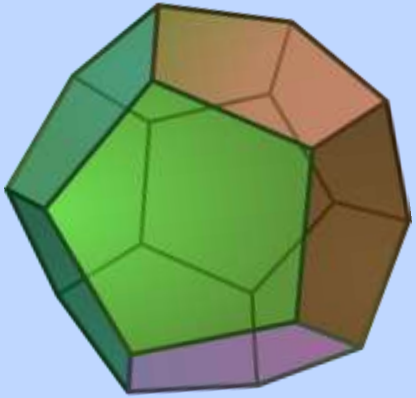
Diskretna matematika -Hamiltonovi grafovi-

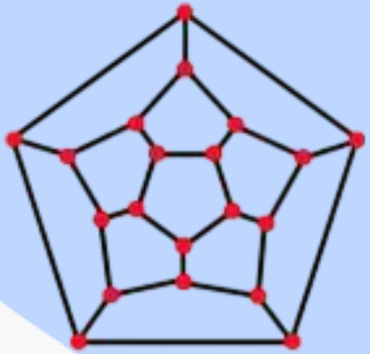
SADRŽAJ

- Istorijski osvrt na Hamiltonov graf
- Definicija Hamiltonovog grafa
- Definicija polu Hamiltonovog grafa
- Dovoljni i potrebni uslovi da graf bude Hamiltonov
- Primeri
- ...

Istorijski osvrt na Hamiltonov graf

Iako su proučavani ranije, od strane britanskog matematičara Tomasa Kirkmana, **pojam Hamiltonovih grafova** vezuje se za poznatog irskog matematičara Vilijama Hamiltona.
Godine 1857 Hamilton je predstavio igru na dodekaedru. Dodekaedar je jedan od pet pravilnih poliedara, Platonovih tela. *Ima 12 strana i 20 temena, sve strane su pravilni petouglovi i u svakom temenu sustiču se po tri.*
Hamilton je svako teme obeležio imenima 20 svetskih metropola tog vremena. Cilj igre bio je da se nadje put duž ivica dodekaedra koji prolazi kroz svaku metropolu (teme) tačno jedanput i počinje i završava se u istoj metropoli (temenu).
Predmet Hamiltonove igre može da se opiše, radi bolje preglednosti i orijentacije, terminima teorije grafova. Odatle potiče izraz *„Hamiltonov graf“*.
Umesto dodekaedra posmatramo njegovu stereografsku projekciju. *Tada se Hamiltonov „put oko sveta“ svodi na konturu koja prolazi kroz sve čvorove tako dobijenog grafa*



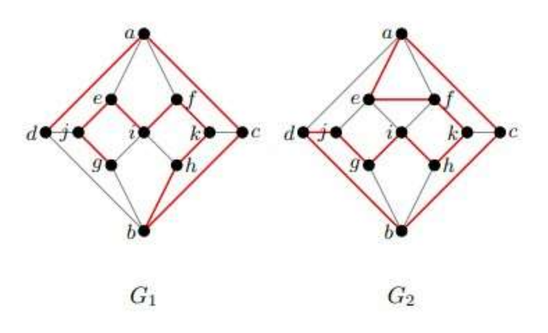


Istorijski osvrt na Hamiltonov graf

Primer Hamiltonov put u grafu G_1 je **dacbhkfiejg**, dok je **dacbhkfiejg** Hamiltonova kontura u grafu G_2.

Hamiltonov put u grafu G je put koji sadrži sve čvorove tog grafa. Konture koje sadrže sve čvorove grafa nazivaju se Hamiltonove konture, a grafovi u kojima postoje takve konture Hamiltonovi grafovi.

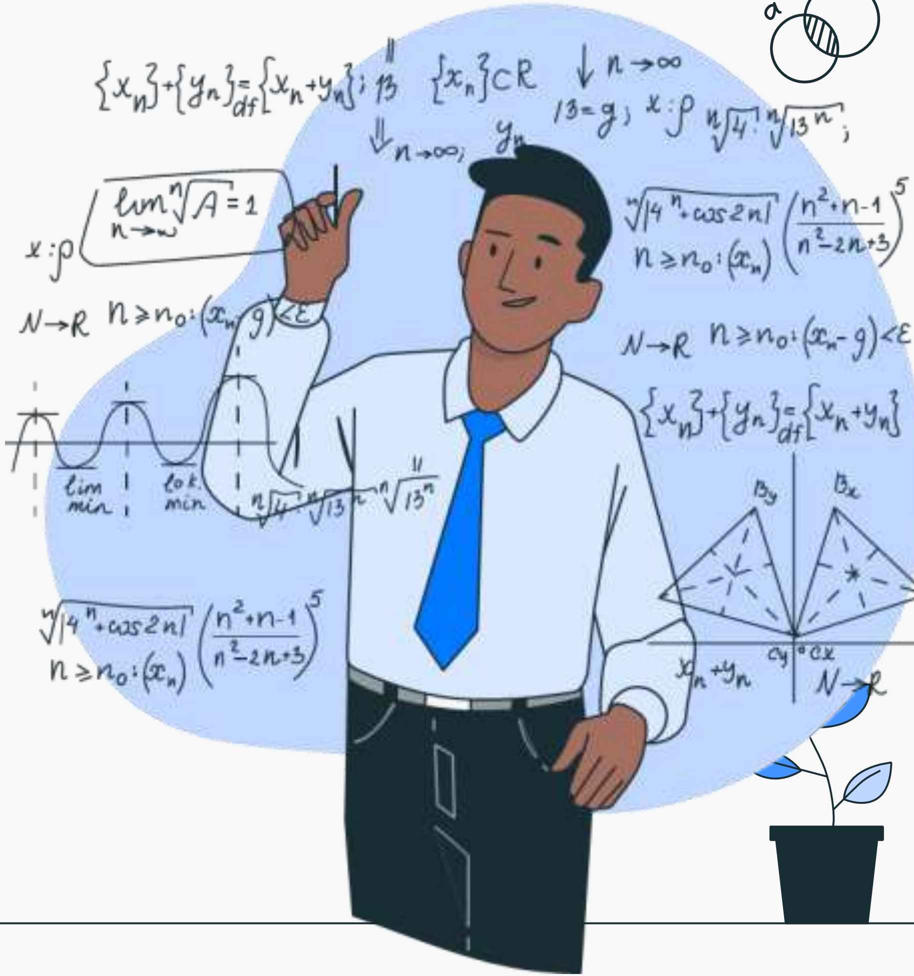
Jedan od najtežih i još uvek nerešenih problema teorije grafova je karakterizacija Hamiltonovih grafova. Do sada je otkriveno više potrebnih i više dovoljnih uslova da graf bude Hamiltonov, ali među njima nijedan nije istovremeno i potreban i dovoljan uslov.



Definicija

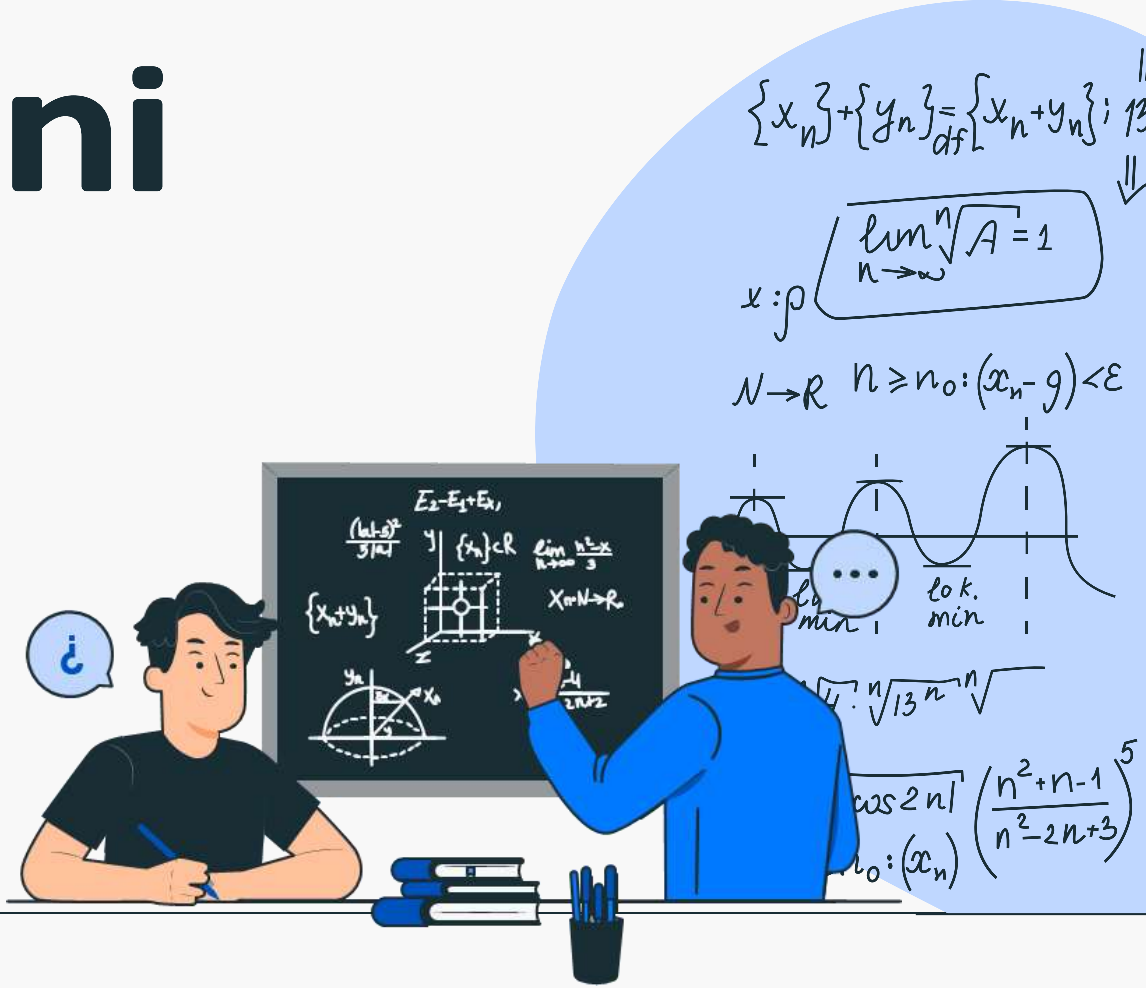
Graf je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonovu konturu.
Graf je polu Hamiltonov ako sadrži Hamiltonov put.

G je Hamiltonov ⇒ G je poluhamiltonov
Obrnuto ne važi.



Potrebni uslovi

Ako su ispunjeni protrebni uslovi, to ne znači da je graf Hamiltonov.
Ovakva tvrđenja se najčeše koriste u kontrapozitivnom obliku tj. ako se pokaže da ne važe potrebni uslovi, onda se može tvrditi da graf nije Hamiltonov.



Teorema. Ako je G Hamiltonov graf, tada za svaki pravi neprazan podskup $S \subset V(G)$ važi

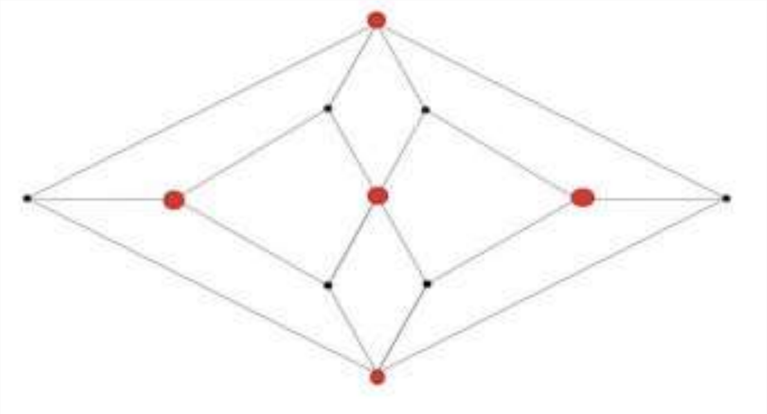
$$\omega(G - S) \leq |S|$$

(*poluhamiltonov*: $\omega(G - S) \leq |S| + 1$)

Dokaz. Neka je $S \subset V(G)$ i pretpostavimo da je $\omega(G - S) = k \geq 1$, gde su G1, G2, ..., Gk komponente $G - S$.
Neka je C Hamiltonova kontura u G. Tada je $E(C) \subset E(G)$, pa važi $\omega(G - S) \leq \omega(C - S)$. Razlog je što se dodavanjem novih grana ne povećava broj komponenti.
Međutim važi $\omega(C - S) \leq |S|$. Zaista, uklanjanjem određenog broja čvorova kontura se raspada na jedan ili više disjunktnih puteva. Pri tome jednakost važi samo u slučaju kada nikoja dva čvora iz S nisu susedi u konturi C. Tada se C raspada na tačno $|S|$ disjunktnih puteva. Iz navedenih jednakosti zaključujemo da važi $\omega(G - S) \leq |S|$.

Navedeni rezultat je često efikasan metod za dokaz da dati graf nije Hamiltonov. Sastoji se u tome da se uoči zgodan podskup S, takav da je $\omega(G - S) > |S|$.

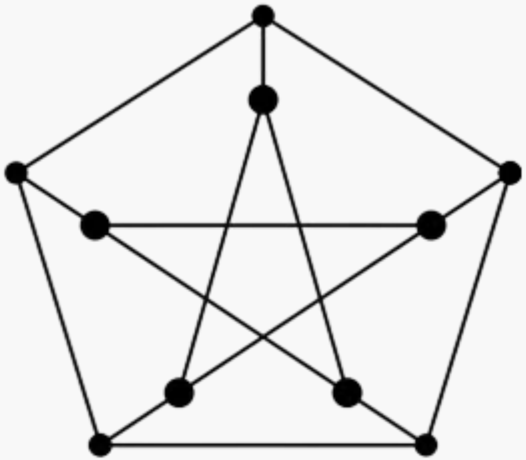
Primer. *Herschelov* graf nije Hamiltonov.



Herschelov graf

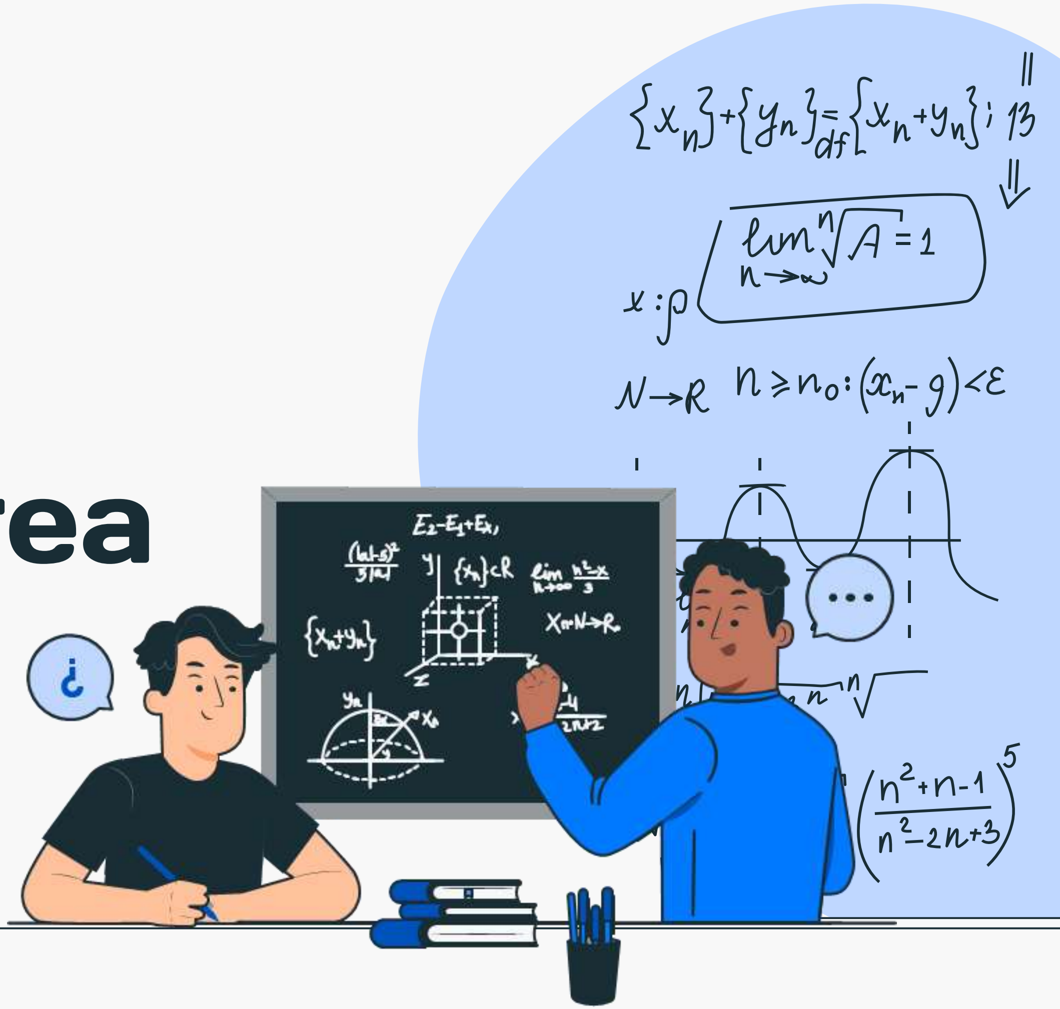
Označimo ga sa G. Neka skup S sadrži crvene čvorove grafa G. Tada je |S| = 5.
Graf G – S je $\overline{K}6$ graf, pa važi ω(G – S) = 6.
Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da Herschelov graf nije Hamiltonov

Primer. Uslov teoreme nije i **dovoljan**.
Za Petersenov graf G se može pokazati da je $\omega(G - S) \leq |S|$ za svaki $S \subset V(G)$.
Međutim Petersenov graf nije Hamiltonov.



Petersenov graf

Dovoljni uslovi. Teoreme Orea i Diraka.



Teorema. (O. Ore, 1960). Ako je G graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, takav da za svaka dva nesusedna čvora u i v važi

$$d(u) + d(v) \geq n,$$

tada je G Hamiltonov graf.
(*poluhamiltonov*: $d(u) + d(v) \geq n\text{-}1$)

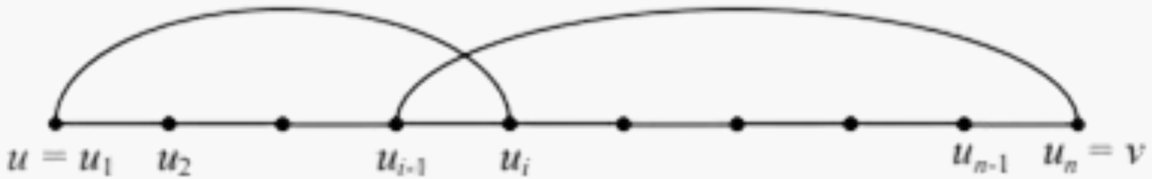
Dokaz. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno, tj. da postoji graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, koji zadovoljava uslov teoreme ali nije Hamiltonov. Među svim takvim grafovima uočimo maksimalan, tj. onaj koji ima najviše grana i označimo ga sa G.
Kako je kompletan graf Kn Hamiltonov za $n \geq 3$, sledi $G \neq Kn$. Neka su u i v dva nesusedna čvora u grafu G. Kako je G maksimalan kontraprimer s obzirom na broj grana, graf G + uv je Hamiltonov. Ako je C Hamiltonova kontura, u i v su susedi na C. (U protivnom C bi bila Hamiltonova kontura u G, što je suprotno pretpostavci.) Stoga je C – uv = P Hamiltonov put u G čiji su krajevi u i v.
Neka je P : u = u1, u2, ..., un = v . Tvrdimo da ako $u_1 u_i \in E(G)$, $2 \leq i \leq n$, onda $u_{i-1} u_n \notin E(G)$. Pretpostavimo suprotno, da za neko i , $2 \leq i \leq n$, $u_1 u_i$, $u_{i-1} u_n \in E(G)$. Tada je $u_1 u_i u_{i+1} \ldots u_n u_{i-1} u_{i-2} \ldots u_1$ Hamiltonova kontura u G, a to je kontradikcija s pretpostavkom da G nije Hamiltonov graf.

Teorema. (O. Ore, 1960). Ako je G graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, takav da za svaka dva nesusedna čvora u i v važi

$$d(u) + d(v) \geq n,$$

tada je G Hamiltonov graf.
(*poluhamiltonov*: $d(u) + d(v) \geq n-1$)

Dokaz.



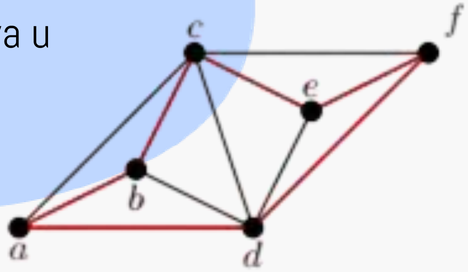
Prema tome za svaki čvor iz skupa $\{u_2, u_3, \dots, u_n\}$ koji je povezan sa u_1 postoji čvor iz skupa $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$ koji nije povezan sa u_n.
Odatle zaključujemo da je $d(un) \leq (n - 1) - d(u1)$, odnosno

$$d(u) + d(v) \leq n - 1$$

što je kontradikcija sa uslovom teoreme. Dakle, G je Hamiltonov graf.

Oreova teorema nije ***potreban*** uslov da graf bude Hamiltonov. Jedan od kontraprimera je kontura C_n, $n \geq 5$. Za svaka dva nesusedna čvora $u, v \in V(G)$ važi $d(u) + d(v) = 4 < n$, ali C_n je očigledno Hamiltonov graf.

Primer. Graf G na slici je Hamiltonov zato što je suma stepena čvorova bar 6, a toliki je i broj čvorova u grafu.



Kao direktnu posledicu Oreovog tvrdjenja dokazujemo tvrdjenje Diraka.

Teorema. Ako je G graf sa n ($n \geq 3$) čvorova, takav da je $d(u) \geq n/2$, za svako $u \in V(G)$, tada je G Hamiltonov graf
(*poluhamiltonov*: $d(u) \geq n - 1/2$)

Dokaz. Na osnovu tvrđenja Orea, možemo zaključiti da za svaki par čvorova važi

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n/2 + n/2 = n$$

odakle sledi da je G Hamiltonov graf

Hvala na pažnji!

CREDITS: This presentation template was created by Slidesgo, and includes icons by Flaticon, and infographics & images by Freepik