Zadatak12 - Planarni grafovi

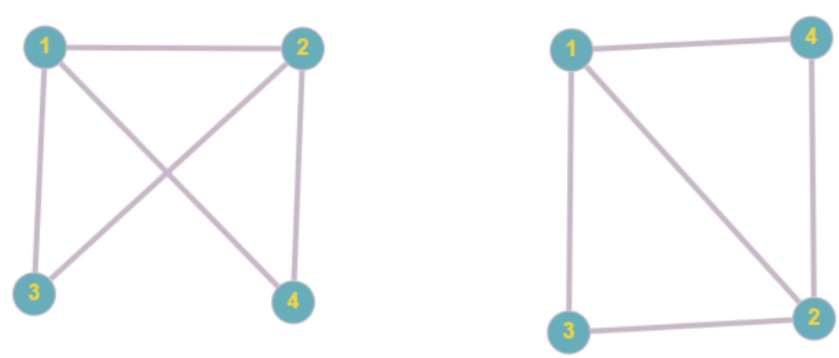
grupa 10

Januar 2025.

1 Uvod

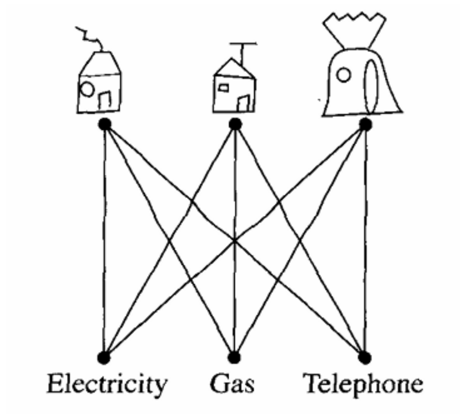
Definicija 1 (planarni graf). *Graf je planaran ukoliko ga možemo nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku.*

Primer 1. *Vidimo da postoje različite grafičke reprezentacije istog grafa. Ovo desno se zove planarna reprezentacija grafa*



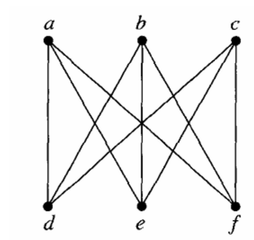
Slika 1: planarni graf

Primer 2. *Zamislite mali komšiluk sa 3 kuće. Grad želi da poveže tri kuće sa tri korisne usluge: struju, gas i telefon. Na slici ispod vidimo da ovo možemo prikazati koristeći kompletan bipartitan graf* $K_{3,3}$.



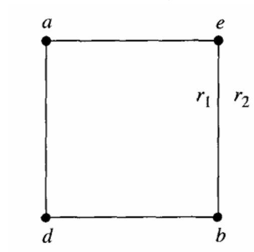
Da li je ovaj graf planaran? Odnosno, da li možemo da prepravimo crtež tako da ne postoje grane koje se seku od usluga do kuća?

Teorema 1. *Kompletan bipartitan graf $K_{3,3}$ nije planaran*



Slika 2: $K_{3,3}$ graf

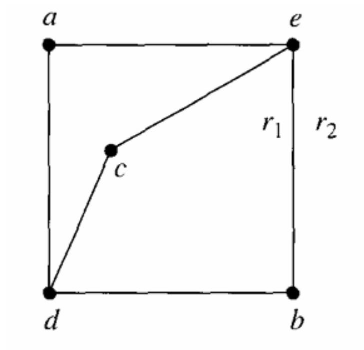
Dokaz *Obeležimo čvorove grafa sa a, b, c, d, e i f kao na slici 2. Sada pokušajmo da napravimo planarnu reprezentaciju. Možemo početi tako što ćemo dodati čvorove a, b, d i e. Pošto je a povezano i sa d i sa e a b je takođe povezano sa ovim čvorovima, ova četiri čvora dele ravan na dve oblasti, r_1 i r_2 (slika 3).*
Sada moramo dodati čvor c. Postoje dve mogućnosti, ili ćemo ga dodati u regiju r_1 ili u regiju r_2.



Slika 3: Podela na 2 regije

Slučaj1 *c je u r_1:*

Pošto c mora biti povezano sa d i e planarana reprezentacija mora izlgeda nekako ovako (Slika 4)

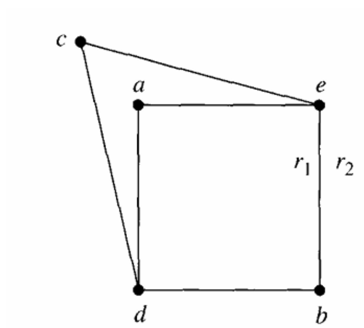


Slika 4: Pokušaj planarne reprezentacije

Imamo problem, moramo da dodamo čvor f tako da je povezan sa a, b i c i da nema presecajućih grana, a to je nemoguće. (f mora biti u jednoj od 3 regije, u svakom slučaju bar jedan čvor od a, b, c neće moći biti povezan bez presecajućih grana)

Slučaj2 *c je u r_2:*

Pošto c mora biti povezano sa d i e planarana reprezentacija mora izlgeda nekako ovako (Slika 5)



Slika 5: Pokušaj planarne reprezentacije

Imamo isti problem. Sa slike 5 se može videti da je ponovo nemoguće spojiti čvor f bez presecajućih grana. $\square$

Teorema 2 (Ojlerova formula). *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, povezan planaran prost graf i neka je f broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je:*

$$f = |E| - |V| + 2$$

Dokaz *Neka je $|E| = m$. Posmatrajmo planaranu reprezentaciju grafa. Neka je G_1 graf koji sadrži proizvoljnu granu grafa G_1 i njoj incidentne čvorove. Ako je $m \geq 2$, kostruišemo dalje sukcesivno podgrafove $G_2 ... G_m$ tako što ćemo svakom sledećem grafu dodati granu koja je incidenta sa jednim čvorom prethodnog podgrafa, kao i eventualno novi čvor incidentan sa tom granom. Takva grana* *sigurno postoji, zato što je graf povezan. Dokazaćemo da za svako* $k \in 1, ..., m$ *važi*

$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2$$

primenom matematičke indukcije.

Baza $k = 1$: $f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 \Leftrightarrow 1 = 1 - 2 + 2$

Induktivni korak $T_k \Rightarrow T_{k+1}$: *Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve vrednosti manje od* k. *Neka je* $G_{k+1} = G_k +$ *u, v.*

1. *Ako je* $u, v \in V(G_k)$ *onda je*

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k + 1 \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1 \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 &\Leftarrow f_k + 1 = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| + 2 \\ &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2 \end{aligned}$$

2. *Ako je* $u \in V(G_k)$ *i* $v \notin V(G_k)$, *onda je*

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= f_k \\ |V(G_{k+1})| &= |V(G_k)| + 1 \\ |E(G_{k+1})| &= |E(G_k)| + 1 \end{aligned}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$\begin{aligned} f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2 &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| + 1 - |V(G_k)| - 1 + 2 \\ &\Leftarrow f_k = |E(G_k)| - |V(G_k)| + 2 \end{aligned}$$

□

Definicija 2. *Stepen oblasti D, u oznaci* $st(D)$ *je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.*

Ako graf ima samo dva čvora i jednu granu, onda taj graf određuje samo jednu oblast koja ima stepen 2. U slučaju da postoje bar tri čvora u povezanom grafu, stepen svake oblasti je bar 3.

Teorema 3. *Neka je* $G = (V, E), |V| \geq 3$, *povezan planaran i prost graf i neka je* f *broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je*

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Dokaz *Znamo da je za svaku oblast* $st(D) \geq 3$ *dobijamo:*

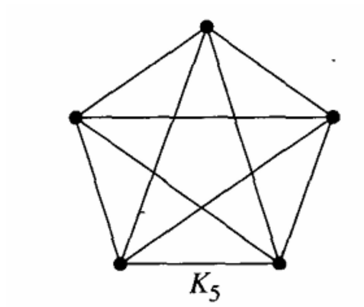
$$2|E| = \sum_{1\leq i\leq l} st(D_i) \geq 3f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}|E|$$

Iz Ojlerove formule dobijamo oblast

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|e| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$

□

Teorema 4. *Kompletan graf K_5 nije planaran*



Slika 6: K_5 graf

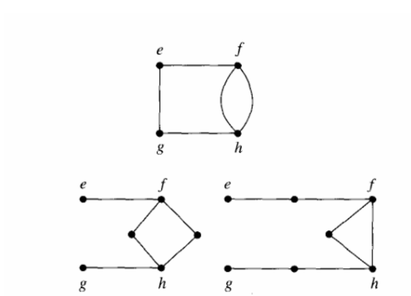
Dokaz *Broj čvorova u grafu je $V = 5$ a broj grana $E = 10$. Pretpostavimo da je K_5 planaran. Pošto je broj čvorova veći od 3, možemo primeniti teoremu:*

$$E \leq 3V - 6$$
$$5 \leq 3 * 5 - 6$$
$$5 = 9$$

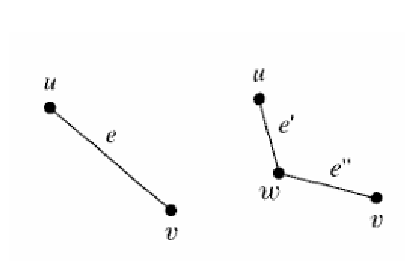
Pošto nejednakost nije zadovoljena, ovo je kontradikcija. Graf K_5 nije planaran.

□

Definicija 3. *Dva grafa su* ***homeomorfna*** *ako se oba mogu izvesti iz zajedničkog pretka koristeći samo konačan niz elemntarnih deoba grana*



Slika 7: Homeomorfni grafovi



Slika 8: Elementarna deoba grana

Teorema 5. *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$ povezan planaran prost graf bez kontura dužine 3. Tada je*

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Dokaz *Ako u grafu ne postoje konture dužine tri, onda je stepen svake oblasti bar četiri. Odatle je*

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq l} st(D_i) \geq 4f \Rightarrow f \leq \tfrac{1}{2}|E|.$$

Iz Ojlerove teoreme dobijamo

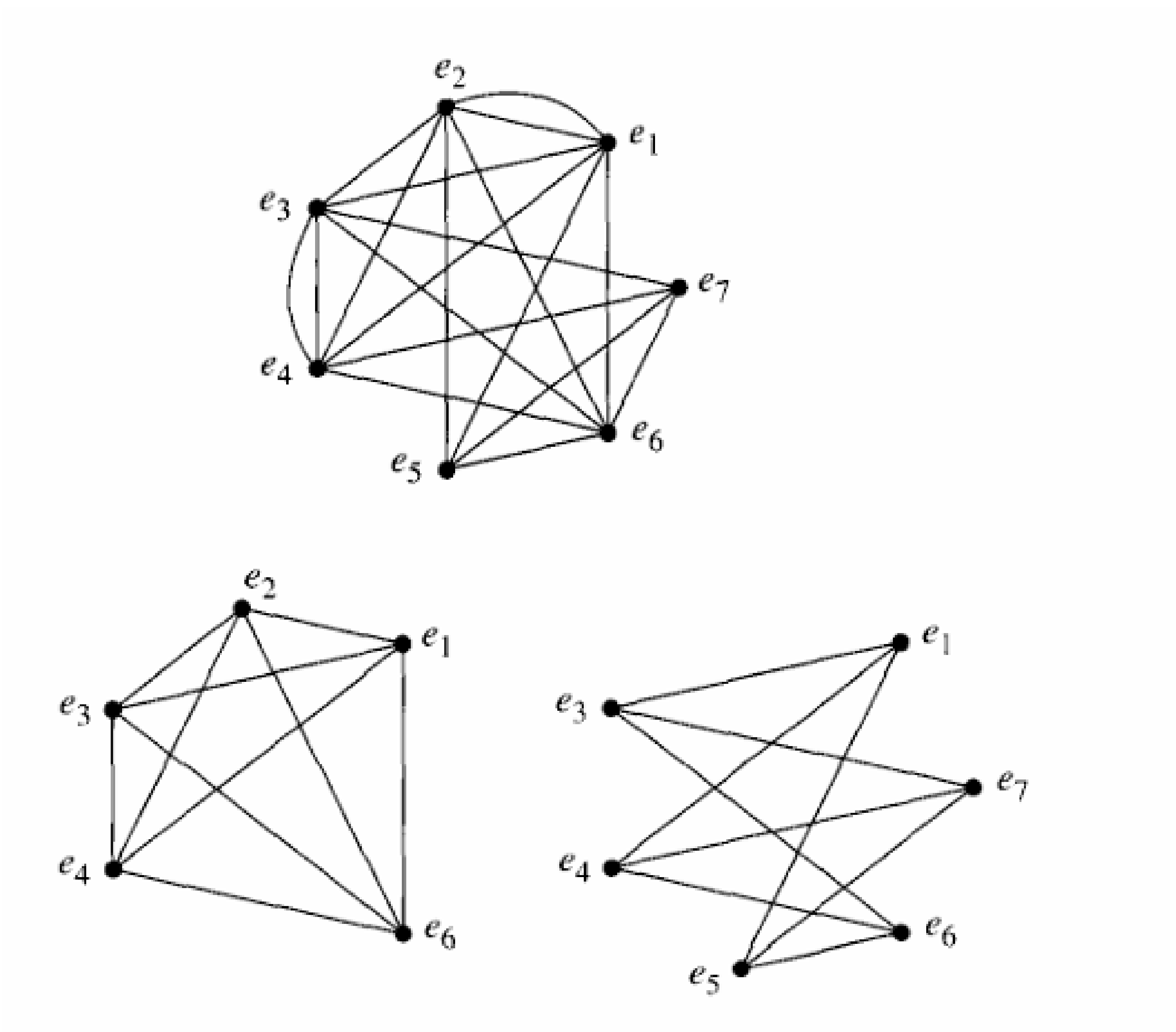
$$|E| - |V| + 2 \leq \tfrac{1}{2}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 2|V| - 4$$

□

Teorema 6 (Teorema Kuratovskog)**.** *Graf G nije planaran, ako i samo ako on sadrži podgraf koji je homeomorfan jednom od dva grafa K_5 ili $K_{3,3}$.*

Obratite pažnju na formulaciju teoreme. Ne kaže da G mora da sadrži grafove K_5 ili $K_{3,3}$ kao podgrafove, već kao podgrafove. Takođe graf G ne mora da bude homeomorfan grafovima K_5 ili $K_{3,3}$.

Primer 3. *Graf na vrhu slike 9. je koninsbergov graf. Podgraf koji se nalazi pri dnu levo je K_5 graf (koji je očigledno homeomorfan grafu K_5). Podgraf desno od njega je graf $K_{3,3}$. Tako da zaključujemo da je ovaj graf sigurno ne planaran.*



Slika 9: primena teoreme