Zadatak 11

Grupa 8

Januar 2025

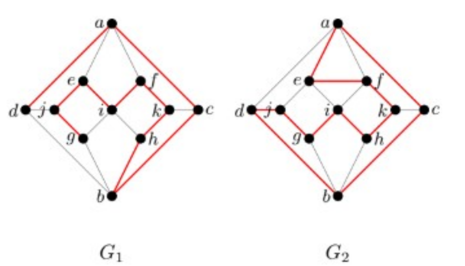
1 Hamiltonov graf

Hamiltonov graf je koncept u teoriji grafova koji je usko vezan za problem **Hamiltonovog ciklusa**, odnosno ciklusa koji prolazi kroz **svaki čvor grafa tačno jednom** i vraća se u početni čvor. Iako se danas koristi u mnogim oblastima informatike i matematike, njegovo poreklo ima zanimljiv istorijski kontekst.

1.1 Uvod u teoriju grafova

Definicija: *Neka je G graf. Hamiltonov put u G je put koji sadrži sve čvorove tog grafa. Hamiltonova kontura je Hamiltonov put koji je ujedno i kontura.*

Primer: *Hamiltonov put u grafu G_1 je dachbkfiejg, dok je dachbkfiejg Hamiltonova kontura u grafu G_2.*



Definicija: *Graf je Hamiltonov ako sadrži Hamiltonovu konturu.*
Graf je polu Hamiltonov ako sadrži Hamiltonov put.

U prethodnom primeru, graf G_1 je polu Hamiltonov, a graf G_2 je Hamiltonov.

- U Hamiltonovo vreme pojam **grafova** još uvek nije bio formalizovan.
- Formalizacija teorije grafova započinje krajem 19. i početkom 20. veka, i to zahvaljujući radu **Leonharda Eulera**, koji je još 1736. godine formulisao poznati problem Königsberških mostova.

1.1.1 Terminologija i razvoj

- Naziv **Hamiltonov ciklus/graf** uveden je naknadno, kako bi se odala počast Hamiltonovom doprinosu.
- **Hamiltonov graf** je graf koji sadrži Hamiltonov ciklus.
- Sa razvojem teorije računara, naročito u 20. veku, problem nalaženja Hamiltonovog ciklusa postao je značajan zbog svoje **NP-kompletnosti**.

1.1.2 Savremeni značaj

Hamiltonovi grafovi danas imaju primenu u različitim oblastima:

- teorija kompleksnosti i algoritmi
- optimizacija i operaciona istraživanja
- problem trgovačkog putnika
- bioinformatika (npr. sastavljanje DNK sekvenci)

Hamiltonov ciklus se razlikuje od Eulerovog ciklusa po tome što:

- kod Hamiltonovog ciklusa se svako **teme** posećuje tačno jednom,
- dok se kod Eulerovog ciklusa svaka **grana** koristi tačno jednom.

1.2 Dovoljni uslovi za Hamiltonov graf

Hamiltonov ciklus u grafu je ciklus koji prolazi kroz sva temena grafa tačno jednom (osim početnog/poslednjeg koje se poklapa). Ako takav ciklus postoji, kažemo da je graf **Hamiltonov**.

Postoje mnogi dovoljni (ali ne i nužni) uslovi da graf bude Hamiltonov. Ovde navodimo dva poznata teorema: **Diracov teorem** i **Oreov teorem**.

Diracov teorem (1952.)

Teorem: Neka je G jednostavan graf sa $n \geq 3$ temena. Ako za svako teme v u grafu važi:

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

onda je graf G Hamiltonov.

Dokaz (skica):

Pretpostavimo suprotno — da G nije Hamiltonov, ali zadovoljava uslov teorema. Onda postoji najduži put (ili ciklus) u G koji nije Hamiltonov. Može se pokazati (kontraargumentom) da se takav najduži put može produžiti pod uslovima iz teorema, što je kontradikcija. Detaljan dokaz koristi indukciju i teoriju najdužeg puta i zahteva konstrukciju dodatnog čvora. Dakle, uslov implicira da graf sadrži Hamiltonov ciklus. □

Oreov teorem (1960.)

Teorem: Neka je G jednostavan graf sa $n \geq 3$ temena. Ako za svaka dva netesno povezana temena u i v važi:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

onda je graf G Hamiltonov.

Dokaz (skica):

Slično kao i kod Diracovog teorema, pretpostavlja se suprotno i koristi se najduži mogući put u G. Ako uslov važi za svaka dva nepovezana temena, moguće je pokazati da se najduži put može proširiti, što dovodi do kontradikcije ako pretpostavimo da graf nije Hamiltonov. □

Napomena

Niti Diracov niti Oreov uslov nije **neophodan** za Hamiltonovost — postoje Hamiltonovi grafovi koji ne zadovoljavaju ove uslove. Ipak, oni predstavljaju korisne **dovoljne uslove** koji se lako proveravaju i često se koriste u praksi.

1.3 Potrebni uslovi za Hamiltonov graf

Uslov 1. Ako je graf G Hamiltonov i ako je $U \subseteq V(G)$, $U \neq \emptyset$, tada važi:

$$\omega(G - U) \leq |U|,$$

gde je $\omega(G - U)$ broj komponenti grafa $G - U$.

Uslov 2. Ako je graf G Hamiltonov i ako je $U \subseteq V(G)$, $U \neq \emptyset$, tada važi:

$$\omega(G - U) \leq |U| + 1.$$

Napomena: Uslov 1 je jači od Uslova 2. Uslovi su **potrebni**, ali **nisu dovoljni**.

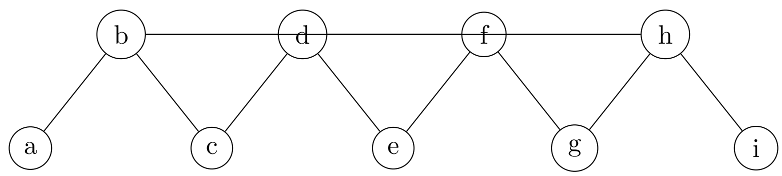
Primeri

Primer 1: Kršenje uslova 1

Neka je $U = \{b, d, f, h\}$. Ako važi:

$$\omega(G - U) = 5 > |U| = 4,$$

onda G ne može biti Hamiltonov.



Uklanjanjem temena b, d, f, h, ostaje 5 nepovezanih komponenti (čvorovi: a, c, e, g, i).

Primer 2: Kršenje uslova 2

Neka je $U = \{b, d, f, h, p\}$. Ako važi:

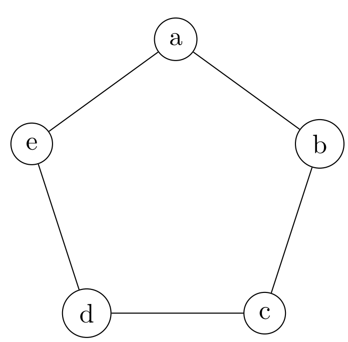
$$\omega(G - U) = 6 > |U| + 1 = 6,$$

onda G ne može biti Hamiltonov.

(Analogni graf kao gore sa dodatim temenom p.)

1.4 Zadaci

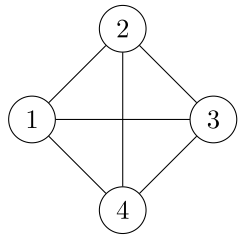
1. Neka je dat graf G sa čvorovima $\{a, b, c, d, e\}$ i granama $\{ab, bc, cd, de, ea\}$.



Rešenje: Graf je ciklus kroz svih 5 čvorova. Postoji put koji ih sve obilazi i vraća se na početak.

Zaključak: G je Hamiltonov.

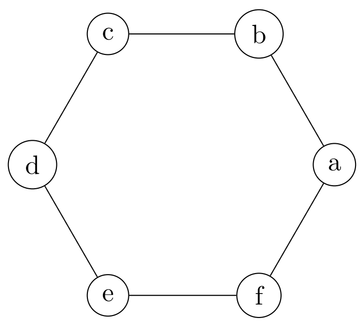
2. Da li graf K_4 ima Hamiltonov ciklus?



Rešenje: Potpuni graf K_4 ima sve moguće veze izmedju čvorova. Ciklus $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ koristi sve čvorove.

Zaključak: Da, K_4 je Hamiltonov.

3. Ciklus C_6:



Rešenje: Po definiciji, ciklus C_n uključuje sve čvorove i formira Hamiltonov ciklus.

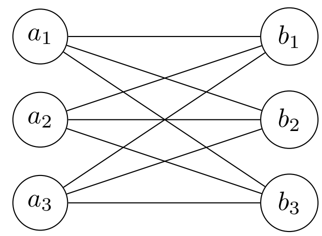
Zaključak: C_6 je Hamiltonov graf.

4. Za graf sa $n = 7$, važi da $d(u) + d(v) \geq 7$ za svaki nepovezan par u, v.

Rešenje: Primena **Oreove teoreme**. Ako je zbir stepena svaka dva nepovezana čvora $\geq n$, graf je Hamiltonov.

Zaključak: G je Hamiltonov.

5. Da li je $K_{3,3}$ Hamiltonov?



Rešenje: Bipartitni graf $K_{n,n}$ ima Hamiltonov ciklus ako $n \geq 2$. Ovde je $n = 3$.

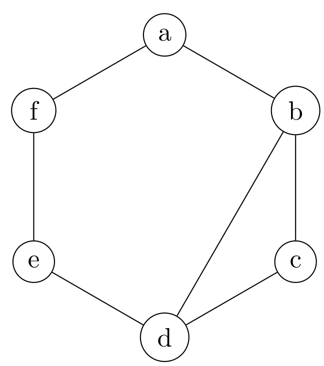
Zaključak: Da, $K_{3,3}$ je Hamiltonov.

6. G ima 10 čvorova, i svaki čvor ima stepen ≥ 5.

   Rešenje: Koristimo **Diracovu teoremu**: ako je $d(v) \geq \frac{n}{2}$, graf je Hamiltonov. Ovde: $d(v) \geq 5 = \frac{10}{2}$.

   Zaključak: G je Hamiltonov.

7. Graf sa čvorovima $\{a, b, c, d, e, f\}$ i granama $\{ab, bc, cd, de, ef, fa, bd\}$:



   Rešenje: Ciklus: $a \to b \to c \to d \to e \to f \to a$ koristi sve čvorove.

   Zaključak: Graf je Hamiltonov.

8. Graf ima izolovani čvor ili komponentu sa jednim čvorom.

   Rešenje: Hamiltonov ciklus mora da obuhvati sve čvorove i bude zatvoren. Ako čvor nije povezan ni sa kim – nemoguće ga uključiti u ciklus.

   Zaključak: Takav graf **nije** Hamiltonov.

9. Graf sa 8 čvorova, i uklanjanjem 3 čvora broj komponenti postaje 4.

   Rešenje: Koristimo sledeće pravilo:

   Ako važi $!(G-U) > |U|$, graf nije Hamiltonov. Ovde je $!(G-U) = 4$, $|U| = 3$.

   Zaključak: G nije Hamiltonov.