Zadatak 6

Grupa 8

Oktobar 2024

1 Generatorne funkcije

U diskretnoj matematici, *generatorne funkcije* predstavljaju algebarske alate koji omogućavaju kodiranje niza brojeva (najčešće sekvenci celih brojeva) u obliku formalne funkcije. Ove funkcije se koriste za proučavanje svojstava nizova, kao i za rešavanje kombinatornih problema. Generatorne funkcije mogu se shvatiti kao formalne serije koje sažimaju sekvence i omogućavaju manipulisanje njihovim osobinama putem algebarskih operacija.

1.1 Definicija

Neka je $a_0, a_1, a_2, \ldots$ niz realnih brojeva (ili složenih brojeva). **Obična generatna funkcija** za ovaj niz je formalna potencijalna serija:

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Ova funkcija omogućava kodiranje celog niza a_n u jednoj funkciji $G(x)$.

Vrste generatornih funkcija

Postoji nekoliko tipova generatornih funkcija, od kojih su najčešće:

1. **Obična generatna funkcija**: $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$
2. **Eksponencijalna generatna funkcija**: Koristi se često kada niz sadrži faktore $n!$, i definisana je kao:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_nx^n}{n!}$$

3. **Dirihleova generatna funkcija**: Koristi se u teoriji brojeva i definisana je kao:

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

Primer

Na primer, za niz $a_n = 1$ za sve $n \geq 0$, obična generatna funkcija je:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{za } |x| < 1$$

Generatorne funkcije se često koriste za pronalaženje formula za nizove, rešenje rekurzivnih relacija, i u kombinatornim problemima, gde olakšavaju rad sa velikim sekvencama na sistematičan način.

1.2 Generatne funkcije kao brojni niz i zatvorena forma

Generatne funkcije su alat koji omogućava prikaz nizova na više različitih načina.

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

Ova generatna funkcija se može prikazati na još dva načina:

1. Kao **brojni niz** $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.
2. Kao **zatvorena forma**, koja predstavlja algebarski izraz za generatnu funkciju u kompaktnom obliku.

1.2.1 Šta je zatvorena forma?

Zatvorena forma je način da generatnu funkciju izrazimo kao jednostavan algebarski izraz koji opisuje beskonačni red. Umesto da koristimo beskonačnu sumu, zatvorena forma nam omogućava direktno izražavanje generatne funkcije koristeći funkcije poput razlomaka ili drugih algebarskih izraza.

Na primer:

- Za brojni niz $(0, 0, 0, \ldots)$, generatna funkcija je $G(z) = 0$ i zatvorena forma je takodje 0.
- Za niz $(1, 0, 0, \ldots)$, generatna funkcija je $G(z) = 1$, a zatvorena forma je 1.
- Za niz $(3, 2, 1, 0, \ldots)$, generatna funkcija je $G(z) = 3 + 2z + z^2$, a zatvorena forma je jednostavno $3 + 2z + z^2$.
- Za geometrijski niz $(1, 1, 1, \ldots)$, zatvorena forma se može izraziti kao $G(z) = \frac{1}{1-z}$.

1.2.2 Pronalaženje zatvorene forme za niz $(1, 1, 1, \ldots)$

Posmatrajmo sada konkretan primer gde svaki član niza ima vrednost 1, tj. $(1, 1, 1, \ldots)$. Njegova generatna funkcija je beskonačan geometrijski red:

$$G(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots$$

Da bismo pronašli zatvorenu formu, koristimo sledeći postupak:

1. Množimo generatnu funkciju sa $(1-z)$:
$$(1-z)G(z) = (1-z)(1+z+z^2+z^3+\dots)$$
2. Raširimo izraz sa desne strane:
$$(1-z)G(z) = 1-z+z-z^2+z^2-z^3+\dots$$
3. Svi sabirci se medjusobno poništavaju osim prvog člana, tako da dobijamo:
$$(1-z)G(z) = 1$$
4. Deljenjem obe strane sa $(1-z)$ dobijamo zatvorenu formu:
$$G(z) = \frac{1}{1-z}$$

Zaključak: Generatna funkcija za niz $(1,1,1,\dots)$ ima zatvorenu formu:
$$G(z) = \frac{1}{1-z},$$
što znači da ovaj beskonačni niz možemo opisati korišćenjem jednostavnog razlomka. Ova zatvorena forma nam omogućava da na kompaktan način radimo sa beskonačnim nizovima.

1.3 Operacije nad generatornim funkcijama

Neka su $A(z)$ i $B(z)$ redom generatorne funkcije nizova $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ i $(b_0, b_1, b_2, \dots)$.

- **Skaliranje**
$$cA(z) = (ca_0, ca_1, ca_2, \dots)$$
Primer: Ako je $A(z) = (1,2,3,\dots)$, tada za $c=2$, dobijamo $2A(z) = (2\cdot 1, 2\cdot 2, 2\cdot 3, \dots) = (2,4,6,\dots)$.

- **Desno pomeranje**
$$z^k A(z) = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{k}, a_0, a_1, \dots)$$
Primer: Ako je $A(z) = (1,2,3,\dots)$ i $k=2$, tada $z^2A(z) = (0,0,1,2,3,\dots)$.

- **Sabiranje**
$$A(z)+B(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$$
Primer: Ako je $A(z) = (1,2,3,\dots)$ i $B(z) = (3,2,1,\dots)$, tada $A(z) + B(z) = (1+3, 2+2, 3+1, \dots) = (4,4,4,\dots)$.

- **Množenje**

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \right) z^n$$

Primer: Ako su $A(z) = (1, 2, 3, \dots)$ i $B(z) = (1, 1, 1, \dots)$, tada će produkt biti složenija suma: $A(z) \cdot B(z) = (1 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1, 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1, \dots)$ $= (1, 3, 6...)$.

- **Diferenciranje**

$$(A(z))' = \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \right)' = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$$

Primer: Ako je $A(z) = (1, 2, 3, 4, \dots)$, tada je diferencirana funkcija $A'(z) = (2 \cdot 1, 3 \cdot 2, 4 \cdot 3, \dots) = (2, 6, 12, \dots)$.

Primer 1 : Odrediti niz čija je zatvorena forma generatorne funkcije

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

- Rešenje: Primenićemo množenje generatornih funkcija.

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \cdot \sum_{n\geq 0} z^n$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{n} 1 \cdot 1 \right) z^n = \sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$$

Dakle, $a_n = n + 1$ je opšti član niza čija generatorna funkcija je $\frac{1}{(1-z)^2}$.

1.4 Uopšteni binomni koeficijent i uopštena binomna formula

Definicija

Neka je k nenegativan ceo broj, a u proizvoljan realan broj. Uopšteni binomni koeficijent, u oznaci $\binom{u}{k}$, definisan je sa

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} & \text{ako je } k > 0, \\ 1 & \text{ako je } k = 0. \end{cases}$$

Sada možemo pokazati da važi uopštena binomna formula. Funkcija $(1+z)^u$ je generatorna funkcija niza $\left(\binom{u}{0}, \binom{u}{1}, \binom{u}{2}, \dots\right)$.

Teorema

(Uopštena binomna formula) Neka je u proizvoljan realan broj. Tada je

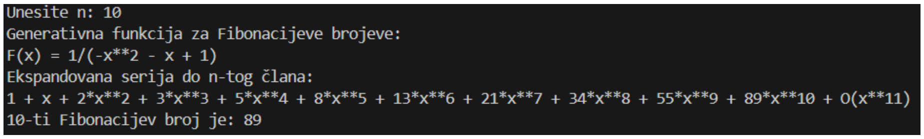
$$(1+z)^u = \sum_{n\geq 0} \binom{u}{n} z^n.$$

1.5 Algoritmi koji koriste generatorne funkcije

Algoritmi koji koriste generativne funkcije mogu da pojednostave i optimizuju mnoge kombinatorne zadatke, uključujući rad sa rekurentnim relacijama, kombinacijama sa i bez ponavljanja, kao i analizom binomnih koeficijenata... Povezivanje ovih funkcija sa temama kao što su kombinatorika, binomni koeficijenti i rekurentne relacije omogućava razvoj algoritama koji rešavaju složene matematičke i računarske probleme efikasno i uz manji broj operacija, čime se štedi vreme i resursi pri izvodjenju računanja.

1.5.1 Algoritam koji racuna n-ti Fibonačijev broj(rekurentnu relaciju) koristeći generatornu funkciju

```
import sympy as sp#biblioteka za simbolicke izraze i
    simbolicke operacije, ovde se korisiti za razvoj u
    red

def fibonaci(n):
    # Definisanje promenljive x
    x = sp.symbols('x')#oznaka za promenljivu
    gf = 1 / (1 - x - x**2)#generativna funkcija za
        fibonacijev niz

    print("Generativna funkcija za Fibonacijeve
        brojeve:")
    print(f"F(x) = {gf}")

    # Ekspandovanje generativne funkcije u seriju do
        n-tog clana
    serija = sp.series(gf, x, 0, n+1)#od 0 do n+1 bez
        n+1-tog clana

    print("Ekspandovana serija do n-tog clana:")
    print(serija)

    # Uzimanje n-tog clana
    rezultat = serija.coeff(x, n)

    return rezultat

# Izracunavanje 10-tog fibonacijevog broja
try:
    n = int(input("Unesite n: "))
    print(f"10-ti Fibonacijev broj je: {fibonaci(n)}\n")
except ValueError:
    print("Neispravan unos.")
```

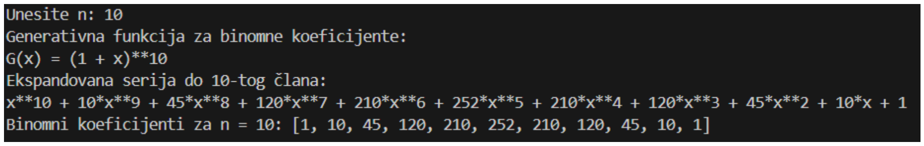


```
Unesite n: 10
Generativna funkcija za Fibonacijeve brojeve:
F(x) = 1/(-x**2 - x + 1)
Ekspandovana serija do n-tog člana:
1 + x + 2*x**2 + 3*x**3 + 5*x**4 + 8*x**5 + 13*x**6 + 21*x**7 + 34*x**8 + 55*x**9 + 89*x**10 + O(x**11)
10-ti Fibonacijev broj je: 89
```

Figure 1: Izgled ulaza i izlaza za algoritam racunanja n-tog Fibonacijevog broja koriscenjem generatorne funkcije

1.5.2 Algoritam koji racuna n-ti binomni koeficijent koristeći generatornu funkciju

```python
import sympy as sp#biblioteka za simbolicke izraze i simbolicke operacije, ovde se korisiti za razvoj u red

def binomni_koeficijenti(n):
    # Generativna funkcija za binomne koeficijente
    x = sp.symbols('x')#oznaka za promenljivu
    gf = (1 + x)**n#generativna funkcija

    print("Generativna funkcija za binomne koeficijente:")
    print(f"G(x) = (1 + x)**{n}")

    # Ekspandovanje generativne funkcije u Tejlorov red
    serija = sp.series(gf, x, 0, n+1)#od 0 do n+1 bez n+1-tog clana

    print(f"Ekspandovana serija do {n}-tog clana:")
    print(serija)

    # izdvajanje koeficijenata iz serije i smestanje u listu
    koeficijenti = [serija.coeff(x, k) for k in range(n+1)]

    return koeficijenti

# Racunanje svih binomnih koeficijenata za n = 5
try:
    n = int(input("Unesite n: "))
    print(f"Binomni koeficijenti za n = {n}: {binomni_koeficijenti(n)}\n")
except ValueError:
    print("Neispravan unos.")
```



```
Unesite n: 10
Generativna funkcija za binomne koeficijente:
G(x) = (1 + x)**10
Ekspandovana serija do 10-tog člana:
x**10 + 10*x**9 + 45*x**8 + 120*x**7 + 210*x**6 + 252*x**5 + 210*x**4 + 120*x**3 + 45*x**2 + 10*x + 1
Binomni koeficijenti za n = 10: [1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
```

Figure 2: Izgled ulaza i izlaza za algoritam racunanja n-tog binomnog koeficijenta koriscenjem generatorne funkcije

1.5.3 Algoritam koji racuna kombinacije sa ponavljanjem koristeći generatornu funkciju

```python
import sympy as sp#biblioteka za simbolicke izraze i simbolicke operacije, ovde se korisiti za razvoj u red

def kombinacije_sa_ponavljanjem(n, k):
    # Generativna funkcija za kombinacije sa ponavljanjem
    x = sp.symbols('x')#oznaka za promenljivu
    gf = (1 / (1 - x))**n#generativna funkcija za kombinacije sa ponavljanjem

    print("Generativna funkcija za kombinacije sa ponavljanjem:")
    print(f"G(x) = {gf}")

    # Ekspandovanje generativne funkcije u seriju
    series_expansion = sp.series(gf, x, 0, k+1)#od 0 do k+1 bez k+1-tog clana

    print(f"Ekspandovana serija do {k}-tog clana:")
    print(series_expansion)

    # Ekstraktovanje k-tog koeficijenta
    rezultat = series_expansion.coeff(x, k)#izdvajanje k-tog clana

    return rezultat

# Racunanje broja kombinacija sa ponavljanjem
try:
    n = int(input("Unesite n: "))
    k = int(input("Unesite k: "))
    print(f"Broj kombinacija sa ponavljanjem za n = {n} i k = {k} je: {kombinacije_sa_ponavljanjem(n, k)}\n")
except ValueError:
    print("Neispravan unos.")
```

```
Unesite n: 10
Unesite k: 5
Generativna funkcija za kombinacije sa ponavljanjem:
G(x) = (1 - x)**(-10)
Ekspandovana serija do 5-tog člana:
1 + 10*x + 55*x**2 + 220*x**3 + 715*x**4 + 2002*x**5 + O(x**6)
Broj kombinacija sa ponavljanjem za n = 10 i k = 5 je: 2002
```

Figure 3: Izgled ulaza i izlaza za algoritam racunanja kombinacija sa ponavljanjem koriscenjem generatorne funkcije

1.6 Zadaci

Zadatak 1

Neka je niz $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definisan relacijom $a_0 = 1$ i $a_n = 3a_{n-1}$ za $n \geq 1$. Nadjite generatornu funkciju za niz $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

Rešenje:

Relacija rekurzije nam govori da se svaki sledeći član niza može izraziti kao prethodni član pomnožen sa 3. Na taj način dobijamo niz:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \cdot 1 = 3, \quad a_2 = 3 \cdot 3 = 9, \quad a_3 = 3 \cdot 9 = 27, \ldots$$

Niz $\{a_n\}$ je oblika $a_n = 3^n$, jer svaki član predstavlja stepen broja 3.

Generatorna funkcija za niz $\{a_n\}$ definiše se kao:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n.$$

S obzirom na to da je ovo geometrijski red sa količnikom $3z$, poznato je da suma reda glasi:

$$A(z) = \frac{1}{1-3z}, \quad \text{za } |z| < \frac{1}{3}.$$

Zadatak 2

Neka je niz $\{a_n\}_{n\geq 0}$ definisan relacijom $a_0 = 1$, $a_1 = 9$ i $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ za $n \geq 2$. Nadjite generatornu funkciju za niz $\{a_n\}_{n\geq 0}$.

Rešenje:

Rekurzivna relacija nam kaže da se svaki član niza može izraziti kao linearna kombinacija prethodna dva člana. Postavljamo generatornu funkciju:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Zbog rekurzije, možemo izraziti $A(z)$ u terminima $zA(z)$ i $z^2A(z)$:

$$A(z) - a_0 - a_1 z = 6z(A(z) - a_0) - 9z^2 A(z).$$

Zamenom $a_0 = 1$ i $a_1 = 9$, dobijamo:

$$A(z) = \frac{1 + 3z}{(1 - 3z)^2}.$$

Zadatak 3

Odrediti generatornu funkciju za niz $\{a_n\}$ gde $a_n = n + 1$.

Rešenje:
Ovaj niz se jednostavno menja za svako n: $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3$, i tako dalje. Zbog ovog oblika, možemo koristiti standardnu formulu za sumu:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) z^n.$$

Koristeći poznatu sumu za aritmetički niz, dobijamo:

$$A(z) = \frac{1}{(1 - z)^2}.$$

Zadatak 4

Izračunati generatornu funkciju za niz $\{a_n\}_{n \geq 0}$ gde je $a_n = 8a_{n-1} + 10^{n-1}$ sa $a_0 = 1$.

Rešenje:
Za generatornu funkciju definišemo:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Korišćenjem rekurzivne relacije, formiramo jednadžbu:

$$A(z) = \frac{1 - 9z}{(1 - 8z)(1 - 10z)}.$$

Ova formula proizilazi iz rekurzivne relacije koja uključuje geometrijski niz.

Zadatak 5

Za niz $\{a_n\}_{n \geq 0}$ definisan sa $a_n = (2n+1)3^n$, odrediti generatornu funkciju $A(z)$.

Rešenje:
Niz ima formu $a_n = (2n + 1)3^n$, pa se generatorna funkcija može napisati kao:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) 3^n z^n.$$

Zbog ovog oblika, svaki član može biti prikazan u funkciji z i konstantnog faktora.

Zadatak 6

Odrediti generatornu funkciju za niz $\{b_n\}_{n\geq 0}$ gde je $b_n = n^2$.

Rešenje:
Koristimo poznatu formulu za kvadratni niz, gde je:

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}.$$

Zadatak 7

Odrediti generatornu funkciju za niz $\{c_n\}_{n\geq 0}$ gde je $c_n = 2^n$.

Rešenje:
Ovaj niz predstavlja geometrijski niz sa količnikom $2z$, te je:

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}.$$

Zadatak 8

Dat je skup A sa osobinom $|A| = n+1$, $n \geq 0$. Broj podskupova neparne kardinalnosti jednak je 2^n i isti je toliki broj podskupova parne kardinalnosti. Potrebno je dokazati ovu tvrdnju koristeći rekurentne relacije i generatorne funkcije.

Rešenje

Generatorna funkcija za broj podskupova skupa sa $n+1$ elemenata sa tačno k elemenata jeste:

$$(1+x)^{n+1}.$$

Zašto koristimo ovu funkciju? Svaki element skupa A ima dve opcije — može biti uključen ili isključen iz podskupa. Ova binarna odluka daje faktor $(1+x)$ za svaki element. Kada imamo $n+1$ elemenata, rezultat je $(1+x)^{n+1}$, koji generiše sve moguće podskupove preko stepena x.

U izrazu $(1+x)^{n+1}$, članovi sa parnim stepenima x predstavljaju broj podskupova parne kardinalnosti, dok članovi sa neparnim stepenima predstavljaju broj podskupova neparne kardinalnosti.

Posmatramo vrednosti funkcije za $x = 1$ i $x = -1$:

$$(1+1)^{n+1} = 2^{n+1},$$

$$(1-1)^{n+1} = 0.$$

Kada zamenimo $x = 1$, dobijamo ukupan broj podskupova, koji je 2^{n+1}. Zamenom $x = -1$, svi članovi sa neparnim stepenima x poništavaju se, što znači da je zbir podskupova parne kardinalnosti jednak zbiru podskupova neparne kardinalnosti. Tako zaključujemo da je broj podskupova parne i neparne kardinalnosti jednak 2^n.

Zadatak 9

Napisati otvoreni oblik za izraz

$$\frac{1}{1+2z} + \frac{1}{1-3z}.$$

Rešenje

Koristimo geometrijski red za svaku zatvorenu formu. Za izraz $\frac{1}{1+2z}$, primenjujemo formulu za geometrijski red:

$$\frac{1}{1+2z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-2z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k z^k.$$

Ovaj razvoj funkcioniše jer imamo oblik $\frac{1}{1-u}$ koji razvijamo kao $\sum u^k$.
Za $\frac{1}{1-3z}$ primenjujemo sličan razvoj:

$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{k=0}^{\infty} (3z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3^k z^k.$$

Kombinovanjem oba reda dobijamo:

$$\frac{1}{1+2z} + \frac{1}{1-3z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left((-2)^k + 3^k\right) z^k.$$

Ovaj izraz daje otvoreni oblik koji tražimo.

Zadatak 10

Koristeći Njutnovu binomnu formulu, razviti sledeće zatvorene forme u otvoreni oblik:

(a) $\left(1 + \frac{1}{2}z\right)^{-5}$

(b) $\frac{1}{(1-2z)^7}$

Rešenje

Koristimo binomni red za izraze oblika $(1+x)^r$ kada je eksponent negativan ili ceo broj. Opšti oblik je:

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k, \quad \text{gde je} \quad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}.$$

2. **Rešenje za deo (a)**: Za izraz $\left(1+\frac{1}{2}z\right)^{-5}$, postavljamo $r=-5$ i $x=\frac{1}{2}z$:

$$\left(1+\frac{1}{2}z\right)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-5}{k} \left(\frac{1}{2}z\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-5}{k} \frac{z^k}{2^k}.$$

Ovaj red predstavlja otvoreni oblik za $\left(1+\frac{1}{2}z\right)^{-5}$.

3. **Rešenje za deo (b)**: Za izraz $\frac{1}{(1-2z)^7}$, imamo $r=7$ i $x=2z$:

$$\frac{1}{(1-2z)^7} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k}{k} (2z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{6+k}{k} 2^k z^k.$$

Ovde smo iskoristili formulu za pozitivne eksponente u binomnom razvoju. Ovaj izraz predstavlja traženi otvoreni oblik za $\frac{1}{(1-2z)^7}$.

Zadatak 11

Koristeći generatorne funkcije, rešiti rekurentne relacije

a)

$$a_0 = 1, \quad a_n = 3a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Definišemo generatorku funkciju $A(x)$ za niz $\{a_n\}$ kao:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Koristimo datu rekurentnu relaciju $a_n = 3a_{n-1}$ za $n \geq 1$. Takodje, znamo da je $a_0 = 1$. Generatorka funkcija se može zapisati kao:

$$A(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

S obzirom na rekurentnu relaciju $a_n = 3a_{n-1}$, za $n \geq 1$ možemo napisati:

$$A(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^n.$$

Iz sume $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1}x^n$ možemo izvući konstantu 3 ispred i preurediti indeks sume koristeći promenu $k = n - 1$, što daje:

$$A(x) = a_0 + 3x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Prepoznajemo da je $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A(x)$, pa dobijamo:

$$A(x) = a_0 + 3xA(x).$$

Zamenjujemo vrednost $a_0 = 1$:

$$A(x) = 1 + 3xA(x).$$

Izolujemo $A(x)$ tako što prebacimo članove sa $A(x)$ na levu stranu:

$$A(x) - 3xA(x) = 1,$$

odnosno,

$$A(x)(1 - 3x) = 1.$$

Deljenjem obe strane sa $1 - 3x$ dobijamo:

$$A(x) = \frac{1}{1 - 3x}.$$

Primetimo da je izraz $\frac{1}{1-3x}$ geometrijski red sa količnikom $3x$, pa ga možemo razviti u obliku:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n.$$

Iz ovog razvoja možemo zaključiti da je:

$$a_n = 3^n, \quad \text{za } n \geq 0.$$

Rešenje rekurentne relacije je:

$$a_n = 3^n.$$

Ovime smo dobili eksplicitnu formulu za niz $\{a_n\}$ koristeći generatorku funkciju.

b)

$$a_0 = 3, \quad a_1 = -12, \quad a_n = -5a_{n-1} + 36a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Dati su početni uslovi i rekurentna relacija:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = -12, \quad a_n = -5a_{n-1} + 36a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Definišemo generatorku funkciju kao:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Koristeći rekurentnu relaciju za a_n, dobijamo:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (-5a_{n-1} + 36a_{n-2}) x^n.$$

Rastavljamo sumu:

$$A(x) = a_0 + a_1 x - 5 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 36 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n.$$

Prvi član je:

$$a_0 = 3.$$

Drugi član je:

$$a_1 x = -12x.$$

Za treći član, pomeranjem indeksa $n \to n+1$, dobijamo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = x(A(x) - a_0).$$

Za četvrti član, pomeranjem indeksa $n \to n+2$, dobijamo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 A(x).$$

Zamenjujemo ove izraze u generatorku funkciju:

$$A(x) = 3 - 12x - 5x(A(x) - 3) + 36x^2 A(x).$$

Sredjujemo izraz:

$$A(x) = 3 - 12x - 5xA(x) + 15x + 36x^2 A(x).$$

Izolujemo $A(x)$:

$$A(x)(1 + 5x - 36x^2) = 3 - 12x + 15x.$$

Zbir s desne strane možemo dalje urediti:

$$A(x)(1 + 5x - 36x^2) = 3 + 3x.$$

Konačno, dobijamo zatvorenu formu za generatorku funkciju:

$$\boxed{A(x) = \frac{3 + 3x}{1 + 5x - 36x^2}}.$$

Zadatak 12

Koristeći generatorke funkcije, rešiti rekurentne relacije:

(a) $a_0 = 1$, $a_n = 3a_{n-1} + 7$, $n \geq 1$,

(b) $a_0 = 8$, $a_n = 24a_{n-1} - 144$, $n \geq 1$.

(a) $a_0 = 1$**,** $a_n = 3a_{n-1} + 7$**,** $n \geq 1$

Imamo rekurentnu relaciju:

$$a_0 = 1, \quad a_n = 3a_{n-1} + 7, \quad n \geq 1.$$

Definišemo generatorku funkciju kao:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Koristeći rekurentnu relaciju za a_n, dobijamo:

$$A(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (3a_{n-1} + 7)x^n.$$

Sada rastavljamo sumu:

$$A(x) = a_0 + 3\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n + 7\sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Prvi član je:

$$a_0 = 1.$$

Za drugi član, pomeranjem indeksa $n \to n + 1$, dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = xA(x).$$

Treći član predstavlja geometrijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Zamenjujemo ove izraze u generatorku funkciju:

$$A(x) = 1 + 3xA(x) + 7 \cdot \frac{x}{1-x}.$$

Izolujemo $A(x)$:

$$A(x) - 3xA(x) = 1 + \frac{7x}{1-x}.$$

$$A(x)(1-3x) = 1 + \frac{7x}{1-x}.$$

Sredjujemo izraz u desnoj strani tako što sve izrazimo preko zajedničkog imenitelja:

$$A(x) = \frac{1(1-x) + 7x}{(1-x)(1-3x)}.$$

$$A(x) = \frac{1-x+7x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{1+6x}{(1-x)(1-3x)}.$$

Dakle, zatvorena forma generatorke funkcije za prvu rekurentnu relaciju je:

$$\boxed{A(x) = \frac{1+6x}{(1-x)(1-3x)}}.$$

(b) $a_0 = 8$**,** $a_n = 24a_{n-1} - 144$**,** $n \geq 1$

Imamo:

$$a_0 = 8, \quad a_n = 24a_{n-1} - 144, \quad n \geq 1.$$

Definišemo generatorku funkciju kao:

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Koristeći rekurentnu relaciju za a_n, dobijamo:

$$A(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (24a_{n-1} - 144)x^n.$$

Sada rastavljamo sumu:

$$A(x) = a_0 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - 144 \sum_{n=1}^{\infty} x^n.$$

Prvi član je:

$$a_0 = 8.$$

Za drugi član, pomeranjem indeksa $n \to n+1$, dobijamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = xA(x).$$

Treći član predstavlja geometrijski red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}.$$

Zamenjujemo ove izraze u generatorku funkciju:

$$A(x) = 8 + 24xA(x) - 144 \cdot \frac{x}{1-x}.$$

Izolujemo $A(x)$:

$$A(x) - 24xA(x) = 8 - \frac{144x}{1-x}.$$

$$A(x)(1-24x) = 8 - \frac{144x}{1-x}.$$

Sredjujemo izraz u desnoj strani tako što sve izrazimo preko zajedničkog imenitelja:

$$A(x) = \frac{8(1-x) - 144x}{(1-x)(1-24x)}.$$

$$A(x) = \frac{8 - 8x - 144x}{(1-x)(1-24x)} = \frac{8 - 152x}{(1-x)(1-24x)}.$$

Dakle, zatvorena forma generatorke funkcije za drugu rekurentnu relaciju je:

$$\boxed{A(x) = \frac{8 - 152x}{(1-x)(1-24x)}}.$$

Zadatak 13

Odrediti zatvorenu formu generatorne funkcije niza $(-2, 2, -2, 2, \dots)$.

Niz $(-2, 2, -2, 2, \dots)$ je periodičan, sa periodom 2. Prvi član je -2, drugi član je 2, treći član je opet -2, i tako dalje. Dakle, niz se može opisati formulom:

$$a_n = \begin{cases} -2, & \text{ako je } n \text{ paran} \\ 2, & \text{ako je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

Generatorka funkcija:

Generatorka funkcija za niz $\{a_n\}$ definisana je kao formalna suma:

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Pošto niz ima period 2, možemo pisati:

$$G(x) = -2 + 2x - 2x^2 + 2x^3 - 2x^4 + 2x^5 - \dots$$

Ova suma može se izraziti kao niz beskonačnih geometrijskih redova. Primetimo da se može napisati kao:

$$G(x) = -2(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots)$$

Sada možemo koristiti formulu za sumu geometrijskog reda $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ gde je $|r| < 1$.

Ovde imamo:

$$G(x) = -2 \cdot \frac{1}{1+x}$$

Zatvorena forma generatorke funkcije:

Zatvorena forma generatorke funkcije niza $(-2, 2, -2, 2, \dots)$ je:

$$\boxed{G(x) = \frac{-2}{1+x}}$$