Zadatak 4

Grupa 8

Oktobar 2024

1 Binomna i polinomna formula

Binomni i polinomni koeficijenti imaju važnu ulogu u matematici, posebno u algebri i kombinatorici, gde se koriste za izračunavanje broja načina na koje se elementi mogu rasporediti ili kombinovati. Binomni koeficijent, često označen simbolom $\binom{n}{k}$, predstavlja broj načina za odabir k elemenata iz skupa od n elemenata bez obzira na redosled. Ovaj koeficijent je ključan u binomnoj teoremi, koja opisuje kako se binom $(a+b)^n$ može proširiti u obliku polinoma.

Polinomni koeficijenti, s druge strane, proširuju ovu ideju na složenije izraze, kada imamo više od dve promenljive, na primer $(a+b+c)^n$. Oni omogućavaju izražavanje složenih proizvoda kroz različite kombinacije promenljivih i eksponenata, što je posebno korisno u višedimenzionalnim problemima i matematičkom modeliranju.

1.1 Binomni koeficijenti

Binomni koeficijenti predstavljaju koeficijente u razvoju stepena binoma u zbir, prema binomnoj teoremi. Istorijski, postoje tragovi da je Euklid poznavao binomnu teoremu još u 4. veku p.n.e, bar za razvoj kvadrata binoma, a indijski matematičar Pingala u 3. veku p.n.e. binomne koeficijente u formi trougla. U 17. veku, Blaise Pascal uvodi binomne koeficijente u algebarskom obliku i definiciju navodimo u nastavku.

1.1.1 Definicija

Neka su m i n celi brojevi sa osobinom $0 \leq m \leq n$. Binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ je funkcija koja takvim parovima vrednosti n i m dodeljuje pozitivne cele brojeve na sledeći način:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{i} \quad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m(m-1)\ldots 2 \cdot 1}, \quad m \geq 1.$$

Binomni koeficijent se kombinatorno može interpretirati kao:

1. broj m-kombinacija skupa od n elemenata, odnosno kao
2. broj m-točlanih podskupova skupa od n elemenata.

Znači, kombinatorna interpretacija formalno se može opisati relacijom

$$\binom{n}{m} = C(n;m).$$

1.1.2 Lema (faktorijelna reprezentacija)

Za cele brojeve n i m sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Dokaz. Za $m \in \{0, n\}$ imamo

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1 = \binom{n}{0}.$$

Ako je $1 \leq m \leq n-1$ množenjem brojioca i imenioca sa $(n-m)!$ dobijamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m)!}{m(m-1)\ldots 2 \cdot 1 \cdot (n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Možemo primetiti da binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ odgovara broju kombinacija bez ponavljanja klase m od n elemenata. Broj načina da se od n elemenata izabere m elemenata jednak je broju načina da se od n elemenata izabere (preostalih) $n-m$ elemenata. To je formalno zapisano u sledećoj lemi.

Da bismo razumeli ovaj izraz kombinatorno, razmotrimo sledeće:

1. **Broj načina da se izabere podskup od m elemenata iz n elemenata** može se posmatrati kao postupak biranja m članova bez obzira na redosled. Prvo, biramo m elemenata iz n (redosled nije važan), a preostali broj elemenata je $n-m$.

2. Faktorijeli u formuli $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ služe za podešavanje kombinatornog izbora. Prvo, $n!$ predstavlja sve permutacije n elemenata. Medjutim, kada biramo samo m elemenata, preostalih $(n-m)!$ permutacija preostalih elemenata nije važno, pa ih delimo s $(n-m)!$. Na kraju, delimo sa $m!$ da bismo uklonili sve unutrašnje permutacije medju m izabranih elemenata, budući da je redosled unutar podskupa nebitan.

Tako, kombinatorna interpretacija binomnog koeficijenta $\binom{n}{m}$ može se razumeti kao broj različitih m-članih podskupova skupa od n elemenata.

1.1.3 Lema (simetričnost)

Za cele brojeve n i m sa osobinom $0 \leq m \leq n$, važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Prema definiciji binomnog koeficijenta, imamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Dakle, sledi da je $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

Broj načina da se izabere m elemenata iz skupa od n elemenata jednak je broju načina da se izabere $n-m$ elemenata koji ostaju neizabrani. Biranje podskupa od m elemenata iz skupa od n automatski odredjuje koji elementi nisu izabrani, i obrnuto – biranje $n-m$ elemenata odredjuje koji su m elemenata izabrani. Ovo potvrdjuje simetričnost binomnog koeficijenta, tj. $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.
□

1.1.4 Lema (Pascalov identitet)

Za cele brojeve n i m, $1 \leq m \leq n-1$, važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Prema definiciji binomnog koeficijenta, imamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Posmatrajmo izraz $\binom{n}{m}$ tako što izdvojimo jedan element i grupišemo ostalih $n-1$ elemenata. Ako element nije izabran, preostalih m elemenata biramo iz skupa od $n-1$, što daje $\binom{n-1}{m}$. Ako je element izabran, biramo preostalih $m-1$ elemenata iz $n-1$, što daje $\binom{n-1}{m-1}$. Dakle:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Posmatrajmo skup A sa n elemenata i biramo podskup od m elemenata. Pretpostavimo da jedan fiksirani element $a \in A$. Sada postoje dva moguća slučaja:

1. **Element a nije u podskupu**: U tom slučaju biramo m elemenata iz preostalih $n-1$ elemenata, što možemo učiniti na $\binom{n-1}{m}$ načina.

2. **Element a je u podskupu**: U tom slučaju biramo još $m-1$ elemenata iz preostalih $n-1$ elemenata, što možemo učiniti na $\binom{n-1}{m-1}$ načina.

Zbog principa zbira, ukupan broj načina da se izabere m elemenata iz n elemenata je zbir ovih mogućnosti:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

□

1.1.5 Binomna formula i induktivni dokaz

Teorema (Binomna formula)
Za $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, važi:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m$$

gde je $\binom{n}{m}$ binomni koeficijent definisan kao $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Dokaz indukcijom po n:

1. **Baza indukcije:** $n = 1$

   Za $n = 1$, imamo:
   $$(x+y)^1 = x + y$$
   Što odgovara formuli jer je:
   $$\sum_{m=0}^{1} \binom{1}{m} x^{1-m} y^m = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y$$

2. **Induktivna pretpostavka:** Pretpostavimo da tvrdnja važi za neki $n = k$, tj.
   $$(x+y)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m} y^m$$

3. **Induktivni korak:** Pokazaćemo da tvrdnja važi za $n = k+1$, tj. da je:
   $$(x+y)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} x^{(k+1)-m} y^m$$

   Posmatrajmo izraz $(x+y)^{k+1}$:
   $$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k$$
   Primenićemo induktivnu pretpostavku za $(x+y)^k$:
   $$(x+y)^{k+1} = (x+y) \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m} y^m$$
   Množenjem $(x+y)$ sa svakim članom u sumi dobijamo:
   $$(x+y)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{k+1-m} y^m + \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m} y^{m+1}$$

Sada ćemo preurediti drugu sumu koristeći promenu indeksa. Uvedimo $j = m + 1$, što nam daje:

$$\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} x^{k-m} y^{m+1} = \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} x^{k+1-j} y^j$$

Dakle, možemo zapisati:

$$(x+y)^{k+1} = x^{k+1} + \sum_{m=1}^{k} \left(\binom{k}{m} + \binom{k}{m-1} \right) x^{k+1-m} y^m + y^{k+1}$$

Po Pasvalovom identitetu, znamo da je $\binom{k}{m} + \binom{k}{m-1} = \binom{k+1}{m}$. Stoga dobijamo:

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} x^{(k+1)-m} y^m$$

Time smo dokazali da tvrdnja važi za $n = k + 1$, što završava indukciju.

1.2 Polinomni koeficijent, osobine i polinomna formula

Ako binomne koeficijente posmatramo sa stanovišta binomne formule, tj. kao koeficijente u razvijenom obliku stepena binoma, prirodno se postavlja pitanje da li bi oni analogno mogli biti uopšteni na koeficijente u razvoju stepena trinoma ili nekog drugog polinoma.

1.2.1 Definicija

Neka su dati brojevi $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$, i neka je $n = m_1 + \cdots + m_l$. Tada polinomni koeficijent definišemo na sledeći način:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_l!}$$

Kombinatorno, polinomni koeficijent se može interpretirati kao:

- broj permutacija multiskupa $M = [a_1, \ldots, a_l]_{m_1, \ldots, m_l}$;
- broj uredjenih l-torki $(B_1, \ldots, B_l)$ skupa $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ sa osobinom da je za date vrednosti $(m_1, \ldots, m_l)$:
  1. $A = B_1 \cup \cdots \cup B_l$,
  2. $|B_1| = m_1, \ldots, |B_l| = m_l$,
  3. $m_1 + \cdots + m_l = n$.

1.2.2 Osobine polinomnih koeficijenata

Neka su dati brojevi $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_0$ i neka je $n = m_1 + \cdots + m_l$.

1. Tada je:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\cdots\binom{m_l}{m_l}$$

   Dokaz:

$$\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\cdots\binom{m_l}{m_l} = \frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\cdot\frac{(n-m_1)!}{m_2!(n-m_1-m_2)!}\cdots\frac{m_l!}{m_l!0!}$$

$$= \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_l!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l}$$

   Prethodno tvrdjenje daje vezu izmedju permutacija multiskupa i kombinacija bez ponavljanja.

2. Ako je $\{m_1, m_2, \ldots, m_l\} = \{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$ onda je:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_l}$$

   Dokaz: Iz uslova $\{\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}\} = \{\{k_1, k_2, \ldots, k_l\}\}$ direktno sledi da je:

$$m_1!m_2!\ldots m_l! = k_1!k_2!\ldots k_l!,$$

   a odatle su i polinomni koeficijenti jednaki.

3. Ako je $0 < m_1, \ldots, m_l < n$ onda važi:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} + \cdots$$

$$+\binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}$$

   Dokaz:

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{(n-1)!}{(m_1-1)!(m_2)!\ldots(m_l)!} = \frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

$$\binom{n-1}{m_1, m_2-1, m_3, \ldots, m_l} = \frac{(n-1)!}{m_1!(m_2-1)!\ldots(m_l)!} = \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1} = \frac{(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots(m_l-1)!} = \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

Tada dobijamo da je suma

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, m_3, \ldots, m_l} + \cdots + \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}$$

jednaka

$$\frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} + \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} + \cdots + \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

sto nakon svodjenja na zajednicki imenilac daje

$$\frac{(m_1+\cdots+m_l)(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

4. Tada je:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}$$

Dokaz: Na osnovu definicije polinomnog koeficijenta i definicije faktorijela, dobijamo

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} = \frac{n!}{m_1!\ldots m_{l-1}!0!} = \frac{n!}{m_1!\ldots m_{l-1}!}$$

$$= \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}$$

1.2.3 Polinomna formula i primeri

Neka su $x_1, \dots, x_l$ ($l \geq 2$) proizvoljni realni brojevi i neka je $n \geq 1$. Tada je

$$(x_1 + \cdots + x_l)^n = \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_l=n \\ m_1\geq 0,\dots,m_l\geq 0}} \binom{n}{m_1, \dots, m_l} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_l^{m_l}$$

Primer 1: Izračunati

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_l=n \\ m_1\geq 0,\dots,m_l\geq 0}} \binom{n}{m_1, \dots, m_l}.$$

Rešenje. Ako je u polinomnoj formuli $x_1 = x_2 = \cdots = x_l = 1$, onda dobijamo

$$\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_l=n \\ m_1\geq 0,\dots,m_l\geq 0}} \binom{n}{m_1, \dots, m_l} = (1 + \cdots + 1)^n = l^n.$$

Primer 2: Napisati u razvijenom obliku $(x + y + z)^3$
Rešenje. Na osnovu polinomne formule sledi

$$\begin{aligned}(x+y+z)^3 &= \binom{3}{3,0,0}x^3y^0z^0 + \binom{3}{0,3,0}x^0y^3z^0 + \binom{3}{0,0,3}x^0y^0z^3 \\ &+\binom{3}{0,1,2}x^0y^1z^2 + \binom{3}{0,2,1}x^0y^2z^1 + \binom{3}{1,0,2}x^1y^0z^2 \\ &+\binom{3}{1,2,0}x^1y^2z^0 + \binom{3}{2,0,1}x^2y^0z^1 + \binom{3}{2,1,0}x^2y^1z^0 \\ &+\binom{3}{1,1,1}x^1y^1z^1 \\ &= x^3 + y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2 + 3xz^2 + 3xy^2 + 3x^2z + 3x^2y + 6xyz.\end{aligned}$$

1.3 Preslikavanja i injektivna preslikavanja preko kombinatornih objekata

Da bismo razumeli broj svih preslikavanja i broj injektivnih preslikavanja izmedju dva konačna skupa A i B, koristimo osnovne kombinatorne tehnike. Pretpostavimo da skup A ima n elemenata, a skup B m elemenata. Posmatraćemo:

- Broj svih preslikavanja sa skupa A na skup B,
- Broj injektivnih preslikavanja sa skupa A na skup B (pod pretpostavkom da $m \geq n$).

1.3.1 Broj svih preslikavanja

Za svako preslikavanje sa skupa A na skup B, svaki element iz skupa A može se preslikati na bilo koji od m elemenata u skupu B. Dakle, ako je skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, svaki a_i ima m mogućih izbora.

Ukupan broj svih preslikavanja tada je:

$$m^n$$

To je zato što za n elemenata u skupu A imamo m izbora za svaki od njih, što čini $m \cdot m \cdot \cdots \cdot m = m^n$ mogućnosti. Ovaj izraz odgovara broju n-permutacija multiskupa sa m elemenata i n različitih elemenata.

1.3.2 Broj injektivnih preslikavanja

Injektivno preslikavanje je ono kod kojeg različiti elementi skupa A moraju biti preslikani na različite elemente skupa B. Drugim rečima, svaki element u A ima jedinstveni par u B, bez ponavljanja vrednosti slike. Da bi postojalo injektivno preslikavanje, skup B mora imati najmanje n elemenata, dakle $m \geq n$.

Broj injektivnih preslikavanja sa n elemenata u A na m elemenata u B može se dobiti kao broj načina da se odaberu n različitih elemenata od m, a zatim da ih permutujemo. Prvi element A ima m opcija u B, drugi $m-1$, zatim $m-2$, i tako dalje, do $m-n+1$.

Broj injektivnih preslikavanja je stoga:

$$m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Ovaj izraz odgovara broju n-permutacija skupa od m elemenata, što je broj načina da se izabere n različitih elemenata iz m elemenata bez obzira na redosled.

1.4 Stirlingovi brojevi druge vrste

Primer: Neka su X i Y konačni skupovi sa $|X| = n$ i $|Y| = m$. Već nam je poznato da postoji m^n funkcija koje preslikavaju X u Y. Koliko od ovih funkcija je *na*?

Rešenje: Iskoristićemo princip uključivanja-isključivanja da najpre prebrojimo objekat (funkcije) koje ne zadovoljavaju traženi uslov (nisu *na*). Tada je broj funkcija *na* jednak razlici izmedju ukupnog broja funkcija m^n i broja "loših" funkcija.

Bez gubitka opštosti, pretpostavimo da je $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$. Neka A_i označava skup funkcija koje preslikavaju X u Y i pritom ne uzimaju vrednost i. Ako funkcija $f : X \to Y$ nije *na*, tada postoji $i \in Y$ tako da za svako $x \in X$ važi $f(x) \neq i$. Samim tim, funkcija f pripada skupu A_i, pa zaključujemo da funkcija nije *na* ako i samo ako pripada skupu $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$.

Koliko ima funkcija u skupu A_i? Skup A_i sadrži sve funkcije koje preslikavaju X u $Y \setminus \{i\}$, pa je stoga $|A_i| = (m-1)^n$. Skup $A_i \cap A_j$ sadrži funkcije koje ne uzimaju vrednosti i i j, tj. sve funkcije koje preslikavaju X u $Y \setminus \{i, j\}$, pa je $|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$. U opštem slučaju, $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ sadrži sve funkcije koje ne uzimaju nijednu od vrednosti $i_1, i_2, \ldots, i_k$, tako da je $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (m-k)^n$. Sada po principu uključivanja-isključivanja imamo da je

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Prema tome, ukupan broj funkcija *na* je jednak

$$m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n.$$

Ako vrednost $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \binom{m}{k} (m-k)^n$ podelimo sa $m!$ dobijamo ceo broj koji se naziva **Stirlingov broj druge vrste** i označava se sa $S(n, m)$. Ovi brojevi se pojavljuju prilikom prebrojavanja podela n-elementnog skupa na m medjusobno disjunktnih podskupova.

Neka su dati skupovi A i B gde je $|A| = n$ i $|B| = m$, pri čemu je n≥m. Stirlingov broj druge vrste S(n,m) tačno odgovara broju načina na koji možemo formirati "na" preslikavanje iz skupa sa n elemenata u skup sa m elemenata, gde se svaki element skupa B pojavljuje u bar jednom nepraznom podskupu skupa A. Razmotrimo skup $A = \{1, 2, 3\}$ i skup $B = \{a, b\}$

1. **Izračunajmo $S(3, 2)$:**
   - $S(3, 2)$ je broj načina na koje možemo podeliti skup od $n = 3$ elemenata u $m = 2$ neprazna podskupa.
   - $S(3, 2) = 3$, što znači da postoje tri načina da podelimo tri elementa u dva neprazna podskupa. Te podele su:
     (a) $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$
     (b) $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$
     (c) $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$
2. **Korišćenje podela za kreiranje "na" preslikavanja:**
   - Sada koristimo ove podele da kreiramo preslikavanja iz A u B tako da su oba elementa skupa B pokrivena. Svako preslikavanje odgovara dodeljivanju svake grupe jednom elementu u B.
   - Na primer:
     - Za podelu $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, možemo dodeliti a prvom podskupu $\{1\}$ i b podskupu $\{2, 3\}$, što daje preslikavanje $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = b$.

– Slično, možemo dodeliti b podskupu $\{1\}$ i a podskupu $\{2, 3\}$, što daje preslikavanje $f(1) = b$, $f(2) = a$, $f(3) = a$.

3. **Ukupan broj "na" preslikavanja:**

   - Svaka od tri podela daje dva različita preslikavanja (jedan za svaku moguću dodelu podskupova elementima u B).
   - Dakle, imamo $S(3, 2) \times 2 = 3 \times 2 = 6$ "na" preslikavanja.

Rezultat: Ukupan broj "na" preslikavanja iz $A = \{1, 2, 3\}$ u $B = \{a, b\}$ je 6, i dobili smo ga korišćenjem Stirlingovih brojeva druge vrste za prebrojavanje načina grupisanja elemenata.

Ovo pokazuje kako Stirlingovi brojevi druge vrste pomažu u strukturalnom grupisanju elemenata, što možemo koristiti za kreiranje svih mogućih "na" preslikavanja izmedju dva skupa.

1.5 Algoritam za Paskalov trougao

```python
import math

while True:
    try:
        n=int(input("Unesite broj n (broj redova
            Paskalovog trougla):"))
        if n<=0:
            print("Broj redova mora biti pozitivan ceo
                broj!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

print("Paskalov trougao:")

for i in range(n):
    print(" "*(n-i-1), end="")
    for j in range(i+1):
        print(str(math.comb(i,j))+" ", end="")
    print()
```

```
Unesite broj n (broj redova Paskalovog trougla):10
Paskalov trougao:
         1
        1 1
       1 2 1
      1 3 3 1
     1 4 6 4 1
    1 5 10 10 5 1
   1 6 15 20 15 6 1
  1 7 21 35 35 21 7 1
 1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
```

Figure 1: Izgled ulaza i izlaza za algoritam generisanja Paskalovog trougla

1.6 Algoritam za razvoj binomne formule

```python
import math

print("Razvijanje binomne formule: (a+b)^n")
while True:
    try:
        a=int(input("Unesite a:"))
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

while True:
    try:
        b=int(input("Unesite b:"))
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

while True:
    try:
        n=int(input("Unesite n:"))
        if n<=0:
            print("n mora biti pozitivan ceo broj!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")
```

```python
print("Razvoj binomne formule:")

opsti_razvoj = []
razvoj = []
medjukoraci = []
vrednost = 0

for k in range(n + 1):
    koeficijent = math.comb(n, k)

    # Pravimo izraz u obliku koeficijent * a^(n-k) * b^k

    clan_opste= f"{koeficijent} * a^{n - k} * b^{k}"
    opsti_razvoj.append(clan_opste)

    if a<0 and b<0:
        clan = f"{koeficijent} * ({a})^{n - k} *
            ({b})^{k}"
    elif a<0:
        clan = f"{koeficijent} * ({a})^{n - k} *
            {b}^{k}"
    elif b<0:
        clan = f"{koeficijent} * {a}^{n - k} *
            ({b})^{k}"
    else:
        clan = f"{koeficijent} * {a}^{n - k} * {b}^{k}"
    razvoj.append(clan)

    # Izracunavamo vrednost clana
    clan_vrednost = koeficijent * (a ** (n - k)) * (b
        ** k)
    vrednost += clan_vrednost

    medjukoraci.append(str(clan_vrednost))

# Prikazujemo razvoj i medjukorake u obliku stringova
razvoj_str = " + ".join(razvoj)
medjukoraci_str = " + ".join(medjukoraci)

print("Opsti oblik binomne formule:")
print(f"(a + b)^{n} = "+" + ".join(opsti_razvoj))

print("Razvoj za unete vrednosti:")
print(f"({a} + {b})^{n} = {razvoj_str}")
print(f"Medjukorak: {medjukoraci_str}")
print(f"Vrednost izraza: {vrednost}")
```

```
Razvijanje binomne formule: (a+b)^n
Unesite a:5
Unesite b:6
Unesite n:3
Razvoj binomne formule:
Opšti oblik binomne formule:
(a + b)^3 = 1 * a^3 * b^0 + 3 * a^2 * b^1 + 3 * a^1 * b^2 + 1 * a^0 * b^3
Razvoj za unete vrednosti:
(5 + 6)^3 = 1 * 5^3 * 6^0 + 3 * 5^2 * 6^1 + 3 * 5^1 * 6^2 + 1 * 5^0 * 6^3
Međukorak: 125 + 450 + 540 + 216
Vrednost izraza: 1331
```

Figure 2: Izgled ulaza i izlaza za algoritam razvoja binomne formule

1.7 Algoritam za razvoj polinomne formle

```python
from itertools import combinations_with_replacement
import math
from collections import Counter

print("Razvijanje polinomne formule: (x1 + x2 + ... + xm)^n")

while True:
    try:
        m = int(input("Unesite m (broj sabiraka u polinomnoj formuli): "))
        if m <= 1:
            print("m mora biti pozitivan ceo broj veci od 1!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

sabirci = []
for i in range(m):
    while True:
        try:
            x = int(input(f"Unesite x{i + 1}: "))
            sabirci.append(x)
            break
        except ValueError:
            print("Niste uneli ceo broj!")

while True:
    try:
        n = int(input("Unesite n: "))
        if n <= 0:
```

```
            print("n mora biti pozitivan ceo broj!")
            continue
        break
    except ValueError:
        print("Niste uneli ceo broj!")

opsti_oblik = "(" + " + ".join([f"x{i + 1}" for i in
    range(m)]) + f")^{n}"
realan_oblik = "(" + " + ".join([str(sabirci[i]) for i
    in range(m)]) + f")^{n}"
print(f"Uneli ste polinomnu formulu: {opsti_oblik}")
print("Razvoj polinomne formule:")

opsti_razvoj = []
razvoj = []
medjukoraci = []
vrednost = 0

# Generisanje svih clanova polinomnog razvoja koristeci
    kombinacije sa ponavljanjem
indeksi = combinations_with_replacement(range(m),
    n)#svaka cifra je neki od sabiraka a broj
    pojavljivanja te cifre je njen stepen

for kombinacija in indeksi:
    # Prebrojavanje broja pojavljivanja svakog indeksa
    brojevi = Counter(kombinacija)
    koeficijent = math.factorial(n) //
        math.prod([math.factorial(brojevi[i]) for i in
        range(m)])#koeficijent je n!/(a1!*a2!*...*am!)
        gde su a1,a2,...,am stepeni sabiraka

    # Pravimo izraz u obliku koeficijent * x1^a1 *
        x2^a2 * ... * xm^am
    clan_opste = f"{koeficijent} * " + " *
        ".join([f"x{i + 1}^{brojevi[i]}" for i in
        range(m) if brojevi[i] > 0])
    opsti_razvoj.append(clan_opste)

    clan = f"{koeficijent} * " + " *
        ".join([f"{sabirci[i]}^{brojevi[i]}" for i in
        range(m) if brojevi[i] > 0])
    razvoj.append(clan)

    clan_vrednost = koeficijent * math.prod([sabirci[i]
        ** brojevi[i] for i in range(m)])
    vrednost += clan_vrednost
    medjukoraci.append(str(clan_vrednost))

razvoj_str = " + ".join(razvoj)
```

```python
medjukoraci_str = " + ".join(medjukoraci)

print("Opsti oblik polinomne formule:")
print(f"{opsti_oblik} = " + " + ".join(opsti_razvoj))

print("Razvoj za unete vrednosti:")
print(f"{realan_oblik} = {razvoj_str}")
print(f"Medjukorak: {medjukoraci_str}")
print(f"Vrednost izraza: {vrednost}")
```

```
Razvijanje polinomne formule: (x1 + x2 + ... + xm)^n
Unesite m (broj sabiraka u polinomnoj formuli): 3
Unesite x1: 1
Unesite x2: 2
Unesite x3: 3
Unesite n: 2
Uneli ste polinomnu formulu: (x1 + x2 + x3)^2
Razvoj polinomne formule:
Opšti oblik polinomne formule:
(x1 + x2 + x3)^2 = 1 * x1^2 + 2 * x1^1 * x2^1 + 2 * x1^1 * x3^1 + 1 * x2^2 + 2 * x2^1 * x3^1 + 1 * x3^2
Razvoj za unete vrednosti:
(1 + 2 + 3)^2 = 1 * 1^2 + 2 * 1^1 * 2^1 + 2 * 1^1 * 3^1 + 1 * 2^2 + 2 * 2^1 * 3^1 + 1 * 3^2
Međukorak: 1 + 4 + 6 + 4 + 12 + 9
Vrednost izraza: 36
```

Figure 3: Izgled ulaza i izlaza za algoritam razvoja polinomne formule

1.8 Zadaci i Rešenja

Zadatak 1

Neka su $n, m, k \in \mathbb{N}_0$. Dokazati da važi

$$k \cdot \binom{n+1}{k} = (n+1) \cdot \binom{n}{k-1}.$$

Rešenje. Prema definiciji binomnog koeficijenta, dobijamo sledeći niz ekvivalencija:

$$\begin{aligned} k \cdot \binom{n+1}{k} &= (n+1) \cdot \binom{n}{k-1} \\ &\Leftrightarrow k \cdot \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = (n+1) \cdot \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\ &\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!(k-1)!}. \end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2

Dati kombinatornu interpretaciju identiteta

$$\binom{5}{3} = \binom{2}{2}\binom{3}{3} + \binom{2}{1}\binom{3}{2} + \binom{2}{0}\binom{3}{1}.$$

Rešenje. Posmatraćemo petočlani skup $A = \{a, b, c, d, e\}$ i njegovu partciju na proizvoljan dvočlani podskup i njegov komplement:

$$B = \{a, b\}$$
$$C = \{c, d, e\}.$$

Svaki tročlani podskup skupa A sadrži se od $i \in \{0, 1, 2\}$ elemenata iz skupa B i $3 - i$ elemenata skupa C, što je prikazano u sledećoj tabeli.

Na osnovu principa sume i proizvoda dobijamo zadati identitet. □

Zadatak 3

Neka su n i m nenegativni celi brojevi. Dokazati da važi

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{m+1}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \binom{m}{n-i}.$$

Rešenje. Ako primenimo Vandermondov identitet redom na levu i desnu stranu jednakosti, dobijamo iste vrednosti:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{m+1}{n-i} = \binom{n+(m+1)}{n},$$
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} \binom{m}{n-i} = \binom{(n+1)+m}{n}.$$

□

Zadatak 4

Neka su $n, m \in \mathbb{N}_0$. Dokazati da važi

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{n+m+1}{n}.$$

Rešenje. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po n.
Baza $n = 0$: $\binom{m+0}{0} = \binom{m+1}{0} = 1$
Induktivna pretpostavka $(T_n) : \sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{n+m+1}{n}$
Induktivni korak $(T_n \Rightarrow T_{n+1})$: Koristeći induktivnu pretpostavku i Paskalov identitet, dobijamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} \binom{m+i}{i} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} + \binom{m+n+1}{n+1} \\ &= \binom{n+m+1}{n} + \binom{n+m+1}{n+1} \\ &= \binom{n+m+2}{n+1}.\end{aligned}$$

□

Zadatak 5

Odrediti koeficijent uz $x^2y^3z^5$ u razvoju stepena trinoma

$$(x+2y-z)^{10}.$$

Rešenje. Koeficijent uz $x^2y^3z^5$ je sadržan u sabirku

$$\binom{10}{2,3,5}x^2(2y)^3(-z)^5 = \frac{10!}{2!3!5!}x^2 2^3 y^3(-1)^5 z^5 = -20160x^2y^3z^5.$$

□

Zadatak 6

Odrediti koeficijent uz x u razvoju stepena trinoma

$$(1+x-x^2)^{1749}.$$

Rešenje. Član koji odgovara stepenima (i,j,k) sabirka trinoma $(1+x-x^2)$ je oblika

$$T_{i,j,k} = \binom{1749}{i,j,k}x^j(-x^2)^k = \binom{1749}{i,j,k}(-1)^k x^{j+2k}.$$

Za $j,k \geq 0$ jednačina $j+2k=1$ ima samo jedno rešenje $(j,k)=(1,0)$, odakle je $T_{1748,1,0} = \binom{1749}{1748,1,0}$ i traženi koeficijent je 1749. □

Zadatak 7

Dokazati da važi

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n^2+n)2^{n-2}.$$

Rešenje. Dokazaćemo ovaj identitet koristeći tehniku matematičke indukcije po n.

Baza indukcije: Za $n=1$,

$$\sum_{k=0}^{1} k^2\binom{1}{k} = 0^2\cdot\binom{1}{0} + 1^2\cdot\binom{1}{1} = 0+1 = 1.$$

S druge strane, izraz na desnoj strani je

$$(1^2+1)2^{1-2} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Baza je tačna.

Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da važi za neki $n = m$,

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 \binom{m}{k} = (m^2 + m)2^{m-2}.$$

Induktivni korak: Potrebno je da dokažemo da iz ove pretpostavke sledi da važi i za $n = m + 1$:

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 \binom{m+1}{k} = ((m+1)^2 + (m+1))2^{(m+1)-2}.$$

Krećemo od leve strane i koristimo svojstvo binomnih koeficijenata $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1}$:

$$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 \binom{m+1}{k} = \sum_{k=0}^{m+1} k^2 \left(\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right).$$

Ovaj izraz možemo razdvojiti na dva sume:

$$= \sum_{k=0}^{m+1} k^2 \binom{m}{k} + \sum_{k=0}^{m+1} k^2 \binom{m}{k-1}.$$

Korišćenjem induktivne pretpostavke i dodatnim algebarskim operacijama, dobija se traženi rezultat:

$$((m+1)^2 + (m+1))2^{m-1}.$$

□

Zadatak 8

Dokazati Vandermondovu konvoluciju

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}.$$

Rešenje. Dokazaćemo identitet koristeći kombinatorno tumačenje.

Leva strana predstavlja broj načina da se izaberu k elemenata iz unije dva disjunktna skupa veličine m i n tako da se uzme odredjeni broj elemenata iz svakog skupa. Na primer, možemo izabrati j elemenata iz prvog skupa (veličine m) i $k - j$ elemenata iz drugog skupa (veličine n), gde j ide od 0 do k. Tako dobijamo sumu

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j}\binom{n}{k-j}.$$

Ova suma upravo odgovara levoj strani identiteta.

S druge strane, desna strana, $\binom{m+n}{k}$, predstavlja broj načina da se direktno izabere k elemenata iz unije dva skupa veličine m i n bez obzira na to iz kog skupa dolaze. Dakle, leva i desna strana izraza broje isti broj mogućnosti.

Stoga važi:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}.$$

□

Zadatak 9

Naći koeficijent uz a^3b^2 u razvoju izraza $(3a - 2b)^5$.

Rešenje. Da bismo pronašli koeficijent uz a^3b^2, koristimo multinomnu formulu. Multinomna formula za izraz $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$ daje svaki član kao

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_r^{k_r},$$

gde su $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$ i koeficijent je jednak multinomnom koeficijentu

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!}.$$

U ovom zadatku, posmatramo izraz $(3a - 2b)^5$, što možemo zapisati kao $(x_1 + x_2)^5$, gde su $x_1 = 3a$ i $x_2 = -2b$.

Da bismo dobili član a^3b^2, biramo stepen a jednak 3, a stepen b jednak 2. To znači da koristimo:

$$k_1 = 3 \quad \text{i} \quad k_2 = 2.$$

Onda je koeficijent uz a^3b^2 dat kao:

$$\binom{5}{3, 2} (3a)^3 (-2b)^2.$$

Izračunajmo svaki deo posebno:

1. **Multinomni koeficijent** $\binom{5}{3,2}$:

$$\binom{5}{3, 2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6 \cdot 2} = \frac{120}{12} = 10.$$

2. **Izraz $(3a)^3$**:

$$(3a)^3 = 3^3 \cdot a^3 = 27a^3.$$

3. **Izraz $(-2b)^2$**:

$$(-2b)^2 = (-2)^2 \cdot b^2 = 4b^2.$$

Sada kombinujemo sve rezultate:

$$\binom{5}{3, 2} (3a)^3 (-2b)^2 = 10 \cdot 27a^3 \cdot 4b^2 = 10 \cdot 108a^3b^2 = 1080a^3b^2.$$

Dakle, koeficijent uz a^3b^2 je 1080.

□

Zadatak 10

Naći koeficijent uz x^4y u razvoju izraza $(2x-3y)^5$.

Rešenje. Da bismo našli koeficijent uz x^4y, koristimo multinomnu formulu za izraz $(2x-3y)^5$. Potrebno je izabrati stepen $x=4$ i stepen $y=1$, pa je:

$$k_1 = 4 \quad \text{i} \quad k_2 = 1.$$

Koeficijent uz x^4y biće:

$$\binom{5}{4,1}(2x)^4(-3y)^1.$$

Izračunajmo svaki deo:
1. **Multinomni koeficijent** $\binom{5}{4,1}$:

$$\binom{5}{4,1} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = \frac{120}{24\cdot 1} = 5.$$

2. **Izraz $(2x)^4$**:

$$(2x)^4 = 2^4\cdot x^4 = 16x^4.$$

3. **Izraz $(-3y)^1$**:

$$(-3y)^1 = -3y.$$

Sada kombinujemo sve rezultate:

$$\binom{5}{4,1}(2x)^4(-3y)^1 = 5\cdot 16x^4\cdot(-3y) = 5\cdot(-48)x^4y = -240x^4y.$$

Dakle, koeficijent uz x^4y je -240.
□

Zadatak 11

Naći koeficijent uz p^2q^3 u razvoju izraza $(4p+q)^5$.

Rešenje. Koristimo multinomnu formulu za izraz $(4p+q)^5$ i biramo stepen $p=2$ i stepen $q=3$. Dakle:

$$k_1 = 2 \quad \text{i} \quad k_2 = 3.$$

Koeficijent uz p^2q^3 je:

$$\binom{5}{2,3}(4p)^2(q)^3.$$

Izračunajmo svaki deo:
1. **Multinomni koeficijent** $\binom{5}{2,3}$:

$$\binom{5}{2,3} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{120}{2\cdot 6} = 10.$$

2. **Izraz $(4p)^2$**:
$$(4p)^2 = 4^2 \cdot p^2 = 16p^2.$$

3. **Izraz $(q)^3$**:
$$(q)^3 = q^3.$$

Sada kombinujemo sve rezultate:

$$\binom{5}{2,3}(4p)^2(q)^3 = 10 \cdot 16p^2 \cdot q^3 = 160p^2q^3.$$

Dakle, koeficijent uz p^2q^3 je 160.
$\square$

Zadatak 12

Implementirati funkciju u Javi koja računa binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ koristeći rekurzivnu definiciju.

Rešenje. Korišćenjem rekurzije možemo implementirati funkciju za računanje binomnog koeficijenta u Javi. Rekurzivna formula za binomni koeficijent je:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

sa baznim slučajevima:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{i} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Java kod:

```
// Rekurzivna funkcija za racunanje binomnog koeficijenta
public class BinomialCoefficient {

    public static int binomialCoeff(int n, int k) {
        // Bazni slucajevi
        if (k == 0 || k == n) {
            return 1;
        }
        // Rekurzivna definicija
        return binomialCoeff(n - 1, k - 1) +
            binomialCoeff(n - 1, k);
    }

    public static void main(String[] args) {
        int n = 5;
        int k = 2;
        System.out.println("Binomni koeficijent (" + n + "
            povrh " + k + ") je: " + binomialCoeff(n, k));
    }
}
```