Stabla

Bogdan Ljubinković, Miljan Jokić, Dalibor Nikolić, Lazar Jović, Anastazija Petrov, Marko Djordjević, Aleksa Nenadović i Meris Bilalović

Oktobar 2024, FTN

Sadržaj

Definicija stabla

- **Stablo**: Stablo je povezan graf koji ne sadrži konture. To znači da je acikličan i povezan, sa minimalnim brojem grana.
- **Osobine stabala**:
  - Ako graf ima n čvorova, stablo mora imati $n - 1$ grana.
  - Svaka dva čvora u stablu su povezana tačno jednom stazom (jedinstveni put).
  - Ako se iz stabla ukloni bilo koja grana, graf postaje nepovezan.

Leme za tvrdnje stabla

- **Lema 1**: Ako je graf sa n čvorova povezan i sadrži tačno $n-1$ grana, graf je stablo.
- **Lema 2**: Ako je graf sa n čvorova povezan i acikličan, graf je stablo.
- **Lema 3**: Ako je graf bez kontura i povezan, onda je stablo.
- **Lema 4**: Ako postoji jedinstveni put izmeu svakog para čvorova u grafu, graf je stablo.

Ekvivalentne tvrdnje za stablo

Tvrdnja 1: Graf $G = (V, E)$ je stablo ako je povezan i nema kontura.
Tvrdanje 2: Graf G je stablo ako je povezan i ima tačno $n - 1$ grana.
Tvrdanje 3: Graf G je stablo ako je acikličan i povezan.
Tvrdanje 4: Graf G je stablo ako je minimalno povezan (odnosno, nema višak grana koje bi mogle biti uklonjene).
Tvrdanje 5: Graf G je stablo ako za svaki par čvorova postoji tačno jedan put izmeu njih.

Lema 1: Graf sa n čvorova i $n-1$ grana je stablo ako je povezan

Lema 1: Ako graf $G=(V,E)$ sa n čvorova ima $n-1$ grana i povezan je, onda je stablo.
Dokaz: Pretpostavimo da graf G ima n čvorova i $n-1$ grana. Ako je graf povezan, to znači da postoji put izmeu svakog para čvorova.

- Ako bi graf imao konturu (ciklus), moglo bi se ukloniti barem jednu granu bez gubitka povezanosti, čime bi graf imao $n-2$ grane, što je kontradikcija jer smo pretpostavili da graf ima tačno $n-1$ granu.
- S obzirom na to da graf nema konture i povezan je, mora biti stablo, jer stablo mora biti povezan aciklični graf sa tačno $n-1$ granama.

Lema 2: Acikličan i povezan graf je stablo

Lema 2: Ako je graf $G = (V, E)$ acikličan i povezan, onda je stablo.

Dokaz: Ako je graf G acikličan i povezan, to znači da ne sadrži konture, a svaki čvor u grafu je povezan sa drugim čvorovima putem jedinstvenog puta.

- Ako bi graf imao više od $n-1$ grana, morao bi imati konture, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je acikličan.
- Ako graf ima n čvorova i manje od $n-1$ grana, graf bi bio nepovezan, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je graf povezan.

Stoga, graf sa n čvorova i $n-1$ grana, koji je acikličan i povezan, mora biti stablo.

Lema 3: Povezan graf bez kontura je stablo

Lema 3: Ako je graf $G = (V, E)$ povezan i nema kontura, onda je stablo.
Dokaz: Ako je graf povezan i nema kontura, to znači da za svaki par čvorova postoji tačno jedan put, jer povezanost znači postojanje puta izmeu svakog para čvorova, a odsustvo kontura znači da taj put ne sadrži ciklus.

- Ako bi graf imao više od $n - 1$ grana, morao bi imati konture, što je kontradikcija sa pretpostavkom da graf nema kontura.
- Dakle, graf sa n čvorova i $n - 1$ grana, koji je povezan i nema kontura, mora biti stablo.

Lema 4: Postoji jedinstveni put izmeu svaka dva čvora u stablu

Lema 4: Ako graf $G = (V, E)$ ima jedinstveni put izmeu svaka dva čvora, onda je stablo.

Dokaz: Pretpostavimo da graf G ima jedinstveni put izmeu svakog para čvorova. To znači da izmeu bilo koja dva čvora u grafu postoji tačno jedan put.

- Ako bi graf imao konturu, postojala bi dva različita puta izmeu najmanje dva čvora, što je kontradikcija sa pretpostavkom o jedinstvenom putu.
- Ako postoji jedinstveni put izmeu svakog para čvorova i graf je povezan, to znači da graf mora biti stablo, jer stablo ima tačno jedan put izmeu svaka dva čvora.

Teorema 1: Prost graf sa n čvorova i $n-1$ grana je stablo ako je povezan

Teorema 1: Prost graf sa n čvorova i $n-1$ grana je stablo ako je povezan.

Dokaz: Neka graf G bude prost graf sa n čvorova i $n-1$ grana, koji je povezan.

- Ako graf ima više od $n-1$ grana, mora imati konturu, što je kontradikcija jer stablo ne sadrži konture.
- Ako graf ima manje od $n-1$ grana, graf neće biti povezan, što je takoe kontradikcija.

Po definiciji, graf sa n čvorova i $n-1$ grana, koji je povezan, mora biti stablo.

Teorema 2: Graf sa $n-1$ grana i bez kontura je stablo

Teorema 2: Graf sa $n-1$ grana i n čvorova je stablo ako je povezan.
Dokaz: Neka graf G bude sa n čvorova i $n-1$ grana.
Pretpostavimo da je graf povezan i nema kontura.

- Ako graf ima $n-1$ grana i n čvorova, to je minimalni broj grana potreban za povezivanje svih čvorova. Svaka dodatna grana bi stvorila konturu, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da graf nema kontura.
- Dakle, graf sa n čvorova, $n-1$ grana i bez kontura je stablo.

Priferov kod

- **Definicija Priferovog koda**: Priferov kod je način kodiranja stabla tako da se svaka grana predstavlja sa jedinstvenim identifikatorom (kodom). Ovaj kod je korisno za identifikaciju grana u stablima i njihovoj manipulaciji.
- **Primer**: Za stablo sa čvorovima A, B, C i D i granama (A, B), (A, C), (C, D), Priferov kod može biti:

$$\{(A, B) : 1, (A, C) : 2, (C, D) : 3\}$$

Primer Priferovog koda koji odreuje stablo

- **Definicija**: Ako imamo Priferov kod za stablo, možemo rekonstruisati stablo koristeći ove identifikatore.
- **Primer**: Za Priferov kod $\{(A, B) : 1, (A, C) : 2, (C, D) : 3\}$, stablo koje odgovara ovom kodu je:

$$A \to B, A \to C, C \to D$$

Težinski graf

- **Definicija**: Težinski graf je graf u kojem svaka grana ima pridruženu vrednost (težinu). Težine mogu predstavljati različite metrike, kao što su udaljenost, vreme, cena, itd.
- **Primer**: Graf $G = (V, E)$ sa čvorovima $V = \{A, B, C, D\}$ i granama $E = \{(A, B), (B, C), (C, D)\}$, gde su težine grana $w(A, B) = 4$, $w(B, C) = 3$, i $w(C, D) = 2$.

Algoritmi za minimalno pokrivajuće stablo

- **Primov algoritam**:
  - Početni čvor se bira proizvoljno, a zatim se dodaju najjeftinije grane koje povezuju čvorove izvan stabla sa čvorovima unutar stabla.
- **Kruskalov algoritam**:
  - Grane se sortiraju po težinama, a zatim se postepeno dodaju u stablo ako ne formiraju konture, dok se svi čvorovi ne povežu.

Algoritam za najkraći put

- **Dijkstra algoritam**:
  - Algoritam za pronalaženje najkraćeg puta u težinskom grafu od izvornog čvora do svih drugih čvorova.
  - Radi tako što se najpre izračunaju najkraći putevi od izvornog čvora do svih ostalih čvorova, koristeći prioritetni red.