DISKRETNA MATEMATIKA

KOMBINACIJE

SADRZAJ

01

NEUREDJENI IZBORI BEZ PONAVLJANJA

Neuredjeni izbori bez ponavljanja

Prethodno matematicko definisanje pojma **uredjenog izbora k elemenata konacnog skupa X** koristili preslikavanje *f* iz uredjenog skupa *{1, 2, …, k}* u skup X. Na ovaj nacin, bili smo u mogucnosti da kazemo da je element *f(1)* izabran prvi, element *f(2)* drugi, a element *f(k)* poslednji.

S druge strane, kod **neuredjenog izbora elemenata skupa X** nije vazno koji je element izabran prvi, a koji poslednji, tako da nema potrebe uvoditi preslikavanja. S obzirom da sada razmatramo neuredjene izbore elemenata bez ponavljanja vidimo da oni predstavljaju k-toclane podskupove skupa X

DEFINICIJA

Kombinacija bez ponavljanja klase k (k-kombinacija) skupa X od n elemenata jeste k-toclani podskup skupa X od n elemenata.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}$$

DOKAZ

Neka je broj elemenata skupa X veći ili jednak 1.
Rekli smo da je broj k-kombinacija skupa X je ništa drugo do broj k/točlanih podskupova skupa X po definiciji.
Ako izaberemo proizvoljan k-točlani podskup, možemo ga urediti na k! načina.
Odatle je broj k-permutacija je jednak broju k-kombinacija pomnoženih sa projem mogućih načina za uređenje k-točlanog podskupa - k!

DOKAZ

$$P(n;k) = k! \times C(n;k)$$

$$n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1) = k! \times C(n;k)$$

$$C(n;k) = \frac{n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!}$$

Primer.
U odeljenju ima 30 ucenika, koliko ima rukovanja ako se svako sa svakim rukuje?

- U odeljenju ima 30 ucenika, tako da je broj “elemenata” n=30, a posto u rukovanju (razmeni), ucestvuju dva ucenika, to je klasa k=2

a) Neka se rukuju osoba A i osoba B. To rukovanje možemo zapisati AB = BA. Znači da nema veze koji je prvi a koji drugi – to nam govori da su u pitanju kombinacije!

$$C_2^{30} = \binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2 \cdot 1} = 435$$

```python
import itertools


# Funkcija koja prikazuje sve kombinacije
1 usage
def kombinacije_bez_ponavljanja(n, r, ljudi):
    # Izračunavanje broja kombinacija
    broj_kombinacija = len(list(itertools.combinations(ljudi, r)))
    print(f'Broj kombinacija bez ponavljanja da se izabere {r} osobe od {n} ljudi je: {broj_kombinacija}')

    # Prikazivanje svih mogućih kombinacija
    print('Sve moguće kombinacije su:')
    for kombinacija in itertools.combinations(ljudi, r):
        print(kombinacija)


# Primer zadatka
ljudi = ['Ana', 'Bojan', 'Ceca', 'Dejan', 'Ema', 'Filip', 'Goran', 'Hana']
n = len(ljudi)
r = 3

if __name__ == '__main__':
    kombinacije_bez_ponavljanja(n, r, ljudi)
```

```
Broj kombinacija bez ponavljanja da se izabere 3 osobe od 8 ljudi je: 56
Sve moguće kombinacije su:
('Ana', 'Bojan', 'Ceca')
('Ana', 'Bojan', 'Dejan')
('Ana', 'Bojan', 'Ema')
('Ana', 'Bojan', 'Filip')
('Ana', 'Bojan', 'Goran')
('Ana', 'Bojan', 'Hana')
```

...

02

NEUREDJENI IZBORI ELEMENATA SA PONAVLJANJEM

DEFINICIJA

Kombinacija sa ponavljanjem klase k (k-kombinacija) skupa X od n elemenata jeste k-toclani multiskup ciji elementi su iz skupa X (isti element moze da se pojavi vise puta).

$$\overline{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$$

DOKAZ

Dokaz se vrsi pomocu bijekcije skupa resenja sa nizom nula i jedinica.

Na jedinice treba gledati kao na pregrade izmedju razlicitih elemenata, a nule na broj pojavljivanja tog razlicitog elementa cijim pregradama pripada u JEDNOJ kombinaciji sa ponavljanjem - jedno resenje.

0001001000000100001000

Poznavajuci tu bijekciju, mozemo primetiti da je broj kombinacija bez ponavljanja jednak broju mogucih odabira pozicija pregrade.
Broj pregrada = broju razlicitih elemenata - 1
A nas niz nula i jedinica je duzine = broj pregrada + broj elemenata pocetnog multiskupa.

Time je dokazano kako formula iz definicije odredjuje broj kombinacija sa ponavljanjem.

Primer:

Od 4 elemenatal {a,b,c,d} treba izabrati po dva elementa pri čemu elementi se mogu ponavljati:

Broj različitih mogućih izbora:

$$\bar{C}_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,b), (b,c), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d)

```python
import itertools


# Funkcija koja prikazuje sve kombinacije sa ponavljanjem
1 usage
def kombinacije_sa_ponavljanjem(n, r, sladoledi):
    # Izračunavanje broja kombinacija sa ponavljanjem
    broj_kombinacija = len(list(itertools.combinations_with_replacement(sladoledi, r)))
    print(f'Broj kombinacija sa ponavljanjem da se izabere {r} kugle od {n} vrsta sladoleda je: {broj_kombinacija}')

    # Prikazivanje svih mogućih kombinacija
    print('Sve moguće kombinacije su:')
    for kombinacija in itertools.combinations_with_replacement(sladoledi, r):
        print(kombinacija)


# Primer zadatka
sladoledi = ['čokolada', 'vanila', 'jagoda']
n = len(sladoledi)
r = 3

if __name__ == '__main__':
    kombinacije_sa_ponavljanjem(n, r, sladoledi)
```

```
Broj kombinacija sa ponavljanjem da se izabere 3 kugle od 3 vrsta sladoleda je: 10
Sve moguće kombinacije su:
('čokolada', 'čokolada', 'čokolada')
('čokolada', 'čokolada', 'vanila')
('čokolada', 'čokolada', 'jagoda')
('čokolada', 'vanila', 'vanila')
('čokolada', 'vanila', 'jagoda')
```

...

03

Mogucnost opisa neuredjenog izbora elemenanta pomocu uredjenih izbora elemenata

Kombinacije bez ponavljanja

Kombinacije bez ponavljanja su izbori elemenata iz skupa gde svaki element moze biti izabran samo jednom, a redosled izbora nije bitan.

Varijacije bez ponavljanja
Ako biramo k elemenata iz skupa od n elemenata, varijacije bez ponavljanja predstavljaju sve moguce uredjenosti tih elemenata. Broj varijacija bez ponavljanja je:

$$V_{n,\,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Kod **prebrojavanja kombinacija pomocu varijacija** za svaku grupu od k elemenata postoji tacno k! nacina da se ti elementi urede (da se pretvore u varijacije). Dakle, broj kombinacija moze se dobiti tako sto se broj varijacija podeli sa k! :

$$C_{n,\,k} = \frac{V_{n,\,k}}{k!}$$

Kombinacije sa ponavljanjem

Kombinacije sa ponavljanjem omogucavaju da se elementi ponove vise puta u izboru. Na primer, biranje 3 elementa iz skupa {A,B} moze ukljucivati grupe poput {A,A,B}.

Varijacije sa ponavljanjem
Kod varijacija sa ponavljanjem, biramo k elemenata iz skupa od n elemenata gde je dozvoljeno ponavljanje, i redosled je bitan. Broj varijacija sa ponavljanjem je:

$$V_{n,k} = n^k$$

Prebrojavanje kombinacija pomocu varijacija
Ako zelimo da dobijemo kombinacije sa ponavljanjem, moramo eliminisati uredjenost izbora. Na primer, izbori (A,A,B) i (A,B,A) su razlicite varijacije, ali cine istu kombinaciju. Dakle, broj kombinacija moze se dobiti podelom sa brojem nacina na koje mozemo permutovati k elemenata, gde se neki elementi ponavljaju :

$$C_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)}$$

04

Resavanje celobrojnih jednacina pomocu kombinacije multiskupa

Rešavanje celobrojnih jednačina pomoću kombinacija multiskupa odnosi se na pronalaženje ne-negativnih celobrojnih rešenja za jednačine oblika:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ne-negativni celi brojevi, a n je zadati broj. Ovaj problem se moze resiti pomocu koncepta kombinacija sa ponavljanjem ili kombinacija multiskupa.

Zamislite da treba da raspodelite n identicnih predmeta (npr. jabuka) u k razlicitih grupa (npr. korpi). Svaka korpa moze da primi bilo koji broj jabuka (uključujući 0). Ovaj zadatak je ekvivalentan nalazenju broja ne-negativnih resenja za jednacinu iznad.Da bismo to resili, mozemo zamisliti n predmeta kao n zvezdica, a da bismo odvojili k grupa, koristimo k–1 separator (vertikalne crte). Na primer, ako n=5 i k=3, mozemo rasporediti zvezdice ovako:

** | * | **

Broj nacina na koji se ovo moze uraditi je jednak broju nacina da se izaberu k–1 separatora medju n+k–1 pozicija (zvezdica + separatora). Kombinacija za ovo je:

$$C_{(n+k-1,\,k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!}$$

Primer

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$$

x_1,x_2,x_3 I x_4 su ne-negativni celi brojevi. Ukupan broj je n = 5 I broj varijabilni/grupa je k = 4. Koristimo formulu za kombinacije multiskupa:

$$C_{(n+k-1,\ k-1)} = C_{(5+4-1,\ 4-1)} = C_{(8,3)}$$

$$C_{(8,3)} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

Postoji 56 razlicitih resenja za jednacinu. Neki od tih resenja su :

(0,0,0,5) (2,1,1,1) (3,2,0,0) (1,2,2,0) (0,3,1,1)

05

Odredjivanje broja monotono neopadajucih konacnih nizova brojeva pomocu kombinacija multiskupa

Ako zelimo da pronadjemo broj monotono neopadajucih nizova duzine k, gde se elementi niza biraju iz skupa $\{a1, a2, ..., an\}$, to mozemo interpretirati kao problem m-kombinacija multiskupa (tj. broj nacina na koji mozemo birati k elemenata iz skupa od n elemenata sa ponavljanjem, uz uslov da su elementi uredjeni po velicini).

Broj monotono neopadajucih nizova duzine k koji se sastoje od elemenata iz skupa velicine n jednak je broju m-kombinacija multiskupa, sto je dato formulom:

$$C_{(n+k-1,k)}$$

Pretpostavimo da zelimo da pronadjemo broj monotono neopadajucih nizova duzine k=3 , gde su elementi birani iz skupa {1,2,3,4} (tj. n=4). Dakle, treba da nadjemo broj takvih nizova. Formula za broj m-kombinacija multiskupa daje:

$$C_{(n+k-1,k)} = C_{(4+3-1,3)} = C_{(6,3)}$$

Izracunajmo kombinaciju $C_{(6,3)}$:

$$C_{(6,3)} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$$

HVALA NA PAZNJI!