Generatorne funkcije

13.11.2024.

1 Generatorne funkcije nizova

U ovoj lekciji upoznaćemo se sa pojmom funkcija generatrisa (generatornih funkcija), koje predstavljaju koristan alat u matematici, posebno u kombinatorici i analizi nizova. Funkcije generatrise omogućavaju nam da "kodiramo" informacije o nizu kroz koeficijente beskonačnog stepenog reda. Korišćenjem ovih funkcija, možemo rešavati razne probleme koji se odnose na prebrojavanje, analizu nizova, kao i rekurentne relacije. Takođe ćemo prikazati neke od najčešće korišćenih generatornih funkcija i demonstrirati njihove primene kroz konkretne primere i formule.

1.1 Pre nego što počnemo... podsetnik

Da bismo uveli pojam generatornih funkcija, potrebno je da se podsetimo pojma redova. Iako su redovi i generatorne funkcije slični, postoje važne razlike između njih koje ćemo razjasniti.

Definicija Stepeni red je beskonačna suma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n + ...$$

U ovom izrazu, koeficijenti a_i čine niz koji red generiše, a x je promenljiva koja je osnova svakog člana. Ovaj oblik koristi se u mnogim oblastima matematike kao sredstvo za reprezentaciju funkcija pomoću beskonačnih suma.

Teorema Jedan poseban tip stepenog reda je beskonačni geometrijski niz. Zbir svih članova beskonačnog geometrijskog niza u kojem je $|x| < 1$ zadat je formulom

$$b + bx + bx^2 + ... + bx^n + ... = \frac{b}{1-x}$$

Dokaz Neka je S zbir elemenata datog beskonačnog geometrijskog niza. Znamo da je

$$S = b + bx + bx^2 + bx^3 + ...$$

Množenjem datog izraza sa x dobijamo

$$xS = bx + bx^2 + bx^3 + bx^4 + ...$$

Oduzimanjem prethodne dve jednakosti dobijamo

$$(1-x)S = b \implies S = \frac{b}{1-x}$$

1.2 Definicija generatornih funkcija

Definicija Neka je $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ niz realnih brojeva, tj. beskonačna uređena torka. Otvorena forma funkcije generatrise datog niza je onda stepeni red

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + ...$$

Uvodimo pojam zatvorene forme : Da ne bismo pisali otvorenu formu, generatornu funkciju možemo predstaviti i kroz zatvorenu formu

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = A(z)$$

Primetimo! Generatorna funkcija je red samo u simboličkom smislu, jer promenljiva z nije nepoznata i nikad ne dobija vrednost. Ona samo nosi eksponent da bi se znalo koji član po redu je u pitanju. Time nas ne zanima nikakva konvergencija, kao što je to slučaj kod redova.

Primer (*Važna generatorna funkcija!*) Posmatrajmo niz $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $(\forall n \in \mathbb{N})a_n = 1$ tj.

$$(1, 1, 1, 1, ...)$$

Njegova funkcija generatrisa je stepeni red sledećeg oblika

$$A(z) = 1 + z + z^2 + z^3 ...$$

što se, primenom formule za zbir beskonačnog geometrijskog reda koja je data svodi na

$$A(z) = \frac{1}{1-z}$$

1.3 Osobine generatornih funkcija

Posmatrajmo sledeće osobine funkcija generatrisa, koje nam mogu poslužiti za pronalaženje generatrise za proizvoljni niz. Dokaz ovih osobina sledi iz algebarskih osobina polinoma.

Osobina 1 (*sabiranje*) Neka su $(a_0, a_1, a_2, ...)$ i $(b_0, b_1, b_2, ...)$ dva niza i neka su $A(z)$ i $B(z)$ njihove zatvorene forme funkcije generatrise, redom. Generatrisa niza $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, ...)$ je onda $A(z) + B(z)$

Osobina 2 (*skaliranje*) Neka je $(a_0, a_1, a_2, ...)$ niz i neka je $A(z)$ njegova generatrisa. Generatrisa niza $(ca_0, ca_1, ca_2, ...)$ gde je c realan broj data je sa $cA(z)$

Osobina 3 Neka je $(a_0, a_1, a_2, ...)$ niz i neka je $A(z)$ njegova generatrisa. Generatrisa niza $(a_0, ca_1, c^2 a_2, c^3 a_3 ...)$ gde je c realan broj data je sa $A(cz)$

Osobina 4 (*desno pomeranje*) Neka je $(a_0, a_1, a_2, a_3, ...)$ niz i neka je $A(z)$ njegova generatrisa. Generatrisa niza $(0, 0, 0, ...0, a_0, a_1, a_2, ...)$ gde niz počinje sa n nula je $z^n A(z)$

Osobina 5 (*levo pomeranje*) Ako je $A(z)$ generatrisa niza $(a_0, a_1, a_2, ...)$, onda je generatrisa niza $(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...)$ jednaka

$$\frac{A(z) - (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_{n-1} z^{n-1})}{z^n}$$

Osobina 6 Ako je $A(z)$ generatrisa niza $(a_0, a_1, a_2, ...)$, onda je generatrisa niza $(a_0, 0, 0, ..., 0, a_1, 0, 0, ...0, a_2, ...)$ gde između svakog ne-nultog člana imamo $n-1$ nula jednaka $A(z^n)$

Osobina 7 (*množenje*) Neka su $(a_0, a_1, a_2, ...)$ i $(b_0, b_1, b_2, ...)$ dva niza i neka su $A(z)$ i $B(z)$ njihove funkcije generatrise, redom. Funkcija $A(z) \cdot B(z)$ je onda generatrisa niza čiji je opšti član dat sa

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Osobina 8 (*diferenciranje*) Neka je $(a_0, a_1, a_2, ...)$ niz i neka je $A(z)$ njegova generatrisa. Generatrisa niza $(a_1, 2a_2, 3a_3, ..., na_n, ...)$ data je sa $A'(z)$

Osobina 9 (*integraljenje*) Neka je $(a_0, a_1, a_2, ...)$ niz i neka je $A(z)$ njegova generatrisa. Generatrisa niza $(0, a_0, \frac{1}{2}a_1, \frac{1}{3}a_2..., \frac{1}{n}a_{n-1}, ...)$ data je sa $\int_0^z A(t)dt$

1.3.1 Računanje funkcije generatrise datog niza

Pomoću ovih osobina i činjenice da je generatrisa niza $(1, 1, 1, ...)$ jednaka $A(z) = \frac{1}{1-z}$ možemo naći generatrisu skoro svakog realnog niza

Primer 1 Naći funkciju generatrisu niza $(1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, ..)$

Započnimo od niza $(1, 1, 1, 1, ...)$ i njegove generatrise

$$A(z) = \frac{1}{1-z}$$

Primenom osobine 3 dobijamo da je generatrisa niza $(1, 2, 4, 8, ...)$ jednaka

$$B(z) = A(2z) = \frac{1}{1-2z}$$

Zatim, primenom osobine 6 dobijamo da je generatrisa niza $(1, 0, 2, 0, 4, 0, ...)$ jednaka

$$C(z) = B(z^2) = \frac{1}{1-2z^2}$$

Nakon toga, primenom osobine 4 dobijamo da je generatrisa niza $(0, 1, 0, 2, 0, 4, ...)$ jednaka

$$D(z) = zC(z) = \frac{z}{1-2z^2}$$

Konačno, sabiranjem prethodna dva niza i primenom osobine 1 dobijamo da je generatrisa traženog niza

$$E(z) = C(z) + D(z) = \frac{1+z}{1-2z^2}$$

Primer 2 Napisati otvoreni oblik funkcije

$$\frac{1}{1+2z}\frac{1}{1-3z}$$

Počnimo opet od činjenice da je generatrisa niza $(1, 1, 1, ...)$ jednaka

$$A(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^n$$

Primenom osobine 3 dobijamo

$$B(z) = \frac{1}{1+2z} = A(-2z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2z)^n = 1 - 2z + 4z^2 + \dots$$

$$C(z) = \frac{1}{1-3z} = A(3z) = \sum_{n=0}^{\infty}(3z)^n = 1 + 3z + 9z^2 + \dots$$

(*Prvi način*) Množenjem ove dve funkcije dobijamo traženi otvoreni oblik

$$D(z) = B(z) \cdot C(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-2z)^i(3z)^{n-i}$$

(*Drugi način*) Dati proizvod možemo razložiti na zbir

$$\frac{2}{5}\frac{1}{1+2z} + \frac{3}{5}\frac{1}{1-3z}$$

Zamenom funckija $B(z)$ i $C(z)$ dobijamo

$$D(z) = \frac{2}{5}B(z) + \frac{3}{5}C(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{n+1} + (-1)^n 2^{n+1}}{5}z^n$$

Iako smo dobili dve različite otvorene forme, može se dokazati da su jednake, tako što ćemo pokazati da niz $a_n = \sum_{i=0}^{n}(-2)^i(3)^{n-i}$ prati rekurentnu jednačinu $a_0 = 1, a_n = 3a_{n-1} + (-2)^n$, a zatim je rešiti i dobiti da je rešenje $a_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^n 2^{n+1}}{5}$

[ ]:
```
import sympy as sp

# Definišemo promijenljivu z:
z = sp.symbols("z")

def generisi_funkciju_niza(zatvorena_forma, broj_clanova):
    """
      Kreira funkciju niza iz zatvorene forme generatorne funkcije.

    :param zatvorena_forma: Zatvorena forma generatorne funkcije (simbolički␣
 ↪izraz u z).
    :param broj_clanova: Broj članova za prikaz i računanje vrednosti.
    :return: Funkcija koja računa n-ti član niza.
    """
    # Razvijamo zatvorenu formu u stepeni red do željenog broja članova:
    otvorena_forma = sp.series(zatvorena_forma, z, 0, broj_clanova).removeO()
    # Uzimamo koeficijente redom (od z^0 do z^(broj_clanova-1)):
    koeficijenti = [otvorena_forma.coeff(z, i) for i in range(broj_clanova)]

    # Kreiramo funkciju niza koja vraća n-ti član:
    def funkcija_niza(n):
        if n < len(koeficijenti):
            return koeficijenti[n]
```

```
        else:
            print("Nema dovoljno članova u razvijenom nizu. Povećajte broj␣
 ↪članova.")
            return None

    return funkcija_niza


broj_clanova = int(input("Unesite željeni broj članova niza: "))
# Primjer za Fibonačijev niz: z/(1-z-z**2)
unos = input("Unesite zatvorenu formu koristeći z kao simbol (npr. '1/(1 - z)'):
 ↪ ")

try:
    zatvorena_forma = sp.sympify(unos)
except sp.SympifyError:
    print("Greška pri unosu. Provjerite da li je izraz ispravno unijet.")

funkcija_niza = generisi_funkciju_niza(zatvorena_forma, broj_clanova)
print(f"\nPrvih {broj_clanova} članova niza:")
for n in range(broj_clanova):
    print(f"a({n}) =", funkcija_niza(n))
```

```
Unesite željeni broj članova niza: 10
Unesite zatvorenu formu koristeći z kao simbol (npr. '1/(1 - z)'): z/(1-z-z**2)

Prvih 10 članova niza:
a(0) = 0
a(1) = 1
a(2) = 1
a(3) = 2
a(4) = 3
a(5) = 5
a(6) = 8
a(7) = 13
a(8) = 21
a(9) = 34
```

1.4 Primena funkcija generatrisa

Generatorne funkcije predstavljaju moćan alat u kombinatorici i diskretnoj matematici, omogućavajući nam da na efikasan način analiziramo i manipulišemo nizovima i sekvencama podataka. Njihova primena obuhvata širok spektar problema, od prebrojavanja kombinatornih objekata, rešavanja rekurentnih relacija, pa sve do dokazivanja različitih identiteta. Kroz transformaciju diskretnih nizova u formalne funkcije, generatorne funkcije pružaju sredstvo za bolje razumevanje strukture i ponašanja nizova, što je naročito korisno u situacijama kada su klasične tehnike nedovoljno fleksibilne ili složene za analizu.

1.4.1 Generatorne funkcije i binomna formula

Definicija Neka je k nenegativan ceo broj, a u proizvoljan realan broj. Uopšteni binomni koeficijent, u oznaci $\binom{u}{k}$, definisan je sa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u\cdot(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0 \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Primeri

1. Za $\binom{-1}{k}$ imamo:

$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\dots(-1-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}{k!} = (-1)^k$$

2. Za $\binom{-2}{k}$ imamo:

$$\binom{-2}{k} = \frac{(-2)(-3)\dots(-2-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+1)}{k!} = (k+1)(-1)^k$$

3. Za $\binom{-3}{k}$ imamo:

$$\binom{-3}{k} = \frac{(-3)(-4)\dots(-3-k+1)}{k!} = \frac{(-1)^k \cdot 3 \cdot 4 \dots (k+2)}{k!} \cdot \frac{2}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2}(-1)^k$$

Teorema (*uopštena binomna formula*) Neka je u proizvoljan realan broj. Tada je

$$(1+z)^u = \sum_{n\geq 0} \binom{u}{n} z^n.$$

Dokaz Pomoću Maklorenovog polinoma, što je poznato iz algebre.

Primer Odrediti otvoren oblik generatorne funkcije ako je njen zatvoren oblik:

$$\frac{1}{1-cz} = (1-cz)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \binom{-1}{n} (-cz)^n = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (-1)^n (cz)^n = \sum_{n\geq 0} (cz)^n$$

Primer Odrediti otvorene oblike generatornih funkcija, ako su zatvoreni oblici: 1. Za $\frac{1}{(1-z)^m}$ imamo:

$$\frac{1}{(1-z)^m} = (1-z)^{-m} = \sum_{n\geq 0} \binom{-m}{n} (-z)^n = \sum_{n\geq 0} \binom{m+n-1}{n} z^n$$

2. Za $\frac{1}{(1-z)^2}$ imamo:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+1}{n} z^n = \sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$$

3. Za $\frac{1}{(1-z)^3}$ imamo:

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{n} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{2} z^n$$

1.4.2 Rešavanje rekurentnih relacija pomoću generatornih funkcija

Primer 1 Koristi generatorne funkcije da rešiš rekurentnu relaciju $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ sa početnim uslovima $a_0 = 6$ i $a_1 = 30$.

Rešenje Da bismo rešili rekurentnu relaciju $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ sa početnim uslovima $a_0 = 6$ i $a_1 = 30$ koristeći generatorne funkcije, krenimo korak po korak.

Definišemo generatornu funkciju: neka je $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, generatorne funkcija za niz (a_n).

Rekurentna relacija glasi $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, što možemo zapisati u obliku sume kao

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = 5\sum_{n\geq 0} a_{n-1} z^n - 6\sum_{n\geq 0} a_{n-2} z^n$$

Da bismo izrazili sve sume u obliku $\sum_{n\geq 2} a_n z^n$, promenićemo indekse

$$\sum_{n\geq 2} a_n z^n = A(z) - a_0 - a_1 z$$

$$\sum_{n\geq 2} a_{n-1} z^n = z(A(z) - a_0)$$

$$\sum_{n\geq 2} a_{n-2} z^n = z^2 A(z)$$

Ubacujemo ove izraze nazad u relaciju

$$A(z) - a_0 - a_1 z = 5z(A(z) - a_0) - 6z^2 A(z)$$

Uvedemo početne uslove $a_0 = 6$ i $a_1 = 30$

$$A(z) - 6 - 30z = 5z(A(z) - 6) - 6z^2 A(z)$$

Pomerimo sve članove sa $A(z)$ na levu stranu i članove bez $A(z)$ na desnu

$$A(z) - 5zA(z) + 6z^2 A(z) = 6$$

Odavde je $A(z) = \frac{6}{1-5z+6z^2} = \frac{18}{1-3z} - \frac{12}{1-2z}$.

Sada, da bismo našli zatvorenu formu za $A(z)$, koristićemo sumu u obliku geometrijskog niza.

Za prvi član

$$\frac{1}{1-2z} = \sum_{n\geq 0} (2z)^n = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n$$

Dakle, prvi član postaje

$$\frac{-12}{1-2z} = -12\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$$

Za drugi član

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n\geq 0}(3z)^n = \sum_{n\geq 0} 3^n z^n$$

Dakle, drugi član postaje

$$\frac{18}{1-3z} = 18\sum_{n\geq 0} 3^n z^n$$

Sada možemo da napišemo $A(z)$ kao sumu

$$A(z) = -12\sum_{n\geq 0} 2^n z^n + 18\sum_{n\geq 0} 3^n z^n$$

tj.

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} \left(-12\cdot 2^n + 18\cdot 3^n\right) z^n$$

Dakle, zatvorena forma za $A(z)$ je

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} \left(-12\cdot 2^n + 18\cdot 3^n\right) z^n$$

Sledi da je eksplicitna formula za a_n jednaka

$$a_n = 6(3^{n+1} - 2^{n+1})$$

Primer 2 (*formiranje rekurentne relacije*) Računarski sistem smatra niz decimalnih cifara važećom kodnom rečju ako taj niz sadrži paran broj nula. Na primer, 1230407869 je validna kodna reč, dok 120987045608 nije. Postavite rekurentnu relaciju za a_n.

Rešenje

Za a_1 imamo 10 mogućih jednocifrenih nizova (brojevi od 0 do 9). Međutim, broj 0 nije validan jer sadrži samo jednu cifru 0, što nije paran broj. Dakle, za $a_1 = 9$ postoji 9 validnih jednocifrenih kodnih reči (1, 2, 3, ..., 9).

Zadatak je da pomoću rekurentne relacije pronađemo kako se broj validnih n-cifrenih kodnih reči može povezati sa brojem validnih $n-1$-cifrenih kodnih reči.

Postoje dva disjunktna slučaja prema kojima možemo formirati validnu kodnu reč sa n cifara:

1. **Dodavanje cifre koja nije 0**: Ako imamo validan niz od $n-1$ cifara, možemo mu dodati bilo koju cifru osim 0 (1 do 9). Na ovaj način, broj validnih nizova se povećava za $9a_{n-1}$, jer možemo dodati jednu od 9 cifara na bilo koji od validnih nizova dužine $n-1$.

2. **Dodavanje cifre 0 na nevalidan niz**: Ako imamo nevalidan niz od $n-1$ cifara, i na njega dodamo cifru 0, dobićemo validan niz sa n cifara. Nevalidan niz od $n-1$ cifara mora imati **neparan** broj cifara 0 (jer će dodavanje 0 učiniti ukupan broj 0 cifara parnim). Dakle, broj takvih mogućnosti je broj nevalidnih nizova dužine $n-1$, što je $10^{n-1} - a_{n-1}$, jer postoji ukupno 10^{n-1} mogućih nizova, a a_{n-1} njih je validno.

Unija ova dva disjunktna skupa je, po principu zbira, ukupan broj validnih n-cifrenih kodnih reči:

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1})$$

tj.

$$a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}, a_1 = 9$$

Primer 2 (*formiranje generatorne funkcije*) Pretpostavimo da je važeća kodna reč n-cifreni broj u decimalnom zapisu koji sadrži paran broj nula. Neka a_n označava broj važećih kodnih reči dužine n. U prošlom zadatku pokazali smo da niz $\{a_n\}$ zadovoljava rekurentnu relaciju $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ i početni uslov $a_1 = 9$. Koristeći generetorne funkcije naći eksplicitnu formulu za a_n.

Rešenje

Da bismo pojednostavili rad sa funkcijama generisanja, proširujemo ovu sekvencu tako što postavljamo $a_0 = 1$. Kada dodelimo ovu vrednost a_0 i koristimo rekurentnu relaciju, dobijamo:

$$a_1 = 8a_0 + 10^{1-1} = 8 \times 1 + 1 = 9,$$

što je u skladu sa našim početnim uslovom. (Ima smisla jer postoji jedan kodni niz dužine 0 — prazan string.)

Zatim, pomnožimo obe strane rekurentne relacije sa z^n da bismo dobili:

$$a_n z^n = 8a_{n-1} z^n + 10^{n-1} z^n.$$

Neka $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ bude generatorna funkcija niza $a_0, a_1, a_2, ...$ Sabrali smo obe strane poslednje jednačine počevši od $n = 1$, da bismo dobili

$$A(z) - a_0 = \sum_{n \geq 1} a_n z^n = \sum_{n \geq 1} \left(8a_{n-1} z^n + 10^{n-1} z^n\right).$$

Prva suma se može prepisati kao

$$\sum_{n \geq 1} 8a_{n-1} z^n = 8z \sum_{n \geq 1} a_{n-1} z^{n-1} = 8zA(z),$$

a druga suma je

$$\sum_{n \geq 1} 10^{n-1} z^n = z \sum_{n \geq 0} 10^n z^n = \frac{z}{1 - 10z},$$

prema poznatoj formuli za sumu geometrijskog niza.

Dakle, imamo

$$A(z) - 1 = 8zA(z) + \frac{z}{1 - 10z}.$$

Rešavanjem za $A(z)$, dobijamo

$$A(z) = \frac{1-9z}{(1-8z)(1-10z)}.$$

tj.

$$A(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-8z} + \frac{1}{1-10z}\right).$$

Koristeći formulu za generatornu funkciju geometrijskih nizova sledi

$$A(z) = \frac{1}{2}(\sum_{n\geq 0} 8^n z^n + \sum_{n\geq 0} 10^n z^n).$$

Na kraju, dobijamo eksplicitnu formulu za a_n, broj validnih n-cifrenih kodnih reči

$$a_n = \frac{1}{2}(8^n + 10^n).$$

1.4.3 Rešavanje celobrojnih jednačina pomoću generatornih funkcija

Primer Majica se prodaje u tri boje: plavoj, sivoj i beloj. Kupac želi 3 komada: S i B do 1 komad, P do 3. Na koliko načina se ova kupovina može ostvariti?

Rešenje Prvi faktor: 0-3 plave majice, druga dva za 0 ili 1 sivu/belu majicu Traženi broj kombinacija sa ponavljanjem je koeficijent uz x^3, jednak je 4 i odgovara sledećim kombinacijama: PPP, PPS, PPB, PBS.

Primer Pronađi generatornu funkciju za broj načina na koji agent za oglašavanje može da kupi n minuta ($n \in Z^+$) vremena za reklame ako vremenski slotovi za reklame dolaze u blokovima od 30, 60 ili 120 sekundi.

Rešenje Neka 30 sekundi predstavlja jednu vremensku jedinicu. Tada je odgovor broj celobrojnih rešenja za jednačinu

$$a + 2b + 4c = 2n \quad , \quad 0 \leq a, b, c,$$

Asocirana generatorna funkcija je

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x^2 + x^4 + \dots)(1 + x^4 + x^8 + \dots)$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^4},$$

i koeficijent uz

$$x^{2n}$$

predstavlja broj particija od $2n$ u jedinice, dvojke i četvorke, što je rešenje zadatka.

Primer Kutija sadrži 30 crvenih, 40 plavih i 50 belih lopti. Lopte iste boje se ne razlikuju međusobno. Na koliko načina se može izabrati 70 lopti iz kutije?

Rešenje Broj koji tražimo je jednak koeficijentu uz x^{70} u proizvodu

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{30})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{40})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{50}).$$

Ovaj izraz nećemo množiti, nego ćemo iskoristiti činjenicu da je

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{30} = \frac{1 - x^{31}}{1 - x},$$

što je zbir konačne geometrijske progresije.

Ceo proizvod se sada može napisati kao

$$\frac{1 - x^{31}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{41}}{1 - x} \cdot \frac{1 - x^{51}}{1 - x} = (1 - x)^{-3}(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51}).$$

Činilac $(1 - x)^{-3}$ može da se razvije u stepeni red prema uopštenoj binomnoj teoremi:

$$\sum_{n \geq 0} \binom{-3}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} (-1)^n (-1)^n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} x^n.$$

U proizvodu preostalih činilaca $(1 - x^{31})(1 - x^{41})(1 - x^{51})$ je dovoljno naći koeficijente samo za stepene do x^{70}. Stoga dobijamo proizvod $\left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2}x + \binom{4}{2}x^2 + \binom{5}{2}x^3 + \dots\right) \cdot (1 - x^{31} - x^{41} - x^{51} + \dots)$, gde u drugom paru zagrada stoji ... umesto stepena većih od x^{70} (najmanji stepen od tih ostalih članova je $x^{31} \cdot x^{41} = x^{72}$).

Koeficijent uz x^{70} u ovom proizvodu, što je i traženi broj izbora lopti iz kutije, jednak je

$$\binom{70 + 2}{2} - \binom{70 + 2 - 31}{2} - \binom{70 + 2 - 41}{2} - \binom{70 + 2 - 51}{2} = 1061.$$

1.4.4 Dokazivanje identiteta pomoću generatornih funkcija

Zadatak Koristeći generatorne funkcije, dokazati identitet

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Posmatraćemo identitet

$$(1 + x)^n \cdot (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}.$$

Prema binomnoj formuli, koeficijent uz x^n u razvoju stepena binoma $(1 + x)^{2n}$ jednak je $\binom{2n}{n}$. Ako posmatramo polinom $p(x)$ sa leve strane i primenimo binomnu formulu, dobijamo

$$p(x) = \left(1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right) \cdot \left(1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right).$$

Primetimo da je

$$p(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i \cdot \sum_{i \geq 0} b_i x^i, \quad \text{gde je } a_i = b_i = \begin{cases} \binom{n}{i}, & i \in \{0, \dots, n\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Prema definiciji proizvoda, dobijamo

$$p(x) = \sum_{m=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{j} \binom{n}{m-j} \right) x^m + \sum_{m=n+1}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j b_{m-j} \right) x^m.$$

Koeficijent uz x^n dobijamo kada u prvoj sumi posmatramo član za koji je $m = n$, a to je

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

1.4.5 Neke korisne generatorne funkcije

G(z)	Zatvorena forma	Otvorena forma
$\frac{1}{1-z}$	$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$	$1 + z + z^2 + z^3 + ...$
$\frac{1}{1+z}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$	$1 - z + z^2 - z^3 + ...$
$\frac{1}{1-z^m}$	$\sum_{k=0}^{\infty} z^{mk}$	$1 + z^m + z^{2m} + z^{3m} + ...$
$\frac{1}{1-cz}$	$\sum_{k=0}^{\infty} c^k z^k$	$1 + cz + c^2 z^2 + c^3 z^3 + ...$
$\frac{1}{(1-z)^m}$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} z^k$	$1 + mz + \binom{m+1}{2} z^2 + \binom{m+2}{3} z^3 + ...$
$\frac{z}{(1-z)^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} kz^k$	$0 + z + 2z^2 + 3z^3 + ...$
$(1+z)^c$	$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{c}{k} z^k$	$1 + cz + \binom{c}{2} z^2 + \binom{c}{3} z^3 + ...$
e^z	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$	$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...$

1.5 Zadaci

Zadatak 1. Naći zatvorenu formu genratorne funkcije $\sum_{n \geq 0} (n+1)^2 z^n$.

Zadatak 2. Koliko različitih načina postoji da se osam istih kolačića podeli među troje različite dece, ako svako dete dobije najmanje dva kolačića, a najviše četiri?

Zadatak 3. Pronađite eksplicitnu formulu Fibonačijevog niza koristeći generatorne funkcije.