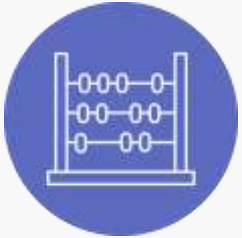
# Diskretna matematika – *generatorne funkcije nizova*

# Napredne tehnike prebrojavanja

U prethodnim odeljcima smo se upoznali sa osnovnim tehnikama prebrojavanja konačnih skupova. Sada ćemo predstaviti još jednu važnu tehniku prebrojavanja. Osnovna ideja, sasvim iznenadjujuća, je da beskonačnom nizu realnih brojeva dodelimo odredjenu neprekidnu funkciju, tzv. funkciju generatrise niza.

U sekcijama nakon toga uglavnom ćemo se baviti pitanjem kako dobiti opštu formulu za elemente nizova brojeva i polinoma u kojima postoje rekurentne relacije, takve da se, počev od nekog mesta u nizu, svaki sledeći element može, pomoću iste formule, prikazati pomoću prethodnih elemenata niza.



# 01

# Generatorne funkcije

***Primer.*** Posmatrajmo niz (1,1,1,1,...) sastavljen od jedinica. Njega možemo „kodirati“ pomoću funkcije

$$1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + \dots.$$

Ova funkcija sada predstavlja beskonačnu geometrijsku progresiju sa količnikom x, pa je njena vrednost jednaka

$$\frac{1}{1-x},$$

pod uslovom da je $|x| < 1$. Sada možemo da kažemo:

Funkcija $\frac{1}{1-x}$ je funkcija generatrise niza (1,1,1,1,...).

***Definicija.*** **Stepeni red** je beskonačna suma oblika

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

gde su $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ realni brojevi, a x je realna promenljiva.

Jednostavan primer stepenog reda je

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Iz prethodnog primera. U slučaju da je $x \in (-1, 1)$, suma ovog stepenog reda ima vrednost $\frac{1}{1-x}$.
U ovom smislu, stepeni red odredjuje funkciju $\frac{1}{1-x}$.
S druge strane, ova funkcija već sadrži sve podatke o stepenom redu. Zaista, ako diferenciramo funkciju k puta i stavimo $x = 0$ u rezultat, dobićemo tačno k! puta koeficijent uz $x^k$ u stepenom redu. Drugim rečima stepeni red je Tejlorov red funckije $\frac{1}{1-x}$ u tački $x = 0$ (tj. Maklorenov red).

*Pretvaranje beskonačnih nizova u funkcije i nazad je temelj tehnike generatornih funkcija.*

***Definicija.*** Neka je $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ niz realnih brojeva. Pod generatornom funkcijom ovog niza podrazumeva se formalni stepeni red

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

*Kažemo da je stepeni red formalni, zato što se ne razmatraju vrednosti argumenta i funkcije, već se samo posmatraju operacije na stepenim redovima, koje se definišu uz pomoć operacija na njihovim koeficijentima. U tom smislu, konvergencija tih redova nije relevantna.*

# Operacije nad generatornim funkcijama

1. **Skaliranje**

- Ako je A(z) = $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ generatorna funkcija, tada je skalirana verzija funckije $c \cdot A(z) = (ca_0, ca_1, ca_2, \dots), \check{s}to\ zna\check{c}i\ da\ se\ svaki\ \check{c}lan\ mno\check{z}i\ konstantom\ c$.
- *Primer*: Ako je $A(z) = (1,2,3, \dots)$ onda je $2 \cdot A(z) = (2,4,6, \dots)$

2. **Desno pomeranje**

- Desno pomeranje za k mesta definiše se kao $z^k \cdot A(z) = (0,0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)$ gde je na početku k nula, a zatim slede članovi funkcije A(z). Ovo odgovara pomeranju sekvence za k mesta u desno.
- *Primer*: Ako je $A(z) = (1,2,3, \dots) i\ k = 2$, tada je $z^2 \cdot A(z) = (0,0,1,2,3, \dots)$

# Operacije nad generatornim funkcijama

**3. Sabiranje**

- Sabiranje dve generatorne funkcije $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ i $B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ je definisano sa

$$A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

- *Primer*: Ako su $A(z) = (1,2,3, \dots)\ i\ B(z) = (0,1,1, \dots)$ tada je $A(z) + B(z) = (1,3,4, \dots)$

# Operacije nad generatornim funkcijama

**4. Množenje**

- Množenje generatornih funkcija $A(z)$ i B$(z)$ definiše se kao konvolucija njihovih članova:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n \geq 0} (\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}) z^n$$

Ova operacija uzima svaku moguću kombinaciju parova iz sekvenci i sabira proizvode za svaki stepen z.

*Primer*: Ako su $A(z) = (1,1,1, \dots)\ i\ B(z) = (1,1,1, \dots)$ tada je $A(z) \cdot B(z) = (1,2,3,4, \dots)$, što odgovara sekvenci 1,2,3,4...

# Operacije nad generatornim funkcijama

**5. Diferenciranje**

- Diferenciranje generatorne funkcije $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ daje novu funkciju koja je definisana kao:

$$\left(A(z)\right)' = \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)' = \sum_{n\geq 0} (n+1)a_{n+1}z^n = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$$

Ovaj proces povećava indekse članova sekvence za faktor $n$ i smanjuje stepen $z$ za 1, što može biti korisno u raznim primenama, kao što su rekurentni odnosi.

*Primer*: Ako je $A(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$, tada je:

$A(z)' = 2 + 2 \cdot 3z + 3 \cdot 4z^2 + \cdots = 2 + 6z + 12z^2 + \cdots$, što odgovara sekvenci 2,6,12,...

$$Odrediti\ niz\ čija\ je\ zatvorena\ forma\ generatorne\ funkcije:$$

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$Primenjujemo\ množenje\ generatornih\ funkcija$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z}\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \sum_{n\geq 0} z^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0}^{n} 1 * 1\right) z^n = \sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$$

$$Možemo\ zaključiti\ da\ je\ a_n = n+1\ opšti\ član\ niza\ čija\ generatorna\ funkcija\ je\ \frac{1}{(1-z)^2}$$

**Definicija** *Neka je $k$ nenegativan ceo broj, a $u$ proizvoljan realan broj. Uopšteni binomni koeficijent, u oznaci $\binom{u}{k}$, definisan je sa*

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u\cdot(u-1)\cdot\ldots\cdot(u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

*Kada je k = 0 vrednost opšteg binomnog koeficijenta je 1, jer postoji samo jedan način da se ne odabere ništa.*
*Kada je k > 0 koristi se uzastopno množenje, počevši od u, i deljenje sa k! Što predstavlja broj načina za uredjivanje k elemenata.*

## Kako funkcioniše generatorna funkcija u kontekstu binomnih koeficijenata?

Razvijajući $(1+x)^n$ u binomnu seriju, dobijamo sve moguće binomne koeficijente $\binom{n}{k}$ za različite vrednosti $k$. Na primer, za $n=5$, imamo:

$$(1+x)^5 = \binom{5}{0} + \binom{5}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \binom{5}{4}x^4 + \binom{5}{5}x^5$$

Kada zamenimo vrednosti binomnih koeficijenata, dobijamo:

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$$

Ovo je ekspansija za $(1+x)^5$, gde su binomni koeficijenti $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{2} = 10$, itd.

# Uopštena binomna formula

Dosad smo koristili binomnu formulu samo sa eksponentom koji je prirodan broj. Naredna teorema uvodi uopštenu binomnu formulu kod koje to nije nužno.

***Teorema***: Neka je u proizvoljan realan broj, tada je:

$$(1+z)^u = \sum_{n \geq 0} \binom{u}{n} z^n$$

# Uopštena binomna formula

***Dokaz***:

Možemo koristiti Tejlorov red za funkciju $(1+z)^u$ u okolini z=0

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}$$

, gde su $c_n$ koeficijenti koje treba da odredimo

# Uopštena binomna formula

***Dokaz***:

N-ti koeficijent možemo zapisati preko n-tog izvoda:

$$\boldsymbol{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$$

*Raspisujući izvode višeg reda funkcije f, pojavice su obrazac*:

$$f^{(n)}(z) = u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)(1+z)^{u-n}$$

$$f^{(n)}(0) = u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)$$

# Uopštena binomna formula

***Dokaz***:

Dakle dobijamo formulu za n-ti koeficijent:

$$c_n = \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!}$$

Ona se pokalapa sa formulom za uopšteni binomni koeficijent, čime je teorema dokazana.

# HVALA NA PAŽNJI!!!