DISKRETNA MATEMATIKA- Klasicni kombinatorni objekti

SADRZAJ

- Kako se mogu klasifikovati uredjeni izbori elemenata
- M-permutacije skupa
- Permutacije skupa
- M-permutacije multiskupa
- Permutacije multiskupa

Uredjeni izbori elemenata

- Ponekad je poredak u kojem se elementi nalaze **bitan**, a ponekad **nije**.

- Na primer, rec *STOP* je razlicita od reci *POTS*, bez obzira sto su obe reci formirane od slova iz skupa *{O, P, S, T }*.

- S druge strane, zbir brojeva 1 + 2 + 3 je isti kao zbir 2 + 3 + 1, bez obzira sto je redosled ovih brojeva promenjen.

Uredjeni izbori elemenata

- ***PRIMER*** Posmatrajmo skup *{A, B, C, D}*. Na koliko nacina mozemo da izaberemo dva slova?

a) *Ako je poredak **bitan i dozvoljeno je ponavljanje slova**, tada postoji **16** mogucih izbora:*

AA	***BA***	***CA***	***DA***
AB	***BB***	***CB***	***DB***
AC	***BC***	***CC***	***DC***
AD	***BD***	***CD***	***DD***

b) *Ako je poredak **bitan, a ponavljanje nije dozvoljeno**, tada postoji **12** mogucih izbora:*

	BA	***CA***	***DA***
AB		***CB***	***DB***
AC	***BC***		***DC***
AD	***BD***	***CD***	

Uredjeni izbori elemenata

- ***PRIMER*** Posmatrajmo skup *{A, B, C, D}*. Na koliko nacina mozemo da izaberemo dva slova?

c) *Ako poredak* ***nije bitan, a dozvoljeno je ponavljanje****, tada postoji* ***10*** *mogucnosti:*

AA			
AB	***BB***		
AC	***BC***	***CC***	
AD	***BD***	***CD***	***DD***

d) *Ako poredak* ***nije bitan, a nije dozvoljeno ni ponavljanje****, tada postoji samo* ***6*** *mogucnosti:*

AB		
AC	***BC***	
AD	***BD***	***CD***

UREDJENI IZBORI *BEZ I SA* PONAVLJANJEM

PRIMER Koliko postoji razlicitih reci sa 5 slova (koristeci nase pismo sa 30 slova I ukljucujuci i besmislene reci kao *kcndv*)?

Posto se svako od 5 slova moze nezavisno izabrati na 30 nacina, nije tesko videti da je odgovor $\mathbf{30^5}$. i, zaista, svaka rec sa 5 slova se moze posmatrati kao preslikavanje skupa $\{1, 2, . . . , 5\}$ u skup slova $\{a,b,c,. . . ,\check{z}\}$: za svako od 5 mesta u reci, sa rednim brojevima 1, 2, . . . , 5, preslikavanje odredjuje slovo na tom mestu.

Broj preslikavanja $f : N \rightarrow M$

Neka je N skup sa n elemenata (koji moze da bude i prazan, tj. n>0) i neka je M skup sa m elemenata, $m > 1$. Broj svih mogucih preslikavanja $f : N \rightarrow M$ jednak je m^n.

Broj preslikavanja $f : N \rightarrow M$

PRIMER Neka je $N = \{1, 2, 3\}$ i $M = \{a, b\}$. Napisati sva preslikavanja $f : N \rightarrow M$

$f1 = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$
$f2 = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$
$f3 = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$
$f4 = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$
$f5 = \{(1, b), (2, a), (3, a)\}$
$f6 = \{(1, b), (2, a), (3, b)\}$
$f7 = \{(1, b), (2, b), (3, a)\}$
$f8 = \{(1, b), (2, b), (3, b)\}$

Teorema

“Svaki skup X sa n elemenata ima tacno 2^n podskupova (n > 0)”.

DOKAZ Posmatrajmo proizvoljan podskup *A* skupa *X* i definisimo preslikavanje $f_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$. Za $x \in X$ odredjujemo:

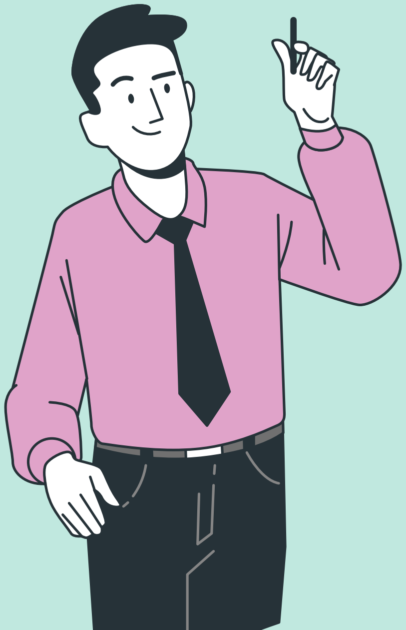
$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \in A \\ 0 & \text{ako } x \notin A. \end{cases}$$

Ovo preslikavanje se cesto srece u matematici i naziva se ***karakteristicna funkcija*** skupa *A*.
Razliciti skupovi *A* imaju razlicite funkcije *fA*, i obrnuto, svako preslikavanje $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ odredjuje skup $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ tako da je $f = f_A$.
Prema tome, broj podskupova *X* je isti kao broj svih preslikavanja $X \longrightarrow \{0, 1\}$,
a to je 2^n

PRIMER Neka je $X = \{a, b, c\}$. Pokazati da je $|\mathcal{P}(X)| = 2^3$.

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$\phi(\emptyset) = (0, 0, 0) \quad \phi(\{a, b\}) = (1, 1, 0)$$
$$\phi(\{a\}) = (1, 0, 0) \quad \phi(\{a, c\}) = (1, 0, 1)$$
$$\phi(\{b\}) = (0, 1, 0) \quad \phi(\{b, c\}) = (0, 1, 1)$$
$$\phi(\{c\}) = (0, 0, 1) \quad \phi(\{a, b, c\}) = (1, 1, 1)$$



Definicija

Varijacija bez ponavljanja klase m (ili m-permutacija) skupa X jeste uredena m-torka elemenata iz X cije sve komponente su medusobno razlicite.

PRIMER Ako je X = {1,2,3}, varijacije bez ponavljanja druge klase će biti:

12,13,21,23,31,32

TEOREMA

Neka je N skup sa n elemenata i neka je M skup sa m elemenata, n, m >= 0.
Broj svih injektivnih preslikavanja $f : N \to M$ jednak je

$$m \cdot (m - 1) \cdot . . . \cdot (m - n + 1).$$

DOKAZ

Dokaz cemo sprovesti indukcijom po n.

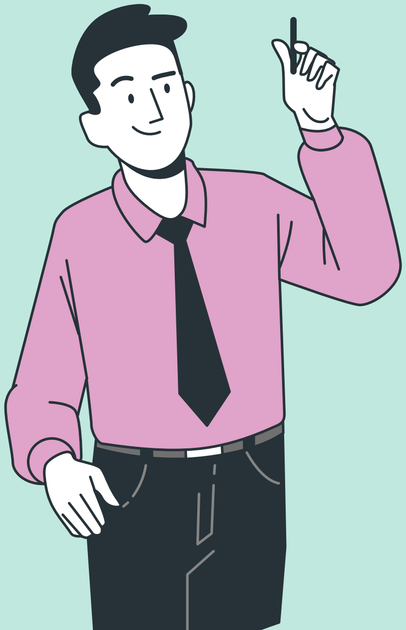
Prazno preslikavanje je injektivno, pa stoga za n=0 postoji tacno jedno injektivno preslikavanje, i ovo se slaze sa dogovorom da se vrednost praznog proizvoda definise kao 1.

Iz teoreme injektivnosti znamo da ne postoji injektivno preslikavanje za n > m, pa se ovo slaze sa teoremom.

Posmatrajmo sada skup **N sa n elemenata, n >= 1**, i skup **M sa m elemenata, m >= n**. Fiksirajmo element $a \in N$ i izaberimo proizvoljno vrednost $f(a) \in M$ na jedan od m mogucih nacina. Preostaje nam da izaberemo injektivno preslikavanje iz $N \setminus \{a\}$ u $M \setminus \{f(a)\}$.
Po induktivnoj hipotezi, postoji $(m - 1)(m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - n + 1)$ mogucnosti za ovaj izbor, pa stoga vidimo da **postoji ukupno $m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ injektivnih preslikavanja $f : N \to M$.**

Broj varijacija bez ponavljanja m–te klase od n elemenata se računa po formuli:

$$V(n, m) = n(n-1)\cdot \ldots \cdot(n-m+1) = n! / (n-m)!.$$



Znači, krenemo da množimo od n nadole , ali ne idemo do jedinice, već množimo samo m-njih.
Na primer :

$$V(12, 3) = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320,$$
$$V(10, 4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

```python
import itertools


1 usage
def raspored_sedenja(ucenici, r):
    # Generisanje varijacija bez ponavljanja
    varijacije = itertools.permutations(ucenici, r)

    # Prikaz svake od varijacija
    for raspored in varijacije:
        print(raspored)


if __name__ == '__main__':
    ucenici = ['Ana', 'Marko', 'Jelena', 'Petar']
    # Broj mesta za sedenje
    r = 3

    # Poziv funkcije
    raspored_sedenja(ucenici, r)
```

itertools je Pythonov modul koji pruža funkcije za efikasno generisanje i manipulaciju iteracijama, uključujući permutacije, kombinacije i kartizijske proizvode.

```
('Ana', 'Marko', 'Jelena')
('Ana', 'Marko', 'Petar')
('Ana', 'Jelena', 'Marko')
('Ana', 'Jelena', 'Petar')
('Ana', 'Petar', 'Marko')
('Ana', 'Petar', 'Jelena')
('Marko', 'Ana', 'Jelena')
('Marko', 'Ana', 'Petar')
('Marko', 'Jelena', 'Ana')
('Marko', 'Jelena', 'Petar')
('Marko', 'Petar', 'Ana')
('Marko', 'Petar', 'Jelena')
('Jelena', 'Ana', 'Marko')
('Jelena', 'Ana', 'Petar')
('Jelena', 'Marko', 'Ana')
('Jelena', 'Marko', 'Petar')
('Jelena', 'Petar', 'Ana')
('Jelena', 'Petar', 'Marko')
('Petar', 'Ana', 'Marko')
('Petar', 'Ana', 'Jelena')
('Petar', 'Marko', 'Ana')
('Petar', 'Marko', 'Jelena')
('Petar', 'Jelena', 'Ana')
('Petar', 'Jelena', 'Marko')

Process finished with exit code 0
```

Definicija

Varijacije sa ponavljanjem klase m skupa X jeste uredena m-torka ($x_1, . . . , x_m$) cija svaka komponenta pripada skupu X.

<u>*Kod varijacija sa ponavljanjem:</u>

vazan je redosled i
elementi se mogu ponavljati.

Broj varijacija sa ponavljanjem klase m, skupa X = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se izračunava po formuli:

$$\overline{V}(n, m) = n^m.$$

Računamo koliko ima mogućnosti ako smo igrali 5 tiketa sa sportskom prognozom gde konačan ishod može biti pobeda domaćina, nerešeno i pobeda gostiju?
Ovde je n = 3 (tri mogućnosti) a m = 5 (igrali smo 5 tiketa) pa je $\overline{V}(3, 5) = 243$.

```python
import itertools


1 usage
def varijacije_sa_ponavljanjem(cifre, n):
    broj = 0
    # Generisanje varijacija sa ponavljanjem
    varijacije = itertools.product(cifre, repeat=n)

    # Prikaz svake od varijacija
    for raspored in varijacije:
        broj += 1
        print(raspored)
    print(broj)


if __name__ == '__main__':
    cifre = ['0', '1', '2']
    # Dužina varijacija
    n = 4

    # Poziv funkcije
    varijacije_sa_ponavljanjem(cifre, n)
```

```
('0', '0', '0', '0')
('0', '0', '0', '1')
('0', '0', '0', '2')
('0', '0', '1', '0')
('0', '0', '1', '1')
('0', '0', '1', '2')
('0', '0', '2', '0')
('0', '0', '2', '1')
```

...

```
('2', '2', '1', '2')
('2', '2', '2', '0')
('2', '2', '2', '1')
('2', '2', '2', '2')
81
```

Definicija

Permutacija je specijalan slucaj varijacije bez ponavljanja u kojoj se biraju svi dati elementi

Bijektivno preslikavanje konacnog skupa X na samog sebe naziva se permutacija skupa X.

Definicija

Broj permutacija skupa X sa n elemenata jednak je:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

**Broj n! se cita n faktorijel. Posebno za n = 0 vazi 0! = 1.*

Na primer: Ako je skup S = {1,2,3}, permutaucije ovog skupa ce biti 123,132,213,231,312,321

Definicija – broj permutacija multiskupa ("sa ponavljanjem")

Neka je dat konacan multiskup

$$X = \{\{a_1,\dots,a_1,\dots,a_l,\dots,a_l\}\}$$

Permutacija skupa X je uređena n torka elemenata skupa X u kojoj se svaki element pojavljuje tacno onoliko puta koliko se pojavljuje u X, gde je $n = x_1 + \dots + x_l$:

Definicija – broj permutacija multiskupa ("sa ponavljanjem")

Broj permutacija multiskupa X jednak je:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_l) = (x_1 + \ldots + x_l)! \,/\, x_1! \cdot \ldots \cdot x_l!$$

Na primer , treba da izračunamo koliko ima permutacija od brojeva 4,4,5,5,5,7,7 ? Ukupno imamo 7 elemenata, pa je n = 7. Četvorka se ponavlja dva puta , pa je k_1=2 . Petica se ponavlja tri puta ,pa je k_2 = 3 i imamo dve sedmice k_3 = 2

$$P_{2,3,2}(n) = \ldots = 210$$

Kako prepoznati?

Neka je dat skup S sa n različitih elemenata. Ako radimo sa **svih n elemenata**, *odnosno pravimo sve moguće različite rasporede tih n elemenata , onda ćemo upotrebiti* **PERMUTACIJE**. Ako trebamo formirati sve njegove podskupove od po k različitih elemenata **gde nam je bitan redosled elemenata**, onda ćemo koristiti **VARIJACIJE**. Ako trebamo formirati podskupove **gde nam nije bitan redosled elemenata** , onda ćemo upotrebiti **KOMBINACIJE.**

HVALA NA PAZNJI!