Zadatak 8

Definicija: šetnja, staza, put, kontura u multigrafu

Neka je $G = (V, E, \psi)$ multigraf. Neka su $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$ i $v_0, v_1, \dots, v_n \in V$ proizvoljne grane i čvorovi sa osobinom $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ za svako $i \in \{1, . . . , n\}$.

Šetnja u grafu G je konačan neprazan niz $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ u kome se naizmjenicno smjenjuju čvorovi i grane, pri čemu su v_{i-1} i v_i krajnji čvorovi grane e_i. Čvor v_0 je početni, a v_k završni čvor šetnje W. Čvorovi $v_1, \dots, v_{k-1}$ su unutrašnji čvorovi šetnje W. Šetnja koja počinje u čvoru v_0 a završava u čvoru v_k je $(v_0 - v_k)$ šetnja. U šetnji se čvorovi i grane mogu ponavljati.

Dužina šetnje je broj njenih grana.

Staza je šetnja u kojoj se grane ne ponavljaju.

Put je staza u kojoj su čvorovi različiti.

Rastojanje između čvorova *u* i *v* je dužina najkraćeg *(u, v)-puta.*

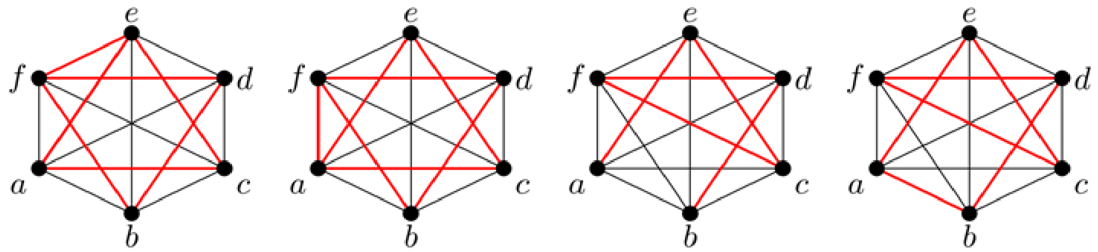
Ako se početni i završni čvor šetnje, staze ili puta poklapaju imamo **zatvorenu šetnju**, **zatvorenu stazu** ili **zatvoreni put** odnosno ***konturu***. Kontura dužine *k* je *k-kontura*.

Ako u grafu postoji *uv-šetnja*(staza), onda postoji i *uv-put.*

Primjer:

Za graf K_6 na slici, po jedan primjer za svaku kategoriju:

- *Šetnja*: $aecaefdbf$
- *Staza:* $aecafdbf$
- *Put:* $aecfdb$
- *Kontura:* $aecfdba$



$aecaefdbf$ $\quad$ $aecafdbf$ $\quad$ $aecfdb$ $\quad$ $aecfdba$

Povezanost dva čvora

Neka je $G = (V, E, \Psi)$ multigraf. Reći ćemo da su čvorovi u i v **povezani** ako je:
- $u = v$ ili
- $u \neq v$ i postoji uv-put u G

Kažemo da je G povezan akko $|V| = 1$ ili za svako $u, v \in V$ važi da su u i v povezani.

Odatle direktno sledi da postojanje uv-šetnje u grafu direktno implicira da su čvorovi u i v povezani.

Relacija "je povezan sa"

Na skupu temena V grafa G=(V,E) definisana je relacija R, gde za dva temena $u,v \in V$ kažemo da je $u\,R\,v$ ako i samo ako postoji **put** u grafu G koji povezuje u i v. Potrebno je dokazati da je relacija R **relacija ekvivalencije**.

Koraci dokaza

Relacija R je relacija ekvivalencije ako zadovoljava tri svojstva:

1. **Refleksivnost**: Svako teme je povezano sa samim sobom.
2. **Simetričnost**: Ako je teme u povezano sa v, tada je v povezano sa u.
3. **Tranzitivnost**: Ako je u povezano sa v, i v povezano sa w, tada je u povezano sa w.

Dokaz refleksivnosti

Za svako teme $u \in V$, uvek postoji trivijalan put od u do u (put dužine 0). Dakle, $u\,R\,u$.

Zaključak: Relacija R je refleksivna.

Dokaz simetričnosti

Pretpostavimo da je $u\,R\,v$. Po definiciji relacije R, to znači da postoji put P koji povezuje u i v u grafu G.
Put u neusmerenom grafu je reverzibilan (ako postoji put $u \to v$ postoji i $v \to u$). Dakle, $v\,R\,u$.

Zaključak: Relacija R je simetrična.

Dokaz tranzitivnosti

Pretpostavimo da je u R v i v R w.
Po definiciji relacije R, to znači da:

- Postoji put P1 koji povezuje u i v.
- Postoji put P2 koji povezuje v i w.

Spajanjem puteva P1 i P2, dobijamo novi put P koji povezuje u i w. Dakle, u R w.

Zaključak: Relacija R je tranzitivna.

Završetak dokaza

Pošto relacija R zadovoljava refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost, zaključujemo da je R **relacija ekvivalencije**.

Intuicija i posledica

Relacija "je povezan sa" deli teme grafa G na **komponente povezanosti**.

- Svaka komponenta povezanosti predstavlja **klasu ekvivalencije** temena prema relaciji R.
- Ako su u i v u istoj klasi ekvivalencije, to znači da postoji put koji ih povezuje.
- Ako nisu, teme pripadaju različitim komponentama povezanosti, te između njih nema puta.

Komponente Povezanosti Grafa

U teoriji grafova, **komponente povezanosti** predstavljaju osnovni koncept koji se koristi za razumevanje strukture grafa. Komponenta povezanosti je maksimalan podgraf u kojem su svi čvorovi međusobno povezani putem ivica. Da bismo bolje razumeli ovu ideju, prvo ćemo definisati nekoliko ključnih pojmova:

Definicije:

1. **Graf**: Graf G=(V,E) sastoji se od skupa čvorova V (takođe nazvanih i vrhovi) i skupa ivica E, koje povezuju čvorove.
2. **Put**: Put u grafu je niz čvorova v1,v2,…,vk takav da između svakog para uzastopnih čvorova postoji ivica u E.
3. **Povezan graf**: Graf je povezan ako postoji put između svakog para čvorova.
4. **Komponenta povezanosti**: Podgraf H=(VH,EH) grafa G je komponenta povezanosti ako je:
    - H povezan, i

    - Nijedan čvor ili ivica izvan H ne može biti dodat u H bez narušavanja njegove povezanosti.

Sada kada smo definisali komponentu povezanosti grafa, definicija za povezan graf može da bude da je graf povezan akko je broj komponenti povezanosti tog grafa 1.

Drugim rečima, komponenta povezanosti predstavlja "ostrvo" čvorova koji su direktno ili indirektno povezani jedni s drugima, ali nisu povezani sa čvorovima izvan te komponente.

Primeri

Razmotri sledeći neusmeren graf G:

- Čvorovi: V={A,B,C,D,E,F,G,H}
- Ivice: E={(A,B),(B,C),(C,A),(D,E),(F,G)}

Ovaj graf ima tri komponente povezanosti:

1. Prva komponenta povezanosti: {A,B,C}
2. Druga komponenta povezanosti: {D,E}
3. Treća komponenta povezanosti: {F,G}

Čvor H nije povezan ni sa jednim drugim čvorom, te čini zasebnu komponentu povezanosti koja se naziva *izolovani čvor*.

Algoritmi za Pronalaženje Komponenti Povezanosti

Postoji nekoliko algoritama koji se koriste za pronalaženje komponenti povezanosti u grafu. Među najpoznatijima su:

1. **Pretraga u dubinu (DFS)**:
    - Pokreće se DFS sa svakog nepovezanog čvora.
    - Svi čvorovi posećeni tokom jednog pokretanja DFS-a pripadaju istoj komponenti povezanosti.
2. **Pretraga u širinu (BFS)**:
    - Slično DFS-u, BFS se koristi za obilazak svih čvorova unutar jedne komponente povezanosti.

Primena Komponenti Povezanosti

1. **Analiza mreža**: U društvenim mrežama, komponente povezanosti mogu identifikovati grupe korisnika koji su povezani jedni s drugima.
2. **Analiza saobraćaja**: U transportnim mrežama, komponente povezanosti pomažu da se identifikuju oblasti koje nisu dostupne iz drugih delova mreže.
3. **Biologija**: U analizi proteinskih interakcija, komponente povezanosti identifikuju skupove proteina koji međusobno deluju.

Osobine Komponenti Povezanosti

1. Graf sa n čvorova može imati najviše n komponenti povezanosti (ako nema ivica).

2. Povezan graf ima samo jednu komponentu povezanosti.

Razumevanje komponenti povezanosti je ključni korak u analizi grafova i osnova za rešavanje složenijih problema u teoriji grafova.

Teorema

Prosti graf sa n čvorova i manje od n−1 grana nije povezan.

Objašnjenje

- **Prosti graf** je neusmereni graf bez višestrukih grana i petlji.
- **Povezan graf** je graf u kojem postoji put između svakog para čvorova.
- U stablu (posebnom slučaju povezanog grafa bez ciklusa), broj grana je tačno n−1.
- Ako graf ima manje od n−1 grana, ne može biti povezan jer najmanji broj grana za povezivanje svih nnn čvorova jeste n−1.

Dokaz

1. **Pretpostavka:** Neka je G=(V,E) prost graf sa nnn čvorova (∣V∣=n) i m<n−1 grana (∣E∣=m).
2. **Broj komponenti povezanosti:**
    - Povezan graf sa n čvorova mora imati tačno jednu komponentu povezanosti.
    - Ako G nije povezan, ima k≥2 komponenti povezanosti, gde svaka komponenta mora biti povezan graf.
3. **Minimizacija broja grana:**
    - Svaka komponenta povezanosti mora imati najmanje vi−1 grana, gde je vi broj čvorova u i-toj komponenti.
    - Ukupan broj grana u nepovezanom grafu je manji od n−1 jer se ne koriste sve moguće grane za povezivanje čvorova.
4. **Nepovezanost:**
    - Ako G ima m<n−1 grana, broj grana nije dovoljan za povezivanje svih nnn čvorova u jednu komponentu.
    - Dakle, G mora imati više od jedne komponente povezanosti, što znači da nije povezan.

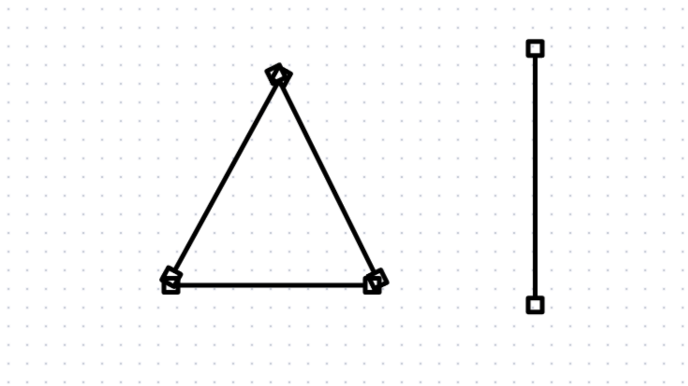
Zaključak

Prosti graf sa n čvorova i manje od n−1 grana nije povezan jer najmanji broj grana potreban za povezivanje svih čvorova jeste n−1.

Primjer prostog nepovezanog grafa sa n čvorova i bar n - 1 granom.

Pošto prosti grafovi nemaju petlje i višestruke grane, treba nam najmanje 2 nepovezana dijela.

Za n = 5, imaćemo 4 grane, možemo imati 3 čvora koja su povezana u trougao i preostala 2 su izolovana grana.



Još primjera:

Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojenih delova, koji se nazivaju **komponente povezanosti grafa**.

Primer 6.

Na desnoj slici graf ima 10 čvorova i 8 ivica, ako dodamo bilo gdje još jednu granu, i dalje će biti nepovezan.

Teorema. Neka je G = (V,E) povezan i neka je C kontura u grafu G.
Ako je e grana konture, onda je G - e povezan.

Dokaz. Izaberimo proizvoljno dva čvora u i v iz V. Kako je G povezan, postoji uv-put : $P = uv_1 .. v_i v_{i+1} \ldots v_{n-1} v.$
Imamo dve mogućnosti:

i. Ako e ne pripada uv-putu, onda je P uv-put u G - e .

ii. Ako e pripada uv-putu, onda možemo pretpostaviti da je to grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura C oblika $C = v_i v_{i+1} u_1 \ldots u_k v_i$. To znači da u grafu G - e postoji put Q od v_i do v_{i+1} : $Q = v_i u_k u_{k-1} \ldots u_1 v_{i+1}$

onda je $P_2 = uv_1 .. v_{i-1} Q v_{i+2} \ldots v_{n-1} v$ staza u grafu G - e od u do v. Prema teoremi, kako postoji uv-šetnja, onda u G - e postoji i uv-put. Znači za svaka dva čvora u grafu G - e postoji put koji ih povezuje.