DISKRETNA MATEMATIKA

– PONAVLJANJE STAROG I UVOD U NOVO –

SADRZAJ

PONAVLJANJE:

- Definicija skupa, multiskup, uredjene n-torke
- Operacije nad skupovima (unija, presek, razlika, proizvod,...)
- Osobine operacija na skupovima
- Definicije relacije, funkcije
- Matematicka indukcija

NOVO:

- Prebrojavanje elemenata skupa
- Prebrojavanje elemenata konacnog skupa
- Principi prilikom prebrojavanja elemenata konacnog skupa
- ...

01

SKUPOVI

“Sve i svasta o skupovima”

- Jedan od osnovnih pojmova matematike jeste **skup**. Ostali matematički objekti *(pojmovi)* definišu se polazeći od pojma skupa. Uprkos tome sto pojam skupa ne definisemo eksplicitno. Intuitivno skup **prihvatamo kao konacnu ili beskonacnu kolekciju** elemenata.
- Skup se zapisuje:

  - navodjenjem elemenata izmedju viticastih zagrada { i } ili

  - tako sto se pronalazi neka karakterizacija, uslov π njegovih elemenata, koju ne poseduje nijedan element koji ne pripada tom skupu. Tada se zapis $S = \{x|\pi(x)\}$ cita *"S je skup svih takvih x, da x zadovoljava uslov π".*

- Za proizvoljne elemente a i b vazi:

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \text{ i}$$
$$\{a, a, b\} = \{a, b\}.$$

- Prazan skup je skup koji ne sadrzi nijedan element i oznacavacemo ga sa ∅ ili {}. (Napomena: primetimo da se on razlikuje od skupa {∅} koji sadrzi element ∅.)

- Partitivni skup skupa A, u oznaci P(A), je skup svih podskupova skupa A : $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$.
- **Primer** *Neka je A = {0, 1, 2}. Tada je P(A) = {∅, {0}, {1}, {2}, {0, 1}, {0, 2}, {1, 2}, {0, 1, 2}}.*

Relacije skupova

Skupovi A i B jednaki su ako i samo ako imaju iste elemente, tj.

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Skup A je podskup skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako I samo ako svaki element skupa A pripada skupu B, odnosno

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Operacije sa skupovima

Unija skupova A i B, u oznaci $A \cup B$, jeste skup kome pripadaju svi elementi skupa A, kao I skupa B I drugih elemenata u skupu $A \cup B$ nema, tj.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Presek skupova A i B, u oznaci $A \cap B$, je skup kome pripadaju svi elementi koji su I elementi skupa A I elementi skupa B I drugih elemenata u skupu $A \cap B$ nema, tj.

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Razlika skupova A i B, u oznaci $A \setminus B$, skup je svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B, tj.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Za ove operacije sa skupovima vaze odredjeni zakoni.

Neka su A, B, C skupovi. Tada vazi:

1) Asocijativnost:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

2) Komutativnost:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

3) Apsorptivnost:

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

4) Distributivnost:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5) De Morganovi zakoni:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$C = \sin^2\left(\frac{2}{3}\right) = \sin^3 \times 0{,}747 \approx 7{,}38$$

$$A^3 C^2 4^B = 9^3 + 5^8 + 7^C$$
$$5^C = 54718{,}32.$$

02

UREDJENA N-TORKA ELEMENATA

- **Uredjena n-torka elemenata** poseduje sledece osobine:
  1. redosled navodjenja elemenata **JESTE** bitan.
  2. elementi se mogu ponavljati
- Uredjena n-torka (a1,...,an), $n \geq 1$, se definise na sledeci nacin:

  n = 1: (a1) = a1

  n = 2: (a1, a2) = {{a1}, {a1, a2}} (uredjen par)

  $n \geq 3$: r (a1,...,an−1, an) = ((a1,...,an−1), an). (rekurzivno)

- Element ai, $i \in \{1,\ldots,n\}$, se zove i-ta komponenta (*koordinata*) uredjene ntorke (a1,...,an).

- Za skupove vazi:

$$\{1, 1, 2, 2, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}$$

dok je za uredjene torke elemenata

$$(1, 1, 2, 2, 2) \neq (1, 2) \text{ i } (1, 2) \neq (2, 1).$$

- Na osnovu definicije jednakosti skupova, mozemo dokazati da su dva uredjena para jednaka ako i samo ako su im jednake odgovarajuce komponente, sto je formulisano sledecim tvrdjenjem.

  - *Uredjeni parovi (a, b) i (c, d) su jednaki ako i samo ako je a = c i b = d.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}(a, b)=(c, d) &\Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \\ &\Leftrightarrow (\{a\} = \{c\} \wedge \{a, b\} = \{c, d\}) \vee (\{a\} = \{c, d\} \wedge \{a, b\} = \{c\}) \\ &\Leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \vee (a = b = c = d).\end{aligned}$$

- POSLEDICA
- DOKAZ

$(a_1,a_2,\dots,a_n)=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ ako i samo ako $a_1=b_1$ i $a_2=b_2$ i …… i $a_n=b_n$

Indukcijom po n:

Induktivni korak (n=1)

Za n=1 imamo: $(a_1)=(b_1)\Leftrightarrow a_1=b_1$

Ovo je tačno, jer je za jedan element jedina mogućnost da se oni međusobno izjednače.

Induktivna hipoteza

Pretpostavimo da tvrdnja vazi za neki n=k, tj. Da vazi:

$(a_1,a_2,\dots,a_n)=(b_1,b_2,\dots,b_n) \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_k = b_k$.

Induktivni korak

Sada ćemo dokazati da važi i za n=k+1:

Razmatramo dve (k+1)-dimenzionalne sekvence:

$$(a_1,a_2,\dots,a_k,a_{k+1})=(b_1,b_2,\dots,b_k,b_{k+1}).$$

Ako su ove dve sekvence jednake, tada mora biti:

$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots,\ a_k = b_k,\ a_{k+1} = b_{k+1}$.

Dakle, možemo zapisati:

$a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \dots \wedge a_k = b_k \wedge a_{k+1} = b_{k+1}$

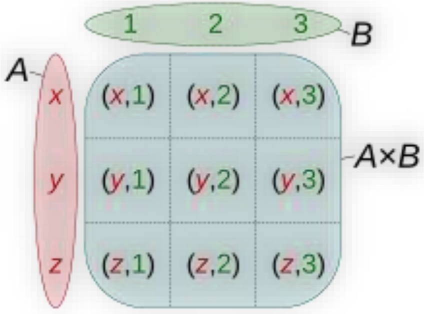
S obzirom da je prvi deo (do k) već pokriven hipotezom, teza za n=k+1 je dokazana.

DEKARTOV PROIZVOD SKUPOVA

- **Dekartov proizvod** je direktni proizvod skupova.

- Dekartov proizvod dva skupa, A i B:
  $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$. - skup uredjenih parova.
- **Primer** A = {1,3,6}, B{x,y}
  A × B = {(1,x), (1,y), (3,x), (3,y), (6, x), (6, y)}.

- Dekartov proizvod n skupova:
  $A1, A2,\ldots,An-1$ i An, $n \geq 2$, se definise na sledeci nacin:
  $A1 \times \ldots \times An = \{(a1,\ldots,an) : ai \in Ai, i = 1,\ldots,n\}$.



! Nekomutativnost i neasocijativnost

- Dekartov proizvod nije komutativan,
  $A \times B \neq B \times A$. - jer su koordinate uredjenih parova permutovane, osim ako nije ispunjen jedan od uslova:
  1. *A je jednako B,*
  2. *bar jedan od skupova A i B je prazan*

03 MULTISKUP

$$x_1 + 2_A = 3\sqrt{5+2AB}$$
$$= 9\sqrt{12}$$

- **Multiskup (kesa)**, za razliku od skupa, je kolekcija elemenata u kojoj:

I. redosled navodjenja elemenata NIJE bitan i

II. elementi mogu da se ponavljaju konacno mnogo puta

- Broj pojavljivanja nekog elementa u multiskupu je jedinstven pozitivan ceo broj, dok broj razlicitih elemenata u multisupu moze biti beskonacan.

- Ako se x pojavljuje tacno n puta u skupu M, pisemo $x \in^n M$.

- Za multiskup u kojem se x_1 pojavljuje n_1 puta, x_2 se pojavljuje n_2 puta itd, pisemo $[x_1, x_2, \ldots]_{n_1, n_2, \ldots}$

$$\{1,1,2,2,2\} = \{1,2\} = \{2,1\},$$

$$(1,1,2,2,2) \neq (1,2) \quad i \quad (1,2) \neq (2,1), \quad dok\ je$$

$$[1,1,2,2,2] \neq [1,2] \quad i \quad [1,2] = [2,1].$$

RELACIJE

04

- Relacija, u najkracem, predstavlja odnos izmedju elemenata nekih skupova

- Relacija $\rho \subseteq A \times B$ duzine 2 se naziva *binarna relacija*. Uobicajeno je da se za elemente $x \in A$ i $y \in B$ koji su u relaciji ρ umesto $(x, y) \in \rho$ pise $x \rho y$.
- Skup $\{a \in A \mid a \rho b$ za neko $b \in B\}$ se naziva *domen* relacije ρ, a skup $\{b \in B \mid a \rho b$ za neko $a \in A\}$ se naziva *kodomen* relacije ρ.

- Skup svih binarnih relacija na A oznacavamo sa $R^{(2)}_A$.
- Kazemo da je binarna relacija $\rho \in R^{(2)}$:

- **(R) Refleksivna**: ako $(\forall a \in A)\ (a, a) \in \rho$,
- **(S) Simetricna**: ako $(\forall a, b \in A)\ (a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$,
- **(A) Antisimetricna**: ako $(\forall a, b \in A)\ (a, b) \in \rho \wedge (b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$,
- **(T) Tranzitivna**: ako $(\forall a, b, c \in A)\ (a, c) \in \rho \wedge (c, b) \in \rho \Rightarrow (a, b) \in \rho$.

RELACIJE EKVIVALENCIJE I RELACIJE PORETKA

- Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je **relacija ekvivalencije** na skupu A ako je:

I. (R) Refleksivna,
II. (S) Simetricna i
III. (T) Tranzitivna.

*Neka je ρ relacija ekvivalencije na skupu A i neka je $x \in A$.
Skup $C_x = \{y \in A \,/\, x \,\rho\, y\}$
naziva se *klasa ekvivalencije* elementa x.

- Neka je $\rho \subseteq A^2$. Relacija ρ je **relacija poretka** (ili parcijalnog uredjenja) na skupu A ako je:

I. (R) Refleksivna,
II. (A) Antisimetricna i
III. (T) Tranzitivna.

- Ako je ρ relacija poretka na nepraznom skupu A, onda se uredjen par (A, ρ) naziva parcijalno uredjen skup.

05

FUNKCIJE

$(-3\sqrt{2}) - 4(3)(-3M+2)$

$\frac{3 \sin 4/8}{\sqrt{3.2.4+2}}$

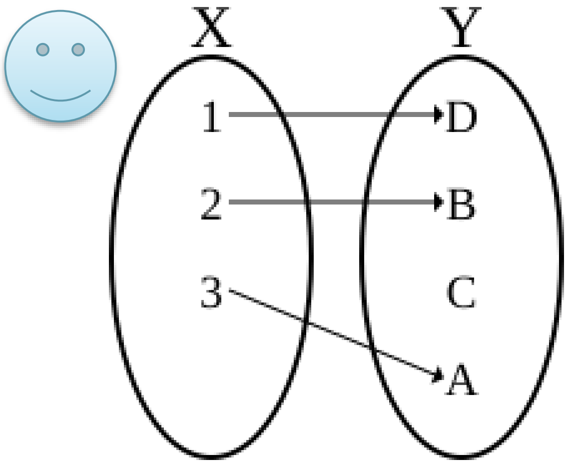
- **Pod funkcijom** se podrazumeva uredjena trojka (A, B, f), gde je $f \subseteq A \times B$, pri cemu za svako $x \in A$ postoji tacno jedno $y \in B$ tako da $(x, y) \in f$.
- Skup A se naziva *domen*, skup B se naziva *kodomen*, a f je *pravilo preslikavanja*.

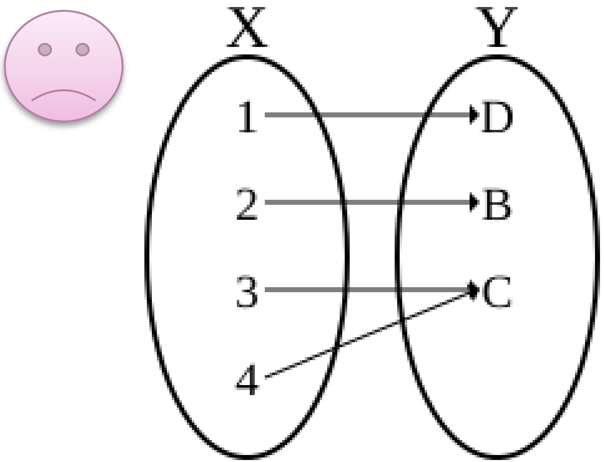
  - Cinjenica da funkcija preslikava elemente domena A u elemente kodomena B pomocu pravila preslikavanja f se zapisuje pomocu

$$f : A \to B$$

VRSTE FUNKCIJA

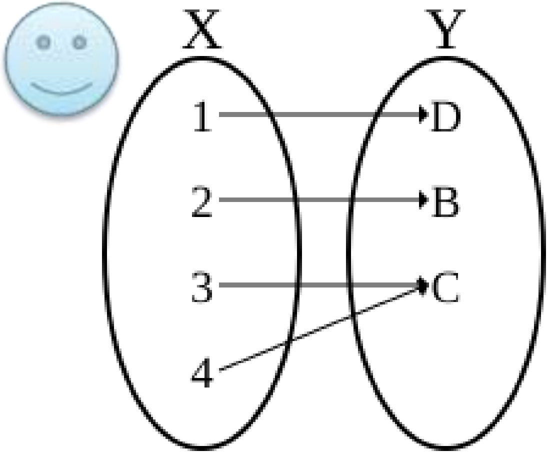
- Preslikavanje $f : A \longrightarrow B$ je $1-1$ (**injekcija**) akko je $(\forall x, y \in A)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

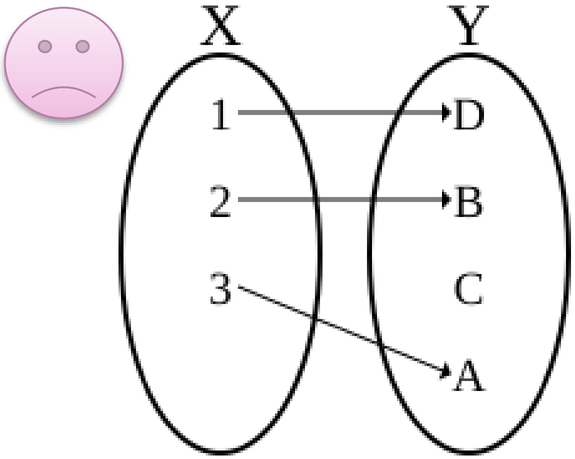




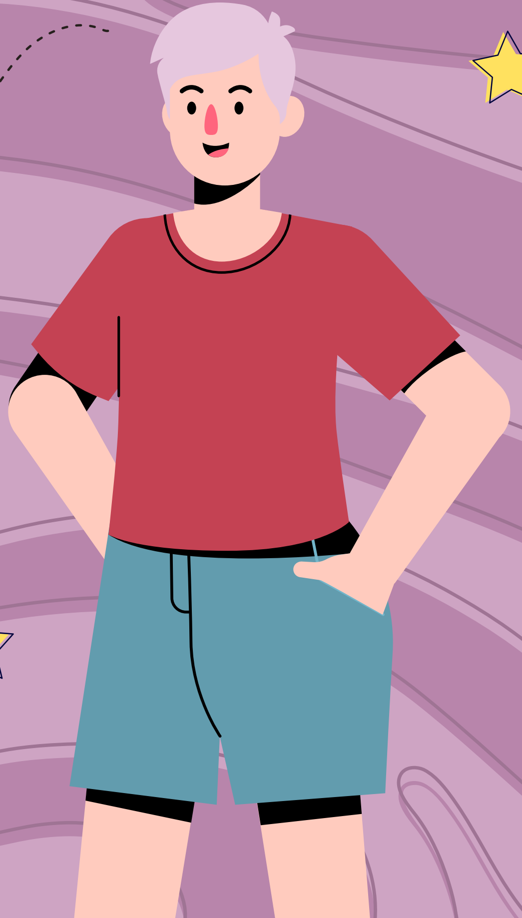
VRSTE FUNKCIJA

- Preslikavanje $f : A \to B$ je *na* (**sirjekcija**) akko je $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a) = b)$



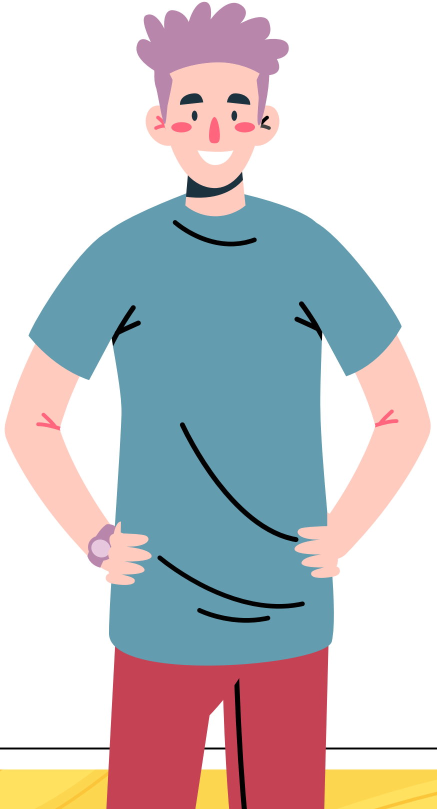


OSNOVNE TEHNIKE PREBROJAVANJA



$$X_1 + X_3 = -C + \sqrt{B^2 + 2 - 4AC}$$
$$= -5 + \sqrt{3^2 + 2 - 4.32}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{3-4.}}{2}$$

OSNOVNE TEHNIKE PREBROJAVANJA



- Kombinatorika, nauka o rasporedima objekata, je vazan deo diskretne matematike.
- Enumeracija, ili prebrojavanje, predstavlja vazan deo kombinatorike koji se bavi prebrojavanjem skupa objekata odredjenim postupkom.
- Zasto bi se neki skupovi prebrojavali?
- Prebrojavanjem skupova mozemo resiti razlicite vrste problema.

- Tehnikama prebrojavanja se odredjuje slozenost algoritma, a obimno se koriste i prilikom utvrdjivanja verovatnoca dogadjaja.

- S tim u vezi, u nastavku upoznacemo se razvijanjem efikasnih metoda za prebrojavanje konacnih skupova.

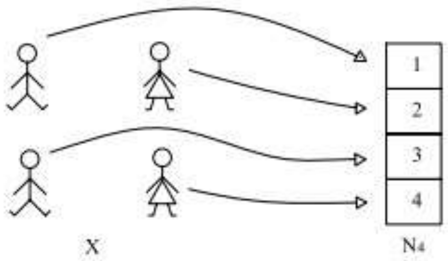
MATEMATICKA DEFINICIJA PREBROJAVANJA

- Na sta mislimo ako kazemo da neki skup ima n elemenata?
- Podsetimo se, najpre, kako prebrojavamo jednostavne skupove...

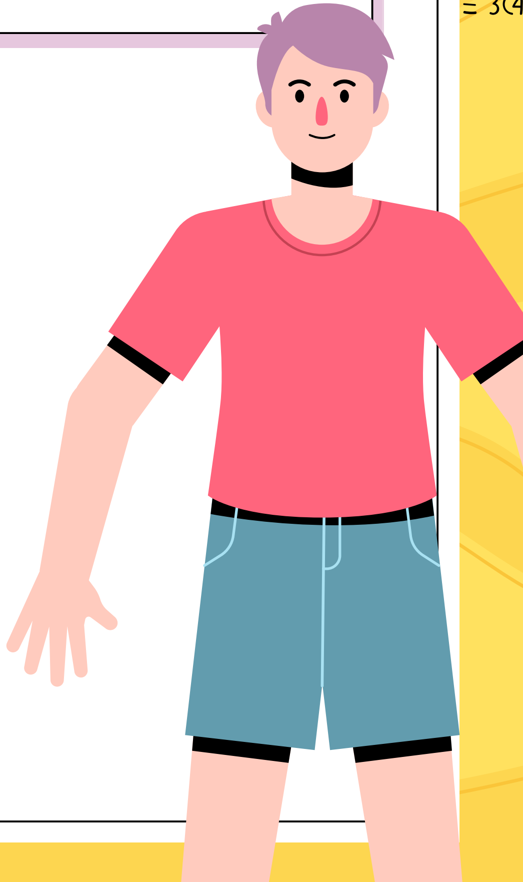
- Da bismo ovu *kazi-i-pokazi* tehiku preveli na jezik matematike, moramo da, za svaki prirodan broj n ∈ N, definisemo skup

$$N_n = \{1, 2, 3, . . . , n\}$$

- Kazi-i-pokazi tehnika svakom elementu skupa X koga prebrojavamo pridruzuje element skupa N_n; drugim recima, ona odredjuje funkciju f iz X u N_n (bijekcija).



Slika 2.1: Prebrojavanje studenata.



MATEMATICKA DEFINICIJA PREBROJAVANJA

- Ako je X konacan skup, n prirodan broj i postoji bijekcija iz X u N_n, tada kazemo da X ima n elemenata.

- ---------------------------*prebrojavanje automobila na parkingu*----------------------------
- **Ako su m i n prirodni brojevi tako da je $m < n$, tada ne postoji injekcija iz N_n u N_m.**
- → tvrdjenje "*skup X ima n elemenata*" moze da vazi za najvise prirodan broj n.

- Zasto ovde spominjemo najvise jedan prirodan broj?
  Pa, zato sto moze da se desi da neki skup koji broji kombinatorne objekte nema uopste elemenata ili da ih ima beskonacno mnogo (tacnije, za skup *X* kazemo da ima *prebrojivo mnogo elemenata* ukoliko postoji bijekcija izmedju skupa *X* i skupa N).

$B^3 = CD + DA$
$B^3 = (D - C\sin B)$
$B^3 = D^2 - 3A\cos B^2 + A\sin B$
$B^3 = D^2 - 4A\cos B^3 + C\sin B$
$B^3 = C^3 - A^2 - 3\cos B$

PRINCIP JEDNAKOSTI (BIJEKCIJE)

- Kada X ima n elemenata pisemo |X| = n i kazemo da je kardinalnost (ili velicina) skupa X jednaka n. Cesto pisemo i $X = \{x1, x2, \ldots, x_n\}$. Za prazan skup posebno usvajamo da je $|\emptyset| = 0$.
- Sada dolazimo do prvog principa prebrojavanja — principa jednakosti.

(Princip jednakosti) Ako izmedju dva neprazna konacna skupa A i B postoji bijekcija, tada je $|A| = |B|$.

- Dokaz
- Ako postoji bijekcija izmedju dva skupa A i B, to znaci da mozemo “upariti” svaki element iz A sa tacno jednim el. iz skupa B, i obrnuto.
- Ako je jedan od skupova prazan, to implicira da je i drugi prazan, jer ne moze postojati bijekcija izmedju praznog skupa i nepraznog.
- Pretpostavimo da su $|A| = n$ i $|B| = m$. Ako postoji bijekcija $\gamma: A \to B$, možemo brojati elemente u A i „prebaciti“ ih u B.
- U slucaju da $n < m$: kada pokusamo da “uparimo” sve elemente iz A sa elementima iz B, primeticemo da neki elementi iz B ostaju neupareni, sto je kontradikcija jer smo pretpostavili da je γ bijekcija.
- U slucaju da $n > m$: desava se slicna situacija
- Kako ni $n < m$ ni $n > m$ ne mogu biti tacni bez kontradikcije mora da vazi $n = m$.

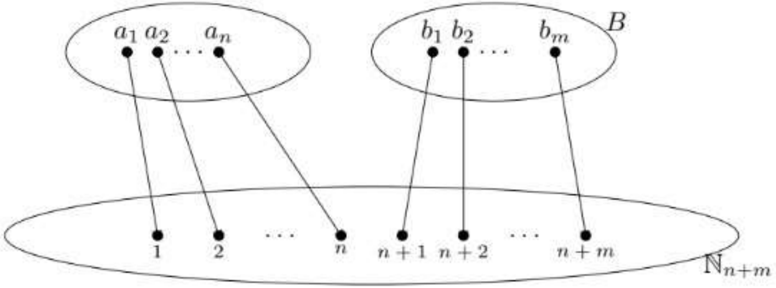
PRINCIP ZBIRA (SUME)

(Princip zbira) Ako su A i B disjunktni konacni skupovi (tj. $A \cap B = \emptyset$), tada je $|A \cup B| = |A| + |B|$.

- <u>Dokaz</u>

Kako je $A \cap B = \emptyset$, možemo zaključiti da je $|A \cup B| = n + m$, zato što postoji bijektivno preslikavanje skupa $A \cup B$ u skup $\{1, 2 \ldots, n + m\}$:

$$a_1 \mapsto 1 \quad \ldots \quad a_n \mapsto n \quad b_1 \mapsto n+1 \quad \ldots \quad b_m \mapsto n+m.$$



- Dokaz, princip sume se moze prosiriti na uniju proizvoljnog broja disjunktnih konacnih skupova(n>=2)

$$|A1 \cup A2 \cup \ldots \cup An| = |A1| + |A2| + \ldots + |An|.$$

- **Baza indukcije**: (n=2) – dokazano na prethodnom slajdu
- **Induktivna hipoteza**: Pretpostavimo da je $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.
- **Induktivni korak**: Dokazacemo da tvrdjenje vazi na n+1 skupova.

$$|(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1| \cup \ldots \cup |A_n| + |A_{n+1}|.$$

Na osnovu induktivne hipoteze dalje sledi...

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1| + \ldots + |A_n| + |A_{n+1}|.$$

$B^3 = CD + DA$
$B^3 = (D - C\sin B)$
$B^3 = D^2 - 3A\cos B^2 + A\sin B$
$B^3 = D^2 - 4A\cos B^3 + C\sin B$
$B^3 = C^3 - A^2 - 3\cos B$

PRINCIP PROIZVODA

(Princip proizvoda) Broj elemenata skupa A×B jednak je $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

- Dokaz

Dokaz. Neka je $A = \{a_1, \dots, a_m\} \neq \emptyset$ i $B = \{b_1, \dots, b_n\} \neq \emptyset$ (ako je $A = \emptyset$ ili $B = \emptyset$ tvrđenje direktno sledi). Tada je

$$A \times B = |\{(a, b) : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B).$$

Kako za $a_i \neq a_j$ važi $(\{a_i\} \times B) \cap (\{a_j\} \times B) = \emptyset$, prema Tvrđenju 3 sledi

$$\begin{aligned} |A \times B| &= \sum_{a \in A} |\{a\} \times B| = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} |\{(a, b)\}| \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} 1 = |A| \cdot |B|. \end{aligned}$$

- Dokaz, princip proizvoda se moze prosiriti na proizvod proizvoljnog broja konacnih skupova(n>=2)

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

- **Baza indukcije**: (n=2) – dokazano na prethodnom slajdu
- **Induktivna hipoteza**: Pretpostavimo da je $|A_1 \times A_2 \cup \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$.
- **Induktivni korak**: Dokazacemo da tvrdjenje vazi za Dekartov proizvod n+1 skupova.

$$|(A_1 \times \ldots \times A_n) \cup A_{n+1}| = |A_1| \times \ldots \times |A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

Na osnovu induktivne hipoteze dalje sledi...

$$|A_1 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|.$$

DIRIHLEOV PRINCIP

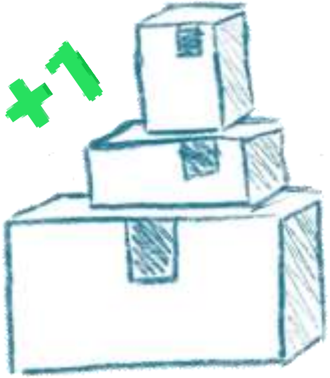
Pretpostavimo da je jato golubova doletelo u golubarnik. U svojoj originalnoj verziji, Dirihleov princip kaze da ako ima vise golubova nego kucica u golubarniku, tada ce se bar u jednoj kucici naci bar dva goluba. Zbog ovoga se na engleskom govornom podrucju Dirihleov princip naziva The Pigeonhole Principle. Naravno, ovaj princip je primenljiv i na druge objekte, a ne samo na golubove

DIRIHLEOV PRINCIP

Dirihleov princip. Ako je $n + 1$ ili vise objekata smesteno u n kutija, tada se bar u jednoj kutiji nalaze bar dva objekta.

- <u>Dokaz</u>

- *Pretpostavimo da svaka kutija sadrzi najvise jedan objekat. Tada je ukupan broj objekata najvise n, sto je u suprotnosti sa pretpostavkom da ima bar n+1 objekata*



ZADACI

$(-3\sqrt{2}) - 4(3)(-3M+2)$

DOKAZATI DA ZA SVAKI CEO BROJ N POSTOJI UMNOZAK OD N KOJI SE ZAPISUJE SAMO POMOCU CIFARA 0 I 1

DOKAZATI DA AKO JE X SKUP OSOBA, TADA POSTOJE DVE OSOBE U X KOJE IMAJU ISTI BROJ PRIJATELJA U X. (PRETPOSTAVLJA SE DA AKO JE X PRIJATELJ Y, TADA JE I Y PRIJATELJ X.)

KOLIKO POSTOJI RAZLICITIH NIZOVA BITOVA 0 I 1 DUZINE 8?

KOLIKO IMA PALINDROMA NAD AZBUKOM $\{0, 1\}$

KOLIKO RAZLICITIH DELILACA IMA BROJ 60000?

KOLIKO IMA 5-TOCIFRENIH PRIRODNIH BROJEVA KOJI IMAJU TACNO JEDNU CIFRU 6?

DOKAZATI DA POSTOJI $N \in N$, TAKO DA SE DECIMALNI ZAPIS BROJA 3 N ZAVRSAVA SA 0001

NA POLICI SE NALAZI 6 RAZLICITIH KNJIGA NA ENGLESKOM JEZIKU, 8 RAZLICITIH KNJIGA NA RUSKOM JEZIKU I 10 RAZLICITIH KNJIGA NA SRPSKOM JEZIKU. NA KOLIKO NACINA MOZEMO IZABRATI 2 KNJIGE TAKO DA ONE BUDU NA RAZLICITIM JEZICIMA?

KADA JE EVA BILA 14 DANA IZVAN GRADA ZVALA JE 17 PUTA ADAMA. AKO JE ONA SVAKOG DANA NAPRAVILA BAR 1 MEDJUGRADSKI POZIV, DOKAZATI DA POSTOJI PERIOD OD NEKOLIKO UZASTOPNIH DANA TOKOM KOJIH JE ONA NAPRAVILA TACNO 10 POZIVA

...

Literatura:

https://drive.google.com/file/d/1IWEMWv_pqBvZdpEHZ57MDgOM8xcDPPU-/view - osnovne tehnike prebrojavanja

https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics

D. Stevanovic, M. ´ Ciri ´ c, S. Simi ´ c, V. Balti ´ c, Diskretna matematika i ´ teorija grafova, 2007.

https://plato.stanford.edu/entries/set-theory/

https://matematickitalent.mk/uploads/books/N_5qfKzI7k6NjmEd4pRHBQ.pdf

https://www.mathreference.org/index/page/id/350/lg/sr

HVALA NA PAZNJI!