Zadatak #11

Istorijski osvrt na Hamiltonove grafove

Hamiltonov graf je osnovni pojam u teoriji grafova, grani matematike koja proučava grafove, odnosno objekte sastavljene od čvorova i grana koje ih povezuju. Ovaj tip grafa nosi ime po irskom matematičaru i fizičaru Vilijamu Rotu Hamiltonu, koji je u 19. veku uveo ključnu ideju povezanu s ovim grafovima.

Hamiltonov graf je graf u kojem postoji **Hamiltonov ciklus**, tj. ciklus koji poseti svaki čvor tačno jednom i zatvara se, vraćajući se na početni čvor. Problem vezan za Hamiltonov ciklus je bio motivisan pokušajem rešavanja problema putovanja kroz tačke na ravni, što je predstavljalo važan izazov u to vreme.

Istorija Hamiltonovog grafa

Iako je Hamiltonov graf formalizovan u 19. veku, ideje povezane s njim datiraju još iz ranijih vremena. U 1859. godini, Hamilton je razmatrao problem putovanja kroz tačke u ravni i pokušavao da pronađe put koji bi posetio svaku tačku tačno jednom i zatvorio se. Ovo istraživanje je dovelo do razvoja pojma Hamiltonovog ciklusa, a kasnije i Hamiltonovog grafa. Hamilton je također istraživao slične probleme u kontekstu geometrije, što je bilo od značaja za dalje razvijanje ove oblasti.

Jedan od najpoznatijih problema vezanih za Hamiltonove grafove je **Hamiltonov problem putovanja trgovca (TSP)**, koji postavlja pitanje kako trgovac može obići sve gradove tačno jednom, vraćajući se na početnu tačku, pri čemu je cilj minimizacija ukupne udaljenosti. Ovaj problem je poznat po svojoj složenosti, što znači da je za velike grafove teško pronaći efikasan algoritam za njegovo rešavanje.

Osnovne karakteristike Hamiltonovog grafa

Hamiltonov graf je definisan kao graf u kojem postoji Hamiltonov ciklus, što znači da postoji ciklus koji prolazi kroz svaki čvor tačno jednom i zatvara se. Ovaj koncept je postao centralna tačka u istraživanjima grafova i igra ključnu ulogu u mnogim praktičnim primenama.

Definicija Hamiltonovog grafa

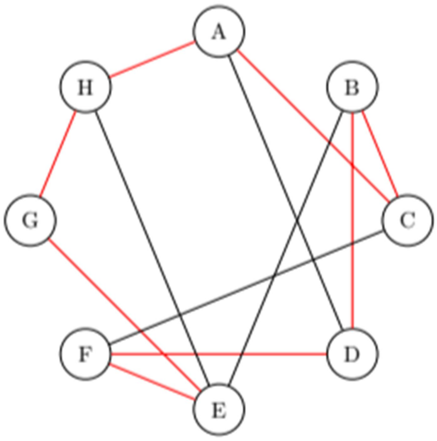
Hamiltonov put, Hamiltonova kontura

Šetnja kroz graf koja prolazi kroz svaki čvor tačno jednom naziva se Hamiltonov put. Ako su prvi i poslednji čvor u putanji isti, tada se put naziva Hamiltonova kontura.

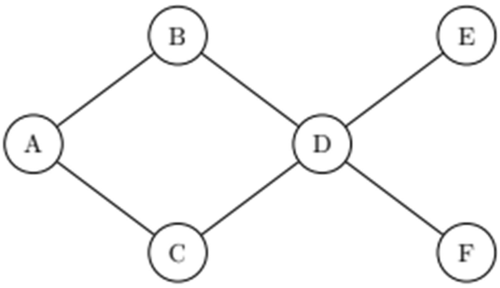
Definicija: Neka je G graf. Hamiltonov put u G je put koji sadrži sve čvorove tog grafa. Hamiltonov put koji je ujedno i kontura se naziva Hamiltonova kontura.

Hamiltonov graf

Definicija: Hamiltonov graf je graf koji sadrži Hamiltonovu konturu.



Primer Hamiltonovog grafa (Hamiltonova kontura je *acbdfegha*)



Primer grafa koji nije Hamiltonov (Ne postoji putanja koja prolazi kroz sve čvorove, a ne prolazi tačno jednom kroz čvor D)

Definicija polu-Hamiltonovog grafa

Definicija:

Polu Hamiltonov graf je neusmeren ili usmeren graf u kojem postoji Hamiltonov put, ali ne mora postojati Hamiltonov ciklus.

- Hamiltonov put (engl. Hamiltonian path) je prosti put koji prolazi kroz svako teme grafa tačno jednom, bez obzira da li se vraća u početno teme.
- Hamiltonov ciklus (engl. Hamiltonian cycle ili Hamiltonian circuit) je Hamiltonov put koji se vraća na početno teme, zatvarajući ciklus.

Dakle, polu Hamiltonov graf ima osobinu da omogućava prolazak kroz sva temena bez ponavljanja, ali ne zahteva da se formira zatvoreni krug.

Oznake i notacija:

Neka je graf G = (V, E) gde je:

- V – skup temena (čvorova),
- E – skup grana (veza između čvorova).

Ako postoji Hamiltonov put v1→v2→⋯→vn, takav da se svako teme pojavljuje tačno jednom, onda je G polu Hamiltonov.

Ako ne postoji nijedan Hamiltonov ciklus u G, ali postoji Hamiltonov put – tada je graf polu Hamiltonov, ali ne Hamiltonov.

Dokazati dovoljne uslove da graf bude Hamiltonov

Def. Hamiltonov put je put koji prolazi kroz svaki čvor grafa samo jednom.
Def. Hamiltonova kontura je kontura koja prolazi kroz svaki čvor grafa samo jednom i vraća se u početni čvor.
Def. Polu Hamiltonov graf je graf koji sadrži Hamiltonov put.
Def. Hamiltonov graf je graf koji sadrži Hamiltonovu konturu.

1. Lema

Neka je G prost graf sa *n* čvorova ($n \geq 3$) u kojem postoje susedni čvorovi *v* i *u* sa osobinom da je zbir stepena čvorova *v* i *u* veći ili jednak *n*.

$u, v \in V(G)$
$d_G(u) + d_G(v) \geq n$

Tada je graf G Hamiltonov akko je i G + $\{u, v\}$ Hamiltonov.

Dokaz

(=>) Ako je G Hamiltonov graf onda je i G + $\{u, v\}$ Hamiltonov graf jer je Hamiltonova kontura u G istovremeno i Hamiltonova kontura u G + $\{u, v\}$

■

(<=) Ako je C Hamiltonova kontura u G + $\{u, v\}$ a nije Hamiltonova kontura u G, to znači da su u i v susedni čvorovi u toj konturi. Tada postoji Hamiltonov uv-put u G:

$uu_1 \ldots u_{i-1}u_i \ldots u_n v$

Ako postoji grana uu_i onda ne postoji grana $uu_{i-1}v$, jer, ako bi ona postojala, onda bi postojala i Hamiltonova kontura u G:

$uu_1 \ldots u_{i-1}u_n \ldots u_i v$

To znači da svaka grana koja izlazi iz čvora u isključuje jednu granu koja izlazi iz čvora v. Zbog toga važi:

$$d_G(v) \leq n - 1 - d_G(u) <=> d_G(u) + d_G(v) \leq n - 1 <=> d_G(u) + d_G(v) < n$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom.

■

2. Teorema - Ore

Ako je G prost graf sa $n \geq 3$ čvorova i za svaki par nesusednih čvorova u, $v \in$ G važi da je zbir stepena tih čvorova veći ili jednak ukupnom broju čvorova grafa ($d_G(u) + d_G(v) \geq n$), onda G ima Hamiltonovu konturu.

Dokaz

Ako je G kompletan graf, tvrđenje je direktno.

Ukoliko G nije kompletan graf, recimo da je K_n kompletan graf i pretpostavimo da postoji $E(Kn) \setminus E(G) = e_1, e_2, \ldots, e_l$.
Napomena: Dodavanjem grana u graf G se ne menja uslov da je zbir stepena nesusednih čvorova barem n.

Primenjujući prethodnu lemu uzastopno (l puta), zaključujemo da G ima Hamiltonovu konturu akko i kompletan graf K_n ima Hamiltonovu konturu.
Dokazivanjem postojanja Hamiltonovu konture dokazujemo i da je graf Hamiltonov.

■

Možemo izvesti oblik ove teoreme koji važi za polu Hamiltonov graf.

Ako je G prost graf sa $n \geq 3$ čvorova i za svaki par nesusednih čvorova u, $v \in$ G važi $d_G(u) + d_G(v) \geq n - 1$, onda je G polu Hamiltonov graf.

3. Teorema - Dirac

Ako je G prost graf sa $n \geq 3$ čvorova, u kojem je stepen svakog čvora barem $\frac{n}{2}$, onda G ima Hamiltonovu konturu.

Dokaz

Dokaz se izvodi iz prethodne teoreme.
Ako je stepen svakog čvora bar $\frac{n}{2}$ onda za svaka dva nesusedna čvora u, $v \in$ G važi $d_G(u) + d_G(v)\ \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$. Vidimo da je ovo pretpostavka iz prethodne teoreme, pa zaključujemo da je graf Hamiltonov na osnovu teoreme Orea.

■

Možemo izvesti oblik ove teoreme da važi za polu Hamiltonov graf.

Ako je G prost graf sa $n \geq 3$ čvorova, u kojem je stepen svakog čvora barem $\frac{n-1}{2}$, onda je G polu Hamiltonov graf.

Dokazati potrebne uslove da graf bude Hamiltonov

Da bismo dokazali da je graf Hamiltonov, tj. da sadrži ciklus koji obilazi sve čvorove tačno jednom oslanjamo se na poznate rezultate teorije grafova.

1. Graf mora biti povezan

    Ako graf nije povezan onda se ne može naći put koji obilazi sve čvorove

2. Stepen svakog čvora u grafu mora biti stepena ≥2

    Ako čvor u grafu ima stepen 1 onda ima samo jednu granu koja je ili ulazna ili izlazna tako da se takav čvor ne može uvrstiti u ciklus

3. Neophodan uslov povezanosti nakon uklanjanja čvorova

    Ako se iz grafa ukloni neki skup temena S onda broj komponenti povezanosti (najveći mogući podgraf u kom su sva temena međusobno povezana) ne sme biti veći od broja uklonjenih čvorova.

    Na primer, ako se iz grafa ukloni 2 čvora a ostane 3 komponenti povezanosti onda nikad nije ni bilo moguće da se napravi ciklus kroz sve čvorove.

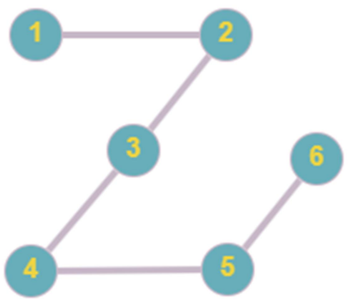
4. Ako se radi o bipartivnom grafu da bi bio hamiltonov |A|=|B| (gde su A i B skupovi čvorova koji nemaju zajedničkih grana)

Ako na primer imamo bipartivni graf gde je |A| != |B| onda bismo imali neparan broj grana koje povezuju ova dva skupa, a koje možemo koristiti u hamiltonovom ciklusu. A ako ih ima neparan broj nakon obilaska svih čvorova ne bismo se mogli vratiti na početak. Tako da broj čvorova u takvom grafu mora biti paran i mora imati jednako čvorova u oba podskupa.

Primeri sa ilustracijama

Ilustrovaćemo različite situacije u Hamiltonovim i polu-Hamiltonovim grafovima.

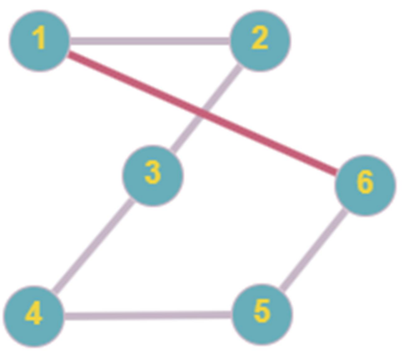
Primer 1: Hamiltonov put



Ovde imamo klasičan primer Hamiltonovog puta. Počinje u čvoru 1 I nakon što prođe kroz svaki čvor tačno jednom, završava se.

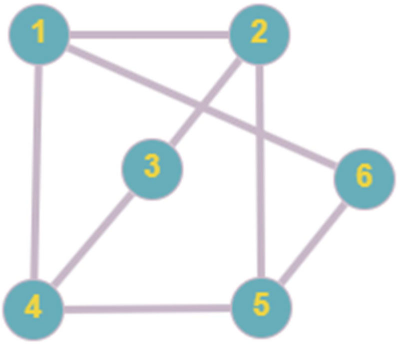
Završetak mu nije u početnom čvoru, tako da nije Hamiltonov već polu-Hamiltonov graf.

Primer 2: Hamiltonov ciklus



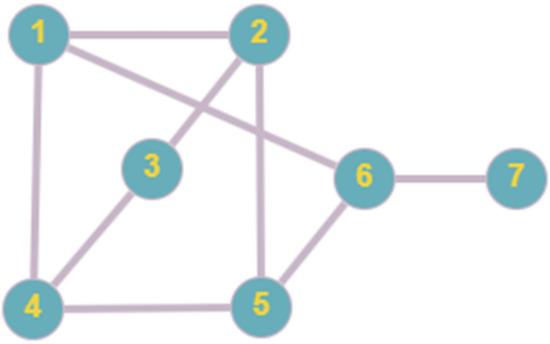
Isti graf kao I u prethodnom primeru, samo sa dodatom ivicom 1-6. Sada imamo Hamiltonovu konturu I kompletan put koji se završava u istom čvoru iz kog je I krenuo.

Primer 3: Hamiltonov graf



U ovom primeru smo dodali grane 1-4 I 2-5. Sada imamo više mogućih Hamiltonovih kontura u jednom grafu.

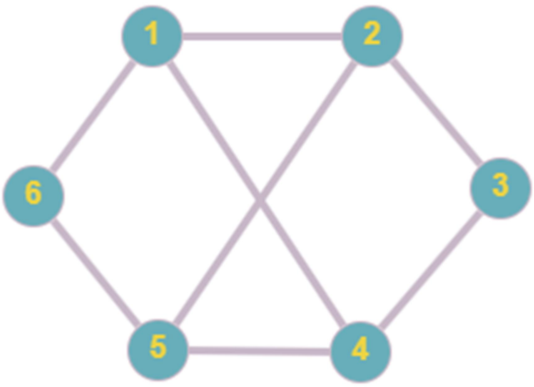
Primer 4: Loš stepen čvora



U potrebnim uslovima da bi graf bio Hamiltonov smo spomenuli da stepen svakog čvora mora biti ≥2.

U ovom primeru demonstriramo zašto je to neophodno. Vidimo da nije moguće izdvojiti put koji završava u početnoj tački bez ponavljanja čvora 6 I puta 6-7

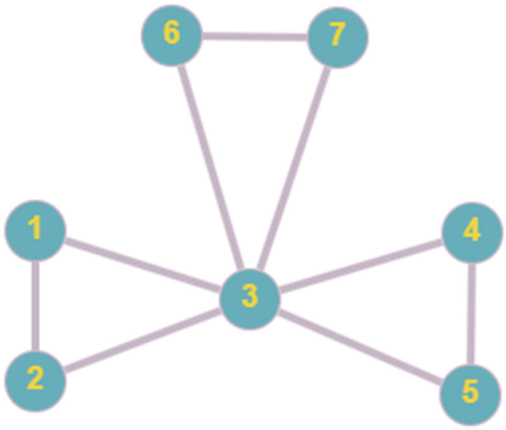
Primer 5: Rasporedjivanje u krug



Jedna od osobina Hamiltonovih grafova je da se prividom zamenom mesta čvorovima, oni mogu rasporediti u krug.

Ovo je isti graf iz prethodnih primera (bez čvora 7 naravno) sa takvim rasporedom čvorova.

Primer 6: Čvor koji spaja više odvojenih grafova



U ovom primeru grafa imamo jedan čvor koji povezuje tri “odvojena” dela grafa – čvor 3.

Naravno, ne postoji Hamiltonov put kroz ovakav graf zato što je neophodno proći kroz čvor 3 više puta da bi se došlo do drugih čvorova.