Istraživanje binomnih i polinomnih formula

Autor: grupa10

30. oktobar 2024.

1 Binomni koeficijent

1.1 Definicija binomnog koeficijenta

Binomni koeficijent, označen kao $\binom{n}{k}$, definiše se kao broj načina na koje možemo izabrati k elemenata iz skupa od n elemenata. Može se algebarski izraziti kao:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gde je $n!$ (n faktorijal) proizvod svih pozitivnih celih brojeva od 1 do n.

1.2 Algebarska Interpretacija

U algebarskom smislu, binomni koeficijent predstavlja način na koji se elementi mogu kombinovati. Kada želimo da izaberemo k elemenata iz n, koristimo faktorijale da bismo odredili ukupan broj permutacija (načina rasporedjivanja) koji možemo napraviti s tim elementima. U ovoj formuli:

- $n!$ daje ukupan broj načina da se rasporedi n elemenata.
- $k!$ deli taj broj na načine da se rasporedi samo k elemenata koje smo izabrali.
- $(n-k)!$ deli ukupan broj načina na koje možemo rasporediti preostalih $n-k$ elemenata.

1.3 Kombinatorska Interpretacija

Kombinatorski, binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ može se interpretirati kao broj načina za izbor k elemenata iz skupa od n elemenata, gde redosled elemenata nije bitan. Na primer, ako imamo skup $S = \{a, b, c, d\}$ i želimo da izaberemo 2 elementa, moguće kombinacije su:

- $\{a, b\}$

- $\{a, c\}$
- $\{a, d\}$
- $\{b, c\}$
- $\{b, d\}$
- $\{c, d\}$

U ovom slučaju, binomni koeficijent $\binom{4}{2}$ izračunava broj ovih kombinacija, što iznosi 6.

1.4 Paskalov identitet

Za cele brojeve $0 \leq m \leq n$:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Recimo da imamo skup T koji sadrži n elemenata, i elemenat a koji pripada skupu T. Recimo da imamo i skup S koji se sastoji od svih elemenata T osim a. Kada biramo m elemenata is skupa T, što možemo raditi na $\binom{n}{m}$ načina, imamo dva tipa izbora:

1. Izbor sadrži elemenat a i još $m-1$ elemenata iz skupa S. Takvih izbora imamo $\binom{n-1}{m-1}$.
2. Izbor ne sadrži elemenat a, tj. svih m elemenata biramo iz skupa S. Takvih izbora imamo $\binom{n-1}{m}$.

Iz toga, važi da je:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} &= \frac{(n-1)!}{m!((n-1)-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!((n-1)-(m-1))!} \\
&= \frac{(n-1)!}{m(m-1)!(n-m-1)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)(n-m-1)!} \\
&= \frac{(n-m)(n-1)! + m(n-1)!}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-m+m)}{m!(n-m)!} \\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!}
\end{aligned}$$

□

Paskalov trougao

Paskalov identitet, zajedno sa početnim uslovima $\binom{n}{0} = 1$ i $\binom{n}{n} = 1$, se može koristiti za rekurzivnu definiciju binomnih koeficijenata. Geometrijski se struktura može prikazati kao trougao, gde se n-ti red trougla sastoji od binomnih koeficijenata

$$\binom{n}{m}, \ m = 0, 1, \ldots, n$$

Koristeći Paskalov Identitet, zbir svaka dva susedna člana reda daje član u sledećem redu, izmedju njih.

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
n=1 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
n=2 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
n=3 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
n=4 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
n=5 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
n=6 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

1.5 Osobine binomnog koeficijenta

- **Osnovna osobina:**

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{za svako } n$$

  Kombinatorska interpretacija: Postoji samo jedan način da se izabere 0 elemenata iz skupa (ili da se izabere cela grupa).

  Algebarski dokaz: Kada imamo n elemenata, ne biramo nijedan, pa imamo samo jedan podskup: prazan skup.

- **Paskalov identitet:**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

  Kombinatorska interpretacija: Ova identitet predstavlja izbor k elemenata iz n tako što razmatra da li je odredjeni element uključen ili nije. Ako je uključen, preostaje da izaberemo $k-1$ elementa iz preostalih $n-1$ elemenata. Ako nije uključen, tada biramo k elemenata iz $n-1$.

Algebarski dokaz: Koristeći definiciju binomnog koeficijenta:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

- **Suma binomnih koeficijenata:**

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Kombinatorska interpretacija: Ovo može biti interpretirano kao broj svih podskupova skupa od n elemenata. Svaki element može biti ili uključen ili isključen u podskup.

Algebarski dokaz: Može se dokazati korišćenjem binomne formule:

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

1.6 Računanje binomnog koeficijenta

Binomni koeficijent se može efikasno izračunati korišćenjem rekursivnog algoritma ili pomoću programskog jezika, kao što je Python:

```
def binomial_coefficient(n, k):
    if k > n:
        return 0
    if k == 0 or k == n:
        return 1
    return binomial_coefficient(n-1, k-1) + binomial_coefficient(n-1, k)
```

2 Binomna formula

Binomna formula omogućava nam da izrazimo razvijanje izraza $(a+b)^n$ kao sumu članova koji uključuju binomne koeficijente. Ona se definiše kao:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

gde je $\binom{n}{k}$ binomni koeficijent koji predstavlja broj načina da se izabere k elemenata iz skupa od n elemenata.

2.1 Uvodjenje binomne formule

Binomna formula može se smatrati fundamentalnom u kombinatorici i analizi. Koristi se u različitim oblastima matematike, uključujući teoriju verovatnoće, statistiku i algebru. Ova formula nam omogućava da izračunamo potenciju binomnih izraza i istovremeno daje uvid u strukturu članova koji čine ovu potenciju.

2.1.1 Dokaz binomne formule indukcijom

Dokazujemo binomnu formulu indukcijom po n:

- **Osnova indukcije:** Za $n = 0$:

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$$

  Ovaj korak pokazuje da formula važi kada je $n = 0$.

- **Induktivna pretpostavka:** Pretpostavimo da binomna formula važi za neki n, tj.:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- **Induktivni korak:** Sada treba da pokažemo da važi i za $n+1$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n$$

  Zamenjujući izraze koristeći induktivnu pretpostavku:

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}$$

  S obzirom na to da se članovi u prvoj sumi odnose na a, a članovi u drugoj sumi na b, možemo pregrupisati članove tako da uzmemo u obzir sve k:

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

  Ovde koristimo identitet $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$. Ovaj identitet dolazi iz načina na koji možemo izabrati k elemenata ili iz n ili iz $n+1$.

  Na taj način smo pokazali da binomna formula važi za $n+1$, što završava indukciju.

2.2 Kombinatorijska interpretacija

Gledamo binom $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\overset{n}{\cdots}(x+y)$.
Članovi u razvoju binoma $(x+y)^n$ su oblika $x^{n-m}y^m$, za $m = 0, 1, \ldots, n$. Da bi dobili y^m, moramo da iz proizvoda $(x+y)(x+y)\overset{n}{\cdots}(x+y)$ izaberemo m članova iz kojih uzimamo y (samim tim, iz ostalih $n-m$ članova uzimamo x).
Imamo $\binom{n}{m}$ načina da izaberemo, pa je koeficijent uz $x^{n-m}y^m$ jednak $\binom{n}{m}$.

3 Polinomni koeficijenti

3.1 Definicija polinomnog koeficijenta

Polinomni koeficijent $p(n, k)$ definiše se kao broj načina da se k elemenata odabere iz multiskupa sa n elemenata. Ovo uključuje ponavljanje elemenata.

3.2 Osobine polinomnog koeficijenta

Osobine polinomnih koeficijenata uključuju:

- Ako $k > n$, $p(n, k) = 0$.
- Generalizovana forma:

$$p(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$$

3.3 Kombinatorska interpretacija osobina

Osnovna osobina $p(n, k)$ može se interpretirati kao broj načina da se odabere k elemenata iz n elemenata uz mogućnost ponavljanja. Na primer, ako imamo multiskup $S = \{a, a, b\}$, odabir 2 elemenata može biti $\{a, a\}, \{a, b\}, \{b, a\}$.

Zadatak: a) Kreirati sve permutacije multiskupa $M = \{\{a, a, b, b, b\}\}$

b) Krairati uređene parove (B_1, B_2) sa osobinom $B_1 \cup B_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $|B_1| = 2$ i $|B_2| = 3$

Rješenje:

a)

aabbb	ababb	abbab	abbba
baabb	babab	babba	bbaab
bbaba	bbbaa		

Tabela 1: Rješenje zadatka pod a

b)

$(\{1,2\},\{3,4,5\})$	$(\{1,3\},\{2,4,5\})$	$(\{1,4\},\{2,3,5\})$	$(\{1,5\},\{2,3,4\})$
$(\{2,3\},\{1,4,5\})$	$(\{2,4\},\{1,3,5\})$	$(\{2,5\},\{1,3,4\})$	$(\{3,4\},\{1,2,5\})$
$(\{3,5\},\{1,2,4\})$	$(\{4,5\},\{1,2,3\})$		

Tabela 2: Rješenje zadatka pod b

3.4 Algebarski dokaz osobina polinomnog koeficijenta

Algebarski dokaz osobina može se izvesti pomoću rekurzivnog odnosa.

1. **Osnovna osobina**: Kada odabiremo 0 elemenata, postoji samo jedan način to učiniti, bez obzira na veličinu skupa:

$$p(n,0) = 1$$

2. **Rekurzivni odnos**: Ako dodamo još jedan element u multiskup, svaki odabir k elemenata može doći iz skupa koji ne uključuje novi element ili iz skupa koji ga uključuje. Ovo daje:

$$p(n,k) = p(n-1,k) + p(n,k-1)$$

3. **Generalizovana forma**: Kombinovanjem ovih osobina i rekurzivnog odnosa možemo doći do generalizovane forme:

$$p(n,k) = \binom{n+k-1}{k}$$

3.5 Polinomna formula

Polinomna formula opisuje razvoj izraza koji uključuje polinomne koeficijente. Primer:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} p(n,k) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

3.6 Primer

Razmotrite izraz $(x_1 + x_2)^3$. Prema polinomnoj formuli, možemo ga razviti kao:

$$(x_1 + x_2)^3 = \sum_{k_1+k_2=3} p(2,3) x_1^{k_1} x_2^{k_2}$$

Polinomni koeficijent $p(2,3)$ u ovom slučaju iznosi $\binom{3+2-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$. Dakle, izražavanje može izgledati ovako:

$$(x_1 + x_2)^3 = \sum_{k_1+k_2=3} 4 x_1^{k_1} x_2^{k_2} = 4x_1^3 + 12x_1^2 x_2 + 12 x_1 x_2^2 + 4x_2^3$$

4 Zaključak

U ovom dokumentu istražene su binomne i polinomne formule, njihove osobine i primene u kombinatorici.

Binomni i polinomni koeficijenti su ključni u računarstvu, posebno u analizi složenosti algoritama. Koriste se za izračunavanje načina biranja podskupova elemenata, što je važno za pretraživanje i optimizaciju. Takodje, u grafičkim algoritmima pomažu u raspodeli resursa i teoriji informacija.

U mašinskom učenju, ovi koeficijenti doprinose razvoju efikasnijih algoritama za obradu podataka. Time su ne samo teoretski, već i praktično primenljivi u modernim analitičkim alatima.