Generatorne funkcije nizova

Uvod:

Generatorna funkcija niza je formalni stepeni red čiji su koeficijenti članovi datog niza. One omogućavaju rad sa beskonačnim nizovima na sistematičan način. Generatorne funkcije su korisne u diskretnoj matematici za rešavanje različitih kombinatornih problema, modelovanje sekvenci, rekurentnih relacija i analiza nizova.

Generirajuća funkcija za niz (an) predstavlja formalnu sumu oblika:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

Svaki koeficijent an u ovoj seriji odgovara članu niza (an), i ova funkcija generiše niz kada se razvije po stepenima promenljive x. Takve funkcije su veoma korisne za analiziranje i rešavanje rekurentnih relacija, kao i za pronalaženje formula za brojne kombinatorne probleme.

Primer: Napisati rekurentne relacije koje opisuju sledeće nizove:

1. Analiza nizova i rekurentnih relacija:

   Ako imamo niz definisan rekurentnom relacijom, kao što je Fibonačijev niz, možemo koristiti generatorne funkcije za izračunavanje eksplizitnog izraza za n-ti član niza.

   Fibonačijev niz je definisan rekurentnom relacijom:

   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1$$

   Primenom definicije Fibonačijevog niza u obliku generatorne funkcije, dobijamo:

   $$G(x) = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \ldots$$

   Korišćenjem rekurentne relacije Fn = Fn−1 + Fn−2, možemo izraziti G(x) kao:

   $$G(x) = F_0 + F_1 x + (F_0 + F_1) x^2 + (F_1 + F_0 + F_1) x^3 + \ldots$$

   i dobijamo generatornu funkciju oblika:

   $$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

   Ovaj izraz omogućava lakšu analizu niza bez potrebe za direktnim računanjima svakog člana niza.

2. Računanje broja kombinatornih objekata:

   Generatorne funkcije su korisne za prebrojavanje objekata poput permutacija, kombinacija i varijacija.
   Primer: Koristeći generatorne funkcije, odrediti broj neuređenih izbora od m elemenata iz skupa A = $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, ako se elementi mogu ponavljati.

   Pošto su ovo kombinacije sa ponavljanjem, to ponavljanje odgovara eksponentima polinoma
   $$(1 + x + x^2 + \cdots)$$

   Proizvod n takvih polinoma je $(1 + x + x^2 + \cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n} = (1-x)^{-n}$

   $$= \sum_{n\geq 0} \binom{-n}{m} (-1)^m x^m = \sum_{m\geq 0} \binom{n+m-1}{m} x^m$$

   Za svako $0 \leq m \leq n$ koeficijent uz x^m odgovara broju kombinacija sa ponavljanjem od n elemenata klase m.

Operacije nad generatornim funkcijama

Neka su A(z) i B(z) redom generatorne funkcije nizova $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ i $(b_0, b_1, b_2, \dots)$.

Važe sledeća pravila u korišćenju ovih operacija:

1. Skaliranje
$$cA(z) = (ca_0, ca_1, ca_2, \dots)$$
2. Desno pomeranje
$$z^k A(z) = (0, 0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, a_2, \dots)$$
3. Sabiranje
$$A(z) + B(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$$
4. Množenje
$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n\geq 0} (\sum_{j=0}^{n} a_j + b_{n-j}) z^n$$
5. Diferenciranje
$$\big(A(z)\big)' = \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)' = \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$$