Zadatak #10

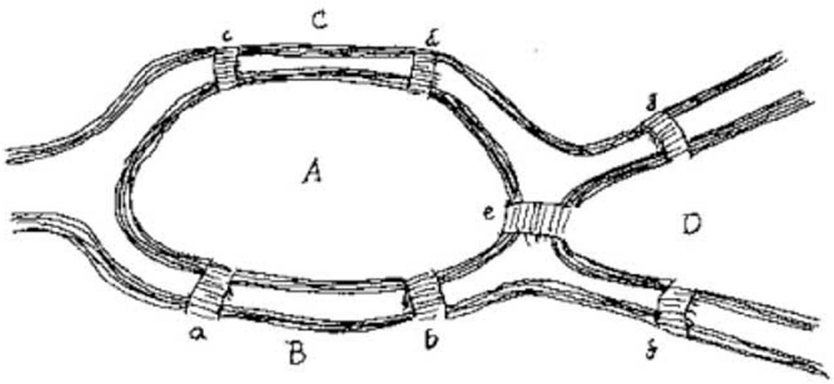
Istorijski osvrt na 7 mostova Kenigsberga

Problem sedam mostova Kenigsberga je klasičan problem iz teorije grafova, koji je postavio osnovu za razvoj ove grane matematike. Pitanje potiče iz 18. veka, kada je Leonard Ojler razmatrao da li je moguće proći svim mostovima grada Kenigsberga tačno jednom i vratiti se na početnu tačku.

Kenigsberg (današnji Kalinjingrad) bio je grad kroz koji protiče reka Pregel, razdvajajući ga na četiri dela: dve rečne obale i dva ostrva. Grad je bio povezan sa ukupno 7 mostova.

Ojler je krenuo sa rešavanjem ovog problema predstavljanjem svake kopnene mase čvorom, a svakog mosta granom. Ovaj konkretan graf je imao 4 čvora i 7 grana.

Rešenje upravo ovog problema (obilaženje svake grane u grafu i vraćanje na početak) se naziva Ojlerov krug, a graf u kome je ovo moguće, Ojlerov graf.

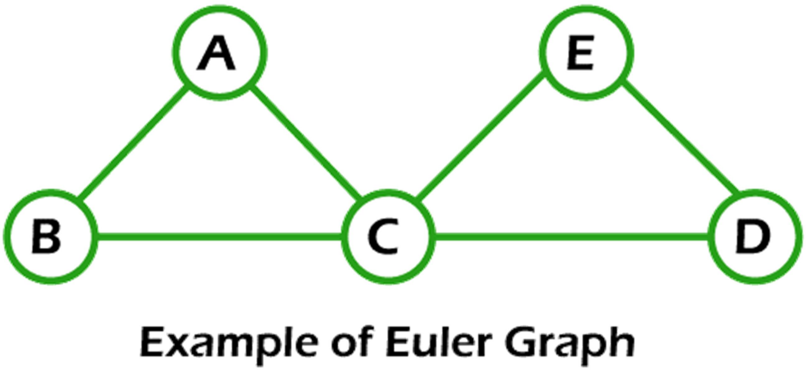


Definicija Ojlerovog i polu-Ojlerovog grafa

Ako želimo da naučimo o Ojlerovom grafu, prvo moramo da razumemo pojam grafa. Graf se može opisati kao skup čvorova (vrhova) koji su međusobno povezani pomoću skupa grana (ivica). Proučavanje grafa nazivamo teorijom grafova. U ovom odeljku ćemo naučiti definiciju Ojlerovog grafa, Ojlerovog puta, Ojlerove kružne linije (ciklusa), polu-Ojlerovog grafa, kao i primere Ojlerovih grafova.

OJLEROV GRAF

Ako svi čvorovi bilo kog povezanog grafa imaju paran stepen, tada se takav graf naziva Ojlerovim grafom. Drugim rečima, možemo reći da je Ojlerov graf vrsta povezanog grafa koji sadrži Ojlerovu kružnu liniju (ciklus). Jednostavan primer Ojlerovog grafa je opisan na sledeći način:



Gornji graf je povezan graf, a čvorovi ovog grafa imaju paran stepen. Stoga možemo reći da je ovaj graf Ojlerov graf.

Drugim rečima, možemo reći da je ovaj graf Ojlerov jer sadrži Ojlerovu kružnu liniju (ciklus) koja može biti: **BACEDCB.**

OJLEROV PUT

Ojlerov put se može nazvati i Ojlerovom šetnjom ili Ojlerovom stazom. Definicije Ojlerove staze i Ojlerove šetnje opisane su na sledeći način:

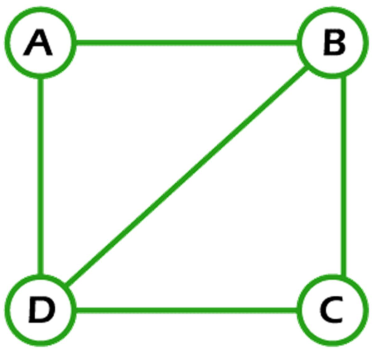
- Ako postoji povezan graf koji ima stazu koja obuhvata sve ivice grafa, tada se takva staza naziva **Ojlerova staza**.
- Ako postoji povezan graf koji ima šetnju koja prolazi kroz svaku ivicu grafa tačno jednom, tada se takva šetnja naziva **Ojlerova šetnja**.

Napomena:

Ako više od dva čvora u grafu imaju neparan stepen, tada se takav graf naziva graf sa Ojlerovim putem.

Primeri Ojlerovog puta:
Postoji mnogo primera Ojlerovih puteva, a neki od njih su opisani u nastavku:

Primer 1:
Na sledećoj slici imamo graf sa 4 čvora. Sada treba da utvrdimo da li ovaj graf sadrži Ojlerov put.



Rešenje:

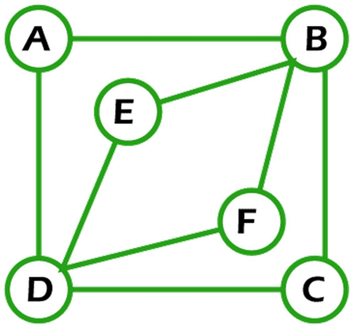
Gornji graf sadržaće Ojlerov put ako se svaka ivica u grafu poseti tačno jednom, dok se čvorovi mogu ponavljati. Ako započnemo put od čvora **B**, a zatim idemo kroz čvorove **C**, **D**, **B**, **A**, i **D**, tada će svaka ivica biti posetjena tačno jednom, a čvorovi će se ponavljati.

Dakle, gornji graf sadrži Ojlerov put, koji je opisan na sledeći način:

Ojlerov put = BCDBAD

Primer 2:

Na sledećoj slici imamo graf sa 6 čvorova. Sada treba da utvrdimo da li ovaj graf sadrži Ojlerov put.



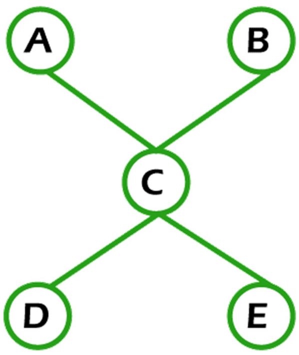
Rešenje:

Gore prikazani graf će sadržati Ojlerov put ako svaki brid ovog grafa mora biti posetljen tačno jednom, dok se čvorovi mogu ponavljati. Tako, ako započnemo naš put od čvora B, a zatim idemo kroz čvorove C, D, F, B, E, D, A i B, u tom procesu svaki brid će biti posetljen tačno jednom, a čvorovi mogu biti ponovljeni. Dakle, gore prikazani graf sadrži Ojlerov put, koji je opisan kao:

Ojlerov put = BCDFBEDAB

Primer 3:

Na sledećoj slici imamo graf sa 5 čvorova. Sada treba da utvrdimo da li ovaj graf sadrži Ojlerov put.



Rešenje:

Gore prikazani graf će sadržati Ojlerov put ako svaki brid ovog grafa mora biti posetljen tačno jednom, dok se čvorovi mogu ponavljati. Tako, ako započnemo naš put od čvora A, možemo ići samo do čvora A, C, D ili B, C, E. To znači da ovaj graf ne može posetiti sve bridele samo jednom. Dakle, gore prikazani graf ne sadrži Ojlerov put.

OJLEROV CIKLUS

Ojlerov ciklus se takođe može nazvati Ojlerovim obilaskom ili Ojlerovim ciklom. Postoje različite definicije Ojlerovog ciklusa, koje su opisane kako sledi:

- Ako postoji povezani graf sa ciklusom koji sadrži sve brideve grafa, tada će taj ciklus biti poznat kao Ojlerov ciklus.
- Ako postoji povezani graf koji ima putanju koja prolazi kroz svaki brid grafa tačno jednom, tada će ta putanja biti poznata kao Ojlerov ciklus. U ovoj putanji, početni i krajnji čvor moraju biti isti, a čvorovi mogu biti ponovljeni, ali to nije obavezno.
- Ako Ojlerov put sadrži isti čvor na početku i kraju puta, tada će taj put biti poznat kao Ojlerov ciklus.
- Zatvoreni Ojlerov put će biti poznat kao Ojlerov ciklus.

Napomena:

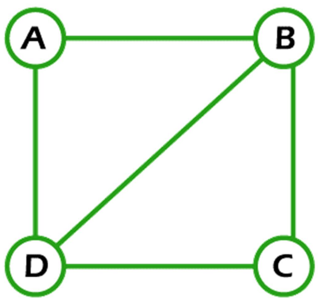
Ako svi čvorovi grafa imaju paran stepen, tada će taj graf biti poznat kao Ojlerov ciklus.

Primeri Ojlerovog ciklusa:

Postoji mnogo primera Ojlerovog ciklusa, a neki od njih su opisani kako sledi:

Primer 1:

Na sledećoj slici imamo graf sa 4 čvora. Sada treba da utvrdimo da li ovaj graf sadrži Ojlerov ciklus.

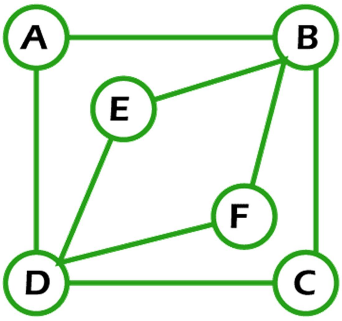


Rešenje:

Gore prikazani graf će sadržati Ojlerov ciklus ako su početni i krajnji čvor isti, i ako ovaj graf poseti svaki brid tačno jednom. Ojlerov ciklus može sadržati ponovljeni čvor. Ako započnemo naš put od čvora A, a zatim idemo kroz čvorove B, C, D i A, u ovom procesu je ispunjen uslov da su početni i krajnji čvor isti, ali drugi uslov da se pokriju svi bridevi nije ispunjen, jer postoji jedan brid od čvora D do B koji nije pokriven. Ako pokušamo da pokrijemo ovaj brid, onda će se bridevi ponoviti. Dakle, gore prikazani graf ne sadrži Ojlerov ciklus.

Primer 2:

Na sledećoj slici imamo graf sa 6 čvorova. Sada treba da utvrdimo da li ovaj graf sadrži Ojlerov ciklus.



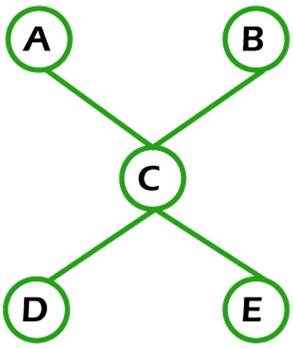
Rešenje:

Gore prikazani graf će sadržati Ojlerov ciklus ako su početni i krajnji čvor isti, i ako ovaj graf poseti svaki brid tačno jednom. Ojlerov ciklus može sadržati ponovljeni čvor. Tako, ako započnemo naš put od čvora A, a zatim idemo kroz čvorove B, C, D, F, B, E, D i zatim A, u ovom procesu, početni i krajnji čvor su isti. Putanja (A, B, C, D, F, B, E, D i A) takođe pokriva sve brideve tačno jednom, i ne sadrži nijedan ponovljeni čvor osim početnog. Dakle, gore prikazani graf sadrži Ojlerov ciklus, koji je opisan kao:

Ojlerov ciklus = ABCDFBED

Primer 3:

Na sledećoj slici imamo graf sa 5 čvorova. Sada treba da utvrdimo da li ovaj graf sadrži Ojlerov ciklus.



Rešenje:

Gore prikazani graf će sadržati Ojlerov ciklus ako su početni i krajnji čvor isti, i ako ovaj graf poseti svaki brid tačno jednom. Ojlerov ciklus može sadržati ponovljeni čvor. Ako započnemo naš put od čvora A, a zatim idemo kroz čvorove C, D ili C, E, u ovom procesu uslov da su početni i krajnji čvor isti nije ispunjen, a takođe nije ispunjen ni drugi uslov da se pokriju svi bridevi. Ovo je zato što, ako pratimo putanju (A, C, D ili A, C, E), mnogi bridevi će biti ponovljeni, što krši pravilo Ojlerovog ciklusa. Dakle, ako pokušamo da pokrijemo sve brideve i čvorove, bridevi će se ponoviti. Dakle, gore prikazani graf ne sadrži Ojlerov ciklus.

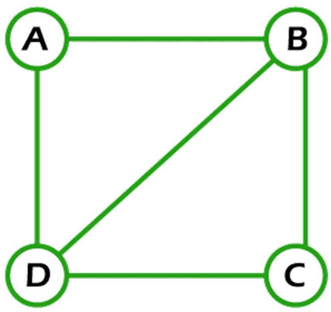
POLU – OJLEROV GRAF

Ako postoji povezani graf koji nema Ojlerov ciklus, ali ima Ojlerov put, tada će taj graf biti poznat kao polu-Ojlerov graf. Svaki graf će biti poznat kao polu-Ojlerov graf ako zadovoljava dva uslova, koji su opisani kako sledi:

1. Graf mora biti povezan.
2. Ovaj graf mora sadržati Ojlerov put.

Primer polu-Ojlerovog grafa

U ovom primeru imamo graf sa 4 čvora. Sada treba da utvrdimo da li je ovaj graf polu-Ojlerov graf.



Rešenje:

Ovde postoji Ojlerov put u ovom grafu, tj. BCDBAD. Međutim, ne postoji Ojlerov ciklus. Dakle, ovaj graf je polu-Ojlerov graf.

Važne napomene:

Kada učimo koncept Ojlerovog grafa, postoje neke tačke koje treba da imamo na umu, a koje su opisane kako sledi:

Napomena 1:

Postoje dva načina putem kojih možemo proveriti da li je neki graf Ojlerov ili nije. Možemo koristiti bilo koji od ovih načina, koji su opisani kako sledi:

Ako postoji povezani graf sa Ojlerovim ciklusom, tada će taj graf biti Ojlerov graf.

Ako svi čvorovi grafa imaju paran stepen, tada će taj graf biti Ojlerov graf.

Napomena 2:

Možemo koristiti sledeći način da proverimo da li neki graf ima Ojlerov ciklus:

Proverićemo da li svi čvorovi grafa imaju paran stepen.

Ako imaju paran stepen, tada će taj graf imati Ojlerov ciklus. U suprotnom, neće imati Ojlerov ciklus.

Napomena 3:

Možemo koristiti sledeći način da proverimo da li neki graf je polu-Ojlerov graf:

Proverićemo da li postoji povezan graf koji ima Ojlerov ciklus.

Ako je graf povezan i ima Ojlerov ciklus, onda će taj graf biti polu-Ojlerov graf. U suprotnom, neće biti polu-Ojlerov graf.

Napomena 4:

Možemo koristiti sledeći način da proverimo da li neki graf ima Ojlerov put:

Proverićemo da li više od dva čvora grafa imaju neparan stepen.

Ako više od dva čvora imaju neparan stepen, tada će taj graf imati Ojlerov put. U suprotnom, neće imati Ojlerov put.

Napomena 5:

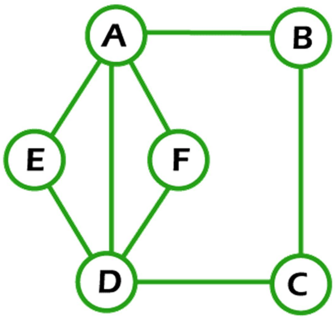
Ako postoji povezani graf koji ima Ojlerov ciklus, onda će taj graf sigurno imati i Ojlerov put.

Primer Ojlerovog grafa:

Postoji mnogo primera Ojlerovih grafova, a neki od njih su opisani kako sledi:

Primer 1:

U sledećem grafu imamo 6 čvorova. Sada treba da odredimo da li je ovaj graf Ojlerov graf.

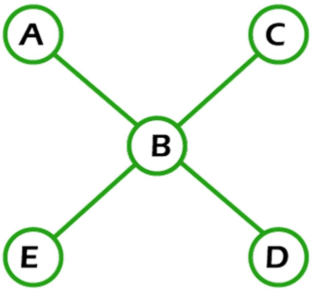


Rešenje:

Ako gornji graf sadrži Ojlerov ciklus, onda će to biti Ojlerov graf. Graf će sadržati Ojlerov ciklus ako su početni i krajnji čvor isti, i ako graf posećuje svaki ivicu samo jednom. Tako da kada započnemo putanju od čvora A, a zatim idemo do čvorova E, D, F, B, C, D i ponovo A, u ovom procesu početni i krajnji čvor su isti. Ova putanja pokriva sve ivice samo jednom i sadrži ponovljeni čvor. Dakle, ovaj graf sadrži Ojlerov ciklus. Samim tim, to je Ojlerov graf.

Primer 2:

U sledećem grafu imamo 5 čvorova. Sada treba da odredimo da li je ovaj graf Ojlerov graf.

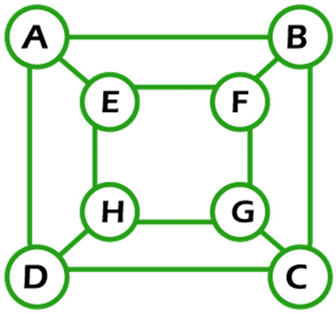


Rešenje:

Ako gornji graf sadrži Ojlerov ciklus, onda će to biti Ojlerov graf. Graf će sadržati Ojlerov ciklus ako su početni i krajnji čvor isti, i ako graf posećuje svaku ivicu samo jednom. Dakle, ako započnemo putanju od čvora A, a zatim idemo do čvorova B, D ili A, B, E, u ovom procesu zadovoljava se uslov da su početni i krajnji čvor isti, ali drugi uslov da se sve ivice pokriju samo jednom nije zadovoljen. Kada pratimo putanju (A, B, D ili A, B, E), mnoge ivice se ponavljaju, što krši definiciju Ojlerovog ciklusa. Dakle, gornji graf ne sadrži Ojlerov ciklus. Samim tim, to nije Ojlerov graf.

Primer 3:

U sledećem grafu imamo 8 čvorova. Sada treba da odredimo da li je ovaj graf Ojlerov graf.

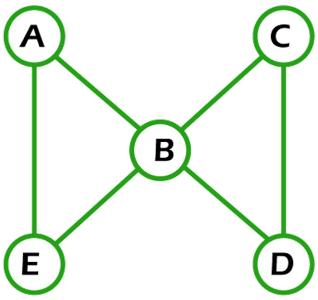


Rešenje:

Ako gornji graf sadrži Ojlerov ciklus, onda će to biti Ojlerov graf. Graf će sadržati Ojlerov ciklus ako su početni i krajnji čvor isti, i ako graf posećuje svaku ivicu samo jednom. Dakle, ako započnemo putanju od čvora A, a zatim idemo do čvorova D, H, E, F, G, C, B i ponovo A, u ovom procesu zadovoljava se uslov da su početni i krajnji čvor isti, ali drugi uslov da se sve ivice pokriju samo jednom nije zadovoljen. Kada pratimo putanju (A, D, H, E, F, G, C, B, A), u ovom procesu mnoge ivice nisu pokrivene, tj. A do E, G do H, F do B i D do C, što krši definiciju Ojlerovog ciklusa. Dakle, gornji graf ne sadrži Ojlerov ciklus. Samim tim, to nije Ojlerov graf.

Primer 4:

U sledećem grafu imamo 5 čvorova. Sada treba da odredimo da li je ovaj graf Ojlerov graf.

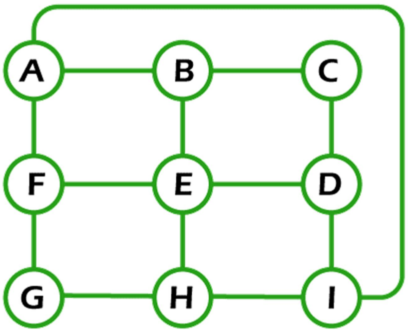


Rešenje:

Ako gornji graf sadrži Ojlerov ciklus, onda će to biti Ojlerov graf. Dakle, kada započnemo putanju od čvora A, a zatim idemo do čvorova B, C, D, B, E i ponovo A, u ovom procesu početni i krajnji čvor su isti. Ova putanja pokriva sve ivice samo jednom i sadrži ponovljeni čvor. Dakle, ovaj graf sadrži Ojlerov ciklus. Samim tim, to je Ojlerov graf.

Primer 6:

U sledećem grafu imamo 9 čvorova. Sada treba da odredimo da li je ovaj graf Ojlerov graf.



Rešenje:

Ako gornji graf sadrži Ojlerov ciklus, onda će to biti Ojlerov graf. Dakle, ako započnemo putanju od čvora A, a zatim idemo do čvorova B, C, D, E, F, G, H, I i ponovo A, uslov da su početni i krajnji čvor isti je zadovoljen, ali drugi uslov da se sve ivice pokriju samo jednom nije zadovoljen. Kada pratimo putanju (A, B, C, D, E, F, G, H, I, A), u ovom procesu jedna ivica nije pokrivena, tj. A do F, što krši definiciju Ojlerovog ciklusa. Dakle, gornji graf ne sadrži Ojlerov ciklus. Samim tim, to nije Ojlerov graf.

Formulisati i dokazati uslove da graf bude Ojlerov

TEOREMA: Graf je **Ojlerov** ako i samo ako je povezan i svaki čvor grafa ima paran stepen.

Uvedimo prvo potrebne pojmove:

- Ojlerov put (staza) je onaj put u grafu koji sadrži sve njegove čvorove i grane
- Ojlerova tura je Ojlerov put u kom su početni i krajnji čvor jednaki

Def: Graf je Ojlerov ako sadrži Ojlerovu turu.

Potrebni uslovi:
* ako je graf Ojlevor, ovi uslovi su zadovoljeni

(=>)

Graf je povezan po definiciji Ojlerovog grafa.

Posmatrajmo Ojlerovu turu $u_1e_1u_2e_2\ldots u_ne_nu_1$ u grafu G

Ako se neki proizvoljan čvor v iz V(G) pojavljuje l puta u ovoj turi, u svakom svom pojavljivanju ima jednu ulaznu i jednu izlaznu granu, dakle, deg(v) = 2*l, što je uvek paran broj.
□

Dovoljni uslovi:
* ako je graf povezan i stepen svih čvorova je paran, onda je graf Ojlerov

(<=)

Posmatrajmo najdužu stazu grafa G $u_1e_1u_2e_2\ldots u_ne_nu_{n+1}$

Pokazaćemo da su prvi i poslednji čvor isti, kao i da su u ovoj stazi sve grane i svi čvorovi grafa

1. $u_1 = u_{n+1}$

   Pretpostavimo suprotno: $u_1 \neq u_{n+1}$

   U ovom slučaju, stepen čvora u_1 je neparan, jer je broj grana incidentnih sa ovim čvorom neparan. To se kosi sa postavkom da svaki čvor grafa ima paran stepen, to znači da postoji još jedna grana incidentna sa ovim čvorom koja nije sadržana u stazi. U tom slučaju bismo mogli napraviti dužu stazu, što dovodi do kontradikcije.
   Dakle, $u_1 = u_{n+1}$

2. $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = V(G)$

   Pretpostavimo suprotno: $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \neq V(G)$

   Postoje čvorovi koji nisu deo ove staze. Pošto je graf povezan, onda postoji i grana koja takođe nije deo staze. Ovo bi značilo da može da se konstruiše duža staza, što dovodi do kontradikcije.
   Dakle, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = V(G)$

3. $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = E(G)$

   Pretpostavimo suprotno: $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \neq E(G)$

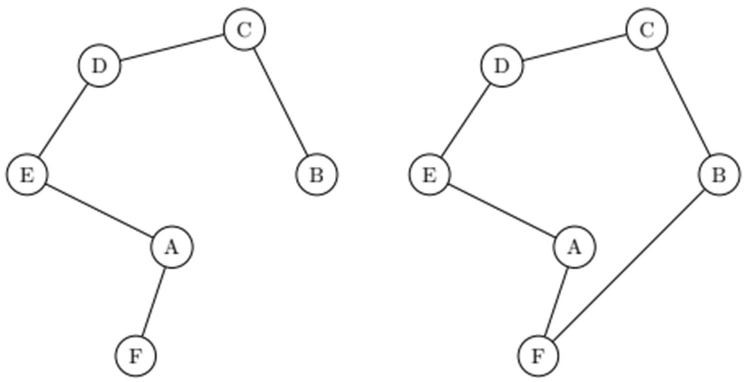
   Postoje grane koje nisu deo date staze. Zbog prethodnog uslova znamo da su svi čvorovi grafa deo staze. Zbog povezanosti grafa, ponovo vidimo da bismo mogli da konstruišemo dužu stazu od zadate, što dovodi do kontradikcije.
   Dakle, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = E(G)$

Pošto smo zadovoljili sve uslove, dokaz je gotov. □

Formulisati i dokazati uslove da graf bude polu-Ojlerov

Definicije i osnovni pojmovi

Def: Ojlerov put (staza) je staza u grafu koja sadrži sve čvorove i grane tog grafa.



Primer Ojlerovog puta u prvom grafu je *faedcb* dok je u drugom grafu to *faedcbf*

Obe putanje su Ojlerove staze jer prolaze kroz svaki čvor i svaku granu u grafu s tim da se nijedna grana ne ponavlja, a jedina razlika je ta što se u drugoj putanji počinje istim čvorom kojim završavamo.

Iz toga sledi definicija polu Ojlerovih stabala:

Definicija: Graf je polu Ojlerov ako sadrži Ojlerov put.

Potrebni i dovoljni uslovi

Kako je svaki Ojlerov graf i polu Ojlerov, ovde izdvajamo potreban i dovoljan uslov za postojanje Ojlerovog puta u grafu koji ne sadrži Ojlerovu stazu.

Teorema: Neka je G = (V, E) graf koji nije Ojlerov. Graf G je polu Ojlerov ako i samo ako je G povezan i ima tačno dva čvora neparnog stepena.

Dokaz. (⇒) Kao što je pokazano u prethodnom dokazu, svaki čvor koji nije krajnja tačka Ojlerovog puta mora imati paran broj incidentnih grana. To znači da na svakom takvom čvoru dolazi do jednakog broja ulaznih i izlaznih prelaza.

Medutim, krajnje tačke Ojlerovog puta imaju po jednu dodatnu granu, pa je broj incidentnih grana na njima neparan. Dakle, postoje tačno dva čvora sa neparnim stepenom.

(⇐) Pretpostavimo da su u i v jedina dva čvora grafa koja imaju neparan stepen. Kreirajmo novi graf G′ tako što u graf G dodamo dodatnu granu koja povezuje čvorove u i v (ova grana može biti nova ili paralelna već postojećima). U tako dobijenom grafu G′, svi čvorovi imaju paran stepen. Prema Teoremi, graf G′ ima Ojlerov ciklus. Budući da ovaj ciklus uključuje i novu granu između u i v, uklanjanjem te grane dobijamo Ojlerov put u originalnom grafu G.

Primer određivanja stabla za dat Priferov kod

Koraci za određivanje stabla:

1. Odredimo koliko čvorova ima stablo
2. Pronađemo broj pojavlljivanja svakog čvora
3. Rekonstruišemo stablo

Primer koda:

[1, 1, 3, 5, 5]

Korak 1: Odredjivanje broja cvorova

- Spomenuli smo da kod uvek ima tacno n-2 elementa, gde je n broj cvorova.
- Duzina koda je 5, samim tim broj cvorova je 5 + 2 = 7

  V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Korak 2: Broj pojavljivanja stepeni

- Sada kada imamo broj cvorova, ispisemo koliko svaki od njih ima pojavljivanja u Priferovom kodu

  Kod = [1, 1, 3, 5, 5]

  Pojavljivanja:

  1: 2

  2: 0

  3: 1

  4: 0

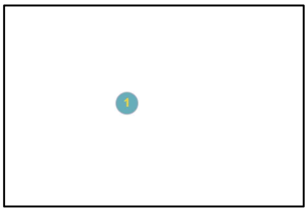
  5: 2

  6: 0

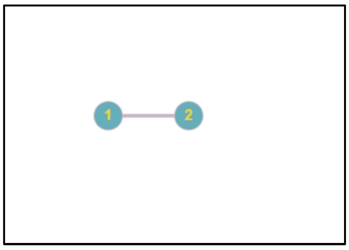
  7: 0

Korak 3: Rekonstruisemo stablo

- Mozemo krenuti od crtanja prvog cvora kojeg imamo u kodu, **u nasem slucaju 1**



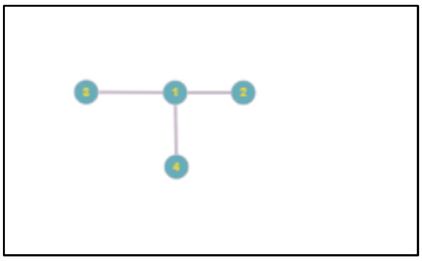
- Dalje gledamo koji je najmanji cvor koji se pojavljuje 0 puta i vezujemo ga za cvor koji se prvi pojavljuje u kodu, **u nasem slucaju je to 2 I imamo granu 1-2**



- Sada mozemo zaboraviti na cvor 2, posto on vise nema pojavljivanja.

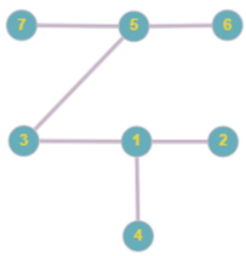
Korak 4: Ponavljanje.

- Sledeca grana ce nam biti izmedju novog najmanjeg broja i sledeceg cvora u Priferovom kodu, **u nasem slucaju 1 i 4**
- Nakon ovoga ce nam ponestati jedinica iz Priferovog koda, sto znaci da ce nam u sledecem koraku 1 biti najmanji cvor sa nula pojavljivanja u kodu. **Sledeca grana je onda 3-1**.



- Tim sistemom dobijamo redom sledece grane: **3-5, 5-6, 5-7**

Konačni izgled stabla:



Definicija težinskog grafa

Težinski graf je graf gde su granama (ivice) pridružene vrednosti koje se nazivaju težine. Te težine mogu predstavljati različite osobine, kao što su udaljenost, trošak, trajanje, kapacitet i slično. Formalno, težinski graf može biti predstavljen kao G=(V,E,w), gde:

- V je skup čvorova (tačaka, temena).
- E je skup grana (ivica) koje povezuju čvorove.
- $w: E \rightarrow R$ je funkcija koja svakoj grani $e \in E$ dodeljuje težinu w(e).

Algoritmi za određivanje Ojlerove ture u grafu

Ojlerova tura je put u grafu koji prolazi kroz svaku granu tačno jednom i vraća se u početni čvor. Potrebni i dovoljni uslovi da graf ima Ojlerovu turu su:

1. Graf mora biti povezan (u neusmerenom grafu) ili snažno povezan (u usmerenom grafu).
2. Stepen svakog čvora u grafu mora biti paran.

Koraci algoritma za Ojlerovu turu:

1. Provera uslova za Ojlerov graf.
   - Proveriti povezanost grafa.
   - Proveriti da li su svi čvorovi parnog stepena.
2. Izrada Ojlerove ture:
   - Početi od bilo kog čvora (početni čvor mora biti deo grafa).
   - Sledeći grane jednu po jednu, obeležiti svaku granu kroz koju ste prošli.
   - Nikada ne prelaziti most (granu čije uklanjanje bi razdvojilo graf) osim ako nema drugih opcija.
   - Nastaviti dok se ne vrati u početni čvor i dok ne prođete kroz sve grane.

```python
def is_connected(graph):
    """Proverava povezanost neusmerenog grafa koristeći DFS."""
    visited = set()

    def dfs(node):
        visited.add(node)
        for neighbor in graph[node]:
            if neighbor not in visited:
                dfs(neighbor)

    # Početi DFS od prvog čvora
    dfs(next(iter(graph)))

    return len(visited) == len(graph)

1 usage
def has_eulerian_circuit(graph):
    """Proverava da li graf ima Ojlerovu turu."""
    if not is_connected(graph):
        return False
    # Svi čvorovi moraju imati paran stepen
    for node in graph:
        if len(graph[node]) % 2 != 0:
            return False
    return True
```

```python
def find_eulerian_circuit(graph):
    """Kreira Ojlerovu turu koristeći Fleuryjev algoritam."""
    if not has_eulerian_circuit(graph):
        return None

    circuit = []
    stack = []
    current = next(iter(graph))

    while stack or graph[current]:
        if not graph[current]:
            circuit.append(current)
            current = stack.pop()
        else:
            stack.append(current)
            neighbor = graph[current].pop()
            graph[neighbor].remove(current)  # Uklanja granu
            current = neighbor

    circuit.append(current)
    return circuit
# Primer neusmerenog grafa predstavljenog kao adjacency list
graph = {
    0: [1, 2, 3],
    1: [0, 2],
    2: [0, 1, 3],
    3: [0, 2]
}

# Kreiranje Ojlerove ture
eulerian_circuit = find_eulerian_circuit(graph)
if eulerian_circuit:
    print("Ojlerova tura:", eulerian_circuit)
else:
    print("Graf nema Ojlerovu turu.")
```

```
Graf nema Ojlerovu turu.

=== Code Execution Successful ===
```