Hamiltonovi grafovi

Bogdan Ljubinković, Miljan Jokić, Dalibor Nikolić, Lazar Jović, Anastazija Petrov, Marko Djordjević, Aleksa Nenadović i Meris Bilalović

Januar 2025, FTN

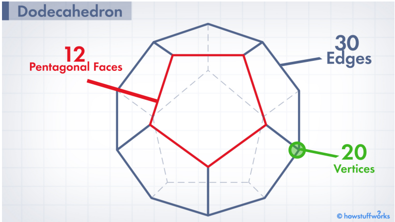
Teme kojima ćemo se baviti

- Istorijski osvrt Hamiltonovog grafa
- Hamiltonov put i Hamiltonova kontura (ciklus)
- Hamiltonov i polu Hamiltonov graf
- Neki dovoljni uslovi Hamiltonovog grafa
- Neki potrebni uslovi Hamiltonovog grafa

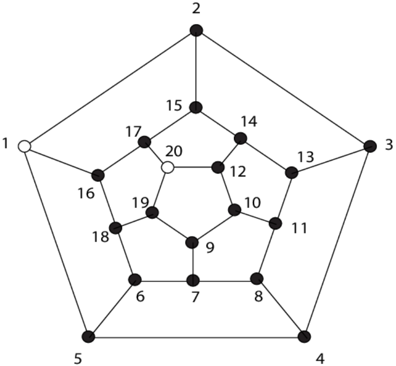
Istorijski osvrt Hamiltonovog grafa

- Tokom analiziranja grafova prirodno se postavlja pitanje da li postoji šetnja koja prolazi kroz svaki čvor tačno jednom. To pitanje oslikava **Ikozijanska igra**.
- Ikozijansku igru je osmislio Vilijam Hamilton, irski matematičar po kojem su ovi grafovi i dobili naziv. Igra se odvija na regularnom dodekaedru (telo koje se sastoji od 12 jednakostraničnih petouglova). Svako od 20 temena predstavlja jedan grad i svi gradovi su meusobno različiti.
- Cilj igre je kreirati šetnju od čvora do čvora grafa, duž ivica tela, tako da se svaki grad (teme) poseti tačno jednom i na kraju se vrati u početni grad.

Istorijski osvrt Hamiltonovog grafa



Dodekaedar



Dodekaedar predstavljen kao graf

Hamiltonov put i Hamiltonova kontura (ciklus)

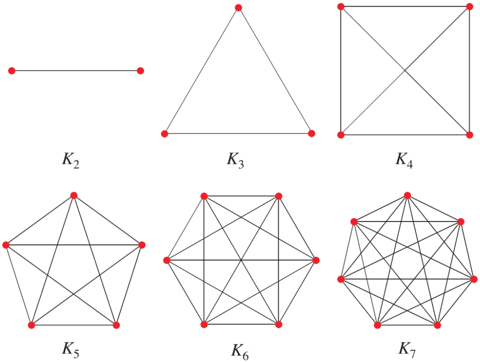
- **Definicija Hamiltonovog puta**: Neka je G graf. Hamitonov put je put kroz G takav da obie svaki čvor tačno jednom pri čemu se grane ne ponavljaju:
- **Definicija Hamiltonove konture (ciklus)**: Neka je G graf. Hamiltovoba kontura (ciklus) je put koji sadrži sve čvorove grafa tačno jednom sem prvog i poslednjeg koji su isti pri čemu se grane ne ponavljaju. Svaka Hamiltonova kontura sadrži Hamiltonov put.

Hamiltonov i polu Hamiltonov graf

- **Definicija polu Hamiltonovog grafa**: Za graf G kažemo da je polu Hamiltonov ako sadrži Hamiltonov put.
- **Definicija Hamiltonovog grafa**: Za graf G kažemo da je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonovu konturu. Svaki Hamiltonov graf je ujedno i polu Hamiltonov graf.

Kompletna i Hamiltonov graf

- **Teorema**: Svaki kompletan graf $K_n, n \geq 3$ je Hamiltonov graf.
- **Dokaz**: Lako je primetiti da krenuvši od bilo kog čvora kompletnog grafa možemo napraviti Hamiltonovu konturu posećujući uvek novi čvor dok ne obiemo sve u kom trenutku se vraćamo na početni.



Neki dovoljni uslovi Hamiltonovog grafa

- Kao dovoljne uslove posmatramo tvrdjenja **Orea** iz 1960. godine i tvrdjenje **Diraka** iz 1952. godine. Oba tvrenja se bave stepenom čvorova u grafu. Ako su zadovoljeni dovoljni uslovi, onda možemo tvrditi da je graf Hamiltonov.
- Za dokaze ovih tvrdjenja, uvešćemo jednu pomoćnu lemu.

Pomoćna lema

- **Lema** Neka je G prost graf sa n, $n \geq 3$, čvorova u kojem postoje nesusedni čvorovi $u, v \in V(G)$ sa osobinom
$$d_G(u) + d_G(v) \geq n.$$
Tada je G Hamiltonov graf ako i samo ako je $G + \{u, v\}$ Hamiltonov graf.

Dokaz leme

- **Dokaz:**
- ($\Longrightarrow$) Ako je G Hamiltonov onda je i $G + \{u, v\}$ Hamiltonov, zato što je Hamiltonova kontura u G istovremeno i Hamiltonova kontura u $G + \{u, v\}$.
- ($\Longleftarrow$) Ako je C Hamiltonova kontura u $G + \{u, v\}$, a nije Hamiltonova kontura u G, onda su u i v susedni čvorovi u toj konturi. Tada postoji Hamiltonov uv-put u G:

  $$uu_1 \dots u_{i-1}u_i \dots u_n v.$$

  Ako postoji grana uu_i onda ne postoji grana $u_{i-1}v$. Ako bi postojala ta grana, onda bi postojala Hamiltonova kontura u G:

  $$uu_1 \dots u_{i-1}vu_n \dots u_i u$$

Dokaz leme

- To znači da svaka grana koja izlazi iz čvora u isključuje jednu granu koja izlazi iz čvora v. U tom slučaju važi sledeće:

$$d_G(v) \leq n - 1 - d_G(u) \Leftrightarrow d_G(u) + d_G(v) \leq n - 1$$

$$\Leftrightarrow d_G(u) + d_G(v) < n$$ što je u kontradikciji sa pretpostavkom.

Oreova teorema

- **Oreova teorema** Ako je G graf sa n, n $\geq$ 3, čvorova sa osobinom:

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n$$

za svaki par nesusednih čvorova $u, v \in V(G)$, onda G ima Hamiltonovu konturu.

Dokaz Oreove teoreme

- **Dokaz:**
- Ako je G kompletan graf, tvrdjenje sledi direktno.
- Ako G nije kompletan graf, pretpostavimo da je $E(K_n) \backslash E(G) = \{e_1, \ldots, e_l\}$.Primetimo da se dodavanjem grana grafu G ne može promeniti uslov da je zbir stepena nesusednih čvorova bar n. Uzastopnom primenom prethodne leme, u l koraka zaključujemo da G ima Hamiltonovu konturu ako i samo ako kompletan graf K_n ima Hamiltonovu konturu.

Dirakova teorema

- **Dirakova teorema** Ako je G graf sa n, $n \geq 3$, čvorova i $d_G(v) \geq \frac{n}{2}$ za svako $v \in V(G)$, onda je G Hamiltonov graf.
- **Dokaz** Na osnovu tvrdjenja Orea, možemo zaključiti da za svaki par čvorova važi

$$d_G(u) + d_G(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

odakle sledi da je G Hamiltonov graf.

Potreban uslov polu Hamiltonovog grafa

- **Teorema**: Ako je G polu Hamiltonov graf, tada za svaki skup čvorova $U \subset V(G), U \neq \emptyset$ važi da je broj komponenti povezanosti kada se izbace čvorovi U manji ili jednaki od $|U| + 1$, tj. da:
$$\omega(G - U) \leq |U| + 1$$
- **Dokaz**: Predpostavimo da je graf G polu Hamiltonov. Tada za svako mora postojati Hamiltonov put C unutar grafa G. Za proizvoljan skup čvorova $U \subset V(G), U \neq \emptyset$ važi da $|C - U|$ ne može biti veće od $|U| + 1$ jer se oduzimanjem svakog čvora U iz C broj komponenti povezanosti C ostaje isti (ako se oduzme 1. ili poslednji čvor) ili povećava za 1. Kako je C podgraf G broj komponenti povezanosti G je manji ili jednak sa C iz čega sledi da isto važi i za $G - U$ i $C - U$.

$$\omega(G - U) \leq \omega(C - U) \leq |U| + 1$$

Potreban uslov Hamiltonovog grafa

- **Teorema**: Ako je G Hamiltonov graf, tada za svaki skup čvorova $U \subset V(G), U \neq \emptyset$ važi da je broj komponenti povezanosti kada se izbace čvorovi U manji ili jednaki od $|U|$, tj. da:

$$\omega(G - U) \leq |U|$$

- **Dokaz**: Dokaz za potreban uslova Hamiltonovog grafa je isti kao za polu Hamiltonov. Jedina razlika je što se koristi Hamiltonova kontura, a ne put čime uklanjanje prvog čvora iz konture sigurno ne menja broj komponenti povezanosti C zbog osobina konture pa je konačni rezultat:

$$\omega(G - U) \leq \omega(C - U) \leq |U|$$