Rekurentne relacije nizova

Uvod:

Rekurentna relacija je jednačina u kojoj se n-ti član niza definiše preko svojih prethodnika. Ako su dati članovi niza a_0, ..., a_{k-1}, onda se na osnovu rekurentne relacije na jedinstven način mogu odrediti članovi niza a_k, a_{k+1}, ...

Ponovićemo prvo dobro poznate rekurentne relacije koje opisuju aritmetičke nizove, geometrijske nizove i faktorijel.

Primer: Napisati rekurentne relacije koje opisuju sledeće nizove:

1. Aritmetički niz čiji prvi član je a, a razlika je d

$$a_0 = a$$
$$a_n = a_{n-1} + d\,, \qquad n \geq 1$$

2. Geometrijski niz čiji prvi član je a, a količnik je 1

$$a_0 = b$$
$$a_n = q \cdot a_{n-1}\,, \qquad n \geq 1$$

3. Niz faktorijela $\{n!\}_{n \in N_0}$

$$a_0 = 1$$
$$a_n = n \cdot a_{n-1}\,, \qquad n \geq 1$$

Primer aritmetičkog niza:

Pretpostavimo da je $a_n = a_{n-1} + 5$ to jest $a_1 = 3$ i $d = 5$.

Članovi ovog niza su:

- $a_1 = 3$
- $a_2 = a_1 + 5 = 3 + 5 = 8$
- $a_3 = a_2 + 5 = 8 + 5 = 13$
- $a_4 = a_3 + 5 = 13 + 5 = 18$

i tako dalje.

Primer geometrijskog niza:

Pretpostavimo da je $b_n = b_{n-1} \cdot \frac{1}{2}$ to jest $b_1 = 12$ i $q = \frac{1}{2}$.

Članovi ovog niza su:

- $b_1 = 12$
- $b_2 = b_1 \cdot \frac{1}{2} = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$
- $b_3 = b_2 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$
- $b_4 = b_3 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2} = \cdot \frac{3}{2}$

i tako dalje.

Homogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Definicija:

Homogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima su rekurentne relacije u kojima se svaki član niza izražava kao linearna kombinacija prethodnih članova, pri čemu su koeficijenti konstante. Takve relacije se često koriste u matematici, računarstvu, teoriji brojeva, ekonomiji, i drugim disciplinama za modelovanje sekvenci podataka ili događaja.

Opšti oblik homogene linearne rekurentne relacije reda k sa konstantnim koeficijentima je:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

gde je:

a_n - član niza koji želimo da pronađemo

$c_1, c_2, \ldots$ c_k – konstantni koeficijenti rekurntne relacije

k – red rekurentne relacije

Na primer poznata Fibonačijeva sekvenca je rekurentna relacija drugog reda.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Za pronalaženje opšteg rešenja homogene linearne rekurentne relacije, koristi se karakteristična jednačina:

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

Ako su svi koreni r1, r2, …, rk karakteristične jednačine različiti, opšte rešenje rekurentne relacije ima oblik:

$$a_n = A_1r_1^n + A_2r_2^n + \cdots + A_kr_k^n$$

Gde su A_1, A_2 … A_k koeficijenti koji se određuju na osnovu početnih uslova.

Ako postoji višestruki koren, na primer r reda mmm, tada se rešenje za taj deo menja u obliku:

$$(B_0 + B_1n + B_2n^2 + \cdots + B_{m-1}n^{m-1})r^n$$

gde su B0,B1,…,Bm konstante.

Ovaj pristup omogućava pronalaženje zatvorenog oblika rešenja rekurentne relacije, što olakšava izračunavanje članova niza bez eksplicitnog vraćanja na rekurzivni oblik.

Nelinearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

Rekurentna relacija je relacija koje definiše sledeći član niza na osnovu jednog ili više prethodnih članova.

Nelinearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima su one u kojima je sledeći član u nizu funkcija prethodnih članova, ali na nelinearan način (uključuju nelinearne funkcije poput kvadriranja, množenja, eksponencijalnih funkcija), dok su svi koeficijenti konstantni oni ne ne zavise od indeksa n.

Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima su rekurentne relacije oblika:

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n)$$

Gde su c_1 , c_2, ... c_k su konstante $k \geq 1$ i $k \neq 0$ a f je funkcija koja zavisi od n. Kada bi funkciju f(n) zamenili sa nulom dobijamo homogenu rekurentnu relaciju.

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$$

Primeri:

Kvadratna rekurentna relacija – predstavlja relaciju gde je sledeći član u nizu kvadrat prethodnog člana, plus konstanta 2.

$$a_n = {a_{n-1}}^2 + 2$$

Množenje prethodnih članova - predstavlja relaciju koja zavisi od proizvoda dva prethodna člana i dodatka od 1.

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad + 1$$

Fibonacijeva nelinearna varijanta - predstavlja relaciju gde sledeći član u nizu zbir dva prethodna člana i njihov proizvod.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad + (a_{n-1} \cdot a_{n-2})$$

Rekurentna relacija sa eksponencijalnim rastom – predatavlja relaciju gde sledeći član zavisi od kvadrata prethodnog člana, skaliranog sa konstantom 3 i dodatkom od 5.

$$a_n = 3 \cdot {a_{n-1}}^2 + 5$$