Generatorne funkcije

Bogdan Ljubinković, Miljan Jokić, Dalibor Nikolić, Lazar Jović, Anastazija Petrov, Marko Djordjević, Aleksa Nenadović i Meris Bilalović

Oktobar 2024, FTN

Teme koje ćemo obraditi

- Uvod u generatorne funkcije
- Osnovne osobine generatornih funkcija
- Rešavanje rekurentnih relacija pomoću generatornih funkcija
- Zbir, množenje, pomeranje i derivacija generatornih funkcija

Uvod u generatorne funkcije

Generatorne funkcije su alat koji predstavlja nizove u algebarskom obliku, što omogućava lako manipulisanje nizovima i rešavanje rekurentnih relacija.

- Generatorna funkcija niza $\{a_n\}$ je data sa:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

- Koristi se za rešavanje problema u kombinatorici, analizi nizova i u teoriji brojeva.

Zatvoreni i otvoreni oblik generatorne funkcije

- **Otvoreni oblik** generatorne funkcije predstavlja beskonačnu sumu oblika:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

- **Zatvoreni oblik** generatorne funkcije je kraći, analitički izraz koji opisuje celu sumu, npr:

$$A(z) = \frac{1}{1 - z}$$

- Postizanje zatvorenog oblika omogućava lakše analize i jednostavnije izračunavanje koeficijenata.

Izvodjenje otvorenog i zatvorenog oblika

Otvoren oblik generatorne fukncije je lako dobiti iz zadatog niza jer članovi tog niza predstavljaju koeficijente stepenog reda čiji se oblika zapisuje isto. Uzmimo niz $(1, 1, 1, \ldots)$ za primep. Njegova generatorna funkcija je oblika sledećeg stepenog reda:

$$A(x) = 1 + x + x^2 + \ldots$$

Generatorne funkcije je još moguće predstaviti u zatvorenom obliku. Kako nismo još obradili operacije nad generatornim funkcijama naredni postupak izvodjenja zatvorenog oblika $A(z)$ možemo interpretirati kao operacije nad polinomom:

$$A(z) = 1 + z + z^2 + \ldots$$

$$-zA(z) = 0 - z - z^2 - \ldots$$

$$A(z) - zA(z) = (1 - z)A(z) = 1 \implies A = \frac{1}{1 - z}$$

Izvodjenje otvorenog i zatvorenog oblika

Napomena:
Važno je napomenuti da, iako se generatorne funkcije često poistovećuju sa stepenim redovima, izraz $A(z) = \frac{1}{1-z}$, u slučaju da je to stepeni red, važi samo kada je $|z| < 1$, ali kako mi posmatramo generatornu funkciju z nikad ne uzima konkretne vrednosti pa time i zanemarujemo intervale konvergentnosti. Dokle god je makar nad nekim intervalom $A(z) = \frac{1}{1-z}$ važeće, zatvoren oblik generatorne funkcije je dobar.

Uopštena forma generatorne funkcije

Generatorne funkcije predstavljaju nizove pomoću formalnih redova snaga:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Ova forma omogućava primenu različitih operacija na nizovima, kao što su:

- **Pomeranje**: $z^k A(z)$ pomera niz za k mesta.
- **Množenje sa konstantom**: $cA(z)$ daje generatornu funkciju sa članovima umnoženim konstantom c.
- **Derivacija**: $\frac{d}{dz}A(z)$ pruža transformaciju vezanu za nizove diferencijala.

Osobina: Zbir generatornih funkcija

Ako su $A(z)$ i $B(z)$ generatorne funkcije nizova $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$, tada je zbir:

$$A(z) + B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Primer: Za nizove $\{a_n\} = (1, 2, 3, \ldots)$ i $\{b_n\} = (0, 1, 2, \ldots)$:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n, \quad B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

$$A(z) + B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) z^n$$

Osobina: Množenje sa konstantom

Ako je c konstanta, tada je:

$$cA(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c \cdot a_n) z^n$$

Primer: Ako je $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ i $c = 3$, tada:

$$3A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 3nz^n$$

Osobina: Pomeranje generatorne funkcije

Ako je $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tada je pomerena funkcija $z^k A(z)$:

$$z^k A(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_{n-k} z^n$$

Primer: Ako je $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, tada je:

$$zA(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Osobina: Derivacija generatorne funkcije

Ako je $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, tada je:

$$A'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Primer: Ako je $A(z) = \frac{1}{1-z}$, tada je:

$$A'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$$

Uticaj derivacije na niz

Diferenciranje generatornih funkcija možemo posmatrati kao 2 operacije zajedno. Prva je množenje svakog člana niza sa njegovim ideksom, a druga je pomeranje svih članova 1 mesto ulevo. Za predhodni primer to postupak bi bio:

$$(1, 1, 1, \dots) \to 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1 - z}$$

Množenje članova indeksom:

$$(0, 1, 2, \dots) \to 0 + z + 2z^2 + \dots$$

Pomeranje članova ulevo:

$$(1, 2, 3, \dots) \to 1 + 2z + 3z^2 + \dots = \frac{1}{(1 - z)^2}$$

Osobina: Konvolucija generatornih funkcija

Za generatorne funkcije $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ i $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, konvolucija je:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \right) z^n$$

Primer: Za $A(z) = \frac{1}{1-z}$ i $B(z) = \frac{1}{1-z}$, imamo:

$$A(z) \cdot B(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

Uticaj konvolucije na niz

Konvolucija generatornih funkcija ima malo komplikovanjiji šablon. Članovi niza koji reprezentuje rezultujuća generatorna funkcija su zbirovi proizvoda svih parova članova takvih da je 1. množitelj iz 1. generatorne funkcije, 2. množitelj iz druge i zbir njihovih indeksa je jednak indeksu novog člana u kom su sadržani. Možda lakša interpretacija je da su članovi novog niza koeficijenti u množenju polinoma. Za ovaj primer množićemo $A(z)$ sa $B(z)$ iz predhodnog primera:

$$(1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1, \ldots) = (1, 2, 3, \ldots)$$

$$\downarrow$$

$$1 \cdot 1 + (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)z + (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1)z^2 + \cdots = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots$$

Rešavanje rekurentnih relacija pomoću generatornih funkcija

Generatorne funkcije su korisne za rešavanje rekurentnih relacija. Neka je $a_n = 3a_{n-1} + 2n$ sa početnim uslovom $a_0 = 1$. Onda generatorna funkcija $A(z)$ zadovoljava:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Manipulacijom relacije možemo dobiti:

$$A(z) = \frac{z}{(1-3z)^2}$$

Uopšteni Binomni Koeficijenti i Binomna Formula

Neka je k nenegativan ceo broj, a u proizvoljan realan broj. Uopšteni binomni koeficijent, označen kao $\binom{u}{k}$, definisan je sa:

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} & \text{ako } k > 0 \\ 1 & \text{ako } k = 0 \end{cases}$$

Uopštena Binomna Formula

Funkcija $(1+z)^u$ je generatorna funkcija niza $\left(\binom{u}{0}, \binom{u}{1}, \binom{u}{2}, \ldots\right)$. Sada možemo pokazati da važi uopštena binomna formula:

$$(1+z)^u = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{u}{n} z^n$$

Ovo izražava kako se svaki član niza $\binom{u}{n}$ generiše preko stepena z i koeficijenata koji odgovaraju uopštenim binomnim koeficijentima.

Opšta primena generatornih funkcija

Generatorne funkcije su alat koji omogućava rešavanje složenih problema u različitim oblastima matematike i primenjenih nauka:

- **Kombinatorika:** Koriste se za prebrojavanje objekata, npr. načina rasporeda, grupisanja ili izbora elemenata.
- **Teorija brojeva:** Koriste se za proučavanje i generisanje nizova kao što su prosti brojevi, faktori i delitelji.
- **Rekurentne relacije:** Olakšavaju rešavanje rekurentnih relacija kroz zatvorene forme.
- **Statistika i verovatnoća:** Koriste se za modeliranje verovatnosnih distribucija i računa očekivanja.

Kako generatorne funkcije pojednostavljuju probleme

Korišćenjem generatornih funkcija, složeni problemi se mogu rešavati direktnijim putem:

- **Rekurentne relacije:** Problemi koji su ranije zahtevali iterativne metode sada se mogu rešiti analitičkim pristupom pomoću zatvorenih oblika.
- **Kombinatorni problemi:** Generatorne funkcije omogućavaju brzo prebrojavanje mogućih ishoda, što bi inače zahtevalo složenu kombinatornu analizu.
- **Simulacija i analize sistema:** U primenjenim oblastima, kao što su računarstvo i inženjering, generatorne funkcije omogućavaju brzu simulaciju i predikciju ponašanja sistema.

Zaključak: Generatorne funkcije su neophodan alat u savremenoj matematici, jer omogućavaju rešavanje širokog spektra problema koji su ranije zahtevali komplikovane tehnike.

Zadatak 1

Nadjite generatornu funkciju za niz $\{a_n\}$ definisan sa $a_n = 2a_{n-1} + 3$, gde je $a_0 = 1$.

- Rešite pomoću metoda generatornih funkcija.

Rešenje Zadatka 1

Niz $\{a_n\}$ je definisan sa $a_n = 2a_{n-1} + 3$, gde je $a_0 = 1$.
Primenjujemo generatornu funkciju $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

$$A(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

Zamenom rekurentne relacije dobijamo:

$$A(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 3) z^n = 1 + 2zA(z) + \frac{3z}{1-z}$$

Preuredjujemo izraz:

$$A(z)(1-2z) = 1 + \frac{3z}{1-z}$$

$$A(z) = \frac{1-3z}{(1-z)(1-2z)}$$

Zadatak 2

Nadjite niz čiji su članovi koeficijenti funkcije:

$$\frac{1}{(1-z)^3}$$

Koristite osobine generatornih funkcija i pokažite korake.

Rešenje Zadatka 2

Tražimo niz čiji su članovi koeficijenti funkcije:

$$\frac{1}{(1-z)^3}$$

Znamo da je $\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n$. Dakle:

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} z^n$$

Koeficijenti su $a_n = \binom{n+2}{2}$, odnosno niz $\{a_n\} = 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$.

Zadatak 3

Razmotrite rekurentnu relaciju $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ sa početnim uslovima $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$. Nadjite opšti oblik generatorne funkcije $A(z)$ za ovaj niz.

Rešenje Zadatka 3

Niz $\{a_n\}$ zadovoljava rekurentnu relaciju $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ sa $a_0 = 2$ i $a_1 = 5$. Primenjujemo generatornu funkciju $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

$$A(z) - a_0 - a_1 z = 5zA(z) - 6z^2 A(z)$$

$$A(z)(1 - 5z + 6z^2) = 2 + 5z$$

Po faktorizaciji $1 - 5z + 6z^2 = (1 - 3z)(1 - 2z)$:

$$A(z) = \frac{2 + 5z}{(1 - 3z)(1 - 2z)}$$

Zadatak 4

Fibonačijev niz je definisan rekurentnom relacijom:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Kako možemo izračunati opšti član pomoću generatorne funkcije? Razmotrimo generatornu funkciju za niz:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots$$

Na osnovu rekurentne relacije, odredite formulu za opšti član pomoću generatorne funkcije.

Rešenje Zadatka 4 (deo 1)

Da bismo dobili generatornu funkciju za Fibonačijev niz, počinjemo od:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \dots$$

S obzirom na to da $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, množimo funkcije $xf(x)$ i $x^2f(x)$ i sabiramo:

$$(1 - x - x^2)f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \dots$$

Pošto su svi koeficijenti, osim $a_1 - a_0 = 1$, jednaki nuli, možemo izraziti $f(x)$ kao:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Rešenje Zadatka 4 (deo 2)

Dalje razvijamo ovaj izraz:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \right),$$

gde su $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Na osnovu poznatog razvoja funkcije $(1-x)^{-1}$, dobijamo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left((\alpha - \beta)x + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + \dots \right).$$

Dakle, opšti član a_n je:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n).$$

Zadatak 5

Na koliko se načina pomoću jednog zlatnog, srebrnog i bronzanog novčića od po jedan dinar, može platiti račun od dva dinara?
Razmotrimo generatornu funkciju:

$$G(x) = (1 + x)(1 + x)(1 + x)$$

Proširite ovaj izraz i pronadjite traženi broj načina.

Rešenje Zadatka 5

Generatorna funkcija za ovaj problem je:

$$G(x) = (1 + x)(1 + x)(1 + x) = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

Traženi broj načina je koeficijent uz x^2, što je 3. Dakle, postoji tri načina da platimo račun od dva dinara.

Zadatak 6

Ako imamo račun od 21 dinara i 6 novčanica od dinar, 5 od dva dinara i četiri od 5 dinara, na koliko načina možemo platiti račun? Problem možemo rešiti pomoću generatorne funkcije:

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^6)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{10})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})$$

Traženi broj načina je koeficijent uz x^{21}. Ovaj izraz daje broj rešenja jednačine:

$$a+b+c=21, \quad a \in \{0,1,2,3,4,5,6\}, \quad b \in \{0,2,4,6,8,10\},$$

$$c \in \{0,5,10,15,20\}$$

Rešenje Zadatka 6

Da bismo rešili ovaj problem, koristimo generatornu funkciju:

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots+x^6)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{10})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20}).$$

Traženi broj načina je koeficijent uz x^{21} u ovoj funkciji. Ovaj izraz daje broj rešenja za broj novčanica:

$$a+b+c=21, \quad a \in \{0,1,2,3,4,5,6\},$$

$$b \in \{0,2,4,6,8,10\}, \quad c \in \{0,5,10,15,20\}.$$