Zadatak 5

Grupa 8

Oktobar 2024

1 Rekurentne relacije

Do sada korišćeni metodi prebrojavanja nam ne mogu pomoći u rešavanju problema koji nam predstoje. Alat za reševanje tih problema se nalazi u rekurentnim relacijama. Ako je dat neki broj početnih članova, a ostali članovi se mogu dobiti primenom relacije kojim se dobijaju prethodni članovi, onda kažemo da je niz opisan kao rekurntna relacija. Rekurentne relacije su vrsta relacija u matematici koja definiše sledeće članove niza na osnovu prethodnih članova. Drugim rečima, u rekurentnoj relaciji svaki član niza može biti izražen kroz neki od prethodnih članova niza ili kroz prethodne članove u kombinaciji sa nekim pravilom. Rekurentne relacije se često koriste za opisivanje sekvenci koje pokazuju odredjeni obrazac, kao što su Fibonačijevi brojevi, faktorski nizovi, nizovi rasta populacije i druge.

1.1 Opšta forma rekurentne relacije

Rekurentna relacija može se zapisati kao:

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$$

gde je:

- a_n član niza na mestu n,
- f funkcija koja opisuje pravilo za dobijanje novog člana niza,
- k broj prethodnih članova koji su potrebni za izračunavanje sledećeg člana niza.

1.2 Primeri rekurentnih relacija

1. **Fibonačijeva relacija**:

   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{za } n \geq 2$$

   uz početne uslove $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$.

2. **Aritmetički niz**:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

gde je d konstanta razlike izmedju članova.

Rekurentne relacije su korisne jer omogućavaju izračunavanje članova niza bez potrebe za direktnim odredjivanjem funkcije niza.

1.3 Generisanje rekurentnih relacija

Primer 1: Napisati rekurentne relacije koje opisuju sledeće nizove:

1. aritmetički niz čiji je prvi član a, a razlika je d;
2. geometrijski niz čiji je prvi član a, količnik je 1;
3. niz faktorijela $\{n!\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Rešenje:

1. Za članove aritmetičkog niza važi:

$$\begin{aligned} a_0 &= a, \\ a_n &= a_{n-1} + d, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

2. Za članove geometrijskog niza važi:

$$\begin{aligned} a_0 &= b, \\ a_n &= q \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

3. Za niz faktorijela važi:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_n &= n \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Primer 2: Niz brojeva:

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...\}$$

se naziva Fibonačijev niz. Prvi član niza jednak je 0, drugi 1, a svaki sledeći član dobija se kao zbir prethodna dva člana. Napisati rekurentnu relaciju Fibonačijevog niza.

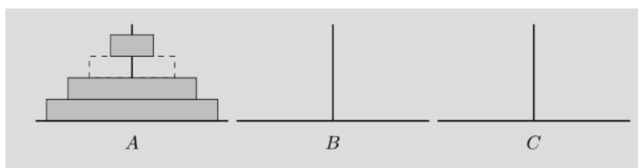
Rešenje: Označimo član na poziciji $n \in N_0$ sa f_n. Tada je

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Primer 3: Date su tri šipke i n diskova ($n \in \mathbb{N}$). Diskovi su poredjani na jedan štap, od najvećeg do najmanjeg (uvek manji na veći). Dozvoljeno je

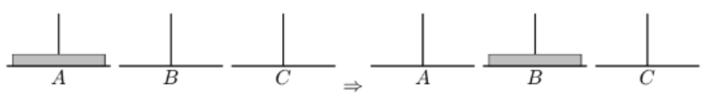
- pomeriti u svakom koraku tačno jedan disk;
- veći disk nikada ne sme da se stavi na manji.

Koliko je najmanje koraka potrebno da se svi diskovi premeste na jedan od druga dva štapa?

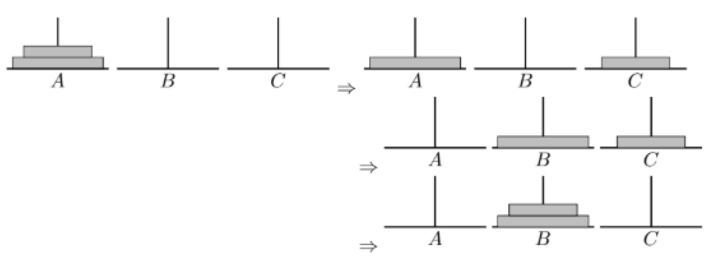


Rešenje. Neka je h_n najmanji broj koraka da se n diskova prebaci sa A na B ili C. Slučajevi za $n = 1$ i $n = 2$ ilustrovani su na sledećim slikama.

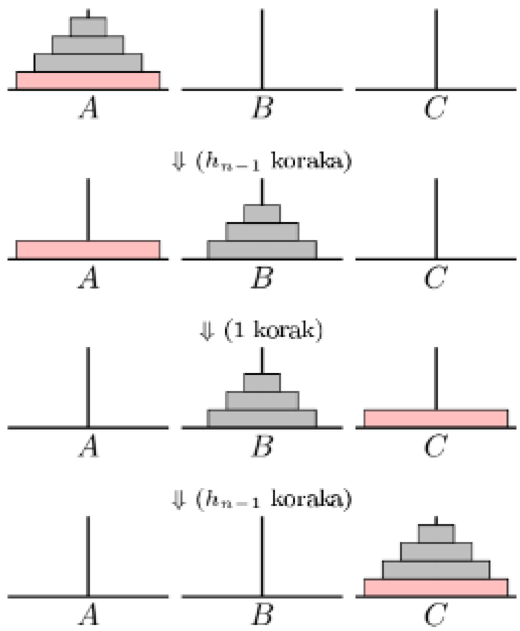
$$n = 1 : \quad h_1 = 1$$



$$n = 2 : \quad h_2 = 3$$



Ilustrovaćemo sada rešenje za proizvoljno $n \geq 2$. Treba primetiti da na najveći disk uvek može da se stavi bilo koji od preostalih $n - 1$ diskova.



Na osnovu prethodne analize dolazimo do zaključka da se niz može opisati na sledeći način:

$$h_1 = 1$$
$$h_n = 2h_{n-1} + 1, \quad n \geq 2.$$

Rešiti rekurentnu relaciju niza znači izraziti opšti član niza a_n kao funkciju koja zavisi od n tj. odrediti funckiju $a : N_0 \to C$ tako da za svako $n \in N_0$ važi

$$a_n = a(n)$$

Primer 4: Neka je $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ zadat na sledeći način:

$$a_0 = 2$$
$$a_n = 5a_{n-1} + 2, \quad n \geq 1.$$

Odrediti rešenje metodom rekurentne relacije metodom zamene unazad.

Rešenje: Primenom rekurentne relacije unazad, za $n \geq 1$, možemo zaključiti da važi sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
a_n &= 5a_{n-1} + 2 \\
&= 5(5a_{n-2} + 2) + 2 = 5^2 a_{n-2} + 5 \cdot 2 + 2 \\
&= 5^2(5a_{n-3} + 2) + 5 \cdot 2 + 2 = 5^3 a_{n-3} + 5^2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 2 \\
&= \ldots \\
&= 5^n a_0 + 2 \cdot (5^{n-1} + 5^{n-2} + \ldots + 5 + 1) \\
&= 2 \cdot (5^n + 5^{n-1} + \ldots + 5 + 1) = 2 \cdot \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1).
\end{aligned}$$

Primer 5: Neka je $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ zadat na sledeći način:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_n &= 5a_{n-1} + 2, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Dokazati da je $a_n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$ za svako $n \in N_0$.

Rešenje:

Dokazujemo tvrdjenje indukcijom po n.
Baza indukcije: Za $n = 0$ važi $a_0 = 2 = \frac{1}{2}(5^{0+1} - 1)$.
Induktivna pretpostavka (T_n): $a_n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$.
Induktivni korak ($T_n \Rightarrow T_{n+1}$): .
Koristeći datu rekurentnu relaciju i induktivnu pretpostavku pokazaćemo da je $a_{n+1} = \frac{1}{2}(5^{n+2} - 1)$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 5a_n + 2 \\
&= 5 \cdot \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1) + 2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 5^{n+2} - \frac{5}{2} + 2 = \frac{1}{2}(5^{n+2} - 1).
\end{aligned}$$

1.4 Homogene linearne rekurente relacije sa konstantnim koeficijentima

Postupak rešavanja rekurentnih relacija postupkom zamene unazad nije uvek pogodan za odredjivanje rešenja. Takav je, na primer, slučaj sa rekurentnom relacijom za Fibonaccijev niz. U ovom delu ćemo posmatrati jednu posebnu klasu rekurentnih relacija koja se može rešiti postupkom koji podseća na rešavanje linearnih diferencijalnih jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima.

Definicija Rekurentna relacija niza $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ je *homogena linearna rekurentna relacija reda k sa konstantnim koeficijentima* ako je oblika

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},$$

gde su $c_1, \dots, c_k$ konstante, $k \geq 1$ i $c_k \neq 0$.

Svaka homogena linearna rekurentna relacija sa konstantnim koeficijentima ima trivijalno rešenje $a_n = 0$, $n \geq 0$.

1.4.1 Karakteristična jednačina

Neka je (ne nula) niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ dat homogenom linearnom rekurentnom relacijom sa konstantnim koeficijentima:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}. \tag{*}$$

Pretpostavimo da postoji broj $x \neq 0$ sa osobinom da je rešenje posmatrane rekurentne relacije oblika

$$a_n = x^n, \quad \text{za svako } n \geq 0.$$

Zamenom u rekurentnu relaciju, dobijamo

$$x^n = c_1 x^{n-1} + \cdots + c_k x^{n-k} \quad \Leftrightarrow \quad x^n = x^{n-k}(c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^k = c_1 x^{k-1} + \cdots + c_k.$$

Za jednačinu

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \cdots - c_k = 0$$

kažemo da je *karakteristična jednačina* relacije $(*)$.

1.4.2 Teorema

Ako karakteristična jednačina rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

ima k korena $x_1, \dots, x_k$ sa osobinom

$$\forall i, j \in \{1, \dots, k\}\ i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j,$$

onda važi

(i) za sve $\alpha_1, \dots, \alpha_k$,

$$a(n) = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \cdots + \alpha_k x_k^n$$

je rešenje posmatrane rekurentne relacije;

(ii) konstante $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ su jedinstveno odredjene početnim uslovima

$$a(0) = a_0, \dots, a(k-1) = a_{k-1}.$$

Dokaz.

(i) Ako posmatrani izraz zamenimo u rekurentnu relaciju, dobijamo sledeći niz ekvivalentnih jednakosti:

$$\alpha_1 x_1^n + \cdots + \alpha_k x_k^n = c_1(\alpha_1 x_1^{n-1} + \cdots + \alpha_k x_k^{n-1})$$

$$\cdots$$

$$+c_k(\alpha_1 x_1^{n-k} + \cdots + \alpha_k x_k^{n-k})$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha_1 x_1^n + \cdots + \alpha_k x_k^n - (c_1 x_1^{n-1} + \cdots + c_k x_k^{n-k}) = 0$$

Kako su $x_1, \ldots, x_k$ koreni karakteristične jednačine, izrazi u zagradama su jednaki 0, čime je dokaz završen.

(ii) Kako bi zadate početne vrednosti pripadale nizu opisanom datom rekurentnom relacijom, one moraju zadovoljavati rešenje rekurentne relacije koje je dato pod (i). Tako dobijamo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = a_0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = a_1$$

$$\cdots$$

$$\alpha_1 x_1^{k-1} + \alpha_2 x_2^{k-2} + \cdots + \alpha_k x_k^{k-1} = a_{k-1}.$$

Primer 1: Jednostavni koreni karakteristične jednačine

Razmotrimo rekurentnu relaciju

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 5.$$

Karakteristična jednačina je

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

koja ima dva jednostavna korena $x_1 = 1$ i $x_2 = 2$. Opšte rešenje je oblika

$$a_n = \alpha_1 \cdot 1^n + \alpha_2 \cdot 2^n = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^n.$$

Koristeći početne uslove, dobijamo:

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 2,$$

$$a_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 = 5.$$

Rešavanjem ovog sistema, dobijamo $\alpha_1 = -1$ i $\alpha_2 = 3$, pa je rešenje:

$$a_n = -1 + 3 \cdot 2^n.$$

Teorema

Ako karakteristična jednačina

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_kx - c_k = 0.$$

ima korene $x_1, \ldots, x_l$ redom višestrukosti $k_1, \ldots, k_l$, onda je

(i) opšte rešenje posmatrane rekurentne relacije

$$a(n) = (\alpha_{11}+n\alpha_{12}+\cdots+n^{k_1-1}\alpha_{1k_1})x_1^n+(\alpha_{21}+n\alpha_{22}+\cdots+n^{k_2-1}\alpha_{2k_2})x_2^n+\cdots+(\alpha_{l1}+n\alpha_{l2}+\cdots+n^{k_l-1}\alpha_{lk_l})x$$

(ii) konstante $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{lk_l}$ su jedinstveno odredjene početnim uslovima.

Primer 2: Višestruki koreni karakteristične jednačine

Razmotrimo rekurentnu relaciju

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad a_0 = 2, \quad a_1 = 12.$$

Karakteristična jednačina je

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

koja ima dvostruki koren $x = 3$. Opšte rešenje je oblika

$$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)3^n.$$

Koristeći početne uslove, dobijamo sistem jednačina za α_1 i α_2 kojim nalazimo konkretno rešenje.

1.5 Nehomogene linearne rekurente relacije sa konstantnim koeficijentima

Posmatrajmo rekurentne relacije oblika

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + f(n), \tag{1}$$

gde su $c_1, \ldots, c_k$ konstante, $k \geq 1$, $c_k \neq 0$, a f funkcija skupa $\mathbb{N}_0$. Za rekurentnu relaciju koju dobijemo kada funkciju $f(n)$ zamenimo nulom,

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}, \tag{2}$$

kažemo da je odgovarajuća homogena rekurentna relacija.

Sledeće tvrdjenje pokazuje da je, osim (opšteg) rešenja odgovarajuće homogene jednačine, dovoljno naći jedno rešenje nehomogene jednačine, da bismo odredili rešenja polazne nehomogene rekurentne relacije.

Teorema

Ako je $a_n^{(p_1)}$ partikularno rešenje nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada za svako rešenje a_n jednačine (1) postoji rešenje $a_n^{(h)}$ odgovarajuće homogene rekurentne relacije sa osobinom

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}, \quad n \geq 0.$$

Dokaz. Neka je $a_n^{(p_1)}$ dato (partikularno) rešenje jednačine (1). Tada za svako $n \in \mathbb{N}_0$ važi

$$a_n^{(p_1)} = c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f(n). \tag{3}$$

Posmatrajmo sada proizvoljno rešenje $a_n^{(p)}$ jednačine (1). Za njega važi

$$a_n^{(p)} = c_1 a_{n-1}^{(p)} + c_2 a_{n-2}^{(p)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p)} + f(n), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Ako od relacije (4) oduzmemo relaciju (3), dobijamo

$$a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)} = c_1(a_{n-1}^{(p)} - a_{n-1}^{(p_1)}) + c_2(a_{n-2}^{(p)} - a_{n-2}^{(p_1)}) + \cdots + c_k(a_{n-k}^{(p)} - a_{n-k}^{(p_1)}),$$

što znači da je $a_n^{(p)} - a_n^{(p_1)}$ rešenje rekurentne relacije (2), tj. za svako rešenje nehomogene rekurentne relacije a_n postoji rešenje $a_n^{(h)}$ homogene jednačine tako da se a_n može izraziti pomoću $a_n^{(h)}$ i $a_n^{(p_1)}$ koristeći obrazac

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}.$$

□

Prethodno tvrdjenje direktno indukuje jedan metod za odredjivanje opšteg rešenja nehomogene rekurentne relacije. Sledeće tvrdjenje daje metod za odredjivanje jednog partikularnog rešenja u slučaju kada nehomogeni deo ima jedan odredjen specifičan oblik. U svim ostalim slučajevima ovaj metod nije primenljiv.

Teorema

Neka je

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n, \quad b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}.$$

Ako je s koren karakteristične jednačine višestrukosti l (ako nije koren, tada je $l = 0$), onda postoji partikularno rešenje oblika

$$a_n^{(p)} = n^l (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \cdots + c_1 n + c_0) s^n.$$

Teorema

Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja nehomogenih rekurentnih relacija

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f_1(n) \quad \text{i}$$

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f_2(n),$$

onda je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ rešenje nehomogene rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$

Dokaz. Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja navedenih rekurentnih relacija, onda važi

$$a_n^{(p_1)} = c_1 a_{n-1}^{(p_1)} + c_2 a_{n-2}^{(p_1)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p_1)} + f_1(n)$$

$$a_n^{(p_2)} = c_1 a_{n-1}^{(p_2)} + c_2 a_{n-2}^{(p_2)} + \cdots + c_k a_{n-k}^{(p_2)} + f_2(n).$$

Sabiranjem prethodne dve jednakosti dobijamo

$$a_n^{(p_1)}+a_n^{(p_2)} = c_1(a_{n-1}^{(p_1)}+a_{n-1}^{(p_2)})+c_2(a_{n-2}^{(p_1)}+a_{n-2}^{(p_2)})+\cdots+c_k(a_{n-k}^{(p_1)}+a_{n-k}^{(p_2)})+f_1(n)+f_2(n),$$

čime je direktno pokazano da je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ rešenje rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n).$$

□

1.6 Algoritam za rekurente relacije nizova

Algoritam za pronalazak rekurente relacije u odnosu na uneti niz bi bio savršen za ovu temu i bio bi od velike koristi. Nažalost, takav algoritam bi bio veoma složen i zahtevao bi mnogo vremena za implementaciju. Zbog toga ćemo se fokusirati na jednostavniji algoritam koji će nam pomoći da nadjemo rekurentnu relaciju za par tipova nizova. Podržavaće aritmetičke nizove, geometrijske nizove, faktorijel nizove i Fibonacijeve nizove. Takodje ćemo napisati i algoritam koji će da pravi niz od n članova na osnovu rekurentne relacije, aritmetičke ili geometrijske, obzirom da faktorijel i Fibonacijev niz imaju predefinisan prvi član.

1.6.1 Algoritam za pronalazak rekurentne relacije

```
    niz=[]

print("Moguci unosi su aritmeticki, geometrijski,
   faktorijelski i Fibonacijev niz.")
print("Unesite niz brojeva, unesite kraj za izlaz: ")

while True:
    x = input()
    if x == "kraj" and len(niz) >= 2:
        break
    elif x == "kraj" and len(niz) < 2:
        print("Niz mora imati bar 2 elementa!")
        continue
```

```
    try:
        x = int(x)
    except ValueError:
        print("Niste uneli broj!")
        continue

    niz.append(int(x))

def provera_aritmeticki(niz):
    razlika = niz[1] - niz[0]

    for i in range(2, len(niz)):
        if niz[i] - niz[i-1] != razlika:
            return False

    return True

def provera_geometrijski(niz):
    if niz[0] == 0:
        return False
    odnos = niz[1] / niz[0]

    for i in range(2, len(niz)):
        if niz[i-1] == 0:
            return False
        if niz[i] / niz[i-1] != odnos:
            return False

    return True

def provera_faktorijel(niz):
    duzina = len(niz)

    faktorijel = 1
    for i in range(2, duzina+1):
        faktorijel *= i

    if niz[-1] != faktorijel:
        return False

    return True

def provera_fibonaci(niz):
    fib1 = 0
    fib2 = 1

    for i in range(2, len(niz)):
        fib1, fib2 = fib2, fib1 + fib2

    if niz[-1] != fib2:
```

```
        return False

    return True

if provera_aritmeticki(niz):
    print("Niz je aritmeticki.")
    print("Rekurentna relacija: a(n) = a(n-1) + d")
if provera_geometrijski(niz):
    print("Niz je geometrijski.")
    print("Rekurentna relacija: a(n) = a(n-1) * q")
if provera_faktorijel(niz):
    print("Niz je faktorijelski.")
    print("Rekurentna relacija: a(n) = n*(n-1)")
if provera_fibonaci(niz):
    print("Niz je Fibonacijev.")
    print("Rekurentna relacija: a(n) = F(n)")
```

```
Moguci unosi su aritmeticki, geometrijski, faktorijelski i Fibonacijev niz.
Unesite niz brojeva, unesite kraj za izlaz:
5
10
15
20
kraj
Niz je aritmeticki.
Rekurentna relacija: a(n) = a(n-1) + d
```

```
Moguci unosi su aritmeticki, geometrijski, faktorijelski i Fibonacijev niz.
Unesite niz brojeva, unesite kraj za izlaz:
2
4
8
16
kraj
Niz je geometrijski.
Rekurentna relacija: a(n) = a(n-1) * q
```

```
Moguci unosi su aritmeticki, geometrijski, faktorijelski i Fibonacijev niz.
Unesite niz brojeva, unesite kraj za izlaz:
1
2
6
24
kraj
Niz je faktorijelski.
Rekurentna relacija: a(n) = n*(n-1)
```

```
Moguci unosi su aritmeticki, geometrijski, faktorijelski i Fibonacijev niz.
Unesite niz brojeva, unesite kraj za izlaz:
0
1
1
2
3
5
kraj
Niz je Fibonacijev.
Rekurentna relacija: a(n) = F(n)
```

```
Moguci unosi su aritmeticki, geometrijski, faktorijelski i Fibonacijev niz.
Unesite niz brojeva, unesite kraj za izlaz:
2
4
kraj
Niz je aritmeticki.
Rekurentna relacija: a(n) = a(n-1) + d
Niz je geometrijski.
Rekurentna relacija: a(n) = a(n-1) * q
```

Figure 1: Izgled ulaza i izlaza za algoritam pronalaska rekurentne relacije na osnovu niza

1.6.2 Algoritam za pravljenje niza na osnovu rekurentne relacije

```python
a=int(input("Unesite prvi clan niza: "))
print("Moguci unosi su a(n) = a(n-1) + 'broj' i a(n) =
    'broj' * a(n-1)")
formula=input("Unesite rekurentnu relaciju za niz: ")
n= int(input("Unesite broj clanova niza: "))

niz=[a]

tokeni=formula.split(" ")

if tokeni[0]=="a(n)":
    if tokeni[1]=="=":
        if tokeni[2]=="a(n-1)":
            if tokeni[3]=="+":
                try:
                    broj=int(tokeni[4])
                    for i in range(1,n):
                        a+=broj
                        niz.append(a)
                except ValueError:
                    print("Neispravna formula!")
            else:
                print("Neispravna formula!")
        else:
            try:
                broj=int(tokeni[2])
                for i in range(1,n):
                    a*=broj
                    niz.append(a)
            except ValueError:
                print("Neispravna formula!")
    else:
        print("Neispravna formula!")
else:
    print("Neispravna formula!")

print(niz)
```

```
Unesite prvi član niza: 1
Moguci unosi su a(n) = a(n-1) + 'broj' i a(n) = 'broj' * a(n-1)
Unesite rekurentnu relaciju za niz: a(n) = a(n-1) + 5
Unesite broj članova niza: 10
[1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46]
```

```
Unesite prvi član niza: 1
Moguci unosi su a(n) = a(n-1) + 'broj' i a(n) = 'broj' * a(n-1)
Unesite rekurentnu relaciju za niz: a(n) = 2 * a(n-1)
Unesite broj članova niza: 10
[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512]
```

Figure 2: Izgled ulaza i izlaza za algoritam pronalaska niza na osnovu rekurentne relacije

1.7 Zadaci

Zadatak 1

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+3}}{a_{n+18}}, \quad za\, n \geq 0$$

ako se zna da su počevši od trećeg člana niza svi članovi različiti i da je $a_0 = a_1 = 1$ i $a_2 = 5$.

Rešenje: Logaritmovanjem jednačine dobijamo

$$\log_5 a_{n+3} = 4\log_5 a_{n+2} + 3\log_5 a_{n+1} - 18\log_5 a_n.$$

Smenom $b_n = \log_5 a_n$ dobijamo rekurentnu relaciju trećeg reda

$$b_{n+3} = 4b_{n+2} + 3b_{n+1} - 18b_n.$$

Sada za nju karakteristična jednačina je

$$t^3 - 4t^2 - 3t + 18 = 0,$$

koja ima rešenja $A = \frac{1}{25}$, $B = -\frac{1}{25}$, i $C = \frac{1}{15}$. Nakon vraćanja smene dobijamo

$$a_n = 5^{(-2)^n \frac{-\frac{1}{25}}{+\frac{1}{15}}}.$$

Zadatak 2

Rešiti rekurentnu relaciju

$$f_n^2 = 5f_{n-1}^2 - 4f_{n-2}^2, \quad n \geq 2,$$

ako je $f_0 = 4$ i $f_1 = 13$.

Rešenje: Smenom $g_n = f_n^2$ datu nelinearnu rekurentnu relaciju svedimo na linearnu $g_n = 5g_{n-1} - 4g_{n-2}$. Njena karakteristična jednačina $t^2 - 5t + 4 = 0$ ima rešenja $t_1 = 4$ i $t_2 = 1$. Opšte rešenje za niz g_n ima oblik

$$g_n = A \cdot 4^n + B \cdot 1^n.$$

Da bismo odredili konstante A i B, neophodno je prvo izračunati g_0 i g_1. Kako je $g_0 = f_0^2 = 16$ i $g_1 = f_1^2 = 169$, dobijamo sistem

$$A + B = 16,$$

$$4A + B = 169,$$

koji ima rešenje $A = -35$ i $B = 51$. Sada je $g_n = -35 \cdot 4^n + 51 \cdot 1^n$. Na kraju još treba vratiti smenu, te je rešenje početne rekurentne relacije dato sa

$$f_n = \pm\sqrt{-35 \cdot 4^n + 51}.$$

Zadatak 3

Rešiti rekurentnu relaciju

$$2f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2} - f_{n-3}, \quad za\, n \geq 3,$$

ako su dati početni uslovi $f_0 = f_1 = 0$ i $f_2 = 3$.

Rešenje: Ukoliko datu rekurentnu relaciju zapišemo u obliku $2f_n - f_{n-1} - 2f_{n-2} + f_{n-3} = 0$ dobijamo da je odgovarajuća karakteristična jednačina $2t^3 - t^2 - 2t + 1 = 0$. Kako je $2t^3 - t^2 - 2t + 1 = (2t-1)(t^2 - t + 1)$ vidimo da je opšte rešenje rekurentne relacije

$$f_n = A + B(-1)^n + C\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Iz opšteg rešenja se dalje ubacivanjem početnih uslova dobija sistem jednačina

$$A + B + C = 0,$$

$$A - B + \frac{C}{2} = 0,$$

$$A + B + \frac{C}{4} = 3.$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo da su tražene konstante $A = 3$, $B = 1$ i $C = -4$. Rešenje zadate rekurentne relacije je prema tome dato sledećim izrazom

$$f_n = 3 + (-1)^n - 2^{1-n}.$$

Zadatak 4

Rešiti sistem rekurentnih relacija

$$a_{n+1} = 3b_n,$$

$$b_{n+1} = 2a_n - b_n,$$

ako je $a_0 = 1$ i $b_0 = 0$.

Rešenje: Kada u drugu jednačinu uvrstimo da je $a_n = 3b_{n-1}$ dobijamo rekurentnu relaciju $b_{n+1} = 6b_{n-1} - b_n$. Njena karakteristična jednačina $t^2 + t - 6 = 0$ ima korene $t_1 = -3$ i $t_2 = 2$, te je $b_n = A(-3)^n + B2^n$. Za rešavanje dobijene rekurentne relacije drugog reda trebaju nam dva početna uslova, b_0 i b_1. Kako je $b_1 = 2a_0 - b_0 = 2$ iz druge jednačine, konstante A i B dobijamo rešenjem sistema

$$A + B = 0,$$

$$-3A + 2B = 2.$$

Sada je $A = -\frac{2}{5}$ i $B = \frac{2}{5}$, te je $b_n = \frac{-2\cdot(-3)^n + 2^{n+1}}{5}$. Opšti član niza a_n na kraju dobijamo na sledeći način

$$a_n = 3b_{n-1} = \frac{2\cdot(-3)^n + 3\cdot 2^n}{5}.$$

Zadatak 5

Rešiti rekurentnu relaciju

$$f_{n+3} - f_{n+2} - 8f_{n+1} + 12f_n = 0, \quad za\, n \geq 0,$$

ako je $f_0 = f_1 = 1$, $f_2 = -5$.

Rešenje: Karakteristična jednačina $t^3 - t^2 - 8t + 12 = 0$ ima jednostruki koren $t_1 = -3$ i dvostruki koren $t_2 = t_3 = 2$. Opšte rešenje je sada $f_n = A(-3)^n + (B + nC)2^n$. Da bismo odredili konstante A, B i C treba rešiti sistem

$$A + B = 1,$$

$$-3A + 2B + 2C = 1,$$

$$9A + 4B + 8C = -5.$$

Rešenjem sistema jednačina su $A = -\frac{1}{5}$, $B = \frac{6}{5}$ i $C = -1$, pa je rešenje

$$f_n = \frac{1}{5}\left(-(-3)^n + 3 \cdot 2^{n+1} - 5n \cdot 2^n\right).$$

Zadatak 6

Rešiti rekurentnu relaciju

$$a_n^2 - 2a_{n-1} = 0, \quad za\, n \geq 1,$$

ako je $a_0 = 2$.

Rešenje: Kako je $a_n^2 = 2a_{n-1}$, logaritmovanjem jednačine dobijamo

$$2\log_2 a_n = \log_2 2 + \log_2 a_{n-1} = 1 + \log_2 a_{n-1}.$$

Smenom $b_n = \log_2 a_n$ se dobija nehomogena rekurentna relacija

$$2b_n = 1 + b_{n-1},$$

koja zadovoljava početni uslov $b_0 = \log_2 2 = 1$. Rešenje homogenog dela je $h_n = A\left(\frac{1}{2}\right)^n$, a partikulano rešenje tražimo kao $p_n = C$. Upravljanjem p_n u nehomogenu jednačinu dobijamo $C = 1$, a zbog početnog uslova važi $1 = b_0 = A\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1$, pa je $A = 0$. Dobijamo

$$b_n = 1,$$

pa je $a_n = 2^1 = 2$ za sve $n \geq 1$.

Zadatak 7

Pravougaonik veličine $2 \times n$ izdeljen je na $2n$ jednakih kvadrata. Odrediti broj načina da se prekrije pravougaonik ako na raspolaganju imamo sledeće dve vrste pločica. (Pločice se mogu rotirati za celobrojne umnoške pravog ugla.)

Rešenje: Neka je f_n broj načina da se datim pločicama prekrije pravougaonik veličine $2 \times n$. Razlikujemo 3 slučaja u zavisnosti od toga kako možemo započeti prekrivanje pravougaonika.

- 1° Ako prekrivanje započnemo na prvi način, ostaje da se pokrije još $2 \times (n-1)$ deo pravougaonika i to možemo učiniti na f_{n-1} načina.
- 2° U ovom slučaju treba prekriti još $2 \times (n-2)$ kvadrata, a kako početnu pločicu u prikazanoj položaji možemo staviti na 4 načina, ukupan broj prekrivanja je $4 \cdot f_{n-2}$.
- 3° Pločice se u ovom položaju mogu staviti na 2 načina i pošto ostaje da se prekrije $2 \times (n-3)$ dela pravougaonika, broj prekrivanja je $2 \cdot f_{n-3}$.

Dobijamo rekurentnu relaciju

$$f_n = f_{n-1} + 4f_{n-2} + 2f_{n-3},$$

sa početnim uslovima $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ i $f_2 = 5$. Karakteristična jednačina za dobijenu rekurentnu relaciju je $t^3 - t^2 - 4t - 2 = 0$ i njeni koreni su $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + \sqrt{3}$ i $t_3 = 1 - \sqrt{3}$. Sada je opšte rešenje

$$f_n = A(-1)^n + B(1+\sqrt{3})^n + C(1-\sqrt{3})^n.$$

Upravljanjem početnih uslova dobijamo sistem

$$A + B + C = 1,$$

$$-A + B(1+\sqrt{3}) - C(1-\sqrt{3}) = 1,$$

$$A + B(1+\sqrt{3})^2 + C(1-\sqrt{3})^2 = 5.$$

Rešenjem sistema dobijamo $A = 1$, $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $C = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, pa je broj načina da se datim pločicama prekrije pravougaonik

$$f_n = (-1)^n + \frac{(1+\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}} - \frac{(1-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}}.$$

Zadatak 8

Rešite nehomogenu rekurentnu relaciju:

$$b_n = 3b_{n-1} + 2^n$$

sa početnim uslovom $b_0 = 2$.

Rešenje:

1. Prvo rešavamo homogeni deo:

$$b_n^H = 3b_{n-1}^H$$

Karakteristična jednačina je $r = 3$, pa je homogeno rešenje oblika:

$$b_n^H = C \cdot 3^n$$

2. Za partikulano rešenje pretpostavljamo oblik $b_n^P = A \cdot 2^n$, jer je desna strana 2^n.

Uvrstimo u jednačinu:

$$A \cdot 2^n = 3 \cdot A \cdot 2^{n-1} + 2^n$$

Deljenjem sa 2^n dobijamo:

$$A = \frac{2}{1} = 2$$

Dakle, $b_n^P = 2 \cdot 2^n$.

3. Opšte rešenje je:

$$b_n = b_n^H + b_n^P = C \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n$$

4. Koristeći početni uslov $b_0 = 2$, dobijamo:

$$b_0 = C \cdot 3^0 + 2 \cdot 2^0 = C + 2 = 2 \Rightarrow C = 0$$

Tako da je rešenje:

$$b_n = 2 \cdot 2^n$$

Zadatak 9

Rešite nehomogenu rekurentnu relaciju:

$$c_n = 4c_{n-1} + n$$

sa početnim uslovom $c_0 = 1$.

Rešenje:

1. Prvo rešavamo homogeni deo:

$$c_n^H = 4c_{n-1}^H$$

Karakteristična jednačina je $r = 4$, pa je homogeno rešenje oblika:

$$c_n^H = D \cdot 4^n$$

2. Za partikulano rešenje pretpostavljamo oblik $c_n^P = An + B$, jer je desna strana n.

Uvrstimo u jednačinu:

$$An + B = 4(A(n-1) + B) + n$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo $A = -\frac{1}{3}$ i $B = -\frac{1}{9}$, tako da je:

$$c_n^P = -\frac{1}{3}n - \frac{1}{9}$$

3. Opšte rešenje je:

$$c_n = c_n^H + c_n^P = D \cdot 4^n - \frac{1}{3}n - \frac{1}{9}$$

4. Koristeći početni uslov $c_0 = 1$, dobijamo:

$$c_0 = D \cdot 4^0 - \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow D = \frac{10}{9}$$

Dakle, rešenje je:

$$c_n = \frac{10}{9} \cdot 4^n - \frac{1}{3}n - \frac{1}{9}$$

Zadatak 10

Rešite nehomogenu rekurentnu relaciju:

$$d_n = 5d_{n-1} + 3n^2$$

sa početnim uslovom $d_0 = 4$.

Rešenje:

1. Prvo rešavamo homogeni deo:

$$d_n^H = 5d_{n-1}^H$$

Karakteristična jednačina je $r = 5$, pa je homogeno rešenje oblika:

$$d_n^H = E \cdot 5^n$$

2. Za partikulano rešenje pretpostavljamo oblik $d_n^P = An^2 + Bn + C$, jer je desna strana $3n^2$.

Uvrstimo u jednačinu:

$$An^2 + Bn + C = 5(A(n-1)^2 + B(n-1) + C) + 3n^2$$

Rešavanjem sistema za A, B i C dobijamo $A = \frac{3}{4}$, $B = \frac{3}{8}$, i $C = \frac{15}{16}$, tako da je:

$$d_n^P = \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{8}n + \frac{15}{16}$$

3. Opšte rešenje je:

$$d_n = d_n^H + d_n^P = E \cdot 5^n + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{8}n + \frac{15}{16}$$

4. Koristeći početni uslov $d_0 = 4$, dobijamo:

$$d_0 = E \cdot 5^0 + \frac{15}{16} = 4 \Rightarrow E = \frac{49}{16}$$

Tako da je rešenje:

$$d_n = \frac{49}{16} \cdot 5^n + \frac{3}{4}n^2 + \frac{3}{8}n + \frac{15}{16}$$