Zadatak 8 - Povezanost grafova

grupa 10

Decembar 2024

Kada matematički modelujemo realne probleme često imamo potrebu da razmatramo povezano kretanje kroz graf duž njegovih grana. Zbog toga se uvodi pojam šetnje po grafu, kao najopštije forme povezanosti parova čvorova.

Definicija 1: Neka je $G = (V, E, \psi)$ multigraf. Neka je $e_1, \dots e_n \in E$ i $v_0, \dots, v_n \in V$ proizvoljne grane i čvorovi sa osobinom $\psi(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$ za svako $i \in \{1, \dots, n\}$. Tada za niz

$$v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$$

kažemo da je $v_0 v_n$ **- šetnja** dužine n u grafu G između čvorova v_0 i v_n. Za čvorove v_0 i v_n kažemo da su krajnji čvorovi šetnje.

Specijalni slučajevi:

1. **staza** - ako nema ponavljanja grana tj. ako za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$ sa osobinom $i \neq j$ važi $e_1 \neq e_j$

2. **put** - ako nema ponavljanja čvorova tj. ako za sve $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sa osobinom $i \neq j$ važi $v_i \neq v_j$ (osim eventualno $v_0 = v_n$)

Ako je graf G prost, pisaćemo

$$v_0 v_1 \dots v_n$$

Ako su krajnji čvorovi jednaki tj. ako $v_0 = v_n$, tada uvodimo dodatne pojmove:

šetnja dužine bar jedan je **zatvorena**

zatvorena staza je **kružna**

zatvoren put je **kontura**

Primjer 1: Za graf K_6 na slici, daćemo po jedan primjer za svaku kategoriju.

1. šetnja: $aecaefdbf$
2. staza: $aecafdbf$
3. put: $aecfdb$
4. kontura: $aecfdba$

Teorema 1: Ako u grafu postoji uv-šetnja (staza), onda posti i uv-put.

Definicija 2: Neka je $G = (V, E, \psi)$ multigraf.

Kažemo da su čvorovi u i v povezani ako je

$u = v$ ili

$u \neq v$ i postoji uv-put u G

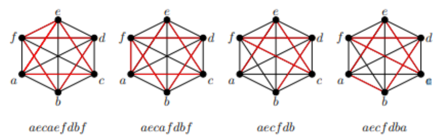

Figure 1: Grafovi primjer 1

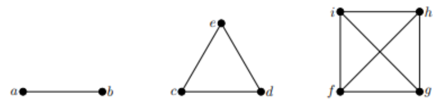

Figure 2: Grafovi primjer 2

Kažemo da je G povezan akko $|V| = 1$ ili za svako $u, v \in V$ važi da su u i v povezani.

Direktno slijedi da postojanje uv-šetnje u grafu direktno implicira da su čvorovi u i v povezani.

Lema 1: Relacija "je povezan sa" je relacija ekvivalencije na skupu čvorova grafa.

Dokaz.

(R) Refleksivnost slijedi direktno iz definicije

(S) Neka je $u \neq v$ i neka je uv-put u grafu oblika $uv_0 \dots v_{n-1}v$. Tada je jedan vu-put u grafu oblika $uv_{n-1} \dots v_0u$

(T) Pretpostavimo da u grafu G postoje uv-put i $v\omega$-put:

$$uu_0 \dots u_{l-1}v$$

i

$$uv_0 \dots v_{n-1}\omega$$

Tada je sa

$$uu_0 \dots u_{l-1}vv_0 \dots v_{n-1}\omega$$

data jedna $u\omega$-šetnja u grafu, odakle je u povezan sa ω.

Relacija ekvivalencije "je povezan sa" na skupu čvorova V grafa G dijeli taj skup na klase ekvivalencije. Svaka komponenta povezanosti indukuje podgraf koji se naziva komponenta povezanosti tog grafa. Komponenta povezanosti je maksimalan povezan podgraf grafa, tj. svaka komponenta povezanosti grafa je podgraf koji nije sadržan ni u jednom drugom povezanom podgrafu istog grafa. Broj komponenti povezanosti grafa G, u oznaci $\omega(G)$, jednak je broju klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju povezanosti.

Primjer 2: Neka je $G = \{\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}, E)$ graf na slici.

Broj komponenti povezanosti datog grafa je $\omega(G) = 3$. Komponte povezanosti su podgrafovi koji su indukovani skupovima čvorova $\{a, b\}$, $\{c, d, e\}$ i $\{f, g, h, i\}$

Lema 2: Multigraf $G = (V, E, \psi)$ je povezan akko $\omega(G) = 1$

Dokaz. G je povezan akko za svaka dva čvora $u, v \in V$ postoji uv-put u G. To dalje važi akko svi čvorovi pripadaju istoj klasi ekvivalencije u odnosu na relaciju "je povezan sa", što važi akko $\omega(G) = 1$

Definicija 3: Neka je $G = (V, E, \psi)$ sa osobinom $\omega(G) = k \geq 1$

čvor $v \in V$ je **razdjelni (ili artikulacioni)** ako je $\omega(G - v) > k$

grana $e \in E$ je **razdjelni (ili most**) ako je $\omega(G - e) > k$.

Teorema 2: Neka je $n \geq 2$

Graf sa n čvorova i manje od $n - 1$ grana nije povezan.

Dokaz. Indukcijom po n.

Baza $n = 2$: Graf sa dva čvora i 0 grana nije povezan.

Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da graf sa n čvorova i manje od $n - 1$ grana nije povezan.

Induktivni korak: Neka je G graf sa $n + 1$ čvorova i manje od n grana. Pokazaćemo da on nije povezan. Na osnovu posljedice

Neka je $G = (V, E)$ prost graf, u kojem je $|V| = n$ i $|E| < n$. Tada postoji čvor $v \in V$ sa osobinom $deg_G(v) \leq 1$.

Postoji čvor v stepena $d_G(v) \leq 1$. Ako je $d_G(v) = 0$, onda je broj komponenti povezanosti bar dva i graf nije povezan. Ako je $d_G(v) = 1$, onda graf G ima jednak broj komponenti povezanosti kao i graf $G' = G - v$. Kako je $G' = (V \backslash \{v\}, E \backslash \{\{u, v\}\})$ za neki čvor $u \in V, G'$ ima n čvorova i manje od $n - 1$ grana. Zaključujemo prema induktivnoj pretpostavci da G' nije povezan. Kako G i G' imaju jednak broj komponenti povezanosti, onda ni G nije povezan.

Teorema 3: Neka je $G = (V, E)$ povezan i neka je C kontura u grafu G. Ako je e grana konture, onda je $G - e$ povezan.

Dokaz: izaberimo proizvoljno dva čvora $u, v \in V$. Kako je G povezan, postoji uv-put

$$P = uv_1 \dots v_i v_{i+1} \dots v_{n-1} v$$

Postoje dvije mogućnosti:

1. Ako e ne pripada uv-putu, onda je P uv-put u $G - e$

2. Ako e pripada uv-putu, onda možemo pretpostaviti da je grana $\{v_i, v_{i+1}\}$ i da je kontura C oblika

$$C = v_i v_{i+1} u_1 \dots u_l v_i$$

To znači da u grafu $G - e$ postoji put Q od v_i do v_{i+1}:

$$Q = v_i u_l u_{l-1} \dots u_1 v_{i+1}$$

onda je

$$P_2 = uv_1 \dots v_{i-1} Q v_{i+2} \dots v_{n-1} v$$

staza u grafu $G - e$ od u do v. Prema Teoremi 1, u $G - e$ postoji $uv - put$. Znači, za svaka dva čvora u grafu $G - e$ postoji put koji ih povezuje.

Definicija 4: Neka je $G = (V, E)$ prazan graf. Rastojanje $d(u, v)$, između različitih čvorova u i v jeste dužina najkraćeg puta od u do v. Pored toga, $d(u, u) = 0$

Rastojanje zadovoljava sljedeće osobine:
1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = 0$ akko $u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$
4. $d(u, v) + d(v, \omega) \geq d(u, \omega)$

Teorema: Ako jednostavan graf ima n čvorova i manje od $n - 1$ grana, onda nije povezan.

Teorema: Neka je $G = (V, E)$ jednostavan graf, gde je $|V| = n$ broj čvorova, i $|E| = m$ broj grana u grafu. Ako je $m < n - 1$, onda graf G nije povezan.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da je graf G povezan i da ima manje od $n - 1$ grana, tj. $m < n - 1$.

- **Definicija povezanog grafa:** Graf je povezan ako postoji put izmedju svakog para čvorova u grafu. To znači da za svaki par čvorova $u, v \in V$, postoji niz grana koje povezuju u i v.

- **Definicija minimalnog povezanog grafa (stabla):** Graf koji je povezan, a koji ne sadrži cikluse, naziva se stablo. Stablo sa n čvorova ima tačno $n - 1$ granu.

- Ako je graf G povezan, onda mora biti barem stablo ili imati cikluse. Ako bi graf bio stablo, imao bi tačno $n - 1$ granu. Ako bi graf imao manje od $n - 1$ grana, to bi značilo da graf nije povezan, jer ne bi bilo dovoljno grana da povežu sve čvorove.

Dakle, ako graf G ima manje od $n - 1$ grana, on mora biti nepovezan, što je suprotno našoj pretpostavci da je graf povezan.

Zaključak: Ako $m < n - 1$, graf G nije povezan. Teorema je dokazana.

Primer prostog grafa sa n čvorova i barem $n - 1$ grana, koji nije povezan.

Uzmimo jednostavan graf G sa 4 čvora $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ i 3 grane. Graf je definisan sa sledećim granama:

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}.$$

U ovom primeru:

- Graf ima 4 čvora ($n = 4$) i 3 grane ($m = 3$).

- Iako graf ima 3 grane, on nije povezan jer čvor v_1 nije povezan sa v_4 ili bilo kojim drugim čvorom osim v_2. Graf sadrži dva nepovezana dela: v_1, v_2, v_3 i v_4.

Dakle, iako je broj grana manji od $n - 1 = 3$, graf je povezan.

Teorema: Ako se iz prostog grafa koji sadrži konturu izbriše jedna grana konture, graf ostaje povezan.

Teorema: Neka je $G = (V, E)$ jednostavan graf koji sadrži konturu (ciklus), i neka je $e \in E$ neka grana koja čini konturu. Ako se iz G izbriše grana e, graf G' (graf koji se dobija brisanjem e) će ostati povezan.

Dokaz:

- **Definicija konture (ciklusa):** Kontura je niz grana koje počinju i završavaju u istom čvoru, pri čemu nijedna grana ne ponavlja čvorove, osim početnog i krajnjeg.
- **Pretpostavka:** Graf G sadrži konturu, što znači da postoji ciklus u grafu. Neka je $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1)$ taj ciklus.
- **Brisanje grane e iz ciklusa:** Ako izbrišemo jednu granu e iz ciklusa, graf će ostati povezan jer:
  - Preostale grane iz ciklusa omogućavaju povratak od bilo kog čvora do drugih čvorova u ciklusu, pa se i dalje može doći od bilo kog čvora do svih ostalih čvorova. Ciklus sam po sebi osigurava povezanost svih čvorova koji su deo ciklusa.
  - Ako graf G nije imao nikakvu drugu granu koja povezuje preostale čvorove u grafu, brisanjem grane e on neće postati nepovezan jer ciklus omogućava održavanje povezanosti. Čak i bez te grane, ostatak grafa je još uvek povezan.

Zaključak: Ako izbrišemo jednu granu iz konture u grafu, graf ostaje povezan. Teorema je dokazana.