Hamiltonovi Grafovi

Grupa 4

Jul 2025

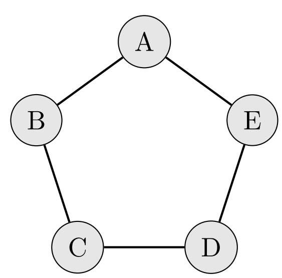
1 Istorijski osvrt na Hamiltonov graf

Hamiltonov graf je dobio ime po irskom matematičaru ser Williamu Rowanu Hamiltonu koji je 1857. godine predstavio igru poznatu kao *Igra Ikosaedra*, gde je cilj bio pronaći put kroz sve temene dodekaedra, prolazeći kroz svako teme tačno jednom i vraćajući se u početnu tačku. Ova ideja je u osnovi današnjeg pojma **Hamiltonov ciklus**.

Za razliku od Eulerovih ciklusa, koji zahtevaju da se svaka grana poseti tačno jednom, Hamiltonovi ciklusi zahtevaju da se svako **teme** poseti tačno jednom. Problem pronalaženja Hamiltonovog ciklusa je poznat kao *NP-težak problem* i ima široku primenu u optimizaciji, kompjuterskoj nauci, bioinformatici itd. [1]

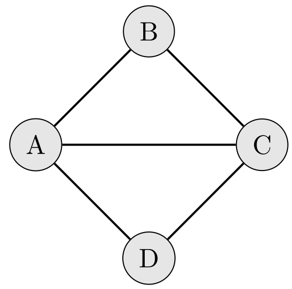
2 Definicije Hamiltonovog i polu-Hamiltonovog grafa

- **Hamiltonov ciklus** u grafu G je ciklus koji sadrži svako teme grafa tačno jednom.

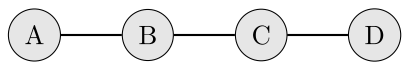


Slika 1: Hamiltonov ciklus: svako teme je posećeno tačno jednom, i ciklus se zatvara.

- **Hamiltonov graf** je graf koji sadrži Hamiltonov ciklus.
- **Hamiltonov put** je put koji sadrži svako teme tačno jednom, ali ne mora da se vrati u početno teme.

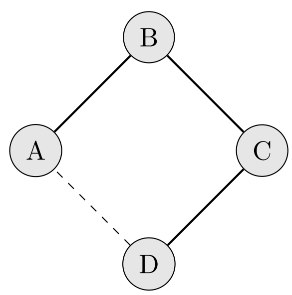


Slika 2: Hamiltonov graf: ciklus A–B–C–D–A prolazi kroz sva temena.



Slika 3: Hamiltonov put: svako teme je posećeno tačno jednom, ali se ne vraća na početak.

- **Polu-Hamiltonov graf** je graf koji sadrži Hamiltonov put, ali ne nužno i ciklus.



Slika 4: Polu-Hamiltonov graf: postoji put kroz sva temena, ali ne i ciklus.

[1]

3 Dovoljni uslovi za Hamiltonovost

Diracova teorema:

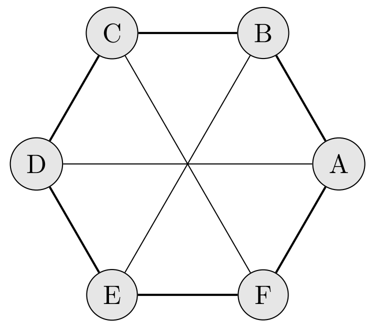
Neka je G prost graf sa $n \geq 3$ temena. Ako za svako teme $v \in V(G)$ važi da je stepen $\deg(v) \geq \frac{n}{2}$, tada je G Hamiltonov graf.

Napomena: Oreova teorema generalizuje Diracovu, jer ako je svaki stepen >= n/2, onda je i zbir bilo koja dva stepena >= n. Dokaz za Oreovu teoremu se nalazi u sledećoj sekciji.

Primer:

Graf sa 6 temena, gde je stepen svakog temena najmanje 3:

$$\deg(v) \geq \frac{6}{2} = 3$$



Slika 5: Graf sa 6 temena gde je $\deg(v) \geq 3$ za svako teme

Po Diracovoj teoremi, graf je Hamiltonov. [1]

Oreova teorema:

Neka je G prost graf sa $n \geq 3$ temena. Ako za svaka dva netesna temena u i v važi:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

tada je G Hamiltonov graf.

Zadatak 1. *Dokazati Oreovu teoremu.*

Rešenje. Pretpostavimo suprotno – da graf G ne sadrži Hamiltonov ciklus. Dokažemo teoremu kontradikcijom.

(a) Dodajemo grane u G jednu po jednu tako da u svakom trenutku novi graf ne sadrži Hamiltonov ciklus. Ovaj postupak mora stati jer broj mogućih grana je konačan, a ako bi se dodale sve moguće grane, dobili bismo potpuni graf koji svakako ima Hamiltonov ciklus.

Nakon što dodavanje stane, dobijamo graf H koji: - ima ista temena kao G, - ne sadrži Hamiltonov ciklus, - ali dodatak samo jedne nove grane bi proizveo Hamiltonov ciklus.

(b) Po konstrukciji, dodavanjem jedne grane u H dobijamo Hamiltonov ciklus. Ako iz tog ciklusa uklonimo dodatu granu, preostaje Hamiltonov put u H.

Dakle, H sadrži Hamiltonov put:

$$v_1, v_2, \ldots, v_n.$$

(c) Čvorovi v_1 i v_n nisu susedni u H (jer H nema ciklus). Dakle, nisu susedni ni u G. Po pretpostavci Oreove teoreme:

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n.$$

Broj temena koja nisu susedna sa v_n je:

$$n - 1 - \deg(v_n) = n - \deg(v_n) - 1,$$

ali uključujući v_n, ukupan broj temena koja nisu susedna sa v_n (uključujući i njega samog) je:

$$n - \deg(v_n).$$

Dakle:

$$n - \deg(v_n) \leq \deg(v_1).$$

(d) Definišimo skup S kao skup temena koja se neposredno nalaze *pre* temena koja su susedna sa v_1 u Hamiltonovom putu. Za svako teme koje je susedno sa v_1, njegovo prethodno teme u putu dodaje se u S. Pošto v_n nema naredno teme (nalazi se na kraju puta), on ne pripada skupu S. Dakle, $|S| = \deg(v_1)$ i $v_n \notin S$.

(e) Iz (c) i (d) zaključujemo da postoji bar jedno teme $v_k \in S$ koje je susedno sa v_n. Po definiciji skupa S, grane $v_1 v_{k+1}$ i $v_k v_n$ su prisutne u H. Gledajmo sada redosled:

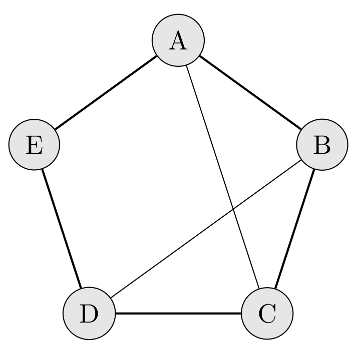
$$v_1, v_2, \ldots, v_k, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{k+1}, v_1$$

(f) Ovaj put je Hamiltonov ciklus! Time dobijamo kontradikciju, jer je H po konstrukciji bio graf koji nema Hamiltonov ciklus. Dakle, početna pretpostavka da G ne sadrži Hamiltonov ciklus je pogrešna.

Zaključak: Oreova teorema je dokazana.

□

Primer:
[1]



Slika 6: Graf sa 5 temena u kom zbir stepena svaka dva netesna temena zadovoljava $\deg(u) + \deg(v) \geq 5$ — po Oreovoj teoremi graf je Hamiltonov.

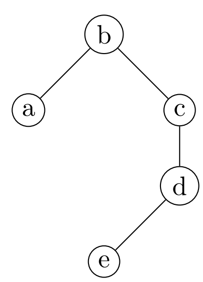
Neophodni uslovi da graf bude Hamiltonov

Iako ne postoji jednostavan i potpun kriterijum za postojanje Hamiltonovog ciklusa, postoje neki **neophodni uslovi** koje graf mora ispunjavati kako bi mogao imati Hamiltonov ciklus. Ovi uslovi se mogu koristiti da pokažemo da neki graf *ne može* biti Hamiltonov.

- Ako graf ima temena stepena 1, on ne može imati Hamiltonov ciklus. Svako teme u Hamiltonovom ciklusu mora imati stepen bar 2 (ulaz i izlaz iz temena).
- Ako graf ima teme stepena 2, a oba incidentna grane nisu uključena, ciklus nije moguć.
- Hamiltonov ciklus ne može sadržati manji ciklus u sebi koji izoluje deo grafa.

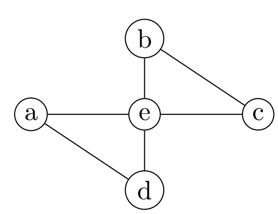
[1]

Primer 1: Graf sa temenom stepena 1 ne može biti Hamiltonov



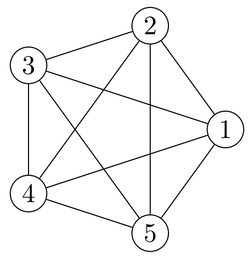
Graf G ima teme e stepena 1. Prema neophodnom uslovu, ovakav graf ne može imati Hamiltonov ciklus. Demonstrira uslov 1.

Primer 2: Graf gde bi Hamiltonov ciklus morao koristiti više od dve grane iz temena stepena 2 (nemoguće)



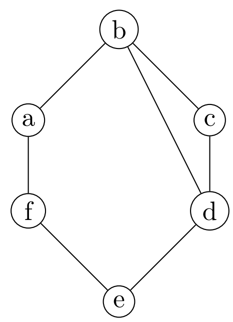
Graf H ima čvorove a, b, d i e stepena 2. Svaki njihova grana bi morala biti deo Hamiltonovog ciklusa. Teme c bi tada moralo imati stepen 4 u ciklusu, što nije moguće. Dakle, uslov: ***nema više od dve grane iz istog temena*** *u ciklusu je prekršen. Demonstrira uslov 2.*

Primer 3: Kompletan graf je Hamiltonov



Graf ispunjava sve uslove jer je potpun graf. Svaka permutacija temena daje Hamiltonov ciklus. Demonstrira dovoljan uslov: ako je graf potpun, onda uvek postoji Hamiltonov ciklus.

Primer 4: Manji ciklus izoluje ostatak grafa — nema Hamiltonovog ciklusa



Graf sadrži manji ciklus (a-b-c-d-e-f-a), ali uključivanje ovog zatvorenog ciklusa onemogućava obuhvatanje dodatnih temena bez narušavanja uslova da se svako teme poseti tačno jednom. Dakle, graf ne može imati Hamiltonov ciklus. Demonstrira uslov 3.

Dokazi za navedene neophodne uslove

Uslov 1: Ako graf ima teme stepena 1, ne može biti Hamiltonov.

Dokaz:U Hamiltonovom ciklusu, svako teme mora biti povezano sa tačno dve grane – jedna za ulazak i jedna za izlazak iz temena. Ako neko teme ima stepen 1, ono može biti uključeno u najviše jedna grana, što onemogućava zatvoreni ciklus koji prolazi kroz sva temena. Dakle, graf sa temenom stepena 1 ne može imati Hamiltonov ciklus.

[1]

Uslov 2: Ako neko teme ima stepen 2, obe grane moraju biti u Hamiltonovom ciklusu.

Dokaz:Ako neko teme ima stepen 2, Hamiltonov ciklus mora koristiti obe grane incidentne sa . Ako bar jedan od te dve grane nije deo ciklusa, tada ciklus neće moći ni da uđe ni da izađe iz tog temena, čime se prekida kontinuitet Hamiltonovog ciklusa. Dakle, sve grane incidentne sa temenom stepena 2 moraju biti u Hamiltonovom ciklusu.

[1]

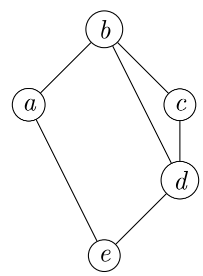
Uslov 3: Hamiltonov ciklus ne može sadržati manji ciklus koji izoluje deo grafa.

Dokaz:Hamiltonov ciklus mora posetiti svako teme tačno jednom. Ako se u toku konstrukcije Hamiltonovog ciklusa formira manji zatvoren ciklus koji uključuje samo deo temena grafa, onda ostatak grafa ostaje nepovezan sa tim ciklusom, i neće moći biti obuhvaćen u istom Hamiltonovom ciklusu. To vodi do kontradikcije sa definicijom Hamiltonovog ciklusa.

[1]

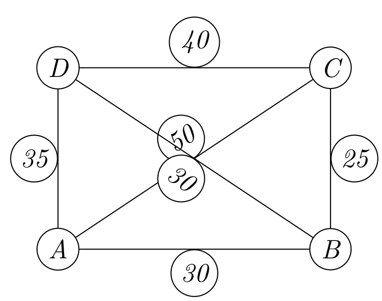
Zadaci

Zadatak 2. *Pokaži da sledeći graf ne može imati Hamiltonov ciklus.*



Rešenje. Uoči da teme b ima stepen 3. Ako pokušamo da konstrušemo Hamiltonov ciklus, svako teme mora imati tačno 2 incidentna brida u ciklusu. Međutim, za teme b ne možemo izabrati samo 2 brida a da i ostali čvorovi ostanu povezani u jedinstveni ciklus. Pokušaj konstruisanja pokazuje da se ciklus ili prekida ili dolazi do ponavljanja temena. Dakle, graf ne može imati Hamiltonov ciklus. Ovo demonstrira **neophodni uslov** da teme u Hamiltonovom ciklusu koristi tačno 2 brida. [3] □

Zadatak 3. *Nađi najkraći Hamiltonov ciklus u sledećem težinskom grafu (problem trgovačkog putnika - TSP).*



Rešenje. Enumerišimo moguće Hamiltonove cikluse:

- A–B–C–D–A: $30 + 25 + 40 + 35 = 130$
- A–B–D–C–A: $30 + 30 + 25 + 50 = 135$
- A–D–C–B–A: $35 + 40 + 25 + 30 = 130$
- A–C–B–D–A: $50 + 25 + 30 + 35 = 140$

Najkraći ciklusi: A–B–C–D–A i A–D–C–B–A sa ukupnom težinom 130.
Napomena: Ovaj tip problema se zove problem trgovačkog putnika (TSP). U opštem slučaju, problem se ne može efikasno rešiti za veći broj gradova jer broj mogućih Hamiltonovih ciklusa eksponencijalno raste. [3] □

Literatura

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete mathemathics and its appliacations Seventh Edition*, McGraw-Hill, 2012

[2] Dragan Stevanović i Miroslav Ćirić i Slobodan Simić i Vladimir Baltić, *DISKRETNA MATEMATIKA OSNOVE KOMBINATORIKE I TEORIJE GRAFOVA*, Matematički institut u Beogradu, 2007

[3] Sussana S. Epp, *Discrete Mathematics with Applications*, Cengage Learning, Inc. 2019

[4] Richard A. Brualdi, *Introductory Combinatorics, Fifth Edition*, Pearson Education,2009

[5] Jiri Matoušek, Jaroslav Nešetril *Invitation to Discrete Mathematics, 2nd edition*, Oxford University Press, 2008

[6] Wikipedia $DiscreteMathematics$