Diskretna matematika – Rekurentne relacije

Sadržaj

- Definicija i generisanje rekurentnih relacija
- Homogene rekurentne relacije
- Nehomogene rekurentne relacije
- Linearne relacije sa konstantnim koeficijentima

01

Uvod + generisanje rekurentnih relacija

Rekurentne relacije (*ili rekurzivne relacije*) su relacije koje definišu svaki element niza u odnosu na prethodne elemente tog niza. U matematici i računarstvu, rekurentne relacije se često koriste za definisanje sekvenci ili nizova brojeva gde je svaki član niza definisan u zavisnosti od jednog ili više prethodnih članova.

U suštini, rekurentna relacija je način da se niz definiše rekurzivno, umesto da se za svaki član niza daje eksplicitna formula.

Rekurentne relacije se često koriste u *algoritmima, teoriji brojeva, kombinatorici i analizi algoritama*.

Rekurentna relacija se može zapisati u *obliku*:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$$

gde je a_n član niza koji želimo da izračunamo, a f je funkcija koja zavisi od jednog ili više prethodnih članova niza (a_{n-1}, a_{n-2},...,a_{n-k}). Pored rekurentne relacije, potrebno je definisati i **početne uslove** koji omogućavaju da se izračunaju prvi članovi niza, čime se pokreće rekurzivno definisanje.

Primeri rekurentnih relacija:

1. **Fibonačijev niz**

- Fibonačijev niz jedan je od najpoznatijih primera rekurentne relacije
- Definicija: Svaki član je zbir dva prethodna člana. $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
- Početni uslovi: $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$.
- Početni članovi: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

2. **Niz geometrijske progresije**

- Definicija: Svaki član je proizvod prethodnog člana i konstante r.
- $a_n + r * a_{n-1}$
- Početni uslov: $a_0 = c$ (gde je c neka početna vrednost)
- Primer sa c = 1, i r = 2: 1, 2, 4, 8, 16,...

3. **Faktorijel**

- Definicija: Faktorijel broja n je proizvod svih brojeva od 1 do n.
- $n! = n*(n-1)!$
- Početni uslov: $0! = 1$

Generisanje rekurentnih relacija

Generisanje rekurentnih relacija podrazumeva pronalaženje načina da se niz, algoritam ili problem opiše rekurzivno, odnosno tako da svaki sledeći član niza (ili korak algoritma) bude definisan u odnosu na prethodne članove (ili korake).

- *Proces generisanja rekurentne relacije*:

Prvo je potrebno da razumemo kako se problem razvija ili kako se sledeći član niza gradi na osnovu prethodnih članova. Uočavamo odnose između elemenata u nizu. Zatim definišemo opšti izraz koji povezuje trenutni član niza sa prethodnim članovima. Da bi se rekurentna relacija rešila, potrebno je postaviti početne uslove (osnovne slučajeve) koji omogućavaju pokretanje rekurzivnog procesa.

Generisanje rekurentnih relacija

Primer:

Zamislimo problem gde trebamo da se popnemo na n stepenika, a u svakom koraku možemo da napravimo jedan ili dva koraka odjednom. Pitanje je na koliko načina možemo da dođemo do vrha.

Da bi stigli do stepenika n, možemo : 1. Stići sa n - 1 (jedan korak unazad) 2, Stići sa n - 2 (dva koraka unazad). Broj načina da stignemo do stepenika n je zbir načina za n - 1 i n - 2 koraka. Tn=Tn−1+Tn−2.

Početni uslovi:

Ako ima 0 stepenika (T(0)), postoji samo jedan način da ostanemo na dnu – ne moramo ništa da radimo. Dakle, T(0)=1.
Ako ima 1 stepenik (T(1)), postoji samo jedan način da stignemo do njega – da napravimo jedan korak. Dakle, T(1)=1.
Prvih nekoliko vrednosti :
Za n=2: T(2)=T(1)+T(0)=1+1=2
Za n=3: T(3)=T(2)+T(1)=2+1=3
Za n=4: T(4)=T(3)+T(2)=3+2=5
Za n=5: T(5)=T(4)+T(3)=5+3=8

Ova rekurentna relacija je zapravo ista kao Fibonačijev niz, gde je T(n)=F(n+1). Dakle, broj načina da se popnemo na n stepenika prati Fibonačijev niz.

02

Homogene, linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Postupak rešavanja rekurentnih relacija postupkom zamene unazad nije uvek pogodan za odredjivanje rešenja (*slučaj sa rekurentnom relacijom za Fibonačijev niz*).

Zato posmatramo posebnu klasu rekurentnih relacija koja se može rešiti postupkom koji <u>podseća na rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima.</u>

Definicija:

Rekurentna relacija niza $\{a_n\}_{n \in N_0}$ je **homogena linearna rekurentna relacija reda k sa konstantnim koeficijentima** ako je oblika:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

gde su $c_1, \dots, c_k$ konstante, $k \geq 1$ i $c_k \neq 0$.

Svaka homogena linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima ima *trivijalno rešenje* $a_n = 0$, $n \geq 0$

<u>Karakteristična jednačina</u>:

Neka je (ne nula) niz $\{a_n\}_{n \in N_0}$ dat **homogenom linearnom rekurentnom relacijom sa konstantnim koeficijentima:**

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

Pretpostavimo da postoji broj $x \neq 0$ sa osobinom da je rešenje posmatrane rekurentne relacije oblika:

$$a_n = x^n, \text{ za svako } n \geq 0.$$

Zamenom u rekurentnu relaciju, dobijamo

$$x^n = c_1 x^{n-1} + \cdots + c_k x^{n-k} \iff x^n = x^{n-k}(c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k)$$
$$\iff x^k = c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k.$$

Za jednačinu

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

kažemo da je karakteristična jednačina relacije

$$\tanh(z) = -i\tan(iz)$$

Teorema.
Ako karakteristicna jednačina rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

ima k korena $x_1, \dots, x_k$ sa osobinom

$$\forall i, j \in \{1, \dots, k\}\ i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$$

Tada važi:

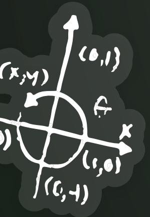
1. za sve $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

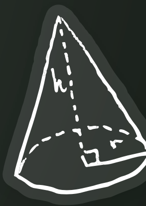
$$\mathbf{a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \cdots + \alpha_k x_k^n}$$

je rešenje posmatrane rekurentne relacije

2. konstante $\alpha_1, \dots \alpha_k$ su jedinstveno odredjene pocetnim uslovima

$$\mathbf{a(0) = a_0, \dots, a(k-1) = a_{k-1}}$$





$\tanh(z) = -i\tan(iz)$

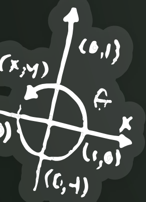
DOKAZ.

1. ako posmatrani izraz zamenimo u rekurentnu relaciju, dobijamo sledeci niz ekvivalentnih jednakosti

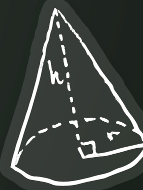
$$\alpha_1 x_1^n + \cdots \alpha_k x_k^n = c_1\left(\alpha_1 x_1^{n-1} + \cdots + \alpha_k x_k^{n-1}\right) \ldots$$
$$+c_k\left(\alpha_1 x_1^{n-1} + \cdots \alpha_k x_k^{n-1}\right) <=>$$
$$\alpha_1 x_1^{n-k}\left(x_1^k - c_1 x_1^{k-1} - \cdots - c_k\right) + \cdots + \alpha_k x_k^{n-k}\left(x_k^k - c_1 x_k^{k-1} - \cdots c_k\right) = 0$$

Kako su $x_1, \ldots, x_k$ koreni karakteristicne jednacine, izrazi u zagradama su jednaki 0, cime je dokaz zavrsen

2. kako bi zadate početne vrednosti pripadale nizu opisanom datom rekurentom relacijom, one moraju zadovoljavati rešenje rekurentne relacije, koje je dato pod 1. Tako dobijamo:



$$\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + \cdots + & \alpha_k & = a_0 \\ \alpha_1 x_1 & + & \alpha_2 x_2 & + \cdots + & \alpha_k x_k & = a_1 \\ & \ldots & & \ldots & \ldots & \\ \alpha_1 x_1^{k-1} & + & \alpha_2 x_2^{k-1} & + \cdots + & \alpha_k x_k^{k-1} & = a_{k-1} \end{array}$$



$\tanh(z) = -i\tan(iz)$

Teorema.

Ako karakteristicna jednacina

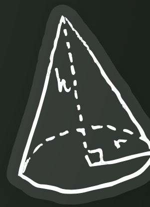
$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_{k-1}x - x_k = 0$$

ima korene $x_1, \ldots, x_l$ redom visestrukosti $k_1, \ldots, k_l$, onda je

1. opste resenje posmatrane rekurentne relacije

$$\begin{aligned} a(n) = \left(\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \cdots + n^{k1-1}\alpha_{1k_1}\right)x_1^n + \\ \left(\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \cdots + n^{k_2-1}\alpha_{2k_2}\right)x_2^n + \\ \ldots\left(\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \cdots + n^{k_l-1}\alpha_{lk_l}\right)x_l^n \end{aligned}$$

2. konstante $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{lk_l}$ su jedinstveno odredjene pocetnim uslovima



03

Nehomogene, linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Bavimo se rekurentnim relacijama oblika:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f(n) \quad (*)$$

, gde su $c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstante, $k \geq 1, c_k \neq 0$, a f funckija skupa $\mathbb{N}_0$.

Rekurentnu relaciju koju dobijamo kada $f(n)$ zamenimo sa nulom nazivamo odgovarajućom homogenom relacijom:

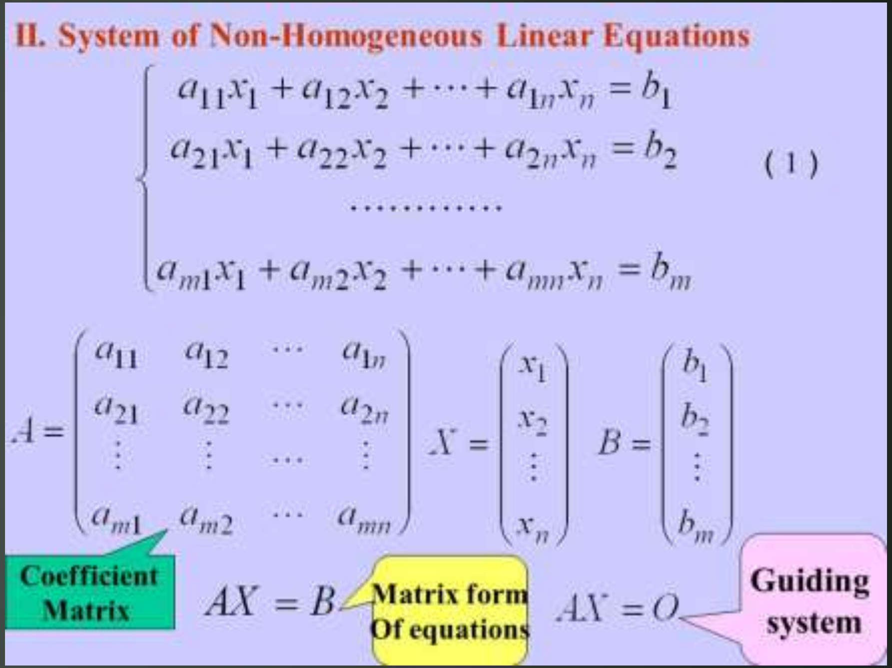
$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

Podsećanje pre teoreme

Razmotrimo sistem nehomogenih linearnih jednačina u opštem obliku:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Ako je $\vec{b} = 0$, sistem je homogen i ima trivijalno rešenje $\vec{x} = 0$. U slučaju da sistem nije homogen ($\vec{b} \neq 0$), imamo nehomogeni sistem.



Podsećanje pre teoreme

Ukupno rešenje *nehomogenog sistema može se izraziti kao zbir dva dela*:

1. **Homogenog rešenja** $(\vec{x}^{(h)})$ sistema $A\vec{x} = \vec{0}$, dakle to je opste rešenje homogenog Sistema

2. **Partikularnog rešenja** $(\vec{x}^{(p)})$ sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, dok je ovo neko partikularno rešenje od više postojećih rešenja nehomogenog sistema

$$\vec{x} = \vec{x}^{(h)} + \vec{x}^{(p)}$$

Podsećanje pre teoreme

Zašto je to tako?
Pretpostavimo da imamo nehomogeni sistem:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Ako je $\vec{x}^{(p)}$ jedno partikularno rešenje tog sistema, to znači da $A\vec{x}^{(p)} = \vec{b}$.
Sada posmatrajmo homogeni sistem:

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Ako $\vec{x}^{(h)}$ zadovoljava ovu relaciju, to znači da je $A\vec{x}^{(h)} = \vec{b}$.
Ako saberemo $\vec{x}^{(h)}$ i $\vec{x}^{(p)}$, dobijamo:

$$A\left(\vec{x}^{(h)} + \vec{x}^{(p)}\right) = A\vec{x}^{(h)} + \mathrm{A}\vec{x}^{(p)} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$$

Dakle, zbir $\vec{x} = \vec{x}^{(h)} + \vec{x}^{(p)}$ zadovoljava originalni nehomogeni sistem.

$\tanh(z) = -i\tan(iz)$

Teorema.

Ako je $a_n^{(p_1)}$ partikularno rešenje nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada za svako rešenje a_n jednačine (*) postoji rešenje $a_n^{(h)}$ odgovarajuće homogene rekurentne relacije sa osobinom

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}, \quad n \geq 0$$

$\tanh(z) = -i\tan(iz)$

DOKAZ.

Neka je $a_n^{(p_1)}$ dato (partikularno) rešenje jednčine (*). Tada za svako važi $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n^{(p_1)} = c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f(n) \quad (1)$$

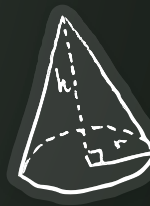
Posmatrajmo sada proizvoljno rešenje $a_n^{(p)}$ jednačine (*). Za njega važi

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + f(n), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \ (2)$$

Ako od (2) oduzmemo (1), dobijamo:

$$a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)} = c_1(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-2}^{(p)} - a_{n-2}^{(p_1)}) + \cdots + c_k(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-k}^{(p_1)})$$

Što znači da je $a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)}$ rešenje rekurentne relacije (*), čime je tvrđenje dokazano.



$\tanh(z) = -i \tan(iz)$

Teorema.

Ako je funkcija oblika:

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0) s^n, \quad b_0, \dots, b_m \in R.$$

Ukoliko je s koren karakteristične jednačine sa višestrukošću l postoji partikularno rešenje oblika:

$$a_n^{(p)} = n^l (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_1 n + c_0) s^n$$

Ova teorema pomaže u identifikaciji oblika partikularnog rešenja u slučaju kada imamo složenu funkciju f(n) u rekurentnim relacijama

Karakteristična jednačina: Karakteristična jednačina je ključna za određivanje oblika partikulranog rešenja. Ako je s koren karakteristične jednačine, tada je potrebno uzeti u obzir njegovu višestrukost l.

Oblik partikulranog rešenja: Ako je s višestruki koren, u partikulranom rešenju dolazi faktor n^l, gde l označava višestrukost. Ovo osigurava nezavisnost partikulranog rešenja od homogenog dela rešenja.

Polinomski faktor: Ukoliko je funkcija $f(n)$ polinomnog oblika, partikulrano rešenje uključuje odgovarajući polinom istog stepena.

$\tanh(z) = -i\tan(iz)$

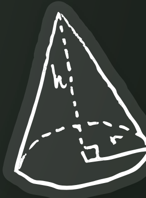
Teorema.

Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja nehomogenih rekurentnih relacija:

$$an = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f_1(n) \text{ i}$$
$$an = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f_2(n) \text{ i}$$

Tada je njihova <u>**suma**</u> rešenje nehomogene rekurentne relacije:

$$an = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f_1(n) + f_2(n)$$



$\tanh(z) = -i\tan(iz)$

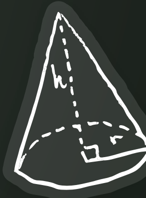
Teorema.

Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja nehomogenih rekurentnih relacija:

$an = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f_1(n)$ i
$an = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f_2(n)$ i

Tada je njihova **<u>suma</u>** rešenje nehomogene rekurentne relacije:

$$an = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f_1(n) + f_2(n)$$



HVALA NA PAŽNJI!

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, and includes icons by **Flaticon**, and infographics & images by **Freepik**