Zadatak 2

Grupa 8

Oktobar 2024

1 Neuredjeni izbori elemenata

Kada smo pominjali matematičko definisanje pojma uredjenog izbora k elemenata konačnog skupa X za njega smo koristili preslikavanje f iz uredjenog skupa $\{1, 2, \ldots, k\}$ u skup X. Na ovaj način, bili smo u mogućnosti da kažemo da je element $f(1)$ izabran prvi, element $f(2)$ drugi, a element $f(k)$ poslednji.

S druge strane, kod neuredjenog izbora elemenata skupa X nije važno koji je element izabran prvi, a koji poslednji, tako da nema potrebe uvoditi preslikavanja.

1.1 Klasifikacija

Prilikom prebrojavanja elemenata neke kolekcije važno je razmotriti dva pitanja:

1. Da li je važno kako su izabrani elementi uredjeni?
2. Da li su ponavljanja elemenata dozvoljena?

Odgovor na prvo pitanje odredjuje da li govorimo o uredjenom ili neuredjenom izboru elemenata, obzirom da ovde govorimo samo o neuredjenim izborima, odgovor na prvo pitanje je jasan.

Odgovor na drugo pitanje zapravo odredjuje da li radimo sa skupovima ili sa multiskupovima.

Na osnovu ovih pitanja možemo dobiti sledeću klasifikaciju:

1. Kombinacije m elemenata iz skupa, to jest m-točlane podskupove skupa
2. Kombinacije m elemenata iz multiskupa, to jest m-točlane podmultiskupove multiskupa

1.2 m-kombinacije skupa

Neka je dat skup B sa n elemenata i neka je $n \geq m \geq 0$. Kod neuredjenog izbora elemenata skupa B nije vazno koji je element izabran prvi, a koji poslednji, tako da nema potrebe uvoditi preslikavanja. S obzirom da sada razmatramo neuredjene izbore elemenata bez ponavljanja vidimo da oni predstavljaju m-toclane podskupove skupa B.

Definicija

m-kombinacija (ili kombinacija klase m bez ponavljanja) elemenata skupa B je bilo koji podskup od m elemenata skupa B.

Broj m-kombinacija elemenata skupa B oznacavamo sa

$$C(n;m)$$

Ako skup svih m-toclanih podskupova skupa B oznacimo sa $\binom{B}{m}$, tada je

$$C(n;m) = |\tbinom{B}{m}|$$

Teorema

Broj m-kombinacija elemenata skupa B jednak je

$$C(n;m) = \tfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$$

Neka je $n = |B| \geq 1$. Ako izaberemo proizvoljan podskup od m elemenata skupa B, broj nacina da uredimo taj podskup jednak je m!. Odatle je broj m-permutacija jednak broju m-kombinacija pomnozenih sa m!. Znaci,

$$P(n;m) = C(n;m)\cdot m! \Leftrightarrow n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = C(n;m)\cdot m!$$

$$\Rightarrow C(n;m) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$$

1.3 m-kombinacije multiskupa

Definicija

m-kombinacija multiskupa je način da se iz skupa od n različitih elemenata odabere m elemenata, pri čemu su ponavljanja dozvoljena. Drugim rečima, biramo m elemenata iz skupa veličine n, ali jedan element možemo izabrati više puta.

Formula za broj m-kombinacija multiskupa

Broj m-kombinacija multiskupa elemenata iz skupa od n različitih elemenata može se izračunati korišćenjem sledeće formule:

$$\binom{n+m-1}{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Ova formula daje broj različitih načina na koje se može odabrati m elemenata sa ponavljanjem iz skupa od n elemenata.

Primer

Pretpostavimo da želimo da izaberemo 4 kuglice iz skupa od 3 različite boje kuglica: crvena, plava i zelena. U ovom slučaju, $n = 3$ (tri boje) i $m = 4$ (četiri kuglice).

Broj načina na koji možemo izabrati 4 kuglice sa ponavljanjem iz skupa od 3 različite boje može se izračunati pomoću formule:

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

Dakle, postoji 15 načina da izaberemo 4 kuglice iz 3 boje, pri čemu su ponavljanja dozvoljena.

Dokaz

Zamislimo problem prebrojavanja m-kombinacija kao raspodelu m identičnih objekata u n različitih kategorija. Na primer, ako imamo m kuglica i n različitih kutija, želimo da pronadjemo koliko različitih načina možemo rasporediti m kuglica u n kutija, pri čemu kutija može biti prazna.

Ovaj problem možemo preformulisati na sledeći način: ako je x_i broj kuglica u i-toj kutiji, tada tražimo broj rešenja jednačine:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

pri čemu su $x_i \geq 0$. Ovaj problem možemo rešiti korišćenjem principa zvezda i pregrada (engl. *stars and bars*). Raspored m kuglica možemo posmatrati kao niz od m zvezdica i $n-1$ pregrada, koje razdvajaju različite kutije. Na primer, za $m = 5$ i $n = 3$, jedan mogući raspored može izgledati ovako:

$$* * | * | * *$$

Ovaj raspored odgovara rešenju $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Ukupan broj takvih rasporeda je broj načina da se izabere m pozicija za zvezdice i $n-1$ pozicija za pregrade, što je kombinatorni problem sa formulom:

$$\binom{m+n-1}{m}$$

Na ovaj način dobijamo traženu formulu za broj m-kombinacija multiskupa.

1.4 Prikaz neuredjenih preko uredjenih izbora elemenata

Neuredjeni izbori, odnosno kombinacije, predstavljaju situacije u kojima redosled elemenata nije bitan. Ključna razlika izmedju permutacija i kombinacija je u tome sto permutacije prebrojavaju sve moguce rasporede elemenata, dok kombinacije zanemaruju redosled.

Za svaku kombinaciju od m elemenata postoji $m!$ razlicitih nacina da se ti elementi rasporede, sto se u slucaju kombinacija ne razlikuje. Stoga mozemo izracunati broj kombinacija tako sto cemo broj permutacija podeliti sa $m!$, jer permutacije ukljucuju sve rasporede, dok mi u kombinacijama zelimo samo neuredjene izbore.

Izvodjenje formule za kombinacije polazi od izraza za permutacije:

$$C(n, m) = \frac{P(n, m)}{m!}$$

Sto mozemo dalje razviti kao:

$$C(n, m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Dakle, broj kombinacija, odnosno broj nacina da se izabere m elemenata iz skupa n elemenata, moze se dobiti tako sto cemo ukupan broj permutacija podeliti sa $m!$, brojem razlicitih uredjenih rasporeda tih m elemenata.

1.4.1 Objasnjenje i primer

Da bi bilo jasno kako koristimo permutacije za izracunavanje kombinacija, razmotricemo sledeci primer. Pretpostavimo da imamo skup $S = \{a, b, c, d, e\}$ i zelimo da izaberemo 3 elementa iz tog skupa bez obzira na redosled.

Najpre, racunamo broj permutacija za izbor 3 elementa, gde je redosled bitan:

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

Medjutim, mi zelimo da prebrojimo neuredjene izbore. Znamo da za svaki izbor od 3 elementa postoji tacno $3! = 6$ razlicitih uredjenja tih elemenata. Stoga, broj neuredjenih izbora je:

$$C(5, 3) = \frac{P(5, 3)}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

Dakle, postoji 10 razlicitih nacina da se izaberu 3 elementa iz skupa od 5, kada redosled nije bitan. Ovaj rezultat pokazuje da neuredjene izbore mozemo opisati i prebrojati pomocu uredjenih izbora, uz korekciju za broj rasporeda istih elemenata.

1.4.2 Zakljucak

Kroz ovo izvodjenje, jasno je da neuredjeni izbori (kombinacije) mogu biti izrazeni i prebrojani koristeci uredjene izbore (permutacije). Odnos izmedju permutacija i kombinacija dat je formulom:

$$C(n, m) = \frac{P(n, m)}{m!}$$

Ova formula pokazuje da su kombinacije zapravo podskup permutacija, gde zanemarujemo redosled elemenata. Na taj nacin, prebrojavanje neuredjenih izbora moze biti izvedeno direktno iz prebrojavanja uredjenih izbora, uz odgovarajuce prilagodjavanje.

1.5 Rešavanje celobrojnih jednačina pomoću kombinacija multiskupa

Rešavanje celobrojnih jednačina vrši se pomoću kombinacija multiskupa, tj. traže se rešenja za linearne jednačine sa više nepoznatih gde svaka nepoznata može imati **SAMO nenegativne cele brojeve** kao vrednosti. Ovaj problem se svodi na prebrojavanje kombinacija multiskupa.

Razmotrimo sledeći problem: Data je linearna jednačina sa n nepoznatih ($n > 0$) u obliku:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

pod uslovima da su $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ i $m \geq 0$.

Zadatak: Pronaći broj rešenja za ovu jednačinu, tj. broj različitih načina na koje možemo raspodeliti m u n delova.

Rešenje: Broj rešenja jednak je broju $(n + m - 1)$-torki u kojima ima m jedinica i $n - 1$ nula. Ukupan broj rešenja ove jednačine može se izračunati korišćenjem kombinacija sa ponavljanjem:

$$\binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1}$$

Dakle, od $m+n-1$ komponenti biramo m komponenti za jedinice, odnosno $n-1$ komponenti za nule.

Primer: Rešiti celobrojnu jednačinu ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

Rešenje: Broj rešenja jednak je broju svih $(8 + 3 - 1)$-torki, tj. desetorki, od kojih su dve komponente jednake 0, a osam komponenti jednako jedinici. Primenom gore date formule, broj rešenja ove jednačine je:

$$\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$$

Na primer, jedno rešenje je $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 8)$, što odgovara 0011111111.

1.6 Odredjivanje broja monotono neopadajucih konačnih nizova brojeva pomoću kombinacija multiskupa

Odredjivanje broja monotono neopadajućih konačnih nizova brojeva pomoću kombinacija multiskupa može se postići korišćenjem kombinacija sa ponavljanjem. Ako imamo skup brojeva i želimo da pronadjemo sve moguće uredjene torke celih brojeva u neopadajućem redosledu, možemo koristiti sledeći pristup.

Pretpostavimo da imamo skup od n različitih elemenata i da želimo da formiramo torku dužine k u kojoj se elementi pojavljuju u neopadajućem redosledu. Tada je broj takvih uredjenih torki jednak broju načina na koji možemo rasporediti k elemenata medju n grupa, što se može izraziti kao kombinacija sa ponavljanjem:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Gde je $\binom{n+k-1}{k}$ binomni koeficijent koji označava broj načina da se iz skupa od $n+k-1$ elemenata izabere k elemenata.

Primer:

Pretpostavimo da imamo skup $S = \{1, 2, 3\}$ i želimo da formiramo uredjenih torki dužine $k = 4$ tako da su brojevi u neopadajućem redosledu.

Prema formuli za broj kombinacija sa ponavljanjem:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$$

Izračunavamo binomni koeficijent:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

Dakle, postoji 15 različitih uredjenih torki dužine 4 koje sadrže elemente iz skupa $\{1, 2, 3\}$ u neopadajućem redosledu.

Nabrajanje svih mogućih torki je:

$$(1,1,1,1),\ (1,1,1,2),\ (1,1,1,3),\ (1,1,2,2),\ (1,1,2,3),\ (1,1,3,3),$$
$$(1,2,2,2),\ (1,2,2,3),\ (1,2,3,3),\ (1,3,3,3),\ (2,2,2,2),\ (2,2,2,3),$$
$$(2,2,3,3),\ (2,3,3,3),\ (3,3,3,3)$$

1.7 Algoritmi za generisanje prethodnih kombinatornih objekata

Za svaki od prethodnih kombinatornih objekata možemo da napravimo algoritam za njihovo generisanje na osnovu ulaza. Naredni programi su napisani u programskom jeziku python.

1.7.1 Algoritam za generisanje m-kombinacija multiskupa

```
import math

while True:
    try:
        l=int(input("Unesite velicinu skupa:"))
        if l<=0:
            print("Velicina skupa mora biti pozitivan
                ceo broj!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

while True:
    try:
        m=int(input("Unesite broj elemenata u
            kombinaciji(ujedno i broj ponavljanja svakog
            elementa):"))
        if m<=0:
            print("Broj elemenata u kombinaciji mora
                biti pozitivan ceo broj!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

skup=[]
for i in range(l):
    while True:
        try:
            x=int(input("Unesite element skupa:"))
            if(x in skup):
                print("Element vec postoji u skupu!")
                continue
            break
        except ValueError:
            print("Niste uneli ceo broj!")
    skup.append(x)

multiskup=[]

for i in range(l):
    for j in range(m):
        multiskup.append(skup[i])

print("Uneli ste multiskup: "+str(multiskup))
print("Resenje:")
#formula: (l+m-1)!/m!(l-1)!
broj=(int)(math.factorial(l+m-1)/(math.factorial(m)*math.factorial(l-1)))
print("Broj m-kombinacija multiskupa: "+str(broj))
```

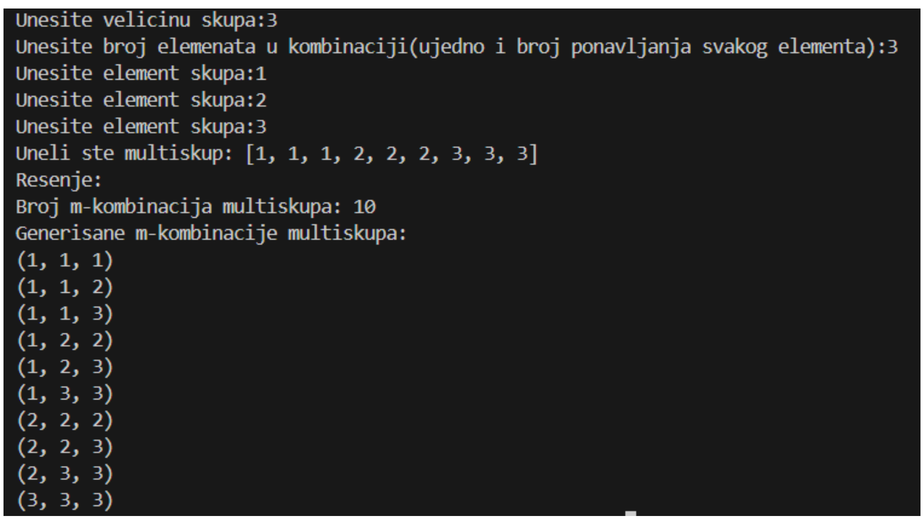
```python
resenja=[]

def generisi_kombinacije(m, pocetak,
    trenutna_kombinacija):
    if len(trenutna_kombinacija) == m:
        resenja.append(tuple(trenutna_kombinacija))
        return

    for i in range(pocetak, len(skup)):
        trenutna_kombinacija.append(skup[i])
        generisi_kombinacije(m, i, trenutna_kombinacija)
        trenutna_kombinacija.pop()

generisi_kombinacije(m,0, [])

print("Generisane m-kombinacije multiskupa:")
for kombinacija in resenja:
    print(kombinacija)
```



```
Unesite velicinu skupa:3
Unesite broj elemenata u kombinaciji(ujedno i broj ponavljanja svakog elementa):3
Unesite element skupa:1
Unesite element skupa:2
Unesite element skupa:3
Uneli ste multiskup: [1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3]
Resenje:
Broj m-kombinacija multiskupa: 10
Generisane m-kombinacije multiskupa:
(1, 1, 1)
(1, 1, 2)
(1, 1, 3)
(1, 2, 2)
(1, 2, 3)
(1, 3, 3)
(2, 2, 2)
(2, 2, 3)
(2, 3, 3)
(3, 3, 3)
```

Figure 1: Izgled ulaza i izlaza za algoritam generisanja m-kombinacija multiskupa

1.7.2 Algoritam za generisanje m-kombinacija skupa

```python
import math

while True:
    try:
        n=int(input("Unesite velicinu skupa:"))
```

```
        if n<=0:
            print("Velicina skupa mora biti pozitivan
                ceo broj!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

while True:
    try:
        m=int(input("Unesite broj elemenata
            kombinacije:"))
        if m<=0:
            print("Broj elemenata kombinacije mora biti
                pozitivan ceo broj!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

skup=[]
for i in range(n):
    while True:
        try:
            x=int(input("Unesite element skupa:"))
            if(x in skup):
                print("Element vec postoji u skupu!")
                continue
            break
        except ValueError:
            print("Niste uneli ceo broj!")
    skup.append(x)

print("Uneli ste skup: "+str(skup))
print("Resenje:")
#formula: n!/((n-m)!m!)
broj=(int)(math.factorial(n)/(math.factorial(n-m)*math.factorial(m)))
print("Broj m-kombinacija skupa: "+str(broj))

resenja=[]

def generisi_kombinacije(m, pocetak,
    trenutna_kombinacija, skup):
    if len(trenutna_kombinacija) == m:
        resenja.append(tuple(trenutna_kombinacija))
        return

    for i in range(pocetak, len(skup)):
        trenutna_kombinacija.append(skup[i])
        generisi_kombinacije(m, i + 1,
```

```
            trenutna_kombinacija, skup)
        trenutna_kombinacija.pop()

generisi_kombinacije(m, 0, [], skup)

print("Generisane m-kombinacije skupa:")
for kombinacija in resenja:
    print(kombinacija)
```

```
Unesite velicinu skupa:5
Unesite broj elemenata kombinacije:3
Unesite element skupa:1
Unesite element skupa:2
Unesite element skupa:3
Unesite element skupa:4
Unesite element skupa:5
Uneli ste skup: [1, 2, 3, 4, 5]
Resenje:
Broj m-kombinacija skupa: 10
Generisane m-kombinacije skupa:
(1, 2, 3)
(1, 2, 4)
(1, 2, 5)
(1, 3, 4)
(1, 3, 5)
(1, 4, 5)
(2, 3, 4)
(2, 3, 5)
(2, 4, 5)
(3, 4, 5)
```

Figure 2: Izgled ulaza i izlaza za algoritam generisanja m-kombinacija skupa

1.8 Zadaci

Zadatak 1

Neka je dat skup $S = \{a, b, c, d, e\}$. Odredite sve moguće 3-kombinacije ovog skupa.
Rešenje: Tražimo sve 3-kombinacije skupa S, što znači da tražimo podskupove od tačno 3 elementa iz skupa S. Po definiciji, redosled elemenata nije bitan, a elementi se ne ponavljaju.

Kombinacije su:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

Kombinacije su: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, b, e\}$, $\{a, c, d\}$, $\{a, c, e\}$, $\{a, d, e\}$, $\{b, c, d\}$, $\{b, c, e\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, d, e\}$.

Zadatak 2

Neka je dat multiskup $M = \{a, a, b, b, b, c\}$. Odredite sve moguće 2-kombinacije ovog multiskupa.
Rešenje: Tražimo sve 2-kombinacije multiskupa M, gde elementi mogu da se ponavljaju u kombinaciji. Koristićemo formulu za kombinacije sa ponavljanjem:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{6+2-1}{2} = \binom{7}{2} = 21$$

Kombinacije su: $\{a, a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, c\}$.

Zadatak 3

Koliko postoji rešenja celobrojne jednačine:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

pod uslovom da su $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$, $x_3 \geq 3$, i $x_4 \geq 0$?
Rešenje: Ova jednačina se može svesti na standardnu formu korišćenjem zamene promenljivih. Definišimo nove promenljive:

$$y_1 = x_1 - 1, \quad y_2 = x_2 - 2, \quad y_3 = x_3 - 3, \quad y_4 = x_4$$

gde su sada sve $y_i \geq 0$. Tako se jednačina svodi na:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4$$

Sada treba da pronadjemo broj rešenja ove jednačine, što je ekvivalentno broju 4-kombinacija multiskupa sa ponavljanjem. To se računa po formuli:

$$\binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{4} = 35$$

Dakle, postoji 35 rešenja ove celobrojne jednačine.

Zadatak 4

Koliko postoji monotono neopadajućih nizova dužine 6, čiji su elementi iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Rešenje: Monotono neopadajući nizovi mogu se posmatrati kao nizovi brojeva gde je svaki naredni broj jednak ili veći od prethodnog. Definišimo promenljive $y_1, y_2, \ldots, y_5$ tako da broj y_i predstavlja koliko puta se broj i pojavljuje u nizu.

Ovo znači da treba da rešimo jednačinu:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6$$

gde su $y_i \geq 0$. Broj rešenja ove jednačine odgovara broju kombinacija sa ponavljanjem, što je:

$$\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = 252$$

Dakle, postoji 252 monotono neopadajuća niza dužine 6 sa elementima iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Zadatak 5:

Tim ima 15 članova. Od toga je 8 muškaraca i 7 žena. Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 ljudi, uz sledeće uslove:

(a) Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 ljudi bez ikakvih uslova?

(b) Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 ljudi ako u grupi bude tačno 3 muškarca i 3 žene?

(v) Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 ljudi ako dva člana insistiraju da rade zajedno ili neće raditi na projektu?

(g) Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 ljudi ako dva člana odbijaju da rade zajedno?

(d) Koliki je broj mogućnosti za izbor grupe od 6 ljudi tako da grupa ima isti broj muškaraca i žena?

Rešenje:

(a) Ukupan broj načina da se izabere grupa od 6 ljudi iz 15 članova bez uslova je:

$$\binom{15}{6} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5005$$

(b) Broj načina da izaberemo tačno 3 muškarca iz 8 muškaraca i tačno 3 žene iz 7 žena je:

$$\binom{8}{3} \times \binom{7}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 56 \times 35 = 1960$$

(v) Ako dva člana insistiraju da rade zajedno, tada ih možemo posmatrati kao jedan blok. Dakle, imamo 13 članova od kojih treba da izaberemo još 4 osobe. Broj mogućnosti je:

$$\binom{13}{4} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 715$$

(g) Ako dva člana odbijaju da rade zajedno, prvo izračunamo ukupan broj mogućnosti da izaberemo 6 članova bez ikakvih uslova, što je $\binom{15}{6} = 5005$, a zatim oduzmemo broj mogućnosti kada su ta dva člana zajedno u grupi, što smo izračunali u delu **(v)** kao 715. Dakle, broj mogućnosti je:

$$5005 - 715 = 4290$$

(d) Broj načina da izaberemo grupu od 6 ljudi tako da ima isti broj muškaraca i žena (tj. 3 muškarca i 3 žene) je isti kao u delu **(b)**, a to je:

$$1960$$

Zadatak 6

Koliko različitih načina postoji da se izaberu 4 kuglice iz kutije koja sadrži 3 različite boje kuglica, ako je dozvoljeno da se kuglice iste boje biraju više puta?
Rešenje: Kombinacije sa ponavljanjem, formula:

$$C(n+k-1, k) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Za $n = 3$ i $k = 4$, rezultat je $C(6, 4) = 15$.

Zadatak 7

U grupi od 20 šahista nalazi se 5 velemajstora. Na koliko načina se mogu formirati dve ekipe od po 10 šahista tako da u prvoj ekipi bude dva velemajstora, a u drugoj tri?
Rešenje: Za prvu ekipu biramo 2 velemajstora i 8 običnih šahista, što se može uraditi na

$$C(5, 2) \times C(15, 8)$$

načina. Preostali šahisti automatski idu u drugu ekipu. Ukupan broj načina je

$$C(5, 2) \times C(15, 8) = 10 \times 6435 = 64350.$$

Dakle, postoji 64,350 načina.

Zadatak 8

Brajeva azbuka je specijalno pismo namenjeno slepim i slabovidim osobama. Svaki karakter u Brajevoj azbuci predstavljen je sa šest tačkica (rasporedjenih u tri vrste i dve kolone), pri čemu svaka tačkica može biti odštampana ili ne. Koliko karaktera može biti napravljeno u Brajevoj azbuci, ako je u svakom karakteru odštampana bar jedna tačkica?
Rešenje: Kako je broj tačkica koje mogu biti odštampane u jednom karakteru jedna, dve, tri, četiri, pet ili šest, dobijamo da je ukupan broj karaktera koje možemo napisati u Brajevoj azbuci

$$\sum_{k=1}^{6} \binom{6}{k}.$$

Broj karaktera možemo izračunati na sledeći način:

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} - 1 = 2^6 - 1 = 64 - 1 = 63.$$

Zadatak 9

U ravni se nalazi 10 tačaka. Tačke A, B, C i D su kolinearne, a medju preostalim tačkama svake 3 su nekolinearne. Koliko ima pravih koje se mogu konstruisati kroz ovih 10 tačaka?
Rešenje: Maksimalan broj pravih koji mogu odrediti 10 tačaka u ravni je

$$\binom{10}{2}.$$

Pošto su tačke A, B, C i D kolinearne, broj pravih koje one odredjuju predstavlja jednu istu pravu. Zato je traženi broj pravih

$$\binom{10}{2} - \binom{4}{2} + 1 = 40.$$

Zadatak 10

Pet ribolovaca je upecalo 20 riba. Na koliko načina se to moglo desiti ako:

a) ne mora svaki ribolovac imati ulov;

b) znamo da je svaki ribolovac upecao bar dve ribe?

Rešenje: Ako sa x_i označimo broj riba koje je upecao i-ti ribolovac, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, zadatak se svodi na odredjivanje broja rešenja jednačine

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20.$$

a) Iz uslova da ne mora svaki ribolovac imati ulov zaključujemo da je $x_i \geq 0$, pa je broj rešenja jednačine

$$\binom{20+4}{4} = \binom{24}{4}.$$

b) Sada imamo uslov $x_i \geq 2$. Za svako i, koji smenom $y_i = x_i - 2$ polaznu jednačinu prevodi u problem

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10, \quad y_i \geq 0.$$

Broj rešenja nove jednačine u skupu nenegativnih celih brojeva je

$$\binom{10+4}{4} = \binom{14}{4}.$$