Diskretna matematika - Zadatak 1

Grupa 10

Oktobar 2024

1 Uvod

Skup je neuredjena kolekcija unikatnih objekata, odnosno elemenata. Pisemo $a \in A$ da pokazemo da je a element skupa A. Notacijom $a \notin A$ prikazujemo da a nije element skupa A.

Cesto se skupovi obelezavaju velikim latinicnim slovima, gde se malim slovima obelezavaju elementi nekog skupa.

2 Kardinalnost

2.1 Definicija

Prazan skup je konačan skup kardinalnosti 0. Ako postoji jedan na jedan korespondencija između skupa A i skupa $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, tada je A konačan skup kardinalnosti n.

2.2 Primer

Skup $\{a, p, r, x, z\}$ ima kardinalnost 5 pošto postoji jedan na jedan korespondencija $\phi : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{a, p, r, x, z\}$ definisana sa $\phi(1) = a$, $\phi(2) = p$, $\phi(3) = r$, $\phi(4) = x$, $\phi(5) = z$.

2.3 Definicija

Skup A je prebrojivo beskonačan ako postoji jedan na jedan korespondencija između skupa A i skupa pozitivnih celih brojeva $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Skup je prebrojiv ako je konačan ili prebrojivo beskonačan.

2.4 Teorema

(a) Neka su A i B disjunktni konačni skupovi. Tada je skup $A \cup B$ konačan. Ako skup A ima kardinalnost n, i skup B ima kardinalnost m, tada skup $A \cup B$ ima kardinalnost $m + n$.

(b) Neka su A i B disjunktni, prebrojivo beskonačni skupovi. Tada je skup $A \cup B$ prebrojivo beskonačan.

(c) Neka su A i B disjunktni, prebrojivi skupovi. Tada je skup $A \cup B$ prebrojiv.

2.5 Dokaz

(a) Pošto su A i B konačni skupovi, postoje jedan na jedan korespondencije $\phi_1 : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$ i $\phi_2 : \{1, 2, 3, \ldots, m\} \to B$ za cele brojeve n i m. Definišemo korespondenciju $\phi : \{1, 2, 3, \ldots, m+n\} \to A \cup B$ sa $\phi(k) = \phi_1(k)$ za $1 \leq k \leq n$ i $\phi(n+i) = \phi_2(i)$ za $1 \leq i \leq m$. Funkcija ϕ predstavlja jedan na jedan korespondenciju između skupa $\{1, 2, 3, \ldots, m+n\}$ i skupa $A \cup B$.

(b) Pošto su skupovi A i B prebrojivo beskonačni, postoje jedan na jedan korespondencije $\phi_1 : \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\} \to A$ i $\phi_2 : \{1, 2, 3, \ldots, m, \ldots\} \to B$. Definišemo korespondenciju $\phi : \{1, 2, 3, \ldots\} \to A \cup B$ sa $\phi(n) = \phi_1((n+1)/2)$, ako je n neparan broj, i $\phi(n) = \phi_2(n/2)$, ako je n paran broj. Funkcija ϕ predstavlja jedan na jedan korespondenciju između skupa $\{1, 2, 3, \ldots\}$ i skupa $A \cup B$.

(c) Neka su A i B disjunktni, prebrojivi skupovi. Tada je jedini slučaj koji nije pokriven stavovima (a) i (b), onaj u kome je ili skup A ili skup B konačan, dok je drugi prebrojivo beskonačan. Pretpostavimo da je skup A konačan. Tada postoji jedan na jedan korespondencija $\phi_1 : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to A$, i pošto je skup B beskonačno prebrojiv, postoji funkcija $\phi_2 : \{1, 2, 3, \ldots, m, \ldots\} \to B$. Definišemo funkciju $\phi : \{1, 2, 3, \ldots\} \to A \cup B$ sa $\phi(k) = \phi_1(k)$ za $1 \leq k \leq n$ i $\phi(k) = \phi_2(k-n)$ za $k > n$. Funkcija ϕ predstavlja jedan na jedan korespondenciju između skupa $\{1, 2, 3, \ldots\}$ i skupa $A \cup B$.

3 Prebrojavanja

Recimo da je S skup. Ako ima tacno n razlicitih elemenata u S gde je n nenegativan ceo broj, onda kazemo da je S **konacan** skup i da je broj n kardinalnost skupa S. Kardinalnost skupa S bi se u ovom primeru obelezavalo kao $|S|$

Primer 1

Ako je A = {1, 2, 3, 4, 5} onda je $|A| = 5$

Def. 1 Za konacne skupove A i B kazemo da imaju istu kardinalnost ako i samo ako postoji bijekcija $f : A \to B$. Kada A i B imaju istu kardinalnost to zapisujemo kao $|A| = |B|$

Za beskonacne skupove definicija kardinalnosti se ogleda u relativnoj razlici velicine dva skupa, umesto da se gleda tacna velicina jednog odredjenog skupa.

Takodje mozemo definisati sta znaci kada jedan skup ima manju kardinalnost od drugog skupa.

Def. 2 Ako $f : A \to B$ predstavlja injektivno preslikavanje, kardinalnost A je manja ili iste kardinalnosti kao B i pisemo $|A| \leq |B|$.

Postoje dve vrste beskonacnih skupova, takvi da im je kardinalnost ista kao i kardinalnost skupa prirodnih brojeva i takvi koji su razlicite kardinalnosti

Def. 3 Skup takav da je konacan ili ima istu kardinalnost kao skup pozitivnih celih brojeva se naziva **prebrojivim.** Skup koji nije prebrojiv je neprebrojiv. Kada je beskonacan skup S prebrojiv, tada mu kardinalnost oznacavamo kao $\aleph_0$ (Alef nula). Skup $|S| = \aleph_0$ ima kardinalnost "alef nula".

Primer 2

Pokazacemo da je skup svih neparnih celih brojeva prebrojiv.
Posmatrajmo funkciju $f : N \to Z^+$:

$$f(n) = 2n - 1$$

Moramo dokazati da je funkcija bijektivna.

Dokaz. Da dokazemo da je funkcija f injektivna pretpostavimo da je $f(n) = f(m)$. Onda je $2n - 1 = 2m - 1$, odnosno $n = m$. Da bismo dokazali da je surjektivna pretpostavimo da je t neparan pozitivan ceo broj. Onda je t za 1 manji od parnog intedzera 2k, gde je k prirodan broj. Time je $t = 2k-1 = f(k)$.

Drugim recima, beskonacan skup je brojiv ako i samo ako je moguce navesti elemente skupa kao neki niz gde su indeksi prirodni brojevi. Razlog ovoga je cinjenica da se funkcija $f : N \to S$ moze izraziti kao niz $a_1, a_2, ..., a_n$ gde su $a_1 = f(1), a_2 = f(2), ..., a_n = f(n), ...$.

4 Princip proizvoda

Pretpostavimo da je dat niz događaja:

$$E_1, E_2, E_3, \ldots, E_m,$$

gde se događaj E_1 može odigrati na n_1 načina, i da se, ako su se događaji $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_{k-1}$ odigrali, događaj E_k može odigrati na n_k načina, za $1 \leq k \leq m$.

Tada postoji tačno

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_m$$

načina na koji se ceo niz događaja može odigrati.

4.1 Primer 1

Koliko ima funkcija "jedan na jedan" sa domenom u skupu S koji ima n elemenata i kodomenom u skupu P koji ima m elemenata?

Ako je $n > m$, tada nema funkcija jedan na jedan, pa pretpostavimo da važi $n \leq m$. Takođe, pretpostavimo da su elementi domena obeleženi sa $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Ima m mogućnosti za preslikavanje elementa a_1. Kada se odredi slika elementa a_1, ima još $m-1$ mogućnosti za preslikavanje elementa a_2, budući da se on ne može preslikati u isti element kao a_1. Prema tome, ima $m-2$ načina za preslikavanje elementa a_3, $m-3$ načina za preslikavanje elementa a_4, i tako dalje.

Iz ove pravilnosti, vidi se da ima $m-i+1$ načina za preslikavanje elementa a_i. Stoga, prema pravilu proizvoda, ima

$$m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times (m-n+1)$$

načina za preslikavanje svih elemenata skupa S u elemente skupa P, pri čemu se nijedna dva elementa skupa S ne preslikavaju u isti element skupa P. Dakle, ima tačno

$$m \times (m-1) \times (m-2) \times \cdots \times (m-n+1)$$

funkcija jedan na jedan iz skupa S na skup P.

4.2 Primer 2

Niska bitova je niz simbola od kojih svi mogu imati vrednosti 1 ili 0. Koliko ima niski bitova dužine 5? Koliko ima niski bitova dužine k?

Budući da svaki simbol mora biti ili 1 ili 0, za svaki simbol u niski postoje dva izbora. Prema tome, ima

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

niski dužine 5. Po istom principu, postoji 2^k niski bitova dužine k.

5 Princip zbira

Neka su $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_m$ disjunktni skupovi (tj. $S_i \cap S_j = \emptyset$ za svako $i \neq j$), i neka svaki S_i sadrži n_i elemenata. Broj elemenata koji se mogu izabrati iz S_1 ili S_2 ili S_3 ili ... ili S_m jednak je $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Teorija skupova:

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots \cup S_m| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_m|$$

gde je $|S|$ broj elemenata u skupu S.

5.1 Primer 1

Koliko ima celih brojeva između 0 i 1000 koji na samo jednoj poziciji imaju cifru 6?

Neka je skup S skup celih brojeva između 0 i 1000 sa svojstvom da im je cifra 6 samo na jednoj poziciji. Neka je S_1 podskup skupa S, pri čemu S_1 sadrži samo jednocifrene brojeve čija je cifra 6; neka je S_2 podskup skupa S, koji sadrži samo dvocifrene brojeve, i neka je S_3 podskup skupa S, koji sadrži samo trocifrene brojeve sa ovim svojstvom.

Skup S_1 ima samo jedan element i to je broj 6.

U skupu S_2, svaki broj čija je samo jedna cifra 6 ili ima 6 kao prvu cifru, ili kao drugu cifru. Ako je druga cifra 6, ima 8 mogućnosti (jer prva cifra ne može biti 0 ili 6). Ako je prva cifra 6, ima 9 mogućnosti za drugu cifru. Prema tome, S_2 ima $8 + 9 = 17$ elemenata.

Element skupa S_3 ima cifru 6 na prvoj, drugoj ili trećoj poziciji. Ako je 6 prva cifra, ima 9 mogućnosti za drugu cifru i 9 mogućnosti za treću cifru, što daje $9 \times 9 = 81$ broj. Ako je 6 druga cifra, ima 9 mogućnosti za treću cifru i 8 mogućnosti za prvu cifru, što daje $9 \times 8 = 72$ broja. Slično, u S_3 postoji 72 broja kod kojih je 6 treća cifra.

Dakle, S_3 ukupno ima $81 + 72 + 72 = 225$ elemenata.

Kako važi da je $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, to znači da skup S ima ukupno $1+17+225 = 243$ elemenata.

6 Princip uključenja - isključenja

Do ovog trenutka smo, prilikom primene pravila zbira, nailazili samo na disjunktne skupove. Pretpostavimo da skupovi S i T nisu disjunktni i želimo da nađemo $|S \cup T|$. Kada broj elemenata skupa S saberemo sa brojem elemenata u skupu T, dva puta računamo elemente koji su u $S \cap T$. Stoga moramo oduzeti broj elemenata skupa $S \cap T$. Iz ovoga proizlazi sledeća teorema.

6.1 Teorema

Neka su S i T skupovi. Broj elemenata koji se mogu izabrati iz S ili T jednak je:

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

Drugim rečima,

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

6.2 Dokaz

Skup $S \cup T$ može se zapisati kao:

$$S \cup T = (S - T) \cup (T - S) \cup (S \cap T),$$

gde su $S - T$, $T - S$, i $S \cap T$ u parovima disjunktni. Prema tome, važi:

$$|S \cup T| = |S - T| + |T - S| + |S \cap T|.$$

Takođe, imamo da je $S = (S - T) \cup (S \cap T)$ i $T = (T - S) \cup (S \cap T)$, pa je:

$$|S| = |S - T| + |S \cap T|$$

i

$$|T| = |T - S| + |S \cap T|.$$

Prema tome,

$$|S| + |T| = |S - T| + |S \cap T| + |T - S| + |S \cap T| = |S - T| + |T - S| + 2|S \cap T|.$$

Oduzimanjem $|S \cap T|$ dobijamo:

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|.$$

6.3 Primer

Koliko ima načina da se celi brojevi $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ poređaju tako da je prvi broj veći od 1, a poslednji manji od 7?

Neka je U skup svih mogućih rasporeda ovih cifara, a neka je S skup svih rasporeda pomenutih celih brojeva za koje važi da je prvi broj veći od 1, a poslednji broj manji od 7. Da bi se utvrdio $|U|$, uočavamo da postoji deset načina da izaberemo prvi broj, devet načina da izaberemo drugi broj, osam načina da izaberemo treći broj, itd., dok za deveti broj imamo dva načina, a za deseti jedan način. Prema tome, primenom pravila proizvoda, ima $10! = 3628800$ načina da se izabere mogući raspored celih brojeva, te je $|U| = 3628800$.

Kao i u prvom primeru, za prebrojavanje skupa S koristićemo "zaobilazni put", tako što ćemo pronaći broj rasporeda celih brojeva koji nisu u S i taj broj ćemo oduzeti od $|U|$. Neka je A skup svih rasporeda kojima je prvi broj manji ili jednak 1. Brojanjem elemenata u A, nalazimo da za prvi broj ima dva izbora, konkretno 0 i 1. Za drugi broj ima devet mogućnosti, za treći osam, i tako dalje, dok za deveti broj postoje dva izbora, a za deseti jedan. Odnosno, A ima $2 \times 9! = 725760$ elemenata.

Neka je B skup svih rasporeda kojima je poslednji broj veći ili jednak sa 7. Prebrojavajući elemente u B, nalazimo da za poslednji broj ima tri mogućnosti. Koristeći isti postupak kao i za A, otkrivamo da ima $9!$ načina da se izaberu ostali brojevi. Konačno, $|B| = 3 \times 9! = 1088640$.

Skup $A \cap B$ sastoji se od svih rasporeda celih brojeva kojima je prva cifra manja ili jednaka 1, a druga veća ili jednaka 7. Prebrojavanjem elemenata u $A \cap B$, nalazimo da postoje dve mogućnosti za prvu cifru i tri mogućnosti za poslednju cifru. Koristeći raniji postupak, dobijamo da se ostalih osam cifara može izabrati na $8!$ načina.

$$|A \cap B| = 3 \times 2 \times 8! = 241920$$

i

$$|A \cup B| = 725760 + 1088640 - 241920 = 1572480.$$

Skup rasporeda brojeva u kojima je prvi broj veći od 1, a poslednji broj manji od 7 predstavlja skup $(A \cup B)'$, a takvih rasporeda ima:

$$|U| - |(A \cup B)| = 3628800 - 1572480 = 2056320.$$

7 Dirihleov princip

Pretpostavićemo da je jato golubova doletjelo u golubarnik. U originalnoj verziji Dirihleov princip kaže da ako ima više golubova nego kućica u golubarniku, tada će se bar u jednoj kućici naći bar dva goluba.

7.1 Teorema

Ako je $n + 1$ ili više objekata smješteno u n kutija, tada se bar u jednoj kutiji nalaze bar dva objekta.

7.2 Dokaz

Pretpostavimo da svaka kutija sadrži najviše jedan objekat. Tada je ukupan broj objekata najviše n, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da ima bar $n + 1$ objekata.

7.3 Primer

Nekoliko direktnih primjera Dirikleovog principa:

(a) U svakom skupu od 13 ili više osoba, postoje bar dvije koje su rođene istog mjeseca.

(b) U svakom skupu od 367 ili više osoba, postoje bar dvije koje su rođene istog datuma.

(c) U svakom skupu od milion osoba, postoje bar dvije koje imaju isti broj dlaka na glavi.

7.4 Teorema

Uopšteni Dirihleov princip. Ako je m objekata smješteno u n kutija i $m > n * r$, tada se bar u jednoj kutiji nalazi bar $r + 1$ objekat.

7.5 Primer

(a) Koliko najmanje karata treba izvući iz standardnog špila sa 52 karte da bi se među izvučenim kartama sigurno nalazile četiri sa istim znakom?

(b) Koliko najmanje karata treba izvući da bi se našle bar tri sa znakom srca?

(c) Dokazati da u svakom skupu od šest osoba postoje tri osobe tako da se one uzajamno poznaju ili se uzajamno ne poznaju.

(a) Možemo da pretpostavimo da postoje četiri kutije i, kako se karte izvlače, tako se stavljaju u kutiju rezervisanu za odgovarajući znak. Iz opšteg Dirihleovog principa, vidi se da je dovoljno izvući bar 13 $(= 4 \times 3 + 1)$ karata da bi bile izvučene bar tri istog znaka. Ovo je i najmanji traženi broj, jer je moguće da se među 12 izvučenih karata nađu po tri karte od svakog znaka.

(b) U ovom slučaju se koristi uopšteni Dirihleov princip, jer želimo da se uvjerimo da postoje tri karte određenog znaka, a ne tri karte nekog znaka! U najgorem slučaju moguće je izvući sve pikove, sve trefove i sve karoe, što čini 39 karata, prije nego što se izvuče makar i jedno srce. Sledeće tri karte će da imaju znak srca, pa onda $39 + 3 = 42$ najmanji broj karata koje treba izvući da bi se došlo do tri srca.

(c) Neka je a proizvoljna osoba iz nekog skupa i smjestimo preostalih pet osoba u dvije prostorije: prva prostorija sadrži osobe koje poznaju , a druga prostorija sadrži osobe koje ne poznaju . Pošto je $5 > 2 \times 2$, jedna od ovih prostorija sadrži bar tri osobe. Možemo da pretpostavimo da 1. prostorija sadrži osobe i b, c i d(a možda i još neke). Ako se bilo koje dvije od osoba b, c i d poznaju, recimo b i c, tada je a, b, c podskup od tri osobe koje se uzajamno poznaju, pa ovaj podskup takođe zadovoljava uslove tvrđenja. U slučaju da 2. prostorija sadrži tri ili više osoba, sličnim razmatranjem se dolazi do istog zaključka.