Zadatak 10

Grupa 4

Decembar 2024

1 7 mostova Kenigsberga

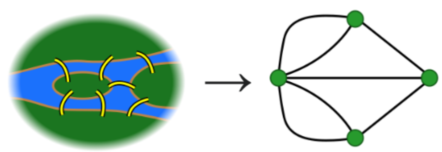


Figure 1: Gradski mostovi predstavljeni pomoću grafa

Za Ojlera vezujemo problem Sedam mostova Kenigsberga koji glasi: Da li je moguće preći svih sedam mostova grada tako da se vratimo na početak puta, ali da se svaki most pređe samo jedanput?
Odgovor je ne, a evo i zašto. Ako je G graf u kojem je stepen svakog čvora najmanje 2, tada G sadrži ciklus.

2 Ojlerov Graf

2.1 Uvod

Proučavanje Ojlerovih puteva i ciklusa generalizuje problem Kenigsberških mostova. Ojlerov put (staza) je put u grafu koji obilazi svaku granu tačno jednom. Ojlerov ciklus (tura) je put koji počinje i završava se u istom čvoru i prolazi svaku granu tačno jednom. Graf koji sadrži Ojlerov put naziva se polu-Ojlerov graf, dok graf koji sadrži Ojlerov ciklus naziva se Ojlerov graf. U literaturi se pojam "Ojlerov graf" ponekad koristi i u širem smislu za svaki graf čiji su svi čvorovi parnog stepena – u slučaju povezanog grafa to je ekvivalentno postojanju Ojlerovog ciklusa. U nastavku ćemo formalno definisati ove pojmove i izložiti njihova fundamentalna svojstva.

2.2 Definicije

Definicija 2.1 (Ojlerov ciklus i Ojlerov graf). Nekusmereni graf G ima *Ojlerov ciklus* ako postoji ciklus koji prolazi kroz svaku njegovu granu tačno jednom. Takav ciklus naziva se *Ojlerova tura*, a graf koji je sadrži naziva se *Ojlerov graf.* Drugim rečima, to je povezan graf u kome postoji put zatvoren u čvoru u_1 oblika:

$$u_1\, e_1\, u_2\, e_2\, \ldots\, u_n\, e_n\, u_1,$$

gde su $e_1, \ldots, e_n$ sve grane grafa G, bez ponavljanja.

Definicija 2.2 (Ojlerov put i polu-Ojlerov graf). *Ojlerov put* je put u grafu koji prolazi svaku granu tačno jednom. Ako takav put postoji, graf se naziva *polu-Ojlerov.* Ojlerov put može biti otvoren (različiti početni i krajnji čvor) ili zatvoren (ako se završava u početnom čvoru i time čini Ojlerov ciklus). U povezanim grafovima, razliku između Ojlerovog puta i ciklusa određuje broj čvorova neparnog stepena.

2.3 Uslovi

Teorema 2.3 Neka je G graf. Graf G je Ojlerov ako i samo ako je povezan i svaki čvor u G je parnog stepena.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Graf je povezan po definiciji Ojlerovog grafa. Neka je

$$u_1e_1u_2e_2\ldots u_ne_nu_1$$

Ojlerova tura u G. Posmatrajmo sada proizvoljan čvor $v \in V(G)$. Ako se čvor v pojavljuje l puta u konturi u slučaju kada je $v \neq u_1$, odnosno $l+1$ ako je $v = u_1$, onda je stepen tog čvora $d_G(v) = 2l$.

($\Leftarrow$) Posmatrajmo u G stazu najveće dužine:

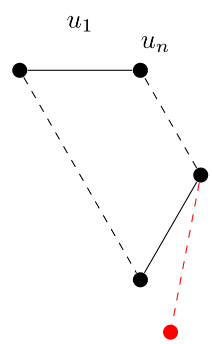
$$u_1e_1u_2e_2\ldots u_ne_nu_{n+1}$$

Pokazaćemo da su prvi i poslednji čvor isti, kao i da se svi čvorovi i grane grafa pojavljuju u toj stazi.

(i) $u_1 = u_{n+1}$: Ako pretpostavimo suprotno, da je $u_1 \neq u_{n+1}$, onda je u toj konturi neparan broj grana incidentan sa u_1 u toj stazi. Kako je stepen čvora u_1 paran, postoji grana $e \in E(G)$ koja nije sadržana u posmatranoj stazi. U tom slučaju bismo mogli kreirati dužu stazu od posmatrane, što dovodi do kontradikcije.

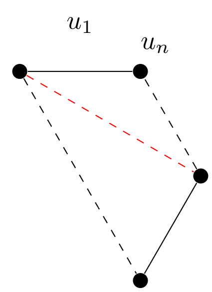
(ii) $\{u_1, \ldots, u_n\} = V(G)$:

Pretpostavimo suprotno, da postoje čvorovi koji nisu na posmatranoj stazi. Kako je G povezan, postoji grana $\{u_i, v\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, sa osobinom $v \notin \{u_1, \ldots, u_n\}$. U tom slučaju možemo konstruisati stazu veće dužine od posmatrane.



(iii) $\{e_1, \ldots, e_n\} = E(G)$:

Sada kada znamo da je posmatrana staza u stvari kontura koja sadrži sve čvorove grafa, pokazaćemo da su sve grane grafa na toj konturi. Ako pretpostavimo suprotno, da postoji grana koja nije na toj konturi, onda bismo ponovo mogli konstruisati dužu stazu od posmatrane.



3 Polu-Ojlerov Graf

3.1 Uvod

Polu-Ojlerov graf je graf koji sadrži Ojlerovu stazu (put koji prolazi kroz sve grane), ali ne i Ojlerov ciklus. Razlika u odnosu na Ojlerove grafove je u parnosti stepena čvorova: polu-Ojlerov graf ima tačno dva čvora neparnog stepena, dok Ojlerov graf ima sve čvorove parnog stepena. Svaki Ojlerov ciklus je i Ojlerova staza, ali staza nije nužno ciklus. Graf sa više od dva čvora neparnog stepena, kao što je Kenigsberški graf, nije ni Ojlerov ni polu-Ojlerov.

3.2 Definicija

Definicija 3.1. Polu-Ojlerov graf je povezan graf koji ima Ojlerovu stazu, ali ne i Ojlerov ciklus. To znači da postoji put koji prolazi kroz sve grane tačno jednom, ali počinje i završava se u različitim čvorovima. Ta dva čvora imaju neparan stepen, dok su svi ostali parni.

3.3 Uslov

Teorema 3.1. Graf je polu Ojlerov ako i samo ako ima tačno dva čvora neparnog stepena.

Dokaz. Za svaki čvor grafa koji nije početni ili krajnji u Ojlerovoj stazi, broj incidentnih grana koje se pojavljuju u stazi mora biti paran (ulazak i izlazak iz čvora). Preostala dva čvora – početni i krajnji – imaju po jednu dodatnu granu, pa je njihov stepen neparan.

Neka su u i v jedini čvorovi u G neparnog stepena. Napravimo novi graf G' tako što dodamo granu e između u i v (ona može biti nova ili paralelna postojećima). U G' svi čvorovi imaju paran stepen. Prema Teoremi 2.3, G' ima Ojlerov ciklus. Pošto ta tura sadrži granu e, njenim uklanjanjem dobijamo Ojlerov put u izvornom grafu G, koji počinje u u, a završava se u v.

4 Priferov kod i rekonstrukcija stabla

4.1 Definicija

Priferov kod predstavlja jedinstvenu sekvencu kojom se može kodirati bilo koje označeno stablo sa n čvorova. Kod je niz dužine $n - 2$, sastavljen od čvorova stabla.

Algoritam za dobijanje Priferovog koda iz stabla:

1. Dok god u stablu postoji više od dva čvora:
   - Nađi list (čvor stepena 1) sa najmanjom etiketom.
   - Upiši u kod suseda tog lista.
   - Ukloni list iz stabla.
2. Kada ostanu samo dva čvora, stani. Dobijeni niz je Priferov kod.

4.2 Rekonstrukcija stabla iz Priferovog koda

Za dat Priferov kod dužine $n - 2$, odgovarajuće stablo ima n čvorova označenih brojevima od 1 do n.

Koraci:

1. Napravi listu broja pojavljivanja svakog čvora u kodu (frekvenciju).
2. Formiraj listu svih čvorova 1 do n.
3. Dok ima elemenata u kodu:
   - Nađi najmanji čvor koji se ne pojavljuje u kodu (frekvencija 0).
   - Poveži ga sa prvim elementom koda.
   - Smanji frekvenciju tog elementa iz koda.
   - Ukloni taj list iz liste dostupnih čvorova.
4. Na kraju ostaju dva čvora koja nisu povezani , njih poveži.

4.3 Primer

Zadatak: Dati Priferov kod: [4, 1, 4, 4]. Naći stablo koje odgovara ovom kodu.

Rešenje:
Kod dužine 4 znači da stablo ima 6 čvorova: 1, 2, 3, 4, 5, 6

- Broj pojavljivanja u kodu:

$$1 \to 1, \quad 2 \to 0, \quad 3 \to 0, \quad 4 \to 3, \quad 5 \to 0, \quad 6 \to 0$$

- Kod: [4, 1, 4, 4]

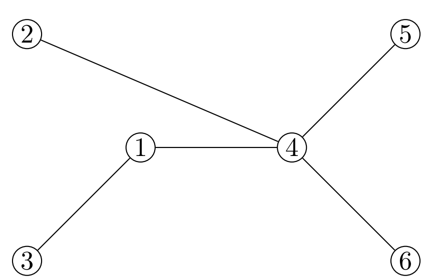
Koraci:

1. Najmanji čvor koji nije u kodu je 2, prvi u kodu je 4: dodaj granu $(2, 4)$ Ažuriramo: kod = [1, 4, 4], 2 se briše, 4 sada ima frekvenciju 2
2. Najmanji čvor van koda: 3, prvi u kodu: 1: dodaj granu $(3, 1)$ Ažuriramo: kod = [4, 4], 3 se briše, 1 ima frekvenciju 0
3. Najmanji čvor van koda: 1, prvi u kodu: 4: dodaj granu $(1, 4)$ Ažuriramo: kod = [4], 1 se briše, 4 ima frekvenciju 1
4. Najmanji čvor van koda: 5, prvi u kodu: 4: dodaj granu $(5, 4)$ Ažuriramo: kod = [], 5 se briše, 4 ima frekvenciju 0
5. Ostaju još čvorovi 4 i 6: dodaj granu $(4, 6)$

Stablo ima sledeće grane:

$$(2, 4),\ (3, 1),\ (1, 4),\ (5, 4),\ (4, 6)$$

Vizuelno:



5 Težinski graf

5.1 Definicija

Definicija Težinski graf je graf kod koga je svakoj grani pridružena određena vrednost (realan broj), koja se naziva težina te grane.

Formalno, težinski graf je uređena trojka:

$$G = (V, E, w),$$

gde je:

- V skup čvorova (temena),
- E skup grana (veza između čvorova),
- $w : E \to \mathbb{R}$ funkcija težine koja svakoj grani dodeljuje realnu vrednost.

Težine u grafovima mogu predstavljati različite veličine u zavisnosti od konteksta: dužinu puta, trošak, vreme putovanja, kapacitet veze, broj koraka i slično. Mogu biti pozitivne, nula, pa čak i negativne (u nekim algoritmima).

Težinski grafovi se koriste u mnogim algoritmima i oblastima, uključujući:

- Dijkstrin algoritam (za najkraći put),
- Primov i Kruskalov algoritam (za minimalno razapeto stablo),
- Bellman-Ford algoritam (za najkraće puteve sa negativnim težinama),
- Modelovanje saobraćaja, mreža, logistike i dr.

6 Algoritam za određivanje Ojlerove ture

Za pronalaženje Ojlerove ture u neusmerenom povezanom grafu u kojem su svi čvorovi parnog stepena, koristi se **Hirholcerov algoritam**. Algoritam efikasno konstruiše Ojlerov ciklus tako što kreće iz proizvoljnog čvora i "prati" grane dok se ne vrati u početni čvor, zatim proširuje ciklus dok ne obuhvati sve grane.

6.1 Opis algoritma

- Algoritam funkcioniše za neusmerene i usmerene grafove.
- Pretpostavlja se da graf zadovoljava uslov za postojanje Ojlerove ture.
- Svaka grana se koristi tačno jednom.

6.2 Pseudo-kod

Algorithm 1 Hirholcerov algoritam za pronalaženje Ojlerove ture

Require: Povezan neusmeren graf $G = (V, E)$ u kojem su svi čvorovi parnog stepena

Ensure: Lista čvorova koji čine Ojlerovu turu

```
Odaberi proizvoljan početni čvor v
Kreiraj praznu listu tura
Kreiraj praznu stek strukturu stek
Dodaj v na stek
while stek nije prazan do
  u ← vrh steka
  if u ima neusluženu granu then
    Izaberi bilo koju takvu granu {u, w}
    Ukloni granu {u, w} iz grafa
    Dodaj w na stek
  else
    Ukloni u sa steka i dodaj ga u listu tura
  end if
end while
return tura (koja predstavlja Ojlerovu turu)
```

Hirholcerov algoritam ima vremensku složenost $O(E)$, gde je E broj grana u grafu, jer svaka grana biva obrađena tačno jednom. Radi ispravno samo ako je graf povezan i svi čvorovi imaju paran stepen.

References

[1] Filip Marić. *Ojlerovi i Hamiltonovi putevi.* Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu. `rs.matf.bg.ac.rs/~filip/kiaa/02%20grafovi/05%20ojlerovi_hamiltonovi_putevi/hierholzer.html`

[2] *Ojlerov put.* Vikipedija — slobodna enciklopedija. `sr.wikipedia.org/wiki/Ojlerov_put`

[3] OjlerovGraf, skripta sa predavanja iz predmeta Diskretna matematika, Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu