Zadatak 1

Grupa 8

Oktobar 2024

1 Ponavljanje

1.1 Skup

Skup je kolekcija odredjenih, jasno definisanih i različitih elemenata gde njihov redosled nije bitan. Skup se najčešće označava velikim slovima kao što su A, B, C i tako dalje, dok su elementi skupa obično mala slova kao a, b, c.

Na primer, skup A može sadržavati brojeve 1, 2 i 3:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

1.2 Multiskup

Multiskup je kolekcija elemenata u kojoj su elementi grupisani prema njihovim pojavnostima i redosled nije bitan, što znači da isti element može biti prisutan više puta. Multiskup se obično označava sa velikim slovom (npr. M), a broj pojavljivanja elementa x u multiskupu M zapisujemo kao $m_M(x)$, gde je m_M funkcija broja pojavljivanja (multiplicitet).

Na primer, multiskup M može biti:

$$M = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$$

gde element 1 ima multiplicitet $m_M(1) = 2$, element 2 ima $m_M(2) = 1$, a element 3 ima $m_M(3) = 3$.

1.3 Uredjene n-torke

Uredjena n-torka je uredjeni niz od n elemenata, gde je redosled elemenata važan. Uredjena n-torka se obično zapisuje kao niz unutar zagrada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gde su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementi uredjene n-torke.

Na primer, uredjena trojka (a, b, c) ima elemente a, b i c koji su poredjani tim redom, a uredjena četvorka (x_1, x_2, x_3, x_4) ima četiri elementa x_1, x_2, x_3 i x_4.

1.4 Operacije nad skupovima

1.4.1 Unija

Unija dva skupa A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A ili u skupu B, ili u oba skupa. Unija se označava sa $A \cup B$.

Na primer, neka su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$. Tada je unija skupova A i B:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$$

Unija više od dva skupa može se generalizovati kao:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$$

1.4.2 Presek

Presek dva skupa A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i u skupu B. Presek se označava sa $A \cap B$.

Na primer, neka su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$. Tada je presek skupova A i B:

$$A \cap B = \{3\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Presek više od dva skupa može se generalizovati kao:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

1.4.3 Razlika

Razlika dva skupa A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu A i ne nalaze se u skupu B. Razlika se označava sa $A \setminus B$.

Na primer, neka su skupovi $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$. Tada je razlika skupova A i B:

$$A \setminus B = \{1, 2\}$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

1.4.4 Komplement

Komplement skupa A u odnosu na univerzalni skup U je skup svih elemenata koji pripadaju U, ali ne pripadaju A. Označava se kao A' ili $\overline{A}$.

$$A' = \{x \mid x \in U \text{ i } x \notin A\}$$

1.4.5 Podskup

Skup A je **podskup** skupa B ako svaki element skupa A pripada skupu B. Podskup se označava sa $A \subseteq B$.

Na primer, neka su skupovi $A = \{1, 2\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$. Tada je skup A podskup skupa B jer svaki element skupa A pripada skupu B:

$$A \subseteq B$$

Skup A je strog podskup skupa B (označava se kao $A \subset B$) ako su svi elementi skupa A elementi skupa B, ali A nije jednako B.

$$A \subset B \quad \text{(A je strog podskup B)}$$

1.4.6 Dekartov proizvod

Dekartov proizvod dva skupa A i B je skup svih uredjenih parova čiji prvi element pripada skupu A i drugi element pripada skupu B. Dekartov proizvod se označava sa $A \times B$.

Na primer, neka su skupovi $A = \{1, 2\}$ i $B = \{3, 4\}$. Tada je dekartov proizvod skupova A i B:

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

1.5 Osnovne osobine operacija nad skupovima

1.5.1 Komutativnost

Operacija je komutativna ako promena redosleda operanada ne menja rezultat. Za uniju i presek skupova važi:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

1.5.2 Asocijativnost

Operacija je asocijativna ako grupisanje operanada ne menja rezultat. Za uniju i presek skupova važi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

1.5.3 Distributivnost

Operacija unije i preseka su distributivne jedna prema drugoj:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

1.5.4 Idempotentnost

Unija i presek skupa sa samim sobom daju isti skup:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

1.5.5 Neprisutnost

Unija skupa sa praznim skupom daje izvorni skup:

$$A \cup \emptyset = A$$

Presek skupa sa praznim skupom daje prazan skup:

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

1.5.6 Komplementarnost

Skup A i njegov komplement A' zadovoljavaju:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

1.5.7 De Morganovi Zakoni

De Morganovi zakoni povezuju uniju i presek:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

1.6 Relacija

Relacija izmedju dva skupa A i B je podskup Dekartovog proizvoda $A \times B$. To znači da relacija ρ može biti definisana kao:

$$\rho \subseteq A \times B$$

Ako je $(a, b) \in \rho$, kažemo da je a u relaciji sa b i to obeležavamo kao $a \, \rho \, b$.

1.6.1 Primer Relacije

Razmotrićemo dva skupa:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{x, y\}$$

Definišemo relaciju ρ izmedju skupa A i skupa B kao:

$$\rho = \{(1, x), (2, y)\}$$

Ova relacija pokazuje da je:

- Broj 1 povezan sa elementom x
- Broj 2 povezan sa elementom y
- Broj 3 nije povezan sa nijednim elementom iz skupa B

1.7 Funkcija

Funkcija je posebna vrsta relacije koja povezuje svaki element iz skupa A (domena) sa tačno jednim elementom iz skupa B (kodomena). Funkcija f se obično piše kao:

$$f : A \to B$$

Za svaki $a \in A$, postoji jedinstveni $b \in B$ tako da je $f(a) = b$.

Primer

Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definisana kao $f(x) = x^2$, onda funkcija povezuje svaki realan broj sa svojim kvadratom.

1.8 Osnovne osobine funkcija

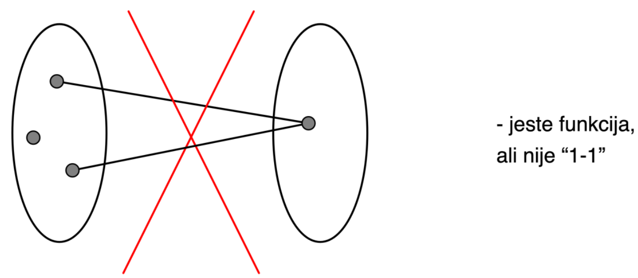
Funkcije mogu imati različite osobine koje definišu njihove karakteristike. Tri osnovne osobine funkcija su:

1.8.1 Injektivnost

Funkcija $f : A \to B$ je **injektivna** (ili *jedan na jedan*) ako različiti elementi u skupu A daju različite elemente u skupu B. Formalno, za sve $a_1, a_2 \in A$:

$$f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2$$

To znači da ne može postojati $a_1 \neq a_2$ za koje važi $f(a_1) = f(a_2)$.

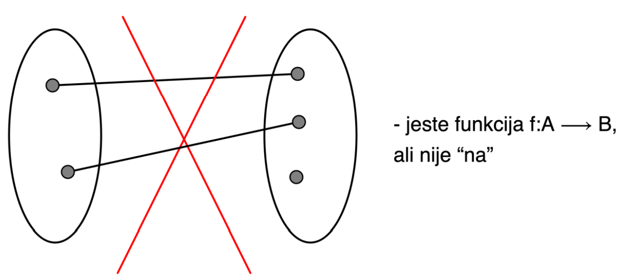


1.8.2 Surjektivnost

Funkcija $f : A \to B$ je **surjektivna** (ili *na*) ako svaki element iz skupa B ima element u skupu A čiji je on slika. Formalno, za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ takvo da:

$$f(a) = b$$

Ovo znači da su svi elementi skupa B pokriveni funkcijom f.



1.8.3 Bijekcija

Funkcija $f : A \to B$ je **bijektivna** ako je istovremeno injektivna i surjektivna. To znači da je svaki element iz skupa A povezan sa jedinstvenim elementom iz skupa B, i svaki element iz skupa B ima tačno jedan element u skupu A čiji je on slika.

$$f \text{ je bijekcija} \iff f \text{ je injekcija i surjekcija}$$

1.9 Princip Matematičke Indukcije

Princip matematičke indukcije je metoda dokaza koja se koristi za pokazivanje da je neka tvrdnja tačna za sve prirodne brojeve. Ovaj princip se sastoji iz tri osnovna koraka:

1.9.1 Baza indukcije

Prvo, pokazujemo da tvrdnja važi za prvi prirodni broj, obično $n = 1$. Ovo se naziva **osnovni** ili **bazni slučaj** .

$$P(1) \text{ je tačno.}$$

1.9.2 Induktivna hipoteza

Zatim, pretpostavljamo da tvrdnja važi za neki prirodni broj k, što se naziva **induktivna pretpostavka** ili **hipoteza**:

$$P(k) \text{ je tačno.}$$

1.9.3 Induktivni korak

Na osnovu hipoteze, pokazujemo da tvrdnja važi i za $k + 1$:

$$P(k) \implies P(k+1) \text{ je tačno.}$$

1.9.4 Zaključak

Ako su prvi i treći korak uspešni, zaključujemo da tvrdnja $P(n)$ važi za sve prirodne brojeve $n \geq 1$.

Formalno, možemo reći:

Ako $P(1)$ je tačno, i ako $P(k)$ implicira $P(k+1)$, onda je $P(n)$ tačno za sve $n \in \mathbb{N}$.

2 Istraživanje odgovora na pitanja

2.1 Šta znači nabrojati i prebrojati elemente nekog skupa?

2.1.1 Definicija

Nabrojati i prebrojati elemente nekog skupa su fundamentalni zadaci u diskretnoj matematici koji se odnose na brojanje elemenata skupa i identifikaciju njihovih karakteristika.

1. **Nabrojati** (engl. *list* ili *enumerate*) znači izlistati sve elemente skupa, što može uključivati eksplicitno navodjenje svakog elementa ili opisivanje pravila po kojem su elementi odredjeni. Na primer, za skup

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, nabrojati elemente bi značilo izlistati sve članove tog skupa: 1, 2, 3, 4, 5.

2. **Prebrojati** (engl. *count*) odnosi se na odredjivanje ukupnog broja elemenata u skupu, tj. kardinalnosti skupa. Na primer, skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ima 5 elemenata, pa je kardinalnost skupa $|S| = 5$.

Prebrojavanje elemenata skupa moze da se definise i na sledeci (formalniji) nacin:

Za $n \in \mathbb{N}$, skup prvih n prirodnih brojeva (bez 0) je

$$N_n := \{1, \ldots, n\}$$

Prebrojavanje konačnog skupa X je odredjivanje broja n za koji postoji bijekcija

$$f : X \to N_n$$

2.1.2 Primena

Enumeracija i prebrojavanje predstavljaju važan deo kombinatorike koji se bavi prebrojavanjem skupa objekata sa odredjenim svojstvima. Skupove moramo prebrojavati da bismo rešili različite vrste problema. Na primer, prebrojavanjem se može utvrditi koliko ima načina da dobijemo *fleš rojal* (engl. *flush royale*) u prvom deljenju pokera. Ili možemo da odredimo da li smo predvideli dovoljno različitih telefonskih brojeva ili računarskih adresa da bi se zadovoljile potrebe za njima. Tehnikama prebrojavanja se odredjuje složenost algoritama, a obimno se koriste i prilikom utvrdjivanja verovatnoća dogadjaja.

Mnoge probleme brojanja možemo formulisati u terminima uredjenih ili neuredjenih rasporeda objekata skupa sa ili bez ponavljanja. Ovi rasporedi, nazvani permutacije i kombinacije, koriste se u mnogim problemima brojanja. Na primer, pretpostavimo da je 100 najboljih učesnika na takmičarskom ispitu, koji je polagalo 2000 učenika, pozvano na banket. Možemo izbrojati moguće skupove od 100 učenika koji će biti pozvani, kao i načine na koje se 10 najboljih nagrada može dodeliti.

Nabrajanje i prebrojavanje elemenata skupa čini osnovu mnogih kombinatoričkih i diskretno-matematičkih tehnika, jer pružaju osnovu za složenije probleme i algoritme.

2.2 Kako se prebrojavaju elementi konačnog skupa?

Kada govorimo o prebrojavanju elemenata konačnog skupa, koristimo nekoliko osnovnih svojstava i tehnika. Neka je S konačni skup, tj. $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ gde je $n \in \mathbb{N}$. Broj n predstavlja broj elemenata u skupu S.

2.2.1 Osobine konačnog skupa

1. Konačnost: Konačan skup je skup sa ograničenim brojem elemenata, što znači da se može prebrojati, za razliku od beskonačnog skupa koji ima beskonačno mnogo elemenata. U ovom slučaju, kažemo da je $|S| = n$.

2. Jedinstvenost elemenata: U konačnom skupu svi njegovi elementi su jedinstveni, tj. ne može biti $x_i = x_j$ za $i \neq j$. Ovo je ključno za prebrojavanje, jer omogućava da svaki element bude prepoznat i ubrojen.

3. Unija i preseci skupova: Ako imamo više konačnih skupova, kao što su A i B, možemo koristiti principe prebrojavanja. Na primer, broj elemenata u uniji dva skupa može se izračunati pomoću formule:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

4. Princip uključivanja i isključivanja: Ova osobina omogućava efikasno prebrojavanje elemenata u složenijim strukturama, kao što su skupovi koji se preklapaju.

2.2.2 Osnovne tehnike prebrojavanja

1. Nabrajanje elemenata nekog konačnog skupa, to jest, uredjivanje svih elemenata nekog skupa u nizu

2. Prebrojavanje elemenata nekog konačnog skupa (kardinalnost)

3. Pitanje postajanja elementa sa nekom zadatom osobinom u konačnom skupu, gde njegova konstrukcija nije neophodna

2.3 Kako se prebrojavaju elementi prebrojivo beskonačnog skupa?

2.3.1 Uvod

Kardinalnost konačnog skupa definisana je kao broj elemenata u skupu. Koristimo kardinalnost konačnih skupova da bismo utvrdili kada imaju istu veličinu ili kada je jedan skup veći od drugog. U ovoj sekciji proširujemo ovaj koncept na beskonačne skupove, definišući šta znači da dva beskonačna skupa imaju istu kardinalnost, što nam omogućava da izmerimo relativne veličine beskonačnih skupova.

Posebno ćemo se baviti prebrojivim beskonačnim skupovima, koji imaju istu kardinalnost kao skup pozitivnih celih brojeva. Pokazaćemo da je skup racionalnih brojeva prebrojivo beskonačan. Takodje ćemo pružiti primer neprebrojivog skupa kada pokažemo da skup realnih brojeva nije prebrojiv.

2.3.2 Definicija kardinalnosti

Sada definišemo šta znači da dva skupa imaju istu veličinu, tj. kardinalnost.

Definicija 1: Skupovi A i B imaju istu kardinalnost ako i samo ako postoji jednoznačna korespondencija izmedju njih. Kada A i B imaju istu kardinalnost, pišemo $|A| = |B|$.

Definicija 2: Ako postoji jednoznačna funkcija iz A u B, kardinalnost skupa A je manja ili jednaka kardinalnosti skupa B, i pišemo $|A| \leq |B|$.

2.3.3 Prebrojivi skupovi

Sada ćemo beskonačne skupove podeliti u dve grupe: one sa istom kardinalnošću kao skup prirodnih brojeva i one sa drugačijom kardinalnošću.

Definicija 3: Skup koji je ili konačan ili ima istu kardinalnost kao skup pozitivnih celih brojeva zovemo prebrojivim. Skup koji nije prebrojiv zovemo neprebrojivim. Kada je beskonačan skup S prebrojiv, označavamo kardinalnost skupa S sa $\aleph_0$.

Primer 1: Pokažimo da je skup neparnih pozitivnih celih brojeva prebrojiv.
Rešenje: Da bismo pokazali da je skup neparnih pozitivnih celih brojeva prebrojiv, prikazaćemo jednoznačnu korespondenciju izmedju ovog skupa i skupa pozitivnih celih brojeva. Posmatrajmo funkciju:

$$f(n) = 2n - 1$$

koja preslikava skup $\mathbb{Z}^+$ u skup neparnih pozitivnih celih brojeva. Pokažimo da je f jednoznačna korespondencija, tako što ćemo dokazati da je f i jednoznačna i na.

Pretpostavimo da je $f(n) = f(m)$, što znači da je

$$2n - 1 = 2m - 1,$$

pa sledi $n = m$. Da je funkcija na, vidimo ako pretpostavimo da je t neparan pozitivan ceo broj. Tada je t za jedan manji od parnog broja $2k$, gde je k prirodan broj. Dakle,

$$t = 2k - 1 = f(k).$$

Zaključak: Beskonačan skup je prebrojiv ako i samo ako je moguće navesti elemente tog skupa u sekvenci (indeksiranoj pozitivnim celim brojevima). Razlog za to je što se jednoznačna korespondencija f iz skupa pozitivnih celih brojeva u skup S može izraziti u terminima sekvence $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gde je $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, $a_n = f(n)$, itd.

Primer 2: Pokažite da je skup svih celih brojeva prebrojiv.
Rešenje: Možemo navesti sve cele brojeve u nizu počevši od 0 i naizmenično koristeći pozitivne i negativne brojeve:

$$0, 1, -1, 2, -2, \ldots$$

Alternativno, mogli bismo naći jednoznačnu korespondenciju izmedju skupa pozitivnih brojeva i skupa svih celih brojeva. Ostavljamo čitaocu da pokaže da je funkcija

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{kada je } n \text{ paran} \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{kada je } n \text{ neparan} \end{cases}$$

takva funkcija. Stoga je skup svih celih brojeva prebrojiv.

Možemo takodje da dokažemo i da je na primer skup pozitivnih racionalnih brojeva prebrojiv i tako dalje.

2.4 Koji principi se mogu prepoznati prilikom prebrojavanja elemenata konačnog skupa?

2.4.1 Princip sume

Ako se broj elemenata nekog konačnog skupa odredjuje pomoću njegove dekompozicije na uniju manjih skupova, razlikuju se slučajevi kada neki od tih skupova imaju zajedničke elemente i kada su svaka dva skupa medjusobno disjunktni. U drugom slučaju koristimo princip sume.

Lema: Ako su A i B disjunktni konačni skupovi $A \cap B = \emptyset$, onda je

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Teorema (princip sume): Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi sa osobinom

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \; i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

Tada je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Dokaz: Indukcijom po n
Baza $n = 2$: Sledi na osnovu leme
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da je $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|$.
Induktivni korak: Dokazaćemo da tvrdjenje važi za $n + 1$ skupova. Na osnovu leme, imamo

$$|(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}|$$

Na osnovu induktivne pretpostavke sledi

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1| + \cdots + |A_n| + |A_{n+1}|$$

što je i trebalo dokazati.

2.4.2 Princip uključenja-isključenja

U slučaju kada se prebrojavaju elementi unije proizvoljnih skupova, može se desiti da neki parovi imaju zajedničke elemente. Tako kada odredjujemo broj elemenata unije dva skupa, prebrojavanjem elemenata jednog, a zatim drugog, dva puta se prebroje elementi preseka tih skupova. Zato se oni na kraju moraju oduzeti.
Lema: Neka su A i B proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Lema: Neka su A,B i C proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Teorema (Princip uključenja-isključenja):Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \dots, A_n$ proizvoljni konačni skupovi. Tada je

$$\left|\bigcup_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

(gde je $\cap A = A$).

Dokaz: Indukcijom po n
Baza $n = 2$: Sledi na osnovu leme
Induktivna pretpostavka: Za n-1 proizvoljnjih konačnih skupova vazi jednakost iz tvrdjenja.
Induktivni korak: Primenom leme i induktivne pretpostavke dobijamo

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \left|A_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| = |A_1| + \left|\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=2}^{n}(A_1 \cap A_i)\right|$$

$$= |A_1| + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I}(A_1 \cap A_i)\right|$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

2.4.3 Princip proizvoda

Kada se prebrojavaju elementi nekog uredjenog skupa, primenjuje se princip proizvoda.

Lema: Neka su A i B konačni skupovi. Broj elemenata skupa A x B jednak je

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Teorema (Princip proizvoda): Neka je $n \geq 2$ i neka su $A_1, \dots, A_n$ konačni skupovi. Tada je

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$$

Dokaz: Indukcijom po n
Baza $n = 2$: Sledi na osnovu Leme
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da je $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot$

$... \cdot |A_n|$.
Induktivni korak: Dokazaćemo da tvrdjenje važi za Dekartov proizvod n+1 skupova. Na osnovu Leme imamo

$$|(A_1 \times ... \times A_n) \times A_{n+1}| = |A_1 \times ... \times A_n| \cdot |A_{n+1}|$$

Prema induktivnoj pretpostavci dalje je

$$|A_1 \times ... \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot ... \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$$

2.4.4 Dirihleov princip

Princip tvrdi da ako imamo više golubova nego rupa u koje su se oni uvukli, onda sigurno postoji bar jedna rupa u kojoj se nalaze bar dva goluba. Važno je napomenuti da je princip egzistencijalnog karaktera, on tvrdi da objekti sa nekom osobinom postoje, ali pri tome ne daje eksplicitnu konstrukciju tih objekata.

Teorema (Dirihleov princip): Za $m, n \in N$, neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ konačni skupovi i neka je

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \{a_1, \ldots, a_m\}.$$

Ako je $m > n$, onda postoji $j \in \{1, \ldots, n\}$ sa osobinom $|A_j| \geq 2$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da za svako $j \in \{1, ..., n\}$ važi

$$|A_j| \leq 1.$$

Tada za broj elemenata u uniji skupova važi

$$m = |A_1 \cup ... \cup A_n| \leq |A_1| + ... + |A_n| \leq n$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $m > n$. Time zaključujemo da pretpostavka nije bila tačna.

Teorema (Uopšteni Dirihleov princip): Za $n, m \in N$, neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ konačni skupovi i neka je

$$A_1 \cup ... \cup A_n = \{a_1, ..., a_m\}.$$

Ako je $m > n \cdot q$ za neko $q \in N$, onda postoji $j \in \{1, ..., n\}$ sa osobinom $|A_j| \geq q + 1$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da za svako $j \in \{1, ..., n\}$ važi

$$|A_j| \leq q.$$

Tada za broj elemenata u uniji skupova važi

$$m = |A_1 \cup ... \cup A_n| \leq |A_1| + ... + |A_n| \leq n \cdot q$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $m > n \cdot q$.

3 Zadaci

Zadatak 1

Odrediti koliko ima petocifrenih brojeva:

1. ukupno,
2. čije su cifre svi parni brojevi,
3. čije sve cifre su neparni brojevi,
4. čija bar jedna cifra je neparan broj,
5. čija bar jedna cifra je paran broj,
6. čija bar jedna cifra je paran broj i bar jedna cifra je neparan broj.

Rešenje. Neka je:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ je petocifren broj}\},$$

$$B = \{x \in A : x \text{ ima sve parne cifre}\},$$
$$C = \{x \in A : x \text{ ima sve neparne cifre}\},$$
$$D = \{x \in A : x \text{ ima bar jednu neparnu cifru}\},$$
$$E = \{x \in A : x \text{ ima bar jednu parnu cifru}\},$$
$$F = \{x \in A : x \text{ ima bar jednu parnu i bar jednu neparnu cifru}\}.$$

U svim slučajevima, koristimo oznaku A_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ za skup cifara koje mogu biti na poziciji i. Petocifrene brojeve možemo predstaviti kao uredjene petorke iz skupa:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5,$$

gde će se ti skupovi razlikovati od slučaja do slučaja.

(i) Ako prva cifra ne može biti 0:

$$A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Na osnovu principa proizvoda:

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| \cdot |A_5| = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 90000.$$

(ii) Iz uslova da prva cifra ne može biti 0 i da su sve cifre parni brojevi, zaključujemo da je:

$$A_1 = \{2, 4, 6, 8\},$$
$$A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

Na osnovu principa proizvoda:

$$|B| = |A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot |A_4| \cdot |A_5| = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2500.$$

(iii) U ovom slučaju je:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = \{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Na osnovu principa proizvoda:

$$|C| = |A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = |A_1|^5 = 5^5 = 3125.$$

(iv) Može se primetiti da je $A = B \cup D$ i $B \cap D = \emptyset$. Tada je na osnovu principa zbira:

$$|A| = |B| + |D|,$$

odakle je:

$$|D| = |A| - |B| = 90000 - 2500 = 87500.$$

(v) Slično kao u prethodnom slučaju, prvo treba primetiti da važi $A = C \cup E$ i $C \cap E = \emptyset$. Tada je na osnovu principa zbira:

$$|A| = |C| + |E|,$$

odakle je:

$$|E| = |A| - |C| = 90000 - 3125 = 86875.$$

(vi) Prema principu uključenja-isključenja:

$$A = D \cup E \quad i \quad F = D \cap E,$$

zaključujemo:

$$|A| = |D| + |E| - |F|,$$

odakle je:

$$|F| = |D| + |E| - |A| = 87500 + 86875 - 90000 = 84375.$$

Zadatak 2

Godina je prestupna ako zadovoljava sledeće osnovne uslove:

1. deljiva je sa 4 i nije deljiva sa 100,
2. deljiva je sa 400.

(A) Koliko ima prestupnih godina u intervalu godina [1501, 2501]?

Rešenje. Neka je A skup godina deljivih sa 4 koje nisu deljive sa 100 i nela je B skup godina deljivih sa 400, sve u periodu izmedju 1501. i 2501. godine. Ako je godina deljiva sa 400, onda je ona deljiva i sa 100, što znači da je $A \cap B = \emptyset$. Tada je broj prestupnih godina u periodu izmedju 1501. i 2501. godine jednak

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Broj godina izmedju 1501. i 2501. godine koje su deljive sa 4, a nisu deljive sa 100, jednak je

$$|A| = 250 - 10 = 240.$$

Skup godina izmedju 1501. i 2501. godine koje su deljive sa 400 jednak je

$$|B| = 3.$$

Znači, ukupno ima 243 prestupne godine.

Zadatak 3

Za date vrednosti p, q i r, odrediti promenljivu t nakon izvršavanja koda napisanog u programskom jeziku Java:

```
public class OdrediT {
    public static void main(String[] args) {
        int t = 0;

        // Prva petlja
        for (int p = 1; p <= 5; p++) {
            t += 2;
        }

        // Druga petlja
        for (int q = 1; q <= 4; q++) {
            t += 3;
        }

        // Treća petlja
        for (int r = 1; r <= 3; r++) {
            t += 4;
        }

        System.out.println("t = " + t);
    }
}
```

Rešenje: Promenljiva t broji korake izvršavanja datog koda (pre samog ispisivanja konačne vrednosti za t). Svakoj vrednosti indeksa petlji p, q, i r odgovara po jedno izvršavanje tela petlje, pri čemu u svakom telu imamo po jednu operaciju. Dodelimo svakom izvršavanju operacije $t+=x$ oznaku iz jednog od tri skupa (u zavisnosti od petlje u okviru koje se izvršava):

$$A_p = \{p_1, p_2, \ldots, p_5\}$$
$$A_q = \{q_1, q_2, \ldots, q_4\}$$
$$A_r = \{r_1, r_2, \ldots, r_3\}$$

Svaka operacija iz skupa odgovara jednom izvršavanju posmatrane naredbe, tako da je na kraju ukupni broj izvršenih operacija:

$$|A_p \cup A_q \cup A_r| = |A_p| + |A_q| + |A_r| = 5 + 4 + 3 = 12.$$

Promenljiva t će biti izračunata kao:

$$t = (5 \times 2) + (4 \times 3) + (3 \times 4) = 10 + 12 + 12 = 34.$$

Na kraju, vrednost promenljive t će biti 34.

Zadatak 4

Za date vrednosti a i b, odrediti promenljivu z nakon izvršavanja koda napisanog u programskom jeziku Java. U ovom slučaju koriste se dve ugnježdene petlje za prebrojavanje parova vrednosti.

```
public class OdrediZ {
    public static void main(String[] args) {
        int z = 0;

        // Prva petlja
        for (int a = 1; a <= 4; a++) {
            // Druga petlja
            for (int b = 1; b <= 3; b++) {
                z += 5;
            }
        }

        System.out.println("z = " + z);
    }
}
```

Rešenje: Promenljiva z broji ukupne korake izvršavanja datog koda. Ovde se koristi tehnika prebrojavanja parova vrednosti izmedju dve promenljive, a i b. Svaka vrednost indeksa a kombinuje se sa svakom vrednošću indeksa b, i svaka kombinacija dodaje vrednost 5 u promenljivu z.

U svakom izvršavanju unutrašnje petlje, dodajemo po 5 na z. Dakle, možemo definisati skupove:

$$A_a = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

$$A_b = \{b_1, b_2, b_3\}$$

Svaki par (a_i, b_j) odgovara jednom izvršavanju tela unutrašnje petlje, a broj ukupnih parova je proizvod brojeva elemenata u oba skupa:

$$|A_a \times A_b| = |A_a| \times |A_b| = 4 \times 3 = 12.$$

Promenljiva z će biti izračunata kao:

$$z = 12 \times 5 = 60.$$

Na kraju, vrednost promenljive z će biti 60.

Zadatak 5

Na koliko načina možemo odabrati grupu od 5 osoba iz grupe od 4 profesora i 7 studenata

a) **ako nema restrikcija,**

b) **tako da u grupi budu tačno 2 profesora,**

c) **tako da u grupi budu barem 3 profesora,**

d) **tako da odredjeni profesor i student ne budu u grupi?**

Rešenje

Neka je:

$$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$$

skup profesora i

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7\}$$

skup studenata. Ukupno imamo 11 osoba.

a) Ako nema restrikcija,

Broj načina da izaberemo 5 osoba iz grupe od 11 je:

$$\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462.$$

b) Tako da u grupi budu tačno 2 profesora,

Prvo biramo 2 profesora iz grupe od 4, a zatim preostalih 3 člana grupe iz grupe od 7 studenata. Broj načina je:

$$\binom{4}{2} \times \binom{7}{3} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 35 = 210.$$

c) Tako da u grupi budu barem 3 profesora,

To možemo rešiti u dva slučaja:

1° Odabrana su tačno 3 profesora. Broj načina je:

$$\binom{4}{3} \times \binom{7}{2} = 4 \times \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 4 \times 21 = 84.$$

2° Odabrana su tačno 4 profesora. Broj načina je:

$$\binom{4}{4} \times \binom{7}{1} = 1 \times 7 = 7.$$

Ukupan broj načina je:

$$84 + 7 = 91.$$

d) Tako da odredjeni profesor i student ne budu u grupi,

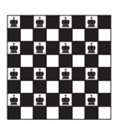
Ako odredjeni profesor i student ne smeju biti u grupi, onda biramo grupu od preostalih 9 ljudi (3 profesora i 6 studenata), tj. broj načina je:

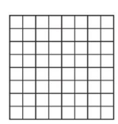
$$\binom{9}{5} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126.$$

Zadatak 6

Koliko se najviše kraljeva može postaviti na šahovsku tablu dimenzije 8×8, tako da se oni medjusobno ne napadaju?

Rešenje: Moguće je postaviti 16 kraljeva i jedan od mogućih razmeštaja je prikazan na slici levo (dovoljno je pronaći jedan takav raspored). Pretpostavimo sada da je moguće rasporediti više od 16 kraljeva. Ako podelimo tablu na 16 delova dimenzija 2×2





(slika desno), onda vi se zbog Dirihleovog principa u jednom delu morala nalaziti bar 2 kralja. Medjutim, zbog načina na koji se kreće po šahovskoj tabli ova dva kralja je se uvek napadaju, te je maksimalan broj kraljeva koji se mogu rasporediti na tabli 16.

Zadatak 7

Koliko najmanje karata treba izvući iz standardnog špila sa 52 karte da bi se medju izvučenim kartama sigurno nalazile:

(a) četiri karte sa istim znakom;

(b) bar tri karte sa znakom srca?

Rešenje:
(a) Ukoliko izvučemo po tri karte od svakog znaka, medju izvučenih 12 karata neće postojati četiri sa istim znakom. Prva naredna karta koju izvučemo će sa tri prethodno izvučene karte obezbediti da imamo četiri karte istog znaka. Prema tome, tek kada izvučemo $3 \cdot 4 + 1 = 13$ karata bićemo sigurni da imamo četiri karte istog znaka.

(b) Najgora situacija koju možemo imati je da izvučemo sve karte sa znakom tref, pik i karo, pre ijedne karte sa znakom herc. Dakle, minimalan broj karata koji treba izvući da bi se medju izvučenim kartama sigurno nalazila tri herca je $3 \cdot 13 + 3 = 42$.

Zadatak 8

Koliko najmanje brojeva iz skupa $\{1, 2, 3, ..., 50\}$ moramo odabrati da bismo bili sigurni da dva odabrana broja daju zbir deljiv sa 5?

Rešenje: Brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, ..., 50\}$ mogu se grupisati po ostatku kada se podele sa 5. Dakle, postoji 5 mogućih ostataka: 0, 1, 2, 3 i 4. Na primer, brojevi sa ostatkom 0 su 5, 10, 15, itd. Ukupno ima 10 brojeva za svaki ostatak. Ako odaberemo 11 brojeva, prema Dirihleovom principu, sigurno će dva odabrana broja imati isti ostatak kada se podele sa 5, i njihov zbir će biti deljiv sa 5. Zato je najmanji broj koji moramo odabrati 11.

Zadatak 9

Na koliko načina možemo obojiti 6 kuglica koristeći 3 boje, ako svaka kuglica može biti obojena samo jednom bojom, a želimo da bar tri kuglice budu obojene istom bojom?

Rešenje: Koristimo Dirihleov princip. Ako imamo 6 kuglica i 3 boje, najmanji broj kuglica koji može biti obojen različitim bojama bez da tri kuglice budu iste boje je 2 kuglice po boji $(2 + 2 + 2 = 6)$. Medjutim, ako obojimo jednu kuglicu više, tada će tri kuglice morati biti obojene istom bojom. Dakle, najmanji broj kuglica koji mora biti obojen da bismo imali tri iste boje je 7.

Zadatak 10

Ako posmatramo skup brojeva od 1 do 100, koliko najmanje brojeva moramo izabrati da bismo sigurno imali dva broja čiji zbir daje broj deljiv sa 10?

Rešenje: Brojevi iz skupa $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ mogu se grupisati prema ostatku kada se podele sa 10. Parovi brojeva koji daju zbir deljiv sa 10 su oni gde je zbir njihovih ostataka jednak 10, na primer (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), i (5, 5). Dakle, imamo 5 različitih parova. Prema Dirihleovom principu, da bismo sigurno imali dva broja iz istog para, moramo izabrati 6 brojeva. Ako izaberemo 6 brojeva, sigurno ćemo imati dva broja čiji zbir daje 10.