Osnovne tehnike prebrojavanja

Bogdan Ljubinković, Miljan Jokić, Dalibor Nikolić, Lazar Jović, Anastazija Petrov, Marko Djordjević, Aleksa Nenadović i Meris Bilalović

Oktobar 2024, FTN

Problemi kojima ćemo se baviti

- Šta znači nabrojati i prebrojati elemente nekog skupa?
- Kako se prebrojavaju elementi konačnog skupa?
- Kako se prebrojavaju elementi prebrojivo beskonačnog skupa?
- Koji principi se mogu prepoznati prilikom prebrojavanja elemenata konačnog skupa?

Konačan skup

Definicija:

- Skup S je *konačan* ako postoji bijektivna funkcija $f : S \to \{1, 2, \ldots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$, gde su elementi iz skupa S povezani sa n prirodnih brojeva.
- Drugim rečima, skup S sadrži konačan broj elemenata, tj.

$$|S| = n < \infty$$

Primer:

- Skup A prirodnih brojeva manjih od 5:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{sa} \quad |A| = 4$$

- Skup B slova:

$$B = \{\text{a}, \text{b}, \text{c}\} \quad \text{sa} \quad |B| = 3$$

Beskonačan skup

Definicija:

- Skup S je *beskonačan* ako nije konačan, tj. ako ne postoji bijektivna funkcija $f : S \to \{1, 2, \dots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$.
- Drugim rečima, skup S sadrži neprekidno mnogo elemenata, tj.
$$|S| = \infty.$$

Primer:

- Skup svih prirodnih brojeva:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{sa} \quad |\mathbb{N}| = \aleph_0$$
- Skup svih realnih brojeva:
$$\mathbb{R} \quad \text{takoe ima} \quad |\mathbb{R}| = \aleph_1$$

Nabrajanje

Definicija: Nabrajanje je proces identifikacije i ispisivanja elemenata skupa, često uz pomoć matematičkih struktura.

Primer: Neka je skup $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Nabrajanje elemenata ovog skupa može se predstaviti kao:

$$f(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4\}$$

Kardinalnost skupa: Kardinalnost skupa A označava se kao $|A|$:

$$|A| = \#A = 4$$

gde $\#$ predstavlja broj elemenata u skupu.

Matematičke funkcije u nabrajanju

Matematičke funkcije: - Nabrajanje se može predstaviti kao funkcija koja mapira elemente skupa $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ na elemente skupa A:

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$$

gde je $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konačni skup.

Nabrajanje sa pravilom: Ako imamo konačni skup A, možemo koristiti pravilo nabrajanja:

$$\text{Nabrajanje: } \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, f(i) = x_i$$

Kombinatorni pristup: Ako je n broj elemenata skupa, ukupni broj načina na koje možemo nabrojati elemente može se izraziti kao $n!$ (faktorijel od n):

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

Definicija partitivnog skupa

Partitivni skup: - Partitivni skup B se definiše kao skup svih podskupova skupa A:

$$B = \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}, \{x_1, x_2\}, \dots, A\}$$

gde je $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Broj podskupova: - Za A koji ima n elemenata, broj podskupova (tj. elemenata partitivnog skupa B) je:

$$|B| = 2^n$$

Nabrajanje elemenata partitivnog skupa

Nabrajanje podskupova: - Svaki podskup se može predstaviti kao kombinacija elemenata skupa A.

Pravila za nabrajanje: - Ako želimo nabrojati sve podskupove skupa A i njihov broj, koristimo sledeću funkciju:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}, \text{ podskup } f(i) \in B$$

- Ovde $f(i)$ predstavlja i-ti podskup skupa A.

Prebrajanje elemenata skupa

Šta je prebrajanje? - Prebrajanje se odnosi na proces identifikacije i brojanja elemenata unutar skupa, a može se koristiti za konačne i prebrojivo beskonačne skupove.

Matematička definicija: - Neka je A konačan skup sa n elemenata. Prebrojavanje elemenata skupa se može prikazati kao:

$$|A| = n$$

- U slučaju beskonačnih skupova, kao što je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$, govorimo o prebrojivoj beskonačnosti:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

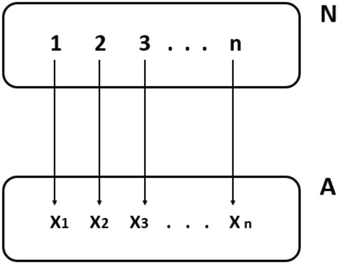
Značaj prebrajanja: - Prebrajanje nam omogućava da razumemo strukturu skupa i primenimo odgovarajuće matematičke tehnike u kombinatorici.

Prebrojavanje konačnih skupova

* Prebrojavanje konačnih skupova se može predstaviti kao funkcija koja vraća n takvo da postoji bijekcija f koja mapira elemente skupa $\{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ na elemente skupa A:

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A$$

gde je $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ konačni skup.

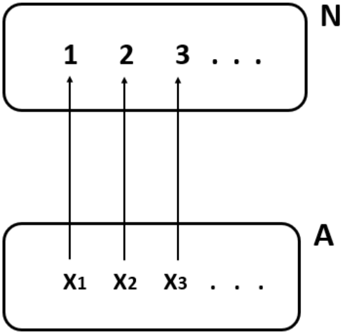


Prebrojavanje prebrojivo beskonačnih skupova

* Prebrojavanje prebrojivo beskonačnih skupova se vrši formiranjem bijekcija f koja mapira elemente skupa A na elemente skupa $\mathbb{N}$:

$$f : A \to \mathbb{N}$$

gde je $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ prebrojivo beskonačan skup.



Ključne razlike izmeu nabrajanja i prebrajanja

- **Svrha:**
  - Nabrajanje: identifikacija i prikazivanje elemenata skupa.
  - Prebrajanje: odreivanje broja elemenata u skupu.
- **Tip skupa:**
  - Nabrajanje: može uključivati konačne i nabrojivo beskonačne skupove.
  - Prebrajanje: fokus na kardinalnost, zahteva konačne ili prebrojive beskonačne skupove.
- **Primene:**
  - Nabrajanje: algoritmi i iteracije.
  - Prebrajanje: kombinatorika i teorija skupova.

Uloga programiranja u nabrajanju

Programiranje omogućava:

- **Brzo nabrajanje** elemenata velikih skupova kroz iterativne algoritme.
- **Efikasno generisanje** podskupova, permutacija i kombinacija.
- **Automatizaciju**: Algoritmi mogu nabrojati elemente bez greške.

Primer algoritma za nabrajanje:

- Korišćenje petlji za nabrajanje svakog elementa skupa.
- Bitmape za generisanje podskupova skupa A.

Uloga programiranja u prebrojavanju

Kako programiranje pomaže:

- **Kombinatorički problemi**: Brzo prebrojavanje permutacija, kombinacija i varijacija.
- **Automatsko izračunavanje kardinalnosti**: Funkcije za tačno prebrojavanje elemenata.
- **Efikasni algoritmi** za prebrojavanje u realnom vremenu, čak i kod velikih skupova.

Primeri primene:

- Biblioteke poput `NumPy` ili `itertools` u Pythonu za kombinatoriku.
- Algoritmi za brzo prebrojavanje elemenata prebrojivo beskonačnih skupova (poredjenje 2 velika skupa)

Nabrajanje podskupova

Kako generisati podskupove bez korišćenja biblioteka?

- **Rekurzija:** Efikasan način za generisanje podskupova.
- **Osnovna ideja:** Svaki element može biti ili prisutan ili odsutan u podskupu.
- **Koraci:**
  - Počni sa praznim skupom.
  - Dodaj svaki element u podskup, probaj oba slučaja (sa i bez elementa).
  - Generiši sve moguće kombinacije.

Rezultat: Ovako ćemo dobiti sve moguće podskupove bez potrebe za spoljnim bibliotekama.

Kod za generisanje podskupova – binarnom rekurzijom

```
def generates_subsets(A):
    result = []

    def backtrack(current_subset, index):
        if index == len(A):
            result.append(current_subset)
            return
        # Ne uključuje element A[index],
        backtrack(current_subset, index + 1)
        # Uključuje element A[index]
        backtrack(current_subset + [A[index]], index + 1)

    backtrack([], 0)
    return result

A = [1, 2, 3]
print(generates_subsets(A))
```

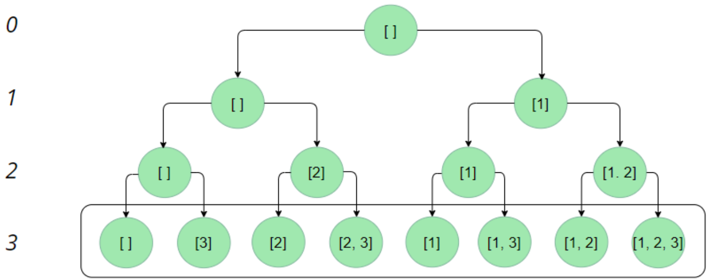


Figure: Odredjivanje podskupova binarnom rekurzijom

Vremenska kompleksnost: $O(2^n)$
za jednostavnu binarnu rekurziju.

Tehnike nabrajanja

1. **Osnovni princip nabrajanja:**
   - Ako dogaaj A može nastati na m načina, a dogaaj B na n načina, tada su ukupni načini:

$$\text{Ukupno} = m \cdot n$$

2. **Permutacije:**
   - Broj načina rasporeivanja n različitih elemenata je:

$$P(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1$$

   - Permutacije n elemenata uzimajući k elemenata:

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kombinacije i princip uključivanja/isključivanja

3. **Kombinacije:**
   - Broj načina da se izabere k elemenata iz n bez obzira na redosled:
   $$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
4. **Binarno prebrojavanje:**
   - Broj podskupova skupa od n elemenata je:
   $$\text{Broj podskupova} = 2^n$$
   - Binarni prikaz može se koristiti za efikasno prebrojavanje.

Tehnike prebrajanja (1/2)

- **Princip sume**:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

- **Princip bijekcije**: - Ako postoji bijekcija izmeu dva skupa A i B, tada važi:

$$|A| = |B|$$

- **Princip proizvoda**:

$$|A| = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$$

Tehnike prebrajanja (2/2)

- **Dirihleov princip**:

$$n > k \implies \exists i : |A_i| \geq 2$$

- **Princip isključenja i uključivanja**:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots$$

$$+(-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Princip bijekcije

Definicija: Funkcija $f : A \to B$ je bijekcija ako zadovoljava sledeće uslove:

- **Injektivnost:** Za svaka $a_1, a_2 \in A$, ako $f(a_1) = f(a_2)$, onda važi $a_1 = a_2$. Ovo znači da različiti elementi u skupu A mapiraju na različite elemente u skupu B.
- **Surjektivnost:** Za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da $f(a) = b$. Ovo znači da svaki element u skupu B ima odgovarajući element u skupu A.

Jednakost skupova: Skupovi A i B su jednaki ($A = B$) ako postoji bijekcija izmeu njih, tj. ako su $|A| = |B|$ i svi elementi se meusobno poklapaju kroz funkciju f.

Princip sume

Definicija: Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ disjunktni skupovi, tada važi:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

gde je $|A|$ broj elemenata u skupu $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$.
Formalizacija:

- Ako su $A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, onda se elementi u svakom skupu broje nezavisno.
- Definišemo skup A kao:

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$$

gde je $|A|$ totalan broj elemenata u skupu A.

Dokaz za princip sume (indukcija)

Teza: Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ disjunktni skupovi, tada važi:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_k|$$

gde je $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$.
Osnovni korak: Za $k = 2$:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$$

što je tačno, jer su skupovi A_1 i A_2 disjunktni.

Dokaz za princip sume (indukcija)

Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da važi za $k = n$:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Indukcioni korak: Sada ćemo dokazati za $k = n + 1$:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}$$

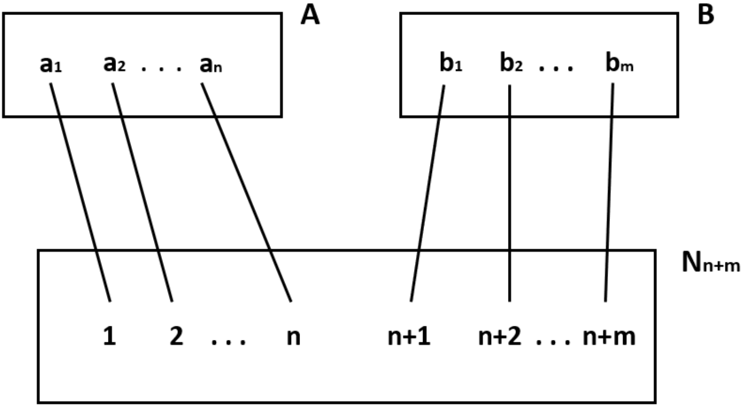
Po pretpostavci, imamo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Dodajemo A_{n+1}:

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}|$$

Zaključak: Prema principu matematičke indukcije, teza važi za sve $k \geq 1$.


A
B
a_1 a_2 . . . a_n
b_1 b_2 . . . b_m
N_{n+m}
1 2 . . . n n+1 n+2 . . . n+m

Princip uključenja i isključenja

Princip uključenja i isključenja se koristi za računanje broja elemenata u uniji više skupova uzimajući u obzir preklapanja. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ skupovi. Ukupni broj elemenata u njihovoj uniji dat je formulom:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

Primena na dva i tri skupa

Za dva skupa A i B, formula glasi:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Za tri skupa A, B, i C, formula postaje:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Dokaz principa uključenja i isključenja (1/2)

Osnovni korak: Za dva skupa A i B, formula je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ovo se lako pokazuje tako što se sabere broj elemenata u A i B, a zatim oduzme presek $A \cap B$, jer su elementi u preseku prebrojani dva puta.

Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da formula važi za n skupova:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots$$

Dokaz principa uključenja i isključenja (2/2)

Induktivni korak: Dokazujemo za $n+1$ skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Imamo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

$$+|A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

Presek možemo proširiti koristeći induktivnu pretpostavku za n skupova. Konačno, dobijamo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n+1} |A_i \cap A_j| + \ldots$$

Ovim je indukcioni korak završen.

Princip proizvoda (1/2)

Princip proizvoda se koristi za prebrojavanje ukupnog broja načina na koje se mogu izvršiti niz nezavisnih izbora. Kada imamo dva skupa A i B, gde je:

$$|A| = m_1 \quad \text{(broj elemenata u skupu A)}$$

$$|B| = m_2 \quad \text{(broj elemenata u skupu B)}$$

Ukupan broj načina za izbor jednog elementa iz A i jednog iz B je dat formulom:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = m_1 \cdot m_2$$

Ključna ideja: Svaki element iz skupa A može se kombinovati sa svim elementima iz skupa B.

Princip proizvoda (2/2)

Primer: Razmotrimo situaciju u kojoj biramo oblačenje iz dva skupa:

- Skup A (majice): $\{M1, M2, M3\}$ sa $|A| = 3$,
- Skup B (pantalone): $\{P1, P2\}$ sa $|B| = 2$.

Ukupan broj kombinacija odevnih predmeta biće:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$$

Opšti slučaj: Za više skupova, na primer n nezavisnih izbora, broj različitih mogućnosti može se izračunati kao:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Dokaz principa proizvoda (1/4)

Teza: Ukupan broj načina da se izaberu elementi iz dva skupa A i B je dat formulom:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Dokaz indukcijom:

- **Osnovni korak:** Kada su $|A| = 1$ i $|B| = 1$, imamo samo jedan način izbora:

$$|A \times B| = 1 \cdot 1 = 1$$

- **Induktivna pretpostavka:** Pretpostavimo da teza važi za n elemenata u skupu A i m elemenata u skupu B:

$$|A \times B| = n \cdot m$$

Dokaz principa proizvoda (2/4)

Induktivni korak: Dokazujemo za $n+1$ i $m+1$ elemenata u skupovima A i B.

- U skupu A dodajemo još jedan element a'.
- U skupu B dodajemo još jedan element b'.

Broj načina da se izaberu elementi iz proširenih skupova je:

$$|(A \cup \{a'\}) \times (B \cup \{b'\})| = |A| \cdot |B| + |A| + |B| = n \cdot m + n + m$$

Ovdje vidimo da broj načina izbora ostaje u skladu sa formulom:

$$|(A \cup \{a'\}) \times (B \cup \{b'\})| = (n+1)(m+1)$$

Zaključak: Teza važi za sve prirodne brojeve n i m, što završava dokaz principa proizvoda.

Dokaz principa proizvoda (3/4)

Opšti slučaj: Kada imamo $k \geq 2$ skupova $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sa brojevima elemenata $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \ldots, |A_k| = m_k$, ukupan broj načina da se izaberu elementi iz svih ovih skupova je:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$$

Dokaz indukcijom:

- **Osnovni korak:** Za $k = 2$:

$$|A_1 \times A_2| = m_1 \cdot m_2$$

- **Induktivna pretpostavka:** Pretpostavimo da teza važi za k skupova, gde važi:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$$

Dokaz principa proizvoda (4/4)

Induktivni korak: Dokazujemo za $k+1$ skup. Imamo:

- Dodajemo još jedan skup A_{k+1} sa $|A_{k+1}| = m_{k+1}$.
- Ukupan broj načina da se izaberu elementi iz $k+1$ skupova je:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k+1}| = |(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) \times A_{k+1}|$$

- Prema principu proizvoda:

$$|(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) \times A_{k+1}| = |A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| \cdot |A_{k+1}|$$

- Tako dobijamo:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k+1}| = (m_1 \cdot m_2 \cdots m_k) \cdot m_{k+1}$$

Zaključak: Teza važi za sve $k \geq 2$, što završava dokaz principa proizvoda.

Uvod u Dirihleov princip

Dirihleov princip: Ovaj princip se koristi za dokazivanje raznih teorema u kombinatorici i teoriji skupova.
Ako imamo n "dirihovih kutija" (skupova) i m objekata koji se raspoređuju u te kutije, gde važi $m > n$, tada barem jedna kutija mora sadržavati najmanje dva objekta.

- **Praktična primena:** Koristi se u dokazima o postojanju, kao i u problemima o raspodeli resursa.
- **Primer:** Ako imate 10 klikera, a samo 9 kutija, sigurno će u nekoj kutiji biti barem dva klikera.
- **Matematički zapis:**

$$m > n \implies \exists i \text{ takav da } |A_i| \geq 2$$

gde je A_i i-ta dirihleova kutija i $|A_i|$ broj objekata u toj kutiji.

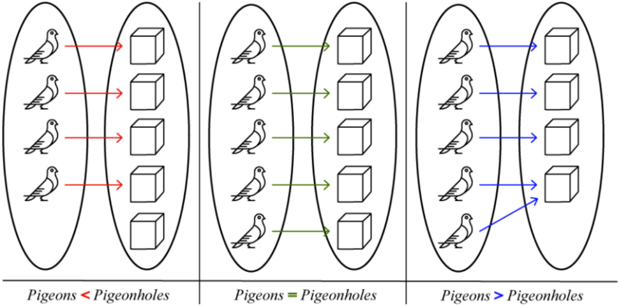
Dokaz Dirihleovog principa (1/2)

Postavka:

- Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dirihleove kutije.
- Neka je $|A_i|$ broj objekata u i-toj kutiji.

Pretpostavka: Ako svaka kutija sadrži najviše jedan objekat, važi:

$$|A_1| \leq 1, |A_2| \leq 1, \ldots, |A_n| \leq 1$$



Dokaz Dirihleovog principa (2/2)

Izračunavanje ukupnog broja objekata:

$$|A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| \leq n$$

S obzirom na to da imamo više objekata nego kutija:

$$m > n \implies |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| = m$$

Kombinovanjem gornjih izraza dobijamo:

$$m \leq n$$

Ova poslednja nejednakost je u kontradikciji sa pretpostavkom $m > n$. Dakle, mora postojati barem jedna kutija A_i koja sadrži najmanje dva objekta, tj. $|A_i| \geq 2$.

Problem 1

Ako je kardinalitet lista1 $= n$ a kardinalitet lista2 $= m$ i te dve liste su disjunktne, odrediti koja je složenost ovog algoritma:

```python
def spojite_liste(lista1, lista2):
    return lista1 + lista2

lista1 = input("Unesite elemente prve liste, odvojene zarezom: ").split(',')
lista2 = input("Unesite elemente druge liste, odvojene zarezom: ").split(',')

spojena_lista = spojite_liste(lista1, lista2)

print("Spojena lista:", spojena_lista)
```

Analiza vremenske složenosti

Kopiranje n elemenata iz liste1 zahteva $O(n)$ operacija.
Kopiranje m elemenata iz liste2 zahteva $O(m)$ operacija.
Ukupno operacija zahteva $O(n+m)$ kopiranja.

Dakle, vremenska složenost ovog algoritma je:

$$O(n+m)$$

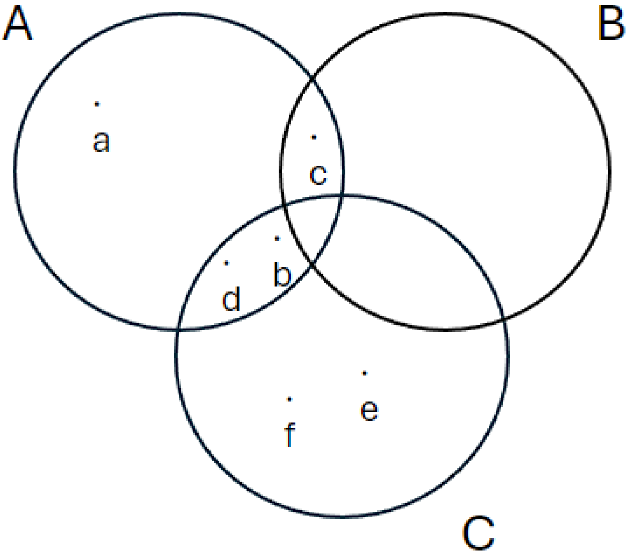
Problem 2

Poznata su nam 3 skupa redom zadatih sa elementima:

- $A = \{a, b, c, d\}$
- $B = \{c\}$
- $C = \{b, d, e, f\}$

Odrediti kardinalnost skupa koristeći princip isključenja-uključenja:

$$|A \cup B \cup C| = ?$$


A
B
C
a
b
c
d
e
f

Problem 2 (1/2)

Prvo, izračunajmo kardinalnosti pojedinačnih skupova:

$$|A| = 4$$
$$|B| = 1$$
$$|C| = 4$$

Zatim ćemo odrediti preseke izmeu skupova:

$$|A \cap B| = |\{c\}| = 1$$
$$|A \cap C| = |\{b, d\}| = 2$$
$$|B \cap C| = |\emptyset| = 0$$
$$|A \cap B \cap C| = |\{c\} \cap \{b, d, e, f\}| = 0$$

Problem 2 (2/2)

Sada možemo primeniti princip isključenja i uključivanja:

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\
&\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
&\quad + |A \cap B \cap C| \\
&= 4 + 1 + 4 - 1 - 2 - 0 + 0 \\
&= 6
\end{aligned}$$

Zaključak: Kardinalnost skupa $|A \cup B \cup C|$ je 6.

Problem 3 (1/2)

Neka je matrica celih brojeva (int = 4 bajta) M dimenzija *nxm*. Dokazati da je zauzeće memorije uvek manje od (u bajtovima):

$$n^2 + 4nm + 4m^2$$

Rešenje: Dokaz se svodi na primenu principa proizvoda gde je $|A_1| = n$ i $|A_1| = m$. Dokažimo ovu tvrdnju korišćenjem indukcije:
Opšti slučaj: Ako uzmemo da je n=1 i m=1 Izraz se svodi na:

$$4 * (1 + 1) < 1^2 + 4 * 1 * 1 + (4 * 1)^2$$

$$8 < 21$$

Problem 3 (2/2)

Induktivna predpostavka: Predpostavimo da ovo važi za n=k i m=l tj. važi:

$$4 * |A_1 \cup A_2| < k^2 + 4kl + 4l^2$$

Induktivni korak: Pokažimo da ovo važi i za n=k + 1 i m=l + 1 tj. ako dodamo proizvoljni element a_1 skupu A_1 i proizvoljni element a_2 skupu A_2

$$4 * |(A_1 \cup \{a_1\}) \cup (A_2 \cup \{a_2\})| < (k+1)^2 + 4(k+1)(l+1) + 4(l+1)^2$$

$$4 * (|A_1| + |A_2|) + 8 < k^2 + 4kl + 4l^2 + 6k + 12l + 9$$

$$0 < 6k + 12l + 1$$

Ovim pokazujemo da je memorisko zauzeće sigurno manje od traženog za svaki $n \geq 1$ i $m \geq 1$

Problem 4

Dokažite da svaka kolekcija od 31 različitih
celih brojeva izmedju 1 i 60 sadrži barem jedan broj koji deli neki drugi broj iz te kolekcije.

Razumevanje grupisanja

Faktorizacija brojeva:

- Svaki broj može biti predstavljen kao $n = 2^k \times m$, gde je m neparan broj.
- Brojevi mogu biti grupisani prema neparnim faktorima. Na primer:

$$
\begin{aligned}
12 &= 2^2 \times 3 \quad \text{(deljiv sa 3)} \\
20 &= 2^2 \times 5 \quad \text{(deljiv sa 5)} \\
15 &= 3 \times 5 \quad \text{(deljiv sa 3 i 5)}
\end{aligned}
$$

- Ova grupisanja nam omogućavaju da identifikujemo zajedničke delitelje.
- 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59
- Ukupno 30 neparnih brojeva.

Dirihleov princip i zaključak

Primena Dirihleovog principa:

- Imamo 31 broj, a samo 30 neparnih faktora.
- Prema Dirihleovom principu: Ako imamo više objekata nego što imamo kutija, barem jedna kutija mora sadržavati više od jednog objekta.
- To znači da će barem jedna grupa brojeva imati više od jednog člana.
- U svakoj kolekciji od 31 različitog celog broja izmeu 1 i 60 mora postojati barem jedan broj koji deli neki drugi broj iz te kolekcije.
- Ovo potvruje da su brojevi medjusobno povezani deljenjem.