Povezanost grafova

Bogdan Ljubinković, Miljan Jokić, Dalibor Nikolić, Lazar Jović, Anastazija Petrov, Marko Djordjević, Aleksa Nenadović i Meris Bilalović

Oktobar 2024, FTN

Sadržaj

Osnovni pojmovi u teoriji grafova

- **Graf**: Par $G = (V, E)$, gde je V skup čvorova, a E skup grana.
- **Prost graf**: Graf bez petlji i višestrukih grana.
- **Multigraf**: Graf koji može imati višestruke grane izmedju čvorova.
- **Podgraf**: Graf $H = (V_H, E_H)$ gde je $V_H \subseteq V$ i $E_H \subseteq E$.
- **Stepen čvora**: Broj grana koje izlaze iz čvora.

Relacija povezanosti

- Relacija ”je povezan sa“ na skupu čvorova V:
  - **Refleksivna**: $u \sim u$ za svaki $u \in V$.
  - **Simetrična**: Ako $u \sim v$, tada $v \sim u$.
  - **Tranzitivna**: Ako $u \sim v$ i $v \sim w$, tada $u \sim w$.
- Ova relacija je relacija ekvivalencije na skupu V.

Komponente povezanosti

- **Definicija**: Komponenta povezanosti je maksimalni podgraf grafa G, u kojem su svi čvorovi medjusobno povezani.
- Graf može imati jednu ili više komponenti povezanosti.
- Ako je graf povezan, ima tačno jednu komponentu povezanosti.

Konture, staze i putevi

- **Šetnja**: Naizmeničan niz čvorova i grana $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$, gde je $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$.
- **Staza**: Šetnja u kojoj se grane ne ponavljaju.
- **Put**: Staza u kojoj se ni čvorovi ni grane ne ponavljaju.
- **Kontura**: Zatvorena staza, tj. staza u kojoj je početni i krajnji čvor isti.

Primeri: Šetnje, Staze, Putevi, Konture

1. **Šetnja:**
   - **Definicija**: Šetnja u grafu je niz naizmeničnih čvorova i grana, gde se čvorovi i grane mogu ponavljati.
   - **Primer**: Razmotrimo graf $G = (V, E)$, gde je $V = \{a, b, c, d\}$, a $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$.
   - Moguća šetnja je: $a \to b \to c \to d \to a \to b$. Čvorovi i grane se mogu ponoviti u ovoj šetnji.

Primeri: Šetnje, Staze, Putevi, Konture

2. **Staza:**

- **Definicija**: Staza je šetnja u kojoj se grane ne ponavljaju, ali čvorovi se mogu ponavljati.
- **Primer**: U istom grafu $G = (V, E)$, sa $V = \{a, b, c, d\}$ i $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$, staza može biti:

$$a \to b \to c \to d \to a$$

Grane se ne ponavljaju, ali čvorovi (poput a) mogu biti povezani više puta, kao što je u šetnji.

Primeri: Šetnje, Staze, Putevi, Konture

3. **Put:**

- **Definicija**: Put je staza u kojoj se ni čvorovi ni grane ne ponavljaju.
- **Primer**: U grafu $G = (V, E)$, sa $V = \{a, b, c, d\}$ i $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$, put je:

$$a \to b \to c \to d$$

Čvorovi i grane se ne ponavljaju, što znači da se ide isključivo jednom kroz svaki čvor i svaku granu.

Primeri: Šetnje, Staze, Putevi, Konture

4. **Kontura:**

- **Definicija**: Kontura je zatvorena staza, tj. staza u kojoj je početni i krajnji čvor isti.
- **Primer**: U grafu $G = (V, E)$, sa $V = \{a, b, c, d\}$ i $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$, kontura je:

$$a \to b \to c \to d \to a$$

Ovo je staza koja počinje u a i vraća se u a, čineći je zatvorenom stazom (konturom).

Povezanost grafa

- Graf G je **povezan** ako postoji put izmedju svakog para čvorova u grafu.
- Ako graf nije povezan, može se razložiti na komponente povezanosti.
- Graf se kaže da je **povezan** ako za svaki par čvorova $u, v \in V$ postoji staza koja ih povezuje, tj. postoji niz čvorova $v_1, v_2, \ldots, v_k$ takav da je:

$$u = v_1, v_2, \ldots, v_k = v$$

- Ako graf nije povezan, znači da postoji barem jedan par čvorova izmedju kojih ne postoji put.

Povezanost i broj grana u grafovima

- **Teorema 1**: Prost graf sa $n, n \geq 2$ čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
- **Teorema 2**: Prost graf sa $n-1$ grana i n čvorova je povezan ako i samo ako nema kontura.
- **Teorema 3**: U prostom grafu sa konturom, uklanjanjem jedne grane konture graf ostaje povezan.

Rastojanje u povezanom grafu

- **Definicija**: Neka je $G(V, E)$ povezan prost graf i neka su u, v i w čvorovi tog grafa. Rastojanje $d(v, u)$ je dužina najkraćeg put (broj grana) od čvora v do čvora u.

- **Osobine rastojanja**:
  - $v = u \Leftrightarrow d(v, u) = 0$
  - $v \neq u \Leftrightarrow d(v, u) \geq 1$
  - $d(v, u) = d(u, v)$
  - $d(v, w) + d(w, u) \geq d(u, v)$

Stabla

- **Definicija**: Stablo je povezan graf bez kontura.
- **Osobine stabala**:
  - Prost graf sa n čvorova je stablo ako ima tačno $n-1$ grana.
  - Svaka dva čvora u stablu su povezana jedinstvenom stazom.
  - Ako se iz stabla ukloni jedna grana, graf postaje nepovezan.

Primeri: stabla

Primer 1: Graf sa $n = 4$ i $m = 3$ grane:

$$G = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$$

je stablo jer je povezan i nema kontura.
Primer 2: Ako se u graf doda grana (a, d), dobija se kontura. Graf više nije stablo.

Teorema 1: Prost graf sa manje od $n-1$ grana nije povezan

Teorema: Prost graf G sa n čvorova i manje od $n-1$ grana nije povezan.
Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je graf G sa n čvorova i manje od $n-1$ grana povezan.

- Da bi graf bio povezan, mora postojati put izmedju svaka dva čvora.
- Minimalan broj grana potreban za povezivanje svih n čvorova je $n-1$ (svaka grana dodaje novi čvor u komponentu povezanosti).
- Ako G ima manje od $n-1$ grana, onda barem jedan čvor nije povezan sa ostatkom grafa.
- Ovo protivreči pretpostavci da je G povezan.

Teorema 2: Graf sa $n-1$ grana i bez kontura je stablo

Teorema: Prost graf G sa $n-1$ grana i n čvorova je povezan ako i samo ako nema kontura.

Dokaz:

- Ako graf G ima $n-1$ grana i n čvorova, ali nije povezan, mora postojati najmanje dve komponente povezanosti.
- Svaka komponenta povezanosti mora biti podgraf sa brojem grana manjim od broja čvorova (jer nema kontura u podgrafovima).
- Medjutim, zbir broja grana u svim komponentama neće dostići $n-1$, što kontradiktuje pretpostavci.
- Ako graf ima konturu, možemo ukloniti jednu granu konture bez narušavanja povezanosti.
- Na kraju, graf bez kontura i sa $n-1$ grana povezan je i predstavlja stablo.

Teorema 3: Uklanjanje grane iz konture

Teorema 3: Ako prost graf G sadrži konturu i ukloni se jedna grana iz te konture, graf ostaje povezan.
Dokaz: Pretpostavimo da graf $G = (V, E)$ sadrži konturu, tj. postoji šetnja $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_k \to v_0$, gde je $v_0 = v_k$ i sve grane $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)\}$ čine konturu. Ako uklonimo jednu granu $e = (v_i, v_{i+1})$ koja se nalazi u toj konturi, preostali graf će i dalje biti povezan iz sledećih razloga:

- Svi čvorovi unutar konture ostaju povezani alternativnim putem. Pošto kontura predstavlja zatvorenu stazu, preostale grane unutar konture će omogućiti povezivanje čvorova.
- Čvorovi povezani izvan konture nisu zahvaćeni uklanjanjem grane e jer grane koje ih povezuju nisu deo konture.

Teorema 4: Stablo je povezan graf bez kontura

Teorema 4: Prost graf je stablo ako je povezan i nema kontura.
Dokaz: Neka $G = (V, E)$ bude prost graf sa n čvorova i m granama. Pretpostavimo da je graf G povezan i da nema kontura (tj. da je acikličan).

- Povezanost znači da postoji staza izmedju svakog para čvorova u grafu. Dakle, za svaki par čvorova $u, v \in V$, postoji staza $u \to v$.
- Odsustvo kontura znači da graf ne sadrži zatvorene staze. To znači da nijedna staza ne može ponovo da se vrati u svoj početni čvor bez ponavljanja grana.
- Ako graf ima n čvorova, minimalan broj grana potreban da bi graf bio povezan je $n - 1$. Svaka dodatna grana bi izazvala stvaranje konture, što bi bilo u suprotnosti sa pretpostavkom da graf nema kontura.
- Dakle, ako graf ima $n - 1$ grana, povezan je i nema kontura, što znači da je graf stablo.