinacija za jednacinu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ gde su promenljive iz skupa celih brojeva

Resenje: Svaku promenljivu mozemo da zamisljamo kao ponavljanje jedinica gde je svaka jedinica jedne promenljive razlicita od jedinica druge promenljive, odnosno recimo $x_1 = 111111 = 6$. To mozemo da ispisemo kao

$$11|1111|\ldots|111.$$

Kao sto vidimo ovo je zapravo kombinacija sa ponavljanjem. Treba od n razlicitih promenljivih da izaberemo elemente tako da se jedinice ponove r puta. Kako treba da izaberemo r jedinica i imamo n - 1 linija koje ih razdvajaju, mi zapravo treba da od r + n - 1 elemenata izaberemo n - 1 mesta, odnosno dobijamo binomni koeficijent $\binom{r+n-1}{n-1}$, sto je zapravo i formula kombinacije sa ponavljanjem.

3.1 Neuređeni izbori sa ponavljanjem primjeri

Primjer 1: a) Koliko ima načina da se izaberu tri novčića iz kase koja sadrži novčiće od 1, 2, 5 i 10 dinara, ukoliko redoslijed biranja novčića nije bitan već samo broj izabranih novčića svake vrste i ako u kasi postoji bar tri novčića svake vrste?

b) Koliko ima načina da se izaberu pet novčanica iz kase koja sadrži novčanice od 10, 20, 50, 100, 200, 500 i 1000 dinara? Kao u prethodnom pitanju, i u ovom slučaju redoslijed biranja novčanica nije bitan, novčanice iste vrijednosti se ne mogu međusobno razlikovati, a u kasi postoji bar pet novčanica svake vrste.

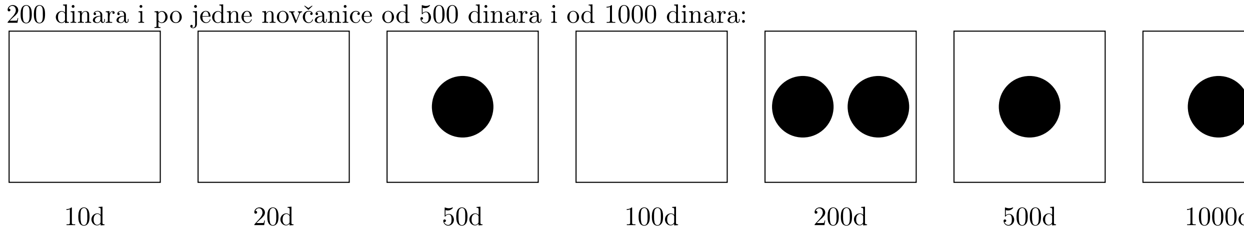
Rješenje. **a)** Postoji 20 načina, prikazanih u sledećoj tabeli:

1d 1d 1d	1d 1d 2d	1d 1d 5d	1d 1d 10d
	1d 2d 2d	1d 2d 5d	1d 2d 10d
		1d 5d 5d	1d 5d 10d
			1d 1d 10d
	2d 2d 2d	2d 2d 5d	2d 2d 10d
		2d 5d 5d	2d 5d 10d
			2d 10d 10d
		5d 5d 5d	5d 5d 10d
			5d 10d 10d
			10d 10d 10d

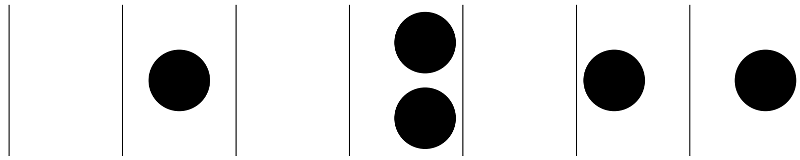
b) U ovom slučaju, broj mogućih izbora je dovoljno veliki da bi bilo vrlo nepraktično sve ih prikazati. Zbog toga ćemo detaljnije proučiti naš problem.

S obzirom da redoslijed izabranih novčanica nije bitan, kao i da se svaka vrsta novčanica može izabrati do pet puta, u ovom problemu treba da nađemo broj neuređenih izbora 5 elemenata sa ponavljanjem iz skupa od 7 elemenata.

Pretpostavimo da kasa ima sedam pregrada, po jednu za svaku vrstu novčanica. Na slici je ilustrovan izbor jedne novčanice od 50 dinara, dvije novčanice od 200 dinara i po jedne novčanice od 500 dinara i od 1000 dinara:



Na sličan način, svaki izbor pet novčanica možemo da predstavimo pomoću pet markera raspoređenih u pregradama kase. Ako sada obrišemo dno kase sa oznakama vrijednosti novčanica, lijevu ivicu prve pregrade i desnu ivicu poslednje pregrade, vidimo da se svaki izbor pet novčanica može predstaviti pomoću rasporeda pet markera i šest ivica koje određuju pregrade kase:



Broj ovakvih rasporeda jednak je broju izbora pet pozicija za markere od 11 mogućih pozicija, što predstavlja broj neuređenih izbora 5 elemenata bez ponavljanja iz skupa od 11 elemenata, a on je jednak

$$115 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462.$$

Primjer 2 Na koliko načina se 12 istih lopti može rasporediti u 6 različitih kutija?

Rješenje. Broj mogućih rasporeda lopti je jednak broju neuređenih izbora 12 elemenata sa ponavljanjem iz skupa od 6 elemenata, tj.

$$6 + 12 - 112 = 6\,188.$$

Primjer 3 Koja je vrijednost promjenljive k nakon izvršavanja sledećeg koda?

```
k ← 0
for i1 ← 1 to n do
    for i2 ← 1 to i1 do
        for i3 ← 1 to i2 do
          .
          .
          .
            for im ← 1 to im−1 do
                k ← k + 1
            end for
          .
          .
          .
        end for
    end for
end for
```

Rješenje. Primjetimo da je početna vrijednost promjenljive k jednaka 0 i da se k uvećava za 1 svaki put kada se prođe kroz ugnježdenu petlju sa nizom brojeva $i_1, i_2, \ldots, i_m$ takvim da je

$$1 \leq i_m \leq i_{m-1} \leq \ldots \leq i_2 \leq i_1 \leq n$$

Broj ovakvih nizova brojeva jednak je broju načina da se m cijelih brojeva izabere sa ponavljanjem iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ (S jedne strane, niz $i_1, i_2, \ldots, i_m$

predstavlja izbor m brojeva iz $\{1, 2, \ldots, n\}$; s druge strane, svaki izbor m brojeva iz $\{1, 2, \ldots, n\}$, nakon što se uredi u nerastući poredak, predstavlja jedan od traženih nizova). Vidimo da će vrijednost promjenljive k nakon izvršavanja koda biti jednaka

$$n + k - 1k$$

Primjer 4: Koliko rješenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ nenegativni cijeli brojevi?

Rješenje: Posmatrajmo skup $X = \{1, 2, \ldots, k\}$. Ako pretpostavimo da, za $1 \leq i \leq k$, broj x_i označava koliko je puta izabran element i iz skupa X, onda vidimo da svako rješenje $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gornje jednačine označava tačno jedan neuređeni izbor n elemenata sa ponavljanjem iz skupa sa k elemenata. Takođe važi i obratno: svaki neuređeni izbor n elemenata sa ponavljanjem iz skupa sa k elemenata određuje tačno jedno rješenje $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ gornje jednačine. Stoga rješenja jednačine ima koliko i ovakvih neuređenih izbora, a to je

$$k + n - 1n$$

Primjer 5 Na polici se nalazi n knjiga. Na koliko načina se može izabrati k knjiga sa police, tako da nikoje dvije izabrane knjige nisu bile susjedne na polici?

Rješenje. Neka x_1 označava broj knjiga na polici ispred prve izabrane knjige, $x_i,\ 2 \leq i \leq k$, broj knjiga na polici koje se nalaze između $(i-1)$ - ve i i - te izabrane knjige, a x_{k+1} broj knjiga na polici iza poslednje izabrane knjige. S obzirom da brojevi $x_i,\ 1 \leq i \leq k+1$, prebrojavaju sve neizabrane knjige sa police, važi da je

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n - k$$

S druge strane, iz uslova da izabrane knjige nisu bile susjedne vidimo da važi

$$x_2, x_3, \ldots, x_k \geq 1$$

dok je

$$x_1,\ x_{k+1} \geq 0$$

Da bismo izbjegli ovakvo izdvajanje posebih slučajeva, zamislimo da smo na policu dodali još dvije nove knjige: jednu ispred prve knjige na polici i jednu iza poslednje knjige na polici. Ako dozvolimo da x_1 i x_{k+1} prebrojavaju i ove dvije nove knjige, onda će važiti:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1} = n - k + 2,$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \geq 1$$

Neka je sada $y_i = x_i - 1, \quad 1 \leq i \leq k+1$. Tada su y_i nenegativni cijeli brojevi za koje važi da je

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} = (n - k + 2) - (k + 1) = n - 2k + 1$$

Iz prethodnog primjera vidimo da je broj rješenja posljednje jednačine jednak

$$n - k + 1n - 2k + 1$$

Ovo je ujedno i broj mogućih izbora k nesusjednih knjiga sa police, s obzirom da niz brojeva $y_i, \ 1 \leq i \leq k+1$, na jedinstven način određuje niz brojeva $x_i, \ 1 \leq i \leq k+1$, a da on dalje na jedinstven način određuje izbor nesusjednih knjiga.

4 Kodovi

4.1 Primer

```
from itertools import combinations

# Skup i broj kombinacija
S = {1, 2, 3}
m = 2

# Generisanje svih m-kombinacija
kombinacije = list(combinations(S, m))

# Prikaz rezultata
for kombinacija in kombinacije:
print(kombinacija)
```

4.2 Primer

```
from itertools import combinations

# Skup i broj kombinacija
S = {'a', 'b', 'c', 'd'}
m = 3

# Generisanje svih m-kombinacija
kombinacije = list(combinations(S, m))

# Prikaz rezultata
for kombinacija in kombinacije:
print(kombinacija)
```

```
#('a', 'b', 'c')
#('a', 'b', 'd')
#('a', 'c', 'd')
#('b', 'c', 'd')
```

4.3 Primer

```
from itertools import combinations_with_replacement

# Multiskup: {1^2, 2^1} zna i da 1 mo e biti dva puta, a 2 samo jednom
S = [1, 1, 2]
m = 2

# Generisanje svih m-kombinacija
kombinacije = list(combinations_with_replacement(S, m))

# Prikaz rezultata
for kombinacija in kombinacije:
print(kombinacija)


#(1, 1)
#(1, 2)
```

4.4 Primer

```
from itertools import combinations_with_replacement

# Multiskup: {a^2, b^2} zna i da a i b mogu biti dva puta
S = ['a', 'a', 'b', 'b']
m = 3

# Generisanje svih m-kombinacija
kombinacije = list(combinations_with_replacement(S, m))

# Prikaz rezultata
for kombinacija in kombinacije:
print(kombinacija)


#('a', 'a', 'a')
#('a', 'a', 'b')
```

$\#('a', 'b', 'b')$
$\#('b', 'b', 'b')$