zadatak7

Grupa 4

Decembar 2024

1 Uvod

7 mostova Kenigsberga (Ojlerov graf)

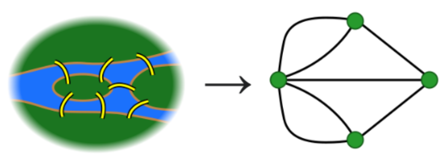


Figure 1: Gradski mostovi predstavljeni pomoću grafa

Za Ojlera vezujemo problem Sedam mostova Kenigsberga koji glasi: Da li je moguće preći svih sedam mostova grada tako da se vratimo na početak puta, ali da se svaki most pređe samo jedanput?
Odgovor je ne, a evo i zašto.

Lema 1. *Ako je G graf u kojem je stepen svakog čvora najmanje 2, tada G sadrži ciklus.*

Proof. Ako G ima petlje ili višestruke ivice, rezultat je trivijalan. Stoga možemo pretpostaviti da je G prost graf. Neka je v proizvoljan čvor grafa G. Konstruisaćemo putanju $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots$ indukcijom, birajući v_1 kao bilo koji čvor susedan čvoru v, a za svaki $i > 1$, biramo v_{i+1} kao bilo koji čvor susedan čvoru v_i, osim v_{i-1}. Postojanje takvog čvora je zagarantovano našom hipotezom.

Pošto G ima konačno mnogo čvorova, moraćemo na kraju da izaberemo čvor koji je već ranije izabran. Ako je v_k prvi takav čvor, tada deo putanje koji se nalazi između dve pojave v_k čini traženi ciklus. □

Teorema 1 (Ojler 1736)**.** *Povezan graf G je Ojlerov ako i samo ako je stepen svakog čvora grafa G paran.*

Proof. Pretpostavimo da je P Ojlerov put grafa G. Kad god P prolazi kroz čvor, povećava stepen tog čvora za 2. Pošto svaka ivica tačno jednom učestvuje u P, stepen svakog čvora mora biti paran.

Dokazujemo indukcijom po broju ivica grafa G. Pretpostavimo da je stepen svakog čvora grafa G paran. Pošto je G povezan, svaki čvor ima stepen najmanje 2, pa prema lemi, G sadrži ciklus C. Ako C sadrži svaku ivicu grafa G, dokaz je završen. U suprotnom, uklanjamo iz G ivice ciklusa C da bismo formirali novi, možda nepovezan, graf H sa manje ivica nego G, u kojem svaki čvor i dalje ima paran stepen.

Prema induktivnoj pretpostavci, svaka komponenta grafa H ima Ojlerovu putanju. Pošto svaka komponenta grafa H ima bar jedan zajednički čvor sa ciklusom C (zbog povezanosti), dobijamo traženu Ojlerovu putanju grafa G tako što pratimo ivice ciklusa C dok ne dođemo do nezasebnog čvora grafa H. Nastavljamo sa Ojlerovom putanjom te komponente grafa H i vraćamo se na ciklus C, prelazeći na drugu komponentu grafa H, i tako dalje. Ceo proces se završava kada se vratimo na početni čvor.

□

Odnosno, u našem slučaju:

$$V = \{A, B, C, D\} \quad \text{(broj oblasti)}$$

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_7\} \quad \text{(broj mostova)}$$

Vidimo sa slike da važi:

$$deg(A) = deg(B) = deg(C) = 3$$

$$deg(D) = 5$$

Kako svaki čvor ima neparan stepen, na osnovu teoreme zaključujemo da ovo nije Ojlerov graf odnosno da problem nema rešenje.

Primena grafova u programiranju

- **Mreže računara:** Modelovanje interneta i komunikacionih mreža
- **Pretraga podataka:** Algoritmi pretrage u grafovima (BFS, DFS)
- **Planiranje ruta:** Optimizacija puteva (npr. Dijkstrin algoritam)
- **Reprezentacija podataka:** Sintaksna stabla i baze podataka
- **Veštačka inteligencija:** Grafovi za neuronske mreže

2 Usmeren multigraf

2.1 Uvod

Usmeren multigraf je matematička struktura koja se sastoji od skupa čvorova (ili tačaka) i skupa usmerenih ivica, pri čemu između dva čvora može postojati više od jedne ivice, i te ivice imaju smer.

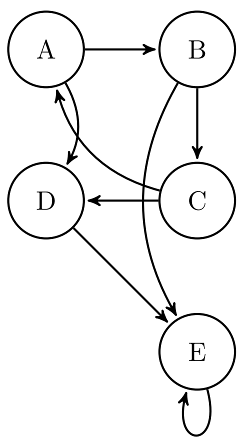
2.2 Definicija

Usmeren multigraf je uredjena trojka $G = (V, E, \psi)$ gde je:
(i) $V \neq \emptyset$ konačan skup čvorova
(ii) E je skup grana, pri čemu je $V \cap E = \emptyset$
(iii) $\psi : E \rightarrow \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ funkcija incidencije

2.3 Osobine

(i) Izmedju dva čvora $u, v \in V$ može postojati više ivica (razlikuju se elementi skupa E)
(ii) Svaka ivica $e \in E$ ima definisan smer, tj. $(u, v) \neq (v, u)$

2.4 Primer usmerenog grafa



Usmereni graf (ili orijentisani graf) je tip grafa u teoriji grafova u kojem su ivice (grane) usmerene, što znači da svaka ivica ima početni i krajnji čvor. Ovo usmerenje se obično prikazuje strelicom od jednog čvora ka drugom.

3 Neusmeren multigraf

3.1 Uvod

Neusmeren multigraf je matematička struktura koja se sastoji od skupa čvorova i neusmerenih ivica, pri čemu između dva čvora može postojati više od jedne ivice. Ivica nema definisan smer.

3.2 Definicija

Neusmeren (prost) graf je uredjen par $G = (V, E$ gde je:
(i) $V \neq \emptyset$ konačan skup čvorova
(ii) $E \subseteq \binom{V}{2}$ skup grana

3.3 Osobine

(i) Dve različite ivice e_1 i e_2 mogu povezivati iste čvorove u i v

(ii) Čvorovi u i v su susedni ako postoji najmanje jedna ivica e na čijim se krajevima nalaze u i v . Za takvu granu kažemo da je incidenta sa čvorovima u i v i da povezuje čvorove u i v.

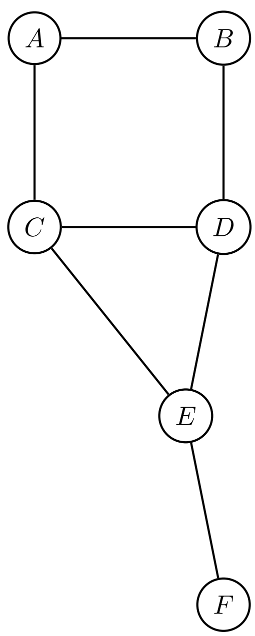
(iii) Stepen čvora $(deg_G(v))$ je broj ivica koje su incidentne sa čvorom v

Prilikom proučavanja osobina grafa $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ često je korisno posmatrati multiskup stepena njegovih čvorova

$$\{\{deg_G(v_1), \ldots, deg_G(v_n)\}\}$$

Ovaj pojam poznat je i kao grafovski niz, tj. niz stepena grafa. Kako nije važno uredjenje ovog niza, uobičajeno je koristiti neopadajući poredak.

3.4 Primer neusmerenog grafa



Neusmereni graf je tip grafa u teoriji grafova u kojem su ivice (grane) neusmerene, što znači da veze izmedju čvorova nemaju odredjen smer. Drugim rečima, ivica povezuje dva čvora i može se "preći" u oba smera

4 Prost (neusmeren) graf

4.1 Uvod

Kada govorimo o grafovima, moguće su 2 situacije što se tiče grane između dva čvora. Grana može biti usmerena, tj. ide iz jednog čvora u drugi, a može biti i neusmerena, tj. ne postoji naznačen smer grane. U slučaju da govorimo o grafu kojem su sve grane neusmerene i koji nema paralelne grane, govorimo o prostom(neusmerenom) grafu.

4.2 Definicija

Definicija: Prost (neusmeren) graf je uređen par $G = (V, E)$, gde je:
1. $V \neq \emptyset$ konačan skup čvorova i
2. $E \subsetneq \binom{V}{2}$ je skup grana

4.3 Definicija

Definicija: Neka je $G = (V, E)$ prost graf i neka je $v \in V$. Broj grana koje su incidentne sa čvorom v nazivamo stepenom čvora v u grafu G i označavamo sa $\deg_G(v)$.

Dodatno, uvodimo sledeće oznake:
$\omega_G(v)$ - skup čvorova koji su susedni sa v u grafu G.
$\Omega_G(v)$ - skup grana koje su incidentne sa v.
Koristeći prethodno uveden oznake, sledi:
$\deg_G(v) = |\omega_G(v)| = |\Omega_G(v)|$

Takođe, uvodimo i sledeće oznake:
$\delta(G) = \min\{\deg_G(v) : v \in V\}$ je najmanji stepen grafa G
$\Delta_G(v) = \max\{\deg_G(v) : v \in V\}$ je najveći stepen grafa G
$\deg_G(v_1)$, ... , $\deg_G(v_n)$ je multiskup stepena čvorova grafa G. U različitoj literaturi ovaj pojam se može pronaći i kao grafovski niz, tj. kao niz stepena grafa. Sa obzirom da uređenje ovog niza nije bitno, mi ćemo koristiti neopadajući redosled, a samim tim je korišćenje multiskupa odgovarajuće.

4.4 Lema

Lema: Neka je $G = (V, E)$ prost graf. Tada je :

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

Dokaz. Trebamo uvideti da je svaka grana incidentna sa 2 čvora, što znači da sabiranjem stepena čvorova svaku granu brojimo dva puta.

$\square$

4.5 Teorema

Teorema: Prost graf ima paran broj čvorova

Dokaz. Neka je $G = (V, E)$ i V $= V_1 \cup V_2$, gde su V_1 i V_2 redom skupovi čvorova parnog i neparnog stepena. Tada je:

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \sum_{v \in V_1} \deg_G(v) = \sum_{v \in V_2} \deg_G(v)$$

$$2|E| - \sum_{v \in V_1} \deg_G(v) = \sum_{v \in V_2} \deg_G(v)$$

Kako je zbir (razlika) dva parna broja paran broj, suma sa desne strane mora biti paran broj, odakle direktno sledi tvrđenje. $\square$

4.6 Posledica

Ako je broj čvorova prostog grafa neparan, onda u njemu postoji bar jedan čvor parnog stepena.

Dokaz. Kada bi svi čvorovi tog grafa bili neparnog stepena, onda bi u tom grafu bio neparan broj čvorova neparnog stepena, što je u kontradikciji sa prethodnim tvrđenjem.

$\square$

4.7 Posledica

Neka je $G = (V, E)$ prost graf, u kojem je |V| $=$ n i |E| $<$ n. Tada postoji čvor $v \in V$ sa osobinom $\deg_G(v) \leq 1$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da za svaki čvor $v \in V$ važi $\deg_G(v) \geq 2$. Tada koristeći Lemu koja je uvedena malopre zaključujemo da važi:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2|V| = 2n$$

Ondosno, |E| $\geq n$, što je kontradikcija sa pretpostavkom |E| $< n$. $\square$

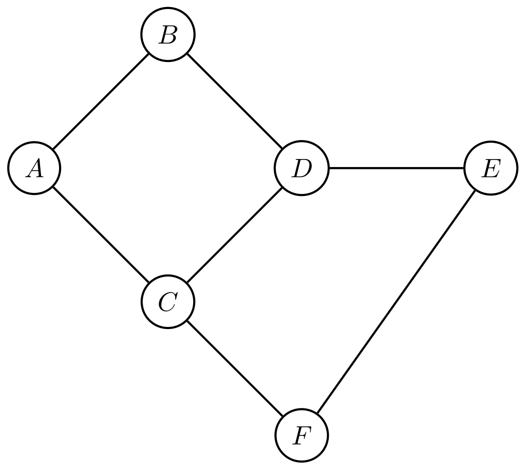
4.8 Specijalne klase prostih grafova

Kompletan graf - K_n je prost graf u kojem je E $= \binom{V}{2}$, tj. za svaka dva čvora postoji tačno jedna grana u grafu koja im je incidenta.

Bipartitan graf je graf G $= (V_1 \cup V_2, E)$ sa osobnima:
1. $V_1 \cap V_2$
2. $E \subsetneq \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

To znači da se skup čvorova može razdeliti na dva disjunktna podskupa, tako da je svaka grana incidentna sa jednim čvorom iz jednog skupa i drugim iz drugog. Ako E sadrži sve takve grane onda kažemo da je graf kompleltan bipartitan i označavamo ga sa $K_{m,n}$ ako je $|V_1|$ $=$ m i $|V_2|$ $=$ n.

4.9 Primer prostog grafa



Prost graf je poseban tip grafa u teoriji grafova koji zadovoljava sledeće uslove:

- Bez petlji: Nijedan čvor nije povezan sam sa sobom (nema ivica oblika v, v)
- Bez višestrukih ivica: Izmedju bilo koja dva čvora postoji najviše jedna ivica

Prosti grafovi mogu biti neusmereni ili usmereni, ali se najčešće odnose na neusmerene grafove

5 Jednakost i Izomorfizam

5.1 Uvod

Jednakost Grafova Definicija grafa nalaze da su dva grafa jednaka akko imaju jednake skupove cvorova i grana.

5.2 Izomorofni grafovi

Za grafove koji imaju osobinu da preimenovanjem cvorova postaju jednaki kazemo da su izomorfni. Definicija izomorofnog grafa nalaze da ako su dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2$ prosti grafovi izmedju njih se moze formirati funkcija koja bijektivno preslikava $h : V_1 \to V_2$ sa osobinom da: $\{u, v\} \in E_1$ akko $\{h(u), h(v)\} \in E_2$. Za takvu funkciju kazemo da je izomorfizam grafa G_1 u graf G_2.

5.3 Relacija ekvivalencije

Relacija "je izomorfan" je relacija ekvivalencije na skupu grafova

Dokaz. Kako bismo dokazali da je "je izomorfan" relacija ekvivalencije na skupu grafova moramo pokazati da izomorfizam grafova zadovoljava refleksivnost, simetricnost i tranzitivnost.

1. Refleksivnost

Za bilo koji graf G, izomorfizam između G i G očigledno postoji. U ovom slučaju bijekcija f može biti identična funkcija $f(v) = v$ za svaki $v \in V_G$, što znači da je svaki čvor izomorfan samom sebi. Dakle, izomorfizam je refleksivan.

2. Simetričnost

Ako postoji izomorfizam f između dva grafa G i H, onda postoji i obrnuta funkcija f^{-1} koja je bijekcija između čvorova grafa H i grafa G. To znači da ako postoji izomorfizam između G i H, postoji i izomorfizam između H i G, što zadovoljava simetričnost.

3. Tranzitivnost

Ako postoji izomorfizam f između grafa G i H, i postoji izomorfizam g između grafa H i K, onda možemo konstruisati novu funkciju $h = g \circ f$, koja je bijekcija između G i K. Dakle, ako su G i H izomorfni, a H i K izomorfni, onda su G i K izomorfni, što zadovoljava tranzitivnost.

Pošto izomorfizam grafova zadovoljava sve tri osobine relacije ekvivalencije (refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost), možemo zaključiti da je izomorfizam grafova relacija ekvivalencije.

□

Izomorfnost grafova se dokazuje konstruisanjem jednog od mogucih izomorfizama, stoga je mnogo teze utvrditi da vazi suprotno. Ako grafovi imaju jednak broj cvorova postoji n! mogucih preslikavanja skupa V_1 u V_2 za koje ne vazi ekvivalencija pomenuta u prethodnom odeljku.

Osobina koja sledi postavlja neke potrebne uslove koji mogu pomoci pri ispitivanju izomorizma grafova. Neka su dati izomorfni grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2$. Tada:

1. $|V_1| = |V_2|$
2. $|E_1| = |E_2|$
3. $Deg_{G_1}(v) = Deg_{G_2}(v)$ za svaki cvor $v \in V_1$

Dokaz. Prethodno navedene osobine slede iz definicije izomorofnih grafova. Ako nijedna od tri osobine ne vazi grafovi sigurno nisu izomorfni, medjutim nisu ni dovoljni uslovi u slucaju da su sva tri zadovoljena, stoga grafici koji imaju sve ove osobine ne moraju biti izomorfni. □

5.4 Primeri za izomorfizam grafova

U sledećim primerima prikazujemo dva grafa koja su izomorfna.

5.4.1 Primer 1: Izomorfni grafovi sa cikličnom strukturom

Graf G_1:

- **Čvorovi**: $\{A, B, C, D\}$
- **Ivice**: $\{AB, BC, CD, DA\}$

Graf G_2:

- **Čvorovi**: $\{1, 2, 3, 4\}$
- **Ivice**: $\{12, 23, 34, 41\}$

Objašnjenje izomorfizma: Grafovi G_1 i G_2 su ciklični grafovi sa četiri čvora koji su povezani u zatvoreni krug. Preslikavanje između čvorova grafova je sledeće:

$$A \to 1, \quad B \to 2, \quad C \to 3, \quad D \to 4.$$

Ova funkcija očuva sve ivice jer se, na primer, ivica AB u grafu G_1 preslikava na ivicu 12 u grafu G_2, i tako dalje za sve ostale ivice.

Primer 2: Izomorfni grafovi sa centralnim čvorom

Graf G_1:

- **Čvorovi**: $\{P, Q, R, S\}$
- **Ivice**: $\{PQ, PR, PS, QR\}$

Graf G_2:

- **Čvorovi**: $\{X, Y, Z, W\}$
- **Ivice**: $\{XY, XZ, XW, YZ\}$

5.5 Primer nepovezanog prostog grafa

5.5.1 Uvod

U ovom dokumentu prikazujemo konstrukciju prostog grafa sa n čvorova i najmanje $n-1$ grana, koji nije povezan. Takav graf se može lako konstruisati kreiranjem više komponenti koje su drveća ili disjunktni skupovi čvorova povezanih sa minimalnim brojem grana.

5.5.2 Algoritam

- Sledeći Java program omogućava unos broja čvorova n i generiše nepovezan graf sa tačno $n-1$ grana:

```java
// Java program za generisanje nepovezanog grafa sa n cvorova i n-1 grana
import java.util.*;

public class DisconnectedGraph {
    public static void main(String[] args) {
        Scanner scanner = new Scanner(System.in);

        System.out.print("Unesite broj cvorova (n): ");
        int n = scanner.nextInt();

        if (n < 2) {
            System.out.println("Graf sa manje od 2 cvora ne moze biti nepovezan sa n-1 grana.");
            return;
        }

        System.out.println("Generisanje nepovezanog grafa sa " + n + " cvorova i " + (n - 1) + " grana:");

        // Kreiranje grana tako da graf ima tacno n-1 grana i nije povezan
        List<int[]> edges = generateDisconnectedGraph(n);
        printEdges(edges);
    }

    // Metoda za generisanje nepovezanog grafa sa n cvorova i n-1 grana
    public static List<int[]> generateDisconnectedGraph(int n) {
        List<int[]> edges = new ArrayList<>();

        // Prva komponenta: drvo sa k cvorova i k-1 grana
        int k = n / 2;
        for (int i = 1; i < k; i++) {
            edges.add(new int[]{i, i + 1});
        }

        // Druga komponenta: preostali cvorovi sa jednom granicnom vezom
        for (int i = k + 1; i <= n; i++) {
            edges.add(new int[]{k, i});
        }

        return edges;
    }

    // Metoda za ispis grana
    public static void printEdges(List<int[]> edges) {
        for (int[] edge : edges) {
```

```
            System.out.println(edge[0] + " - " + edge[1]);
        }
    }
}
```

5.5.3 Objašnjenje i primer rezultata

Algoritam deli čvorove na dve komponente: jednu koja formira povezano drvo sa k čvorova i $k-1$ grana, i drugu koja povezuje preostale čvorove na jedan čvor iz prve komponente, stvarajući tako nepovezan graf. Na primer, za $n=6$, dobijamo sledeći skup grana:

$$1-2,\ 2-3,\ 3-4,\ 4-5,\ 4-6$$

Rezultirajući graf sadrži dve komponente i nije povezan.

6 Podgraf

6.1 Definicija podgrafa

Neka je $G=(V,E)$ graf, gdje je V skup čvorova, a E skup grana. Graf $H=(W,F)$ je **podgraf** grafa G ako je $W \subseteq V$ i $F \subseteq E$, pri čemu svaka grana u F povezuje čvorove iz skupa W. Drugim riječima, H je graf formiran od podskupa čvorova i grana grafa G. [1]

6.2 Pokrivajući podgraf

Podgraf $H=(W,F)$ grafa $G=(V,E)$ je **pokrivajući podgraf** ako $W=V$. To znači da pokrivajući podgraf sadrži sve čvorove iz originalnog grafa G, ali može sadržavati samo podskup grana iz E. [1]

Zadatak 1. *Razmotrimo graf $G=(V,E)$ gdje je $V=\{1,2,3\}$ i $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}$. Podgraf $H=(W,F)$ sa $W=\{1,2,3\}$ i $F=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ je pokrivajući podgraf grafa G, jer sadrži sve čvorove V, ali samo podskup grana iz E. [1]*

6.3 Indukovani podgraf

Podgraf $H=(W,F)$ grafa $G=(V,E)$ je **indukovani podgraf** određen skupom čvorova $W \subseteq V$ ako:

1. F sadrži sve grane $\{u,v\} \in E$ takve da su $u,v \in W$.

Drugim riječima, indukovani podgraf sadrži sve grane iz originalnog grafa G koje povezuju čvorove u W. [1]

Zadatak 2. *Razmotrimo graf $G=(V,E)$ gdje je $V=\{1,2,3,4\}$ i $E=\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,4\}\}$. Ako uzmemo podskup čvorova $W=\{1,2,3\}$, indukovani podgraf $H=(W,F)$ ima grane $F=\{\{1,2\},\{2,3\}\}$, jer su to sve grane u G koje povezuju čvorove u W. [1]*

References

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete mathemathics and its appliacations Seventh Edition*, McGraw-Hill, 2012

[2] Dragan Stevanović i Miroslav Ćirić i Slobodan Simić i Vladimir Baltić, *DISKRETNA MATEMATIKA OSNOVE KOMBINATORIKE I TEORIJE GRAFOVA*, Matematički institut u Beogradu, 2007

[3] Sussana S. Epp, *Discrete Mathematics with Applications*, Cengage Learning, Inc. 2019

[4] Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics, Fifth Edition*, Pearson Education,2009

[5] Jiri Matoušek, Jaroslav Nešetril *Invitation to Discrete Mathematics, 2nd edition*, Oxford University Press, 2008