Binomna i polinomna formula

SADRZAJ

- *Algebarska i kombinatorna definicija binomnog koeficijenta*
- *Osobine binomnog koeficijenta (Paskalov identitet)*
- *Dokaz binomne formule po indukciji*
- *Algebarska i kombinatorna definicija polinomnog koeficijenta*
- *Osobine polinomnog koeficijenta*
- *Polinomna formula*

Binomni koeficijent

Binomni koeficijenti predstavljaju koeficijente u razvoju stepena binoma u zbir, prema binomnoj teoremi.

Definicija :
Neka su m i n celi brojevi sa osobinom 0 ≤ m ≤ n. Binomni koeficijent $\binom{n}{m}$ je funkcija koja takvim parovima vrednosti n i m dodeljuje pozitivne cele brojeve na sledeći način:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m(m-1)\ldots 2\cdot 1} \ , m \geq 1$$

Kombinatorna interpretacija binomnog koeficijenta $\binom{n}{m}$ jeste broj načina na koji se može odabrati m-elemenata iz skupa od n elemenata bez obzira na redosled. Drugim rečima, on predstavlja broj m-kombinacija skupa od n elemenata, odnosno broj m-točlanih podskupova skupa od n elemenata.

$$\binom{n}{m} = C(n; m)$$

Svojstva binomnog koeficijenta

Svojstvo simetrije

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Kombinatorna interpretacija :
Broj načina da se odabere m elemenata iz skupa sa n elemenata jednak je broju načina da se iz tog skupa izostavi n - m elemenata. Drugim rečima, biranje m elemenata je ekvivalentno izostavljanju preostalih n - m elemenata.

Algebarski dokaz :

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \binom{n}{m}$$

Primer : Za n = 5 i k = 2, imamo $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10.$
Broj načina da se odaberu 2 elementa od 5 jednak je broju načina da se izostave 3 elementa od 5.

Svojstva binomnog koeficijenta

Paskalov identitet

Za cele brojeve n i m, 1 ≤ m ≤ n-1 , važi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Kombinatorni dokaz

Posmatrajmo tri skupa:

-Skup svih podskupova kardinalnosti m skupa A

-Skup svih podskupova kardinalnosti m skupa A koji sadrže neki element a∈A

-Skup svih podskupova kardinalnosti m skupa A koji NE sadrže neki element a∈A

Svojstva binomnog koeficijenta

Paskalov identitet

$$
\begin{aligned}
S_m &= \{B : B \subseteq A, |B| = m\},\\
S_m^a &= \{B : B \subseteq A, a \in B, |B| = m\},\\
S_m^{\bar{a}} &= \{B : B \subseteq A \setminus \{a\}, |B| = m\}.
\end{aligned}
$$

Tada je

$$S_m = S_m^a \cup S_m^{\bar{a}} \quad \text{i} \quad S_m^a \cap S_m^{\bar{a}} = \emptyset.$$

i prema principu zbira

$$|S_m| = |S_m^a| + |S_m^{\bar{a}}|.$$

Kako je broj elemenata u prethodnim skupovima

$$
\begin{aligned}
|S_m| &= \left|\binom{A}{m}\right| = \binom{n}{m},\\
|S_m^a| &= \left|\binom{A \setminus \{a\}}{m-1}\right| = \binom{n-1}{m-1},\\
|S_m^{\bar{a}}| &= \left|\binom{A \setminus \{a\}}{m}\right| = \binom{n-1}{m},
\end{aligned}
$$

odakle sledi

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Svojstva binomnog koeficijenta

Paskalov identitet

Algebarski dokaz

Pre početka dokazivanja treba da se podsetimo faktorijelne reprezentacije binomnog koeficijenta:
Za cele brojeve n i m sa osobinom 0 ≤ m ≤ n, važi

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Koristeći ovo, dobijamo :

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} &= \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} \\ &= \frac{m \cdot (n-1)! + (n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{(m+n-m) \cdot (n-1)!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}\end{aligned}$$

Svojstva binomnog koeficijenta

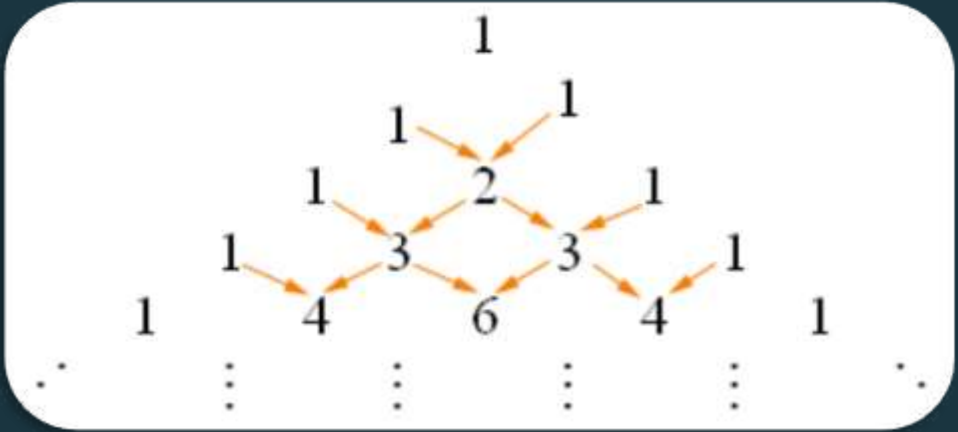
Paskalov identitet

Paskalov identitet se koristi za tabelarni prikaz binomnih koeficijenata, tzv. Paskalov trougao. Tabela se često prikazuje u obliku jednokrakog trougla, na čijim kracima su jedinice.

(n, m)	0	1	2	3	4	5	…	$m'-1$	m'	…
0	1	–	–	–	–	–	…	…	…	…
1	1	1	–	–	–	–	…	…	…	…
2	1	2	1	–	–	–	…	…	…	…
3	1	3	3	1	–	–	…	…	…	…
4	1	4	6	4	1	–	…	…	…	…
5	1	5	10	5	1	–	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…			
n'	…	…	…	…	…	…	…	$\binom{n'-1}{m'-1}$	$\binom{n'-1}{m'}$	…
n'	…	…	…	…	…	…	…		$\binom{n'}{m'}$	…

Svojstva binomnog koeficijenta

Paskalov identitet



Binomna formula

Neka je $x,y \in R$ i neka je N.. Tada važi:

$$(x+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} x^{n-m} y^m$$

Dokaz indukcijom po stepenu n binoma

Baza n = 1: $(x+y)^1 = x + y$

Induktivna pretpostavka (Tn): $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$

Induktivni korak (Tn → Tn+1): Treba pokazati da je
$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n y + \cdots + (n+1)xy^n + y^{n+1}$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) \\
&= \left(x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + nxy^{n-1} + y^n\right)(x+y) \\
&= \begin{cases} x^{n+1} + nx^n y & + \binom{n}{2}x^{n-1}y^2 + \quad \ldots \quad + \binom{n}{n-1}x^2y^{n-1} \quad + xy^n \\ \quad + \quad x^n y & + \binom{n}{1}x^{n-1}y^2 + \quad \ldots \quad + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-1} \quad + nxy^n + y^{n+1}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dokaz indukcijom po stepenu n binoma

Koristeći Paskalov identitet, dobijamo :

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n y + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right) x^{n-1} y^2 + \cdots + + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-2}\right) x^2 y^{n-1} + (n+1)xy^n + y^{n+1},$$

što se primenom Leme 33 svodi na

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} x^{n+1-m} y^m$$

Polinomni koeficijent

Polinomni koeficijenti proširuju ideju binomnih koeficijenata (koje koristimo kada imamo izraz oblika $(x+y)^n$ na slučajeve kada imamo više od dva člana, tj. kada imamo polinome sa više promenljivih. To znači da možemo generalizovati binomni koeficijent za izraze poput

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_l)^n$$

Neka su dati brojevi $m_1, \ldots, m_l \in N_0$ i neka je n = m_1 + ... + m_l. Tada polinomni koeficijent definisemo na sledeći način:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{n!}{m_1! \cdot \cdots \cdot m_l!}$$

Polinomni koeficijent

Polinomni koeficijenti se mogu interpretirati kombinatorno preko broja permutacija multiskupa.

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_l\,!}$$

Kada imamo n elemenata bez ponavljanja, broj permutacija bi bio n!. Međutim, ako se neki elementi ponavljaju, treba da podelimo sa brojem permutacija za svaki od tih elemenata kako bismo eliminisali duplikate. Zato delimo sa $m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_l!$.

Osobine polinomnog koeficijenta

Neka su dati brojevi $m_1, \ldots, m_l \in N_0$ i neka je n = m_1 + ... + m_l . Tada je

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\ldots\binom{m_l}{m_l}$$

Dokaz: lakše ćemo dokazati ako krenemo dokaz s desne strane

$$\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\ldots\binom{m_l}{m_l} = \frac{n!}{m_1!\,(n-m_1)!}\frac{(n-m_1)!}{m_2!\,(n-m_1-m_2)!}\ldots\frac{m_l!}{m_l!\,0!}$$
$$= \frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_l!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l}$$

Ova formula pokazuje da možemo računati polinomni koeficijent tako što prvo biramo jednu grupu, zatim drugu grupu iz preostalih elemenata, i tako dalje, pri čemu broj načina za svaki korak opada jer se smanjuje broj preostalih elemenata. Ova formula nam daje vezu između permutacija multiskupa i kombinacija bez ponavljanja.

Osobine polinomnog koeficijenta

Neka su dati brojevi $m_1, \dots, m_l \in \ N_0$ i neka je n = m_1 + … + m_l . Ako je $\{\{m_1, m_2 \dots, m_l\}\} = \{\{k_1, k_2 \dots, k_l\}\}$ onda je

$$\binom{n}{m_1, m_2 \dots, m_l} = \binom{n}{k_1, k_2 \dots, k_l}$$

Dokaz:

Iz uslova $\{\{m_1, m_2 \dots, m_l\}\} = \{\{k_1, k_2 \dots, k_l\}\}$, direktno sledi da je $m_1!\, m_2! \dots m_l! = k_1!\, k_2! \dots k_l!$, a odatle I da su posmatrani polinomni koeficijenti jednaki.

Primer:

$$\binom{7}{3,2,2} = \binom{7}{2,3,2} = \binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!}$$

Osobine polinomnog koeficijenta

Neka su dati brojevi $m_1, \dots, m_l \in \ N_0$ i neka je n = m_1 + ... + m_l. Ako je 0 < $m_1, \dots, m_l$< n, onda važi

$$\binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_l} = \binom{n-1}{m_1 - 1, m_2, \dots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2 - 1, \dots, m_l} + \cdots + \binom{n-1}{m_1, m_2, \dots, m_l - 1}$$

Osobine polinomnog koeficijenta

Algebarski dokaz

Koristimo faktorijelnu reprezentaciju i krećemo dokaz sa desna na levo iz prostog razloga što je tako lakše. Primenom definicije sa 13. slajda :

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} = \frac{(n-1)!}{(m_1-1)!m_2!\ldots m_l!} = \frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

$$\binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} = \frac{(n-1)!}{m_1!(m_2-1)!\ldots m_l!} = \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

$$\ldots$$

$$\binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1} = \frac{(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots(m_l-1)!} = \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}$$

Tako dobijamo da je suma

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \ldots + \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l}$$

jednaka

$$\frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} + \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} + \ldots + \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!},$$

što nakon svođenja na zajednički imenilac daje

$$\frac{(m_1+\ldots+m_l)(n-1)!}{m_1!m_2!\ldots m_l!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_l!}.$$

Osobine polinomnog koeficijenta

Kombinatorni dokaz

Leva strana jednakosti odgovara permutacijama multiskupa:

$$M = [a_1, \dots, a_l]_{m_1,\dots,m_l}$$

Desnu stranu interpretiramo ovako:

Skup svih permutacija možemo podeliti na l podskupova sa fiksiranim prvim elementom, na šta se primenjuje princip zbira da bi dobili levu stranu jednakosti, odnosno skup svih permutacija multiskupa. Treba primetiti da je skup svih podskupova sa fiksiranim prvim elementom jednak broju načina da se uredi preostali skup sa n-1 elemenata.

Osobine polinomnog koeficijenta

Neka su dati brojevi $m_1, \dots, m_l \geq 0$ i neka je n = m_1 + ... + m_l. Tada je

$$\binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}}$$

Dokaz:

Na osnovu definicije polinomnog koeficijenta i definicije faktorijela, dobijamo

$$\binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, 0} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_{l-1}!\, 0!} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_{l-1}!} = \binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}}$$

Osobine polinomnog koeficijenta

Kombinatorna interpretacija:

Neka su brojevi $m_1, \ldots, m_l \geq 0$ i neka je n = m_1 + ... + m_l. Multinomijalni koeficijent $\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0}$ predstavlja broj nacina da se n objekata raspodeli u l grupa, gde prva grupa ima m_1 objekata, druga m_2, I tako dalje, sve do l-te grupe koja ima m_l = 0 objekata.

U ovom slucaju, ako je jedan od brojeva m_i jednak nuli, kombinatorna interpretacija je da u toj grupi nema objekata, tj. Ta grupa se ignorise. Zato je

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}}$$

Polinomna formula

Neka su $x_1, \ldots, x_l$ ($l \geq 2$) proizvoljni realni brojevi i neka je $n \geq 1$. Tada je

$$(x_1 + \ldots + x_l)^n = \sum_{\substack{m_1 + \ldots + m_l = n \\ m_1 \geq 0 \ldots m_l \geq 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_l} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_l^{m_l}$$

Polinomna formula

Primeri

$(x_1 + x_2 + x_3)^{\,2}$

Za n = 2 i l = 3 (tri člana u zbiru):

$$(x_1 + x_2 + x_3)^{\,2} = \sum_{m_1+m_2+m_3=2} \binom{2}{m_1, m_2, m_3} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}$$

Mogući vrednosti za (m_1, m_2, m_3) su:

1. $(2,0,0)$: $\binom{2}{2,0,0} x_1^2 = 1 \cdot x_1^2$
2. $(1,1,0)$: $\binom{2}{1,1,0} x_1 x_2 = 2 \cdot x_1 x_2$
3. $(1,0,1)$: $\binom{2}{1,0,1} x_1 x_3 = 2 \cdot x_1 x_3$
4. $(0,2,0)$: $\binom{2}{0,2,0} x_2^2 = 1 \cdot x_2^2$
5. $(0,1,1)$: $\binom{2}{0,1,1} x_2 x_3 = 2 \cdot x_2 x_3$
6. $(0,0,2)$: $\binom{2}{0,0,2} x_3^2 = 1 \cdot x_3^2$

Dakle:

$(x_1 + x_2 + x_3)^{\,2} = x_1{}^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2^2 + 2x_2x_3 + x_3{}^2$

Paskalov trougao - Pajton

```
1 usage
def pascals_triangle(n):
    triangle = []

    for i in range(n):
        row = [1] * (i + 1)  # kreira novi red sa svim elementima postavljenim na 1
        for j in range(1, i):
            row[j] = triangle[i - 1][j - 1] + triangle[i - 1][j]  # računa vrednost elementa
        triangle.append(row)  # dodaje red u Pascalov trougao

    return triangle


if __name__ == '__main__':
    # Broj redova za Pascalov trougao
    n = int(input("Unesite broj redova: "))
    triangle = pascals_triangle(n)

    # Ispis Pascalovog trougla
    for row in triangle:
        print(" ".join(map(str, row)).center(n * 2))
```

<u>Algoritam:</u>

Počinjemo sa vrhom trougla koji sadrži samo broj 1.

Svaki sledeći red kreiramo na osnovu prethodnog tako što:

Prvi i poslednji element svakog reda su 1.

Svi ostali elementi reda su suma dva susedna broja iz prethodnog reda.

Ponavljamo ovaj proces dok ne dobijemo željeni broj redova.

```
Unesite broj redova: 5
    1
   1 1
  1 2 1
 1 3 3 1
1 4 6 4 1

Process finished with exit code 0
```

Binomna formula - Pajton

```python
from math import comb


1 usage
def binomial_expansion(a, b, n):
    expansion = []

    for k in range(n + 1):
        coeff = comb(n, k)  # binomni koeficijent nCk
        term_a = a ** (n - k)  # a na stepen (n - k)
        term_b = b ** k  # b na stepen k
        term = coeff * term_a * term_b  # konkretna vrednost člana

        # Dodajemo izračunati član u listu
        expansion.append(str(term))

    return " + ".join(expansion)


if __name__ == '__main__':
    # Unesite vrednosti a, b i n
    a = 2
    b = 1
    n = 4

    # Ispis rezultata
    print(f"Razvoj binomne formule za ({a} + {b})^{n} je:")
    print(binomial_expansion(a, b, n))
```

```
Razvoj binomne formule za (2 + 1)^4 je:
16 + 32 + 24 + 8 + 1

Process finished with exit code 0
```

Polinomna formula - Pajton

```python
from math import factorial
from itertools import product


1 usage
def multinomial_expansion(constants, n):
    expansion = []
    m = len(constants)  # broj konstanti

    # Kreiramo sve moguće kombinacije eksponenata koje se sabiraju do n
    for exponents in product(range(n + 1), repeat=m):
        if sum(exponents) == n:
            # Računamo multinomni koeficijent
            coeff = factorial(n)
            for exp in exponents:
                coeff //= factorial(exp)

            # Računamo vrednost člana
            term_value = coeff
            for i in range(m):
                term_value *= constants[i] ** exponents[i]

            expansion.append(term_value)

    return " + ".join(map(str, expansion))

if __name__ == '__main__':

    # Definišemo konstante i stepen n
    constants = [2, 3, 4]
    n = 3

    # Ispis rezultata
    print(f"Razvoj polinomne formule za ({' + '.join(map(str, constants))})^{n} je:")
    print(multinomial_expansion(constants, n))
```

```
Razvoj polinomne formule za (2 + 3 + 4)^3 je:
64 + 144 + 108 + 27 + 96 + 144 + 54 + 48 + 36 + 8

Process finished with exit code 0
```

Stirlingovi brojevi druge vrste S(m,n)

Broj razbijanja (particija) skupa od m elemenata na n nepraznih podskupova

Broj rasporedivanja m razlicitih elemenata u n istih (neoznacenih) kutija tako da nijedna ne ostane prazna.

Neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Kažemo da je $\{B_1, \ldots, B_n\}$ particija skupa A ako važi:

- $A = B_1 \cup \ldots \cup B_n$
- B_i /= ø, $1 \leq i \leq n$,
- i /= $j \Rightarrow B_i \cap B_j = ø$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

Teorema:

1) $S(m, n) = 1, m \in N$
2) $S(m, n) = 1, m \in N$
3) $S(m, n) = S(m-1, n-1) + nS(m-1, n), 0 < n < m$

Tablica Stirlingovih brojeva druge vrste

Dokaz:

1) Kada imamo m elemenata i želimo ih rasporediti u m podskupova, svaki podskup mora sadržavati tačno jedan element. Ako bi bilo koji podskup imao više od jednog elementa, ne bismo imali tačno m podskupova. Dakle, jedino moguće raspoređivanje je da svaki element bude u svom zasebnom podskupu, što čini jedinstveno rešenje. Zato je S(m, m) = 1

2) Ako imamo m elemenata i dozvoljeno nam je samo jedno grupisanje (tj. jedan podskup), jedini način je da stavimo sve elemente u taj jedini podskup. Ne postoji drugi način da se to uradi, jer svi elementi moraju biti u jednom podskupu. Dakle, S(m, 1) = 1

3) Posmatrajmo situaciju sa mm elemenata koje raspoređujemo u n nepraznih podskupova. Razmotrićemo poslednji, tj. m-ti element, i dve moguće opcije gde ga možemo smestiti:

Prva opcija: Stvorimo novi podskup koji sadrži samo m-ti element. Ako to uradimo, ostaje nam m-1 elemenata koje treba rasporediti u n-1 podskupova (jer smo novi podskup stvorili samo za m-ti element). Broj načina da se m-1 elemenata rasporedi u n-1 podskupa je S(m-1,n-1).

Druga opcija: Smestimo m-ti element u jedan od postojećih n podskupova. Na raspolaganju imamo n postojećih podskupova u koje možemo dodati m-ti element. Broj načina da rasporedimo m-1 elemenata u n podskupova je S(m-1,n), a zatim imamo n izbora gde možemo smestiti m-ti element. Dakle, za ovu opciju imamo n*S(m-1,n) mogućnosti.

HVALA NA PAZNJI!

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**, including icons by **Flaticon**, and infographics & images by **Freepik**.