Rekurentne relacije

Definicija rekurentnih relacija i generisanje rekurentnih relacija

Rekurentne relacije predstavljaju matematičke izraze kojima se definišu članovi niza ili sekvence na osnovu prethodnih članova. U suštini, rekurentna relacija omogućava računanje novih članova niza koristeći već poznate vrijednosti prethodnih članova. Ovaj pristup je izuzetno koristan u mnogim granama matematike, računarskim naukama, statistici i analizi algoritama. Razumijevanje rekurentnih relacija omogućava efikasno rješavanje problema koji uključuju procese koji se ponavljaju ili koji zavise od prethodnih stanja.

Osnovne karakteristike rekurentnih relacija

Rekurentne relacije se koriste za modeliranje sekvenci čiji članovi zavise od prethodnih članova. Svaka rekurentna relacija može se izraziti u opštem obliku:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}),$$

gdje je an n-ti član sekvence, dok funkcija f zavisi od prethodnih k članova niza. Ove relacije mogu biti linearne ili nelinearne, homogeno ili nehomogeno definisane, zavisno od toga koliko članova prethodne sekvence ulazi u formulu za računanje narednog člana.

Najjednostavnija forma rekurentnih relacija je linearna rekurencija prvog reda, koja može biti predstavljena kao:

$$a_n = c \cdot a_{n-1} + b,$$

gdje je c konstantna vrijednost, a b je promjenljiva ili konstanta koja zavisi od konkretne primjene. Ova vrsta rekurentnih relacija često se koristi u modelima rasta i smanjenja, kao što su finansijski modeli, populacijski modeli i sl.

Jedan od najpoznatijih primjera rekurentnih relacija je **Fibonacci niz**, koji je definisan kao:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{za} \quad n \geq 2.$$

Ova relacija opisuje niz brojeva u kojem je svaki naredni broj zbir prethodna dva broja. Fibonacci niz se pojavljuje u mnogim prirodnim i matematičkim fenomenima, poput broja latica na cvijetu, rasporeda listova na stablu, pa čak i u kriptografiji i teoriji algoritama.

Tipovi rekurentnih relacija

Rekurentne relacije mogu se klasifikovati prema različitim kriterijumima. Prema broju prethodnih članova od kojih zavisi računanje novog člana, one mogu biti:

1. **Rekurentne relacije prvog reda** – Ove relacije zavise samo od jednog prethodnog člana, kao što je to slučaj u linearnoj rekurenciji prvog reda:

   $$a_n = c \cdot a_{n-1} + b.$$

   Ovaj tip relacija je jednostavan za analizu i rješavanje, jer se an može direktno izraziti kroz prethodni član.

2. **Rekurentne relacije višeg reda** – Ove relacije zavise od više prethodnih članova. Na primjer, rekurentna relacija trećeg reda može biti:

   $$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + c_3 \cdot a_{n-3}.$$

   Ovaj tip relacija je složeniji i zahtijeva korišćenje metoda za rješavanje višerednih rekurencija.

3. **Homogene i nehomogene rekurentne relacije** – Homogene rekurentne relacije nemaju slobodne članove, dok nehomogene sadrže slobodne članove koji nisu u zavisnosti od prethodnih članova niza. Na primjer:
   - Homogena rekurentna relacija:

     $$a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$$

   - Nehomogena rekurentna relacija:

     $$a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} + 3$$

Generisanje rekurentnih relacija

Generisanje rekurentnih relacija podrazumijeva pronalaženje načina na koji se sekvenca ili niz može formulisati kroz rekurentnu vezu. Ovo je posebno korisno u situacijama kada se sekvenca ponaša na način koji nije lako predstaviti putem eksplicitne formule, ali se može opisati kroz odnos između članova niza.

Jedan od osnovnih načina za generisanje rekurentnih relacija je korišćenje poznatih karakteristika sekvence. Na primjer, u problemima koji se bave modelovanjem populacije, promjene u vrijednostima zavise od prethodnih stanja, i tako možemo generisati rekurentnu relaciju. Na primjer, u modelu populacije gdje broj jedinki u narednom periodu zavisi od broja jedinki u prethodnom periodu, možemo definisati rekurentnu relaciju.

U nekim slučajevima, generisanje rekurentne relacije može biti zasnovano na posmatranju matematičkih osobina sekvence, kao što su rast ili smanjenje, ili čak zavisnost od složenijih faktora. Na primjer, u analizi algoritama, generisanje rekurentne relacije se koristi za analizu složenosti, posebno u rekurzivnim algoritmima kao što su algoritmi za sortiranje ili pretragu.

Za generisanje rekurentnih relacija koristi se nekoliko metoda, od kojih su najpoznatije:

Evo nekoliko metoda koje se koriste za generisanje rekurentnih relacija:

1. **Analiza algoritama** - U računarstvu, često se koriste rekurentne relacije za određivanje vremena izvršenja rekurzivnih algoritama. Na primjer, algoritam *merge sort* ima vremensku složenost koju možemo opisati pomoću rekurentne relacije:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n,$$

   gdje je T(n) vrijeme izvršavanja za unos veličine n, a svaki korak podjele ima složenost od n operacija.

2. **Matematička indukcijom** - Indukcija može pomoći u formiranju i provjeri rekurentnih relacija. Ova metoda zahtijeva da se pokaže da relacija važi za osnovni slučaj (obično n=0 ili n=1), a zatim pretpostavlja da važi za neki n=k kako bi se dokazalo da važi i za n=k+1.
3. **Formulacija iz kombinatorike** - U kombinatorici, rekurentne relacije se koriste za opisivanje brojnih problema, kao što su načini raspoređivanja objekata ili rješavanje problema prebrojavanja. Na primjer, broj načina raspoređivanja n nerazličitih predmeta u k grupa može se izraziti rekurentnom relacijom.
4. **Transformacijama relacija** - Neke složene rekurentne relacije mogu se pojednostaviti primjenom algebarskih ili transformacionih tehnika kao što su Z-transformacija, koje olakšavaju analizu i rješavanje ovih relacija.

Primeri

1. Fibonacci niz

Fibonacci niz je jedan od najpoznatijih primera rekurentne relacije:

$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$

Gde su početni uslovi:

$F(0) = 0, F(1) = 1$

Ovaj niz izgleda ovako: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

2. Suma prvih n brojeva

Ova rekurentna relacija daje sumu prvih n brojeva:

$S(n) = S(n - 1) + n$

Gde je početni uslov:

$S(0) = 0$

Niz vrednosti je: 0, 1, 3, 6, 10, 15, ...

3. Sila rastućeg faktora

Rekurentna relacija koja definiše faktorijel:

$n! = n\times(n - 1)!$

Gde je početni uslov:

$0! = 1$

Primer: 5! = 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 120

4. Rekurentna relacija za geometrijski niz

Ako imamo geometrijski niz sa prvim članom a_0 i zajedničkim faktorom r, rekurentna relacija može biti:

$a_n = r \cdot a_{n-1}$

Gde je početni uslov:

$a_0 = 1$

Na primer, ako je r=2, niz bi izgledao: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

5. Rekurentna relacija za harmonijski niz

Rekurentna relacija za harmonijske brojeve može biti definisana kao:

$H(n) = H(n - 1) + 1/n$

Gde je početni uslov:

$H(1) = 1$

Ovaj niz je: 1, 1.5, 1.8333, 2.0833, 2.2833, ...

6. Rekurentna relacija za brojanje permutacija sa ponavljanjem

Ako želimo da izračunamo broj permutacija sa ponavljanjem, možemo koristiti sledeću rekurentnu relaciju:

$P(n, k) = P(n - 1, k - 1) + P(n - 1, k)$

Ova relacija je slična Pascalovom trouglu i koristi se za brojanje kombinacija.

7. Rekurentna relacija za brojanje načina rasporeda objekata

Primer za brojanje načina na koji se n objekata može rasporediti u k pozicija je:

$C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k)$

Ovo je Pascalov identitet, koji se koristi za izračunavanje binomnih koeficijenata.

8. Rekurentna relacija za brojanje stanja u problemu parčanja

Ako želimo da izračunamo broj načina za raspoređivanje n objekata u k grupa, koristi se rekurentna relacija:

$S(n, k) = k \cdot S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1)$

Gde je $S(n, k)$ broj načina da se nnn objekata rasporedi u k grupa.

Homogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Linearne rekurentna relacija reda k sa konstantnim koeficijentima je rekurentna relacija oblika:

$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + ... + c_k \cdot a_{n-k} + f(n)$ pri cemu su $c_1, ..., c_k \in R$ odnosno to su konstantne vrijednosti. Ako je $c_k \neq 0$ onda je relacija reda k i ako bi f(n)=0 za svako $n \in N$ tada je rekurentna relacija homogena.
Neki primeri linearnih rekurentnih relacija sa konstantnim koeficijentima su:

a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ homogena

b) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 4^n$ nehomogena

Dakle homogena linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima je oblika:
$a_n = c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + ... + c_k \cdot a_{n-k}$
i rjesava se smjenom:
$a_n = x^n, za\, svako\, n \geq 0$
Pod pretpostavkom da postoji broj $x \neq 0$ sa osobinom da je rjesenje posmatrane rekurente relacije u ovom obliku.

Zamjenom u rekurentnu relaciju, dobija se:
$x^n = c_1 x^{n-1} + ... + c_k x^{n-k} \Leftrightarrow x^n = x^{n-k}(c_1 x^{k-1} + ... + c_k) \quad - podijelimo\, ovo\, sa\, x^{n-k}\, dobicemo$

$$\Leftrightarrow x^k = c_1 x^{k-1} + ... + c_k$$

$$\Leftrightarrow x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - ... - c_k = 0$$

i za ovu jednacinu kazemo da je karakteristicna jednacina relacije.

Teorema:
Neka su $x_1, ..., x_k$ rjesenja karaktericticne jednacine sa osobinom:

$\forall i, j \in \{1, ..., k\}\ i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$,

onda vazi sljedece:

(i) za sve $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \ldots + \alpha_k x_k^n$$

je rjesenje posmatrane rekurentne relacije.

(ii) konstante $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ su jedinstveno odredjene pocetnim uslovima:

$$a(0) = a_0, \ldots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

Dokaz:

(i) Ako posmatrani izraz zamijenimo u rekurentnu relaciju, dobijamo sljedeci niz ekvivalentnih jednakosti:

$$a_n = \alpha_1 x_1^n + \ldots + \alpha_k x_k^n$$

$$c_1 \cdot a_{n-1} + c_2 \cdot a_{n-2} + \ldots + c_k \cdot a_{n-k} =$$
$$= c_1(\alpha_1 x_1^{n-1} + \ldots + \alpha_k x_k^{n-1}) + c_2(\alpha_1 x_1^{n-2} + \ldots + \alpha_k x_k^{n-2}) + \ldots + c_k(\alpha_1 x_1^{n-k} + \ldots + \alpha_k x_k^{n-k}) =$$
$$= \alpha_1 x_1^{n-k}(c_1 x_1^{k-1} + \ldots + c_k) + \ldots + \alpha_k x_k^{n-k}(c_1 x_k^{k-1} + \ldots + c_k)$$

Gdje su $x_1, \ldots, x_k$ korijeni karakteristicne jednacije

$x_i^k = c_1 x_i^{k-1} + c_2 x_i^{k-2} + \ldots + c_k$, $za\, svaki\ i = 1, 2, \ldots, k$ to znaci da je izraz u zagradama jednak nuli za svaki i $c_1 x_1^{n-k} \cdot 0 + c_2 x_i^{k-k} \cdot 0 + \ldots + c_k = 0$ cime je dokaz zavrsen.

(ii) Kako bi zadate početne vrednosti pripadale nizu opisanom datom rekurentnom relacijom, one moraju zadovoljavati rešenje rekurentne relacije koje je dato pod (i). Tako dobijamo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = a_0$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = a_1$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1 x_1^{k-1} + \alpha_2 x_2^{k-1} + \ldots + \alpha_k x_k^{k-1} = a_{k-1}$$

Determinanta datog sistema jednacina je Vandermondova determinanta:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \dots & & \dots & \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le k} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Odakle direktno slijedi da je posmatrani sistem linearnih jednacina odredjen i da ima jedinstveno rjesenje.

Teorema:
Ako karakteristicna jednacina

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ . \ . \ . \ - c_{k-1} x - c_k = 0$$

Ima korjene $x_1, \ . \ . \ . \ , \ x_l$ redom visestrukosti $k_1, \ . \ . \ . \ , k_l$, onda je:

(i) opste rjesenje posmatrane rekurentne relacije:

$$\begin{aligned} a(n) \ = \ & (\alpha_{11} + n\alpha_{12} + \ . \ . \ . \ + n^{k_1 - 1}\alpha_{1k1})x_1^n + \\ & + (\alpha_{21} + n\alpha_{22} + \ . \ . \ . \ + n^{k_2 - 1}\alpha_{2k2})x_2^n + \ \dots \\ & \dots + (\alpha_{l1} + n\alpha_{l2} + \ . \ . \ . \ + n^{k_l - 1}\alpha_{lkl})x_l^n \end{aligned}$$

(ii) konstante $\alpha_{11}, \ . \ . \ . \ , \alpha_{lkl}$ su jedinstveno odredjenje pocetnim uslovom.

Dokaz: Dokaz se izvodi na veoma slican naicn kao dokaz za jednostruke korijene.

Homogene linearne rekurentne relacije primjeri

Homogene linearne rekurentne relacije su relacije u kojima je svaki član rekurencije izraz samo u prethodnim članovima niza, bez dodatnih konstantnih ili varijabilnih članova. Ove relacije se često pojavljuju u matematici, algoritmima i računarstvu.

Evo nekoliko primjera homogenih linearnih rekurentnih relacija:

1. Fibonaccijev niz

Definicija:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

s početnim uslovima $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$.

Ova rekurentna relacija je linearna (jer su članovi linearno povezani) i homogena (nema dodatnih članova).

2. Geometrijska progresija

Ako niz a_n zadovoljava relaciju:

$$a_n = r * a_{n-1}$$

gdje je r konstanta, ova relacija opisuje geometrijsku progresiju. Na primjer, ako je $r = 2$, niz bi bio 1, 2, 4, 8, 16, ...

3. Rekurentna relacija drugog reda

Opšta forma homogenih linearnih rekurentnih relacija drugog reda je:

$$a_n = c_1 * a_{n-1} + c_2 * a_{n-2}$$

gdje su c1 i c2 konstante. Primjer:

$$a_n = 2 * a_{n-1} + 3 * a_{n-2}$$

s početnim uslovima, recimo, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$

4. Rekurentna relacija trećeg reda

Ova rekurentna relacija uključuje tri prethodna člana, na primjer:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

s početnim uslovima koji definišu prve vrijednosti, npr.,$a_0=1$,$a_1=2$,$a_3 = 1$

5. Opšti primjer

Homogene linearne rekurentne relacije k-tog reda imaju opšti oblik:

$$a_n = c_1 * a_{n-1} + c_2 * a_{n-2} + \dots c_k * a_{n-k}$$

gdje su c_1, c_2,..,c_k konstante

Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

(1.1) Posmatraćemo rekurentne relacije oblika:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n),$$

Gde su c_1, …, c_k, k ≥ 1, ck različit od nule, a f funkcija skupa N_0.

(1.2) Kada f(n) zamenimo nulom, dobićemo rekurentnu relaciju koju nazivamo odgovarajućom homogenom rekurentnom relacijom:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k},$$

Sledeće tvrđenje pokazuje da je, osim opšteg rešenja homogene jednačine, dovoljno naći jedno rešenje nehomogene jednačine kako bismo odredili rešenje polazne nehomogene rekurentne relacije.

Teorema 1
Ako je $a_n^{(p1)}$ partikularno rešenje nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada za svako rešenje an jednačine 1.1 postoji rešenje $a_n^{(h)}$ odgovarajuće homogene rekurentne relacije sa osobinom: $a_n^{(p1)} + a_n^{(h)} = a_n$, n ≥ 0

Dokaz: Neka je $a_n^{(p1)}$ dato partikularno rešenje jednačine 1.1. Tada za svako *n* koje pripada skupu N_0 važi (1.3) :

$$a_n^{(p_1)} = c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f(n).$$

Posmatrajmo sad proizvoljno rešenje $a_n^{(p)}$ jednačine 1. 2. Za njega važi:

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p)} + f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako od gore navedene relacije oduzmemo relaciju 1.3 dobićemo:

$$a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)} = c_1(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}),$$

Što znači da je rešenje rekurentne relacije 1.2 $a_n^{(p1)}$ - $a_n^{(p)}$, odnosno za svako rešenje nehomohene rekurentne relacije a_n postoji rešenje $a_h^{(n)}$ homogene jednačine tako da se $a_n^{(p)}$ može izraziti pomoću $a_n^{(p1)}$ i $a_n^{(h)}$ tj. koristeći obrazac $a_n^{(p1)} + a_n^{(h)} = a_n$.

Prеđašnje tvrđenje direktno indukuje jedan metod za određivanje opšteg rešenja nehomogene rekurentne relacije. Ako se na bilo koji način može odrediti partikularno rešenje, onda opšte rešrenje direktno sledi. Tvrđenje u nastavku daje metod za određivanje tog jednog partikularnog rešenja u slučaju kada nehomogeni deo ima jedan određen oblik. U ostalim slučajevima taj metod nije primenljiv.

Teorema 2
Neka je:

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0) s^n, \quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}.$$

Ako je *s* koren karakteristične jednačine višestrukosti *l* (ako nije koren onda je *l* = 0), onda postoji partikularno rešenje oblika:

$$a_n^{(p)} = n^l (c_m n^m + c_{n-1} n^{m-1} + \ldots + c_1 n + c_0) s^n.$$

Teorema 3
Ako su $a_n^{(p1)}$ i $a_n^{(p2)}$ redom rešenja nehomogenih rekurentnih relacija

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) \quad i \\ a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_2(n), \end{aligned}$$

Onda je $a_n^{(p1)} + a_n^{(p2)}$ rešenje nehomogene rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$

Dokaz:
Ako su $a_n^{(p1)}$ i $a_n^{(p2)}$ redom rešenja navedenih relacija, onda važi

$$\begin{aligned} a_n^{(p_1)} &= c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f_1(n) \text{ i} \\ a_n^{(p_2)} &= c_1 a_{n-1}^{(p_2)} + c_2 a_{n-2}^{(p_2)} + \ldots + c_k a_{n-k}^{(p_2)} + f_2(n). \end{aligned}$$

Sabiranjem tih jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)} &= c_1(a_{n-1}^{(p_2)} + a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-2}^{(p_1)} + a_{n-2}^{(p_2)}) + \ldots + \\ & \quad c_k(a_{n-k}^{(p_1)} + a_{n-k}^{(p_2)}) + f_1(n) + f_2(n), \end{aligned}$$

čime je direktno pokazano da je $a_n^{(p1)} + a_n^{(p2)}$ rešenje rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$

- Primeri i zadaci -

Primer 1.

Razmotrimo rekurentnu relaciju:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + n.$$

Rešenje:

1. Najpre rešavamo homogeni deo relacije:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} .$$

2. Karakteristična jednačina je:

$$X^2 - 3x + 2 = 0,$$

koja ima rešenja x1=1 i x2=2. Tako je opšte rešenje homogenog dela:

$$a_n(H) = A * 1^n + B * 2^n = A + B * 2^n .$$

3. Zatim tražimo partikularno rešenje. Pošto je $f(n)=n$, pretpostavićemo da je partikularno rešenje oblika

$$a_n(P) = Cn+D.$$

4. Zamenimo

$$a_n(P) = Cn+D$$

u relaciju i izjednačimo koeficijente kako bismo odredili C i D.

5. Ukupno rešenje je:

$$a_n = a_n(H) + a_n(P) = A + B*2^n + Cn + D.$$

Zadatak 1. Rešite rekurentnu relaciju:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 3^n.$$

Resenje.

1. Rešenje homogenog dela

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Karakteristična jednačina je:

$$X^2 - 2x + 1 = 0.$$

Ova kvadratna jednačina ima dvostruko rešenje x=1. Dakle, homogeno rešenje je oblika:

$$a_n(H) = (A + Bn) * 1^n = A + Bn.$$

2. Partikularno rešenje

Pošto je nehomogeni član $f(n)=3^n$, pretpostavljamo da je partikularno rešenje oblika:

$$a_n(P) = C * 3^n.$$

Ubacujemo u relaciju:

$$C * 3^n = 2C * 3^{n-1} - C * 3^{n-2} + 3^n.$$

Deljenjem obe strane sa 3^{n-2} dobijamo:

$$C * 9 = 2C * 3 - C + 9.$$

Sada sređujemo:

$$9C - 6C + C = 9.$$

Odakle je:

$$4C = 9 \Rightarrow C = 9/4.$$

Dakle, partikularno rešenje je:

$$a_n(P) = 9/4 * 3^n.$$

3. Opšte rešenje

Opšte rešenje je zbir homogenog i partikularnog rešenja:

$$a_n = a_n(H) + a_n(P) = A + Bn + 9/4 * 3^n.$$