

dm5

grupa10

Novembar 2024

1 Rekurentne relacije

Kada imamo neki broj pocetnih clanova i neki broj neodredenih clanova, ako te neodredene clanove mozemo da odredimo koristeći neku vrstu relacije koja koristi barem jedan pocetni clan, onda kazemo da je niz opisan pomocu rekurentne relacije.

Definicija 1 *Neka je $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, \dots)$ niz kompleksnih brojeva. Ako postoji funkcija $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sa osobinom da za svako $n \geq k$ vazi*

$$a_n = F(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}),$$

onda kazemo da je ovo rekurentna relacija reda k koja opisuje niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$

Najjednostavniji primeri bi bili aritmeticki i geometrijski niz.

Primer 1 *Recimo da imamo sledece nizove:*

- (i) aritmeticki niz ciji je prvi clan a , a razlika je d*
- (ii) geometrijski niz ciji je prvi clan je a , a kolicnik je 1*

(i) Za clanove aritmetickog niza vazi:

$$a_0 = a \tag{1}$$

$$a_n = a_{n-1} + d, n \geq 1 \tag{2}$$

(ii) Za clanove geometrijskog niza vazi:

$$a_0 = b \tag{3}$$

$$a_n = q \cdot a_{n-1}, n \geq 1 \tag{4}$$

Primer 2 *Niz brojeva*

$$\{0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$$

predstavlja *Fibonaccijev niz*. *Pocetni clanovi su 0 i 1, a svi ostali su određeni tako sto sabiramo poslednja dva. Clanovi ovog niza se mogu zapisati kao:*

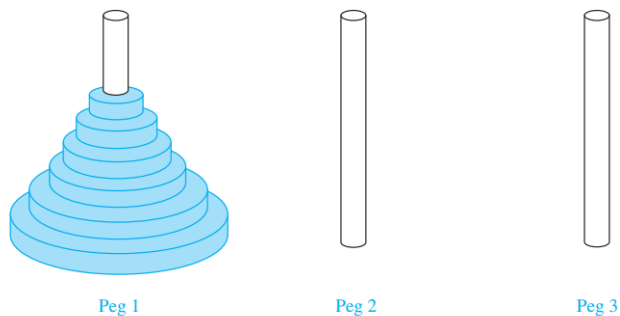
$$f_0 = 0 \quad (5)$$

$$f_1 = 1 \quad (6)$$

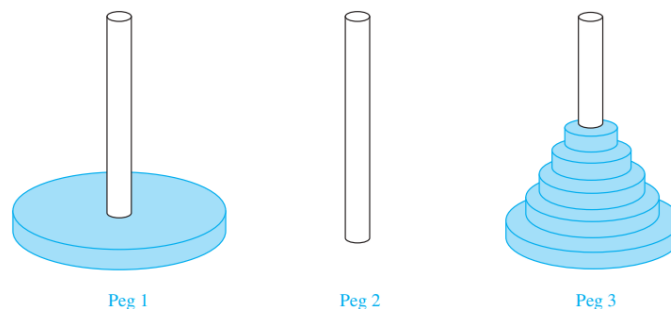
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 2 \quad (7)$$

Primer 3 *Hanojska kula - recimo da imamo tri stapa, gde na jednom od stapova ima n diskova gde je svaki sledeci disk veci od prethodnog. Koliko nam treba poteza da pomerimo sve diskove na neki drugi stap ako:*

1. *u svakom potezu mozemo pomeriti tacno jedan disk*
2. *veci disk nikada ne sme da se stavi na manji*



Slika 1: Pocetno stanje Hanojske kule



Slika 2: Stanje kule nakon h_{n-1} poteza

Resenje: Neka je h_n najmanji broj poteza koji je potreban da bi se n diskova prebacilo sa jednog stapa na drugi. Da bismo prebacili $n = 1$ disk potreban nam je jedan potez, odnosno $h_1 = 1$. Za $n = 2$, potrebno nam je $h_2 = 3$ poteza. Treba primetiti da ako imamo n diskova, prvo je potrebno pomeriti sve diskove koji su na tom poslednjem n -tom disku, kako bismo pomerili taj disk, pa onda vratili sve diskove nazad na najveći disk. Ovo se može zapisati kao $h_n = h_{n-1} + 1 + h_{n-1}$ odnosno kao $h_n = 2h_{n-1} + 1$

Treba napomenuti da su svi primeri koji su navedeni zapravo zapisani **generatorno**, odnosno da bismo izrazili neki n -ti element, eksplicitno su nam bili potrebni neki elementi koji su prethodili taj element. Ovakav način traženja elemenata niza nije efikasan ako trazimo neke krajnje elemente niza jer bismo prvo morali da nađemo sve elemente pre tog kojeg trazimo.

Definicija 2 Ako želimo da izrazimo neki element rekurentnog niza kao funkciju a koja zavisi od svog rednog broja u nizu, onda se ta funkcija naziva **resenje rekurentne relacije**, odnosno ako imamo funkciju $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{C}$, gde je $n \in \mathbb{N}_0$, ta funkcija glasi:

$$a_n = a(n)$$

Primer 4 *Da bismo nasli resenje rekurentne relacije Hanojske kule, mozemo da koristimo metodu **zamene unazad**:*

$$h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad (8)$$

$$= 2(2h_{n-2} + 1) + 1 = 2^2h_{n-2} + 2 + 1 \quad (9)$$

$$= 2^2(2h_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3h_{n-3} + \dots + 2 + 1 \quad (10)$$

$$\vdots \quad (11)$$

$$= 2^{n-1}h_1 + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \quad (12)$$

$$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \quad (13)$$

$$= 2^n - 1 \quad (14)$$

U prethodnom primeru, dosli smo do pretpostavke kog oblika je resenje rekurentne relacije. U sledecem primeru cemo formalno verifikovati da nije doslo do greske u zakljucivanju (posebno u delu koji sadrzi "...")

Primer 5 *Neka je $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zadat na sledeci nacin:*

$$h_1 = 1 \quad (15)$$

$$h_n = 2h_{n-1} + 1, n \geq 2 \quad (16)$$

Dokazati da je $h_n = 2^n - 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$

Resenje: Indukcijom po n.

Baza n = 1: $h_1 = 2^1 - 1 = 1$

Induktivna pretpostavka (T_n): $h_n = 2^n - 1$

Induktivni korak ($T_n \rightarrow T_{n+1}$)

Koristeći datu rekurentnu relaciju i induktivnu pretpostavku, pokazacemo da je $h_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

$$a_{n+1} = 2h_n + 1 \quad (17)$$

$$= 2 \cdot (2^n - 1) + 1 \quad (18)$$

$$= 2^{n+1} - 2 + 1 \quad (19)$$

$$= 2^{n+1} - 1 \quad (20)$$

2 Linearne rekurentne relacije

2.1 Metoda zamene unazad

Recimo da zelimo da vidimo koji je n -ti fibonacijev broj. Formula za to je:

$$\begin{aligned}
f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\
&= (f_{n-2} + f_{n-3}) + f_{n-2} \quad \text{zamenimo} \\
&= 2f_{n-2} + f_{n-3} \quad \text{sredimo} \\
&= 2(f_{n-3} + f_{n-4}) + f_{n-3} \quad \text{zamenimo} \\
&= 3f_{n-3} + 2f_{n-4} \quad \text{sredimo} \\
&= 3(f_{n-4} + f_{n-5}) + 2f_{n-4} \quad \text{zamenimo} \\
&= 5f_{n-4} + 3f_{n-5} \quad \text{sredimo} \\
&= 5(f_{n-5} + f_{n-6}) + 3f_{n-5} \quad \text{zamenimo} \\
&= 8f_{n-5} + 5f_{n-6} \quad \text{sredimo}
\end{aligned}$$

Kako da prepoznamo sablon? Koeficijenti posle sređivanja su (2,1), (3,2), (5, 3), (8, 5). Ovo lici na svaka 2 uzastopna fibonacijeva broja

n	Fibonacci(n)
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

Table 1: Tabela fibonacijevih brojeva

Izgleda kao da se koeficijenti pojavljuju u vidu parova (f_k, f_{k-1})

$$\begin{aligned}
&= f_k f_{n-k} + f_{k-1} f_{n-(k+1)} \quad k = n-1 \\
&= f_{n-1} f_{n-(n-1)} + f_{n-1-1} f_{n-(n-1+1)} \\
&= f_{n-1} f_1 + f_{n-2} f_0 \\
&= f_{n-1} + f_{n-2}
\end{aligned}$$

Vratili smo se gde smo poceli. Ova metoda kojom smo pokusali da pronademo zatvorenu formu za f_n ne radi.

2.2 Homogene linearne jednacine sa konstantim koeficijentima

Definicija 3 Rekurenta relacija nekog niza a_n je *homogena* ako svaki clan sa desne strane jednakost rekurentne formule sadrzi faktor a_j za neki prirodan broj j

Definicija 4 Rekurenta relacija sadrzi *konstante koeficijente* ako se n ne pojavljuje ni uz jedan član a_j (osim kao subskript)

Definicija 5 Rekurenta relacija je *linearna* ako svaki član sadrži najviše jedan faktor a_j i nijedan faktor a_j se ne pojavljuje kao delilac, eksponent ili deo neke složenije funkcije

Rekurentna relacija	Homogena	Linearna	Konstanti koef.
$a_n = 5a_{n-1} + 7$	ne: $+7$	da	da
$a_n = (n^2+4)a_{n-1}+8a_{n-2}$	da	da	ne: n^2+4
$a_n = 5a_{n-1}+3n$	ne: $+3n$	da	da: $3n$ nije koeficijent a_j
$a_n = 3a_{n-1}a_{n-2}+4a_{n-3}$	da	ne: $a_{n-1}a_{n-2}$	da
$a_n = 4a_{n-1}^2+5a_{n-2}$	da	ne: a_{n-1}^2	da
$a_n = \sin(a_{n-1})+n$	ne: $+n$	ne: $\sin(a_{n-1})$	da
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	da	da	da

Table 2: Primeri

Definicija 6 Rekurenta linearna homogena relacija sa konstantnim koeficijentima je *stepena k* ako može da se zapise u obliku:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

za neko $1 \leq k$ i $c_k \neq 0$.

Konstanta k se zove stepen rekurentne relacije, a c_j su koeficijenti.

Rekurentna relacija	Stepen
$a_n = 3a_{n-1} + 7a_{n-2}$	2
$a_n = 5a_{n-1}$	1
$a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-3}$	3
$a_n = -3a_{n-2} + 6a_{n-3} - 9a_{n-5}$	5

Table 3: Primeri

Primetimo da je $a_n = 0$ uvek resenje svake linearne homogene relacije sa konstantnim koeficijentima, koje se obicno naziva i **trivijalno resenje**

2.3 karakteristicna jednacina

Pretpostavimo da postoji realan (kompleksan) broj $r \neq 0$ takav da

$$a_n = r^n \text{ za svako } n > k$$

Sada kada zamenimo to za svaki element dobijamo

$$\begin{aligned} r^n &= c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \dots + c_k r^{n-k} \\ &= r^{n-k} (c_1 r^{k-1} + c_2 r^{k-2} \dots + c_{k-1} r + c_k) \end{aligned}$$

Sledi:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \dots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Definicija 7 Karakteristicna jednacina rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$$

je:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \dots - c_{k-1} x - c_k = 0$$

Teorema Pretpostavimo da karakteristicna jednacina rekurentne relacije stepena k ima k razlicitih korena r_1, r_2, \dots, r_k . Tada za bilo koji odabir konstanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ mozemo zatvorenom formom da generisemo resenje rekurentne relacije oblikom:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \dots + \alpha_k r_k^n$$

Međutim, ukoliko je dato prvih k elemenata niza a_0, a_1, \dots, a_{k-1} , onda je uvek moguće naći jedinstvene koeficijente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ za koje važi teorema.

Dokaz(1) Dokazacemo za rekurentnu relaciju koja je stepena 2. Koristi se ista ideja za veće k . Rekurentna relacija je oblika:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Njena karakteristična jednačina je oblika:

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0$$

Sa korenima r_1 i r_2 . Želimo da dokazemo da važi:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

Zamenom i pretpostavkom da je $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, pa onda sređivanjem sledi:

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \\ &= c_1 (\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2 (\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= (c_1 \alpha_1 r_1^{n-1} + c_2 \alpha_1 r_1^{n-2}) + (c_1 \alpha_2 r_2^{n-1} + c_2 \alpha_2 r_2^{n-2}) \\ &= \alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2) \end{aligned}$$

Sada, desnu stranu kada prebacimo levo, a levi deo zamenimo pretpostavkom, nastaje:

$$\begin{aligned} \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n - (\alpha_1 r_1^{n-2} (c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (c_1 r_2 + c_2)) &= 0 \\ \alpha_1 r_1^{n-2} (r_1^2 - c_1 r_1 - c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2} (r_2^2 - c_1 r_2 - c_2) &= 0 \end{aligned}$$

Znamo da je $r_1^2 - c_1 r_1 - c_2 = 0$ i da je $r_2^2 - c_1 r_2 - c_2 = 0$, jer su to koreni karakteristične jednačine. Dokaz je ovim završen.

Dokaz(2) Za dokazivanje drugog dela, moramo da izaberemo konstante tako da prvih k elemenata zadovoljava relaciju.

$$\begin{aligned} \alpha_1 r_1^0 + \alpha_2 r_2^0 + \dots + \alpha_k r_k^0 &= a_0 \\ \alpha_1 r_1^1 + \alpha_2 r_2^1 + \dots + \alpha_k r_k^1 &= a_1 \\ &\dots \\ \alpha_1 r_1^{k-1} + \alpha_2 r_2^{k-1} + \dots + \alpha_k r_k^{k-1} &= a_{k-1} \end{aligned}$$

Ovako smo dobili sistem od k linearnih jednačina sa nepoznatim $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Determinanta ovog sistema je Vandermondova determinanta, a posto znamo da su svaka dva r_i i r_j razlicita, determinanta je razlicita od 0 pa je sistem jedinstveno određen.

$$\det \begin{pmatrix} r_1^0 & r_2^0 & \dots & r_k^0 \\ r_1^1 & r_2^1 & \dots & r_k^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & r_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (r_i - r_j)$$

Teorema Ako karakteristična jednačina:

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \dots - c_{k-1}x - c_k = 0$$

Ima korene r_1, r_2, \dots, r_l redom višestrukosti k_1, k_2, \dots, k_l tada je opšte rešenje rekurentne relacije dato oblikom

$$\begin{aligned} a_n = & (\alpha_{11} + \alpha_{12}n + \dots + \alpha_{1k_1}n^{k_1-1})x_1^n + \\ & (\alpha_{21} + \alpha_{22}n + \dots + \alpha_{2k_2}n^{k_2-1})x_2^n + \\ & \dots + \\ & (\alpha_{l1} + \alpha_{l2}n + \dots + \alpha_{lk_l}n^{k_l-1})x_l^n + \end{aligned}$$

Isto kao prethodno, konstante $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{lk}$ su jedinstveno određene početnim uslovima.

2.4 Nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima

U ovom delu ćemo posmatrati rekurentne relacije oblika

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k} + f(n)$$

gde su c_1, c_2, \dots, c_k konstante, $k \geq 1, c_k \neq 0$, a f funkcija skupa prirodnih brojeva. Ukoliko zamenimo $f(n)$ sa nulom, smatracemo da je to odgovarajuća rekurentna relacija.

Teorema Ako je $a_n^{(p_1)}$ parikularno rešenje nehomogene linearne rekurentne relacije sa konstantnim koeficijentima, tada za svako rešenje a_n njene jednačine postoji rešenje $a_n^{(h)}$ odgovarajuće homogene rekurentne relacije sa osobinom

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p_1)}, n \geq 0$$

Teorema Neka je

$$f(n) = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0) s^n, b_i \in \mathbb{R}$$

Ako je s koren karakteristične jednačine višestrukosti l (ako nije koren, tada je $l = 0$), onda postoji partikularno rešenje oblika

$$a_n^p = n^l (c_m n^m + c_{m-1} n^{m-1} + \dots + c_1 n + c_0) s^n$$

Teorema Ako su $a_n^{(p_1)}$ i $a_n^{(p_2)}$ redom rešenja nehomogenih rekurentnih relacija

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f_1(n), \\ a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f_2(n) \end{aligned}$$

onda je $a_n^{(p_1)} + a_n^{(p_2)}$ resenje nehomogene rekurentne relacije

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} + f_1(n) + f_2(n)$$

3 Analiza vremenske složenosti algoritama

3.1 Binarna pretraga

Binarna pretraga je rekurzivno definisan algoritam za pretragu koji radi nad sortiranom nizu. Radi u sledećim koracima:

1. Gledaj broj u sredini niza, a . Ako je a manji od broja kojeg tražimo, odbacujemo sve brojeve pre a . Ako je veći, odbacujemo sve brojeve posle a . Ako je jednak, vraćamo poziciju i algoritam je završen.
2. Rekurzivno radi korak 1. nad novim podnizom, sve dok ili nađemo broj koji smo tražili, ili nam ponestane brojeva u nizu.

Kako je algoritam rekurzivno definisan, njegovo vreme izvršavanja (runtime) možemo prikazati preko rekurentne relacije:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + c$$

Zato što svaki put uzimamo sredinu elemenata, svaki put delimo niz na dve polovine. Ukupno vreme izvršavanja za n elemenata je vreme izvršavanja za $\frac{n}{2}$ elemenata, plus koliko nam je potrebno da poredimo sredinu sa traženim brojem, to jest konstantno vreme c .

Rešavajući relaciju dobijamo:

$$T(n) = T(1) + c \log n$$

To jest:

$$T(n) = O(\log n)$$

3.2 Divide-and-conquer algoritmi

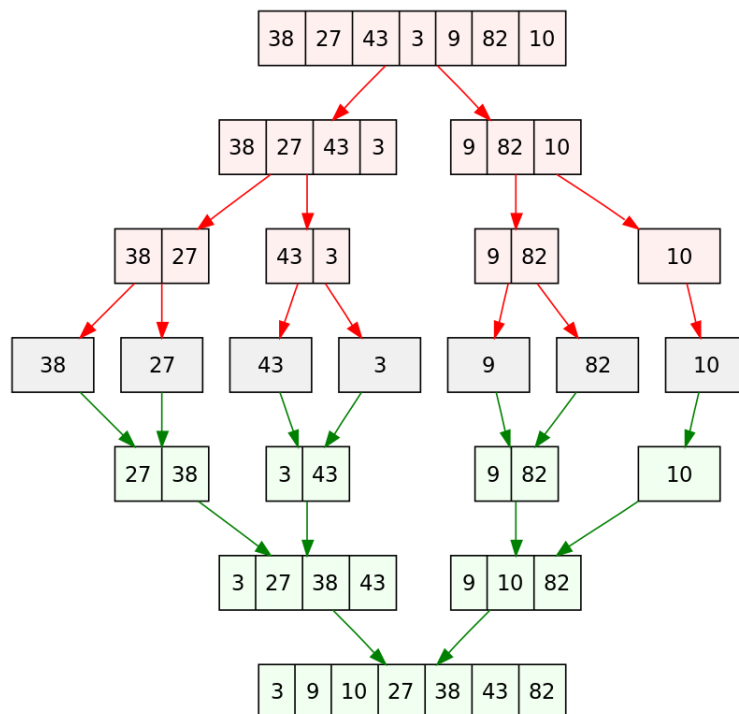
Divide-and-conquer algoritmi po definiciji rade rekurentno. Osnovna ideja je da se problem podeli na male pod-probleme koji se lakše rešavaju, sa dodatnom napomenom da će se rešenja pod-problema morati spojiti u kompletno rešenje na kraju. Znači, koraci ovakvog algoritma su:

1. Podeli ulaz na dva ili više manjih delova sa istom strukturom.
2. Rekurzivno izvrši algoritam nad delovima, dok oni nisu dovoljno mali da se reše.
3. Spoji rešenja u kompletno rešenje početnog ulaza.

3.2.1 Mergesort

Konkretni primer divide-and-conquer algoritma, mergesort radi na sledeći način:

1. Prepolovi ulaz.
2. Rekurzivno pozovi funkciju nad polovinama.
3. Spoji sortirane nizove.



Bazični slučaj je kada je niz dužine 1, jer je takav niz po definiciji sortiran. Funkcija spajanja će raditi tako što poredi prve elemente iz oba ulazna niza i manji stavlja u izlazni niz dok oba ulaza nisu prazna.

Za ovaj algoritam odgovara rekurentna relacija:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

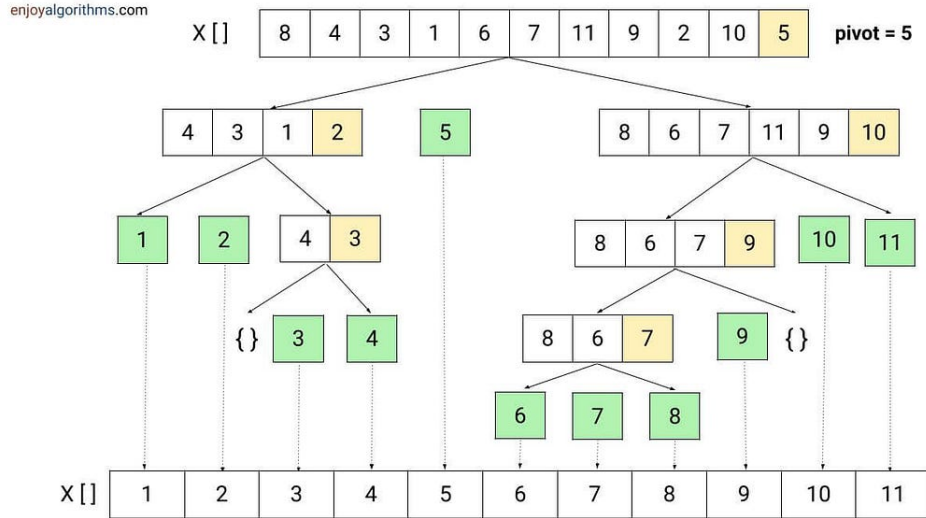
To jest, trebaće nam onoliko vremena da odradimo mergesort nad nizom od n podataka koliko nam bude trebalo da odradimo mergesort nad njegovim polovinama, i još da te polovine spojimo, što se odvija u $O(n)$ vremenu. Rešavanjem ove relacije dobijamo:

$$T(n) = nT(1) + O(n) \log n$$

$$T(n) = O(n \log n)$$

3.2.2 Quicksort

Quicksort radi slično kao i mergesort, sa razlikom da ne delimo niz na pola, već uzimamo nasumičan element a (pivot), i delimo niz na elemente koji su veći od a i one koji su manji od a .



Sa tim da je biranje pivota nasumično, razmatraćemo najgori i prosečan slučaj odvojeno.

U prosečnom slučaju, pivot će biti izabran tako da podeli niz na dva jednaka dela. Ovde imamo istu situaciju kao i u mergesort:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

Umesto spajanja, kao što je bilo u mergesort-u, $O(n)$ ovde predstavlja vreme za deljenje niza. Sa tim da je relacija ista, i vremenska složenost quicksort-a u prosečnom slučaju je ista kao i vremenska složenost mergesort-a, to jest $O(n \log n)$.

U najgorem slučaju, uvek biramo pivot koji je najveći ili najmanji broj u nizu, i relacija izgleda ovako:

$$T(n) = T(n-1) + O(n)$$

Rešavanjem ove relacije, dobijamo:

$$T(n) = T(1) + O(n)(n-1)$$

To jest, u najgorem slučaju vremenska složenost algoritma je $O(n^2)$. Međutim, ovaj slučaj nije preterano verovatan (šansa da slučajno izaberemo najmanji

ili najveći broj n puta zaredom je $\frac{2^{n-1}}{n!}$), pa se često uzima da je složenost algoritma $O(n \log n)$.

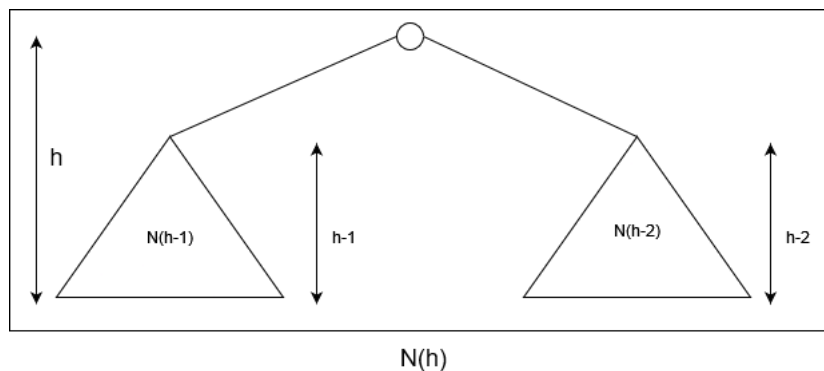
4 AVL binarna stabla

Recimo da hoćemo da otkrijemo kolika nam je visina AVL stabla sa n čvorova u najgorem slučaju.

Da bi postigli ovo, gledamo suprotno: ako imamo visinu h , koji je najmanji broj čvorova? Minimalan broj čvorova za neku visinu ćemo označiti sa $N(h)$.

Uzmimo AVL stablo. Koren ima visinu h , i po definiciji visine jedno od njegove dece ima visinu $h - 1$. U AVL stablu se visina dece ne može razlikovati za više od jedan, tako da za visinu drugog deteta možemo uzeti ili $h - 1$ ili $h - 2$.

Da bi obezbedili najgori slučaj, gledamo da stablo ne bude balansirano, tj. da je visina drugog deteta $h - 2$.



Ovim smo zapravo definisali rekurentnu relaciju:

$$N(h) = N(h - 1) + N(h - 2) + 1$$

To jest broj čvorova u stablu visine h je zbir broja čvorova u svojim podstablama, plus koren. Bazni slučajevi relacije su $N(1) = 1$ i $N(2) = 2$. Izrazimo $N(h - 1)$ i vraćamo u jednačinu:

$$\begin{aligned} N(h - 1) &= N(h - 2) + N(h - 3) + 1 \\ N(h) &= (N(h - 2) + N(h - 3) + 1) + N(h - 2) + 1 = 2N(h - 2) + N(h - 3) + 1 \end{aligned}$$

Sa tim da je $N(h - 3) \geq 1$, možemo izvući:

$$N(h) > 2N(h - 2)$$

Iz ovoga vidimo da se $N(h)$ barem duplira kada se visina poveća za dva. Tako da:

$$\begin{aligned} N(h) &> 2^{\frac{h}{2}} \\ \log_2 N(h) &> \frac{h}{2} \\ h &< 2 \log_2 N(h) \end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da je visina stabla sigurno manja od logaritma broja čvorova u najgorem slučaju, to jest visina je $O(\log n)$.

5 Primjena rekurentnih relacija u računarstvu

5.1 Fibonačijev niz

Fibonačijev niz je niz brojeva u kojem je svaki broj zbir dva prethodna broja. Niz počinje sa dva inicijalna uslova:

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$

Svaki sledeći član niza se izračunava tako što se saberu prethodna dva:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Primjer Fibonačijevog niza:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Fibonačijev niz ima osobinu zlatnog presjeka, jer ako se podijele uzastopni članovi niza njihov međusoban odnos teži zlatnom presjeku $\phi \approx 1.618$. Osobina zlatnog presjeka se pojavljuje u prirodi, arhitekturi i umjetnosti u velikoj mjeri.

5.2 Faktorijel broja

Faktorijel broja n , označava se sa $n!$ i predstavlja proizvod svih pozitivnih cijelih brojeva do tog broja, zajedno sa njim. Formalno, faktorijel se definiše kao:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{ako je } n = 0 \\ n \cdot (n-1)!, & \text{ako je } n > 0 \end{cases}$$

Primjeri faktorijela broja:

- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Kao što se da videti, faktioijel raste eksponencijalno što je jedna od glavnih osobina faktorijela.

Algorithm 1 Generisanje fibonacijevih brojeva

```
1: function FIBONACCI( $n$ )
2:   if  $n = 0$  then return 0
3:   else if  $n = 1$  then return 1
4:   else
5:      $a \leftarrow 0$ 
6:      $b \leftarrow 1$ 
7:     for  $i = 2$  to  $n$  do
8:        $c \leftarrow a + b$ 
9:        $a \leftarrow b$ 
10:       $b \leftarrow c$ 
11:     end for return  $b$ 
12:   end if
13: end function
```

Algorithm 2 Racunanje faktoriala

```
1: function FACTORIAL( $n$ )
2:   if  $n = 0$  then return 1
3:   elsereturn  $n \times \text{FACTORIAL}(n - 1)$ 
4:   end if
5: end function
```

5.3 Hanoi kule

Problem Hanoi kula je klasičan problem koji demonstrira moć rekurzije i rekurentnih relacija kako bi se riješili složeniji problemi.

Ako imamo tri stuba i određeni broj diskova različitih veličina koji su poredani tako da su diskovi na prvom stubu i da je uvijek manji disk iznad većeg. Poenta je da diskove premjestimo sa prvog na treći stub ali tako da se pridržavamo pravila:

1. U jednom potezu može da se prjemjesti samo jedan disk.
2. Veći disk ne smije da bude postavljen iznad manjeg.

Analiza problema pomoću rekurzije:

Ako imamo n diskova:

1. Prvo ćemo da premjestimo $n - 1$ diskova sa prvog stuba na pomoćni stub(drugi stub), tako da treći stub ostane slobodan
2. Zatim premještamo najveći(n -ti) disk sa prvog stuba direktno na treći stub.
3. Na kraju premještamo $n - 1$ diskova sa drugog stuba na treći stub, koristeći prvi stub kao pomoćni.

Problem se razlaže na na manji problem sa $n - 1$ diskova, čime se postiže struktura koja se može modelovati rekurentnom relacijom.

Neka je $T(n)$ minimalan broj poteza potreban za premještanje n diskova sa jednog stuba na drugi, s tim da se pridržavamo pravila.

Na osnovu opisanih koraka dobija se rekurentna relacija:

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$$

gdje: je

$T(n-1)$ broj poteza potrebnih da se $n-1$ diskova premjesti na pomoćni stub

Množimo sa 2 jer radimo isti proces dva puta (prvo premještamo s prvog na drugi stub, a zatim sa drugog na treći stub)

Dodajemo 1 potez za premještanje najvećeg diska direktno na treći stub

Imamo početni, osnovni slučaj kada imamo samo jedan disk $n = 1$ i potreban je samo jedan potez:

$$T(1) = 1$$

Iz relacije $T(n) = 2 \cdot T(n-1) + 1$, dobijaju se sljedeći rezultati

$$T(2) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$T(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$T(4) = 2 \cdot 7 + 1 = 15$$

Možemo da uočimo da je

$$T(n) = 2^n - 1$$

Algorithm 3 Hanoi kule

```

1: function HANOI( $n$ ,  $source$ ,  $target$ ,  $auxiliary$ )
2:   if  $n = 1$  then
3:     Premesti diskove sa  $source$  na  $target$ 
4:   else
5:     HANOI( $n-1$ ,  $source$ ,  $auxiliary$ ,  $target$ )  ▷ Premesti  $n-1$  disk na
       $auxiliary$ 
6:     Premesti disk sa  $source$  na  $target$           ▷ Premesti najveći disk
7:     HANOI( $n-1$ ,  $auxiliary$ ,  $target$ ,  $source$ )  ▷ Premesti  $n-1$  diskove
      sa  $auxiliary$  na  $target$ 
8:   end if
9: end function

```

6 Zadaci

Homogenu linearna rekurentna relacija je definisana kao:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

sa početnim uslovima

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2.$$

Pronađite prvih pet članova.

Rešenje

1. Početni članovi su:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

2. Izračunavamo sledeće članove:

$$a_2 = 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 4 + 3 = 7$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_1 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 2 = 14 + 6 = 20$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + 3 \cdot a_2 = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 7 = 40 + 21 = 61$$

Dakle, prvi članovi su:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 20, \quad a_4 = 61.$$

7 Zadatak

Definišite homogenu linearnu rekurentnu relaciju:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

sa početnim uslovima:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$$

Pronađite rešenje rekurentne relacije.

Rešenje

1. Karakteristična jednačina

Prvo, formiramo karakterističnu jednačinu:

$$r^2 - 2r - 1 = 0.$$

Rešavamo kvadratnu jednačinu:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle, rešenja su:

$$r_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad r_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

2. Opšte rešenje

Homogeno rešenje je:

$$a_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n,$$

gde su A i B konstante koje ćemo odrediti iz početnih uslova.

3. Određivanje konstanti

Koristimo početne uslove da pronađemo A i B .

Za $n = 0$:

$$a_0 = 1 = A(1 + \sqrt{2})^0 + B(1 - \sqrt{2})^0 = A + B.$$

Za $n = 1$:

$$a_1 = 1 = A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}).$$

Sada imamo sistem:

1. $A + B = 1$
2. $A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = 1$

4. Rešavanje sistema

Iz prve jednačine:

$$B = 1 - A$$

Uvrstimo u drugu:

$$A(1 + \sqrt{2}) + (1 - A)(1 - \sqrt{2}) = 1.$$

Raširimo i pojednostavimo:

$$A(1 + \sqrt{2}) + 1 - A(1 - \sqrt{2}) = 1.$$

Smanjujemo:

$$A\sqrt{2} + 1 = 1 \implies A\sqrt{2} = 0 \implies A = 0.$$

Iz prve jednačine:

$$B = 1 - 0 = 1.$$

5. Zaključak

Rešenje je:

$$a_n = 0 \cdot (1 + \sqrt{2})^n + 1 \cdot (1 - \sqrt{2})^n = (1 - \sqrt{2})^n.$$

8 Zadatak

Definišite nehomogenu linearnu rekurentnu relaciju

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + n, \quad n \geq 2$$

sa početnim uslovima

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1.$$

Pronađite prvih pet članova rekurentne relacije.

Rešenje

1. Homogena relacija

Prvo rešavamo odgovarajuću homogenu relaciju:

$$a_n^h = 2a_{n-1}^h + a_{n-2}^h.$$

Karakteristična jednačina je:

$$r^2 - 2r - 1 = 0.$$

Rešavamo kvadratnu jednačinu koristeći formulu:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Dakle, rešenja su:

$$r_1 = 1 + \sqrt{2}, \quad r_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Homogeno rešenje je:

$$a_n^h = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n,$$

gde su A i B konstante koje ćemo odrediti iz početnih uslova.

2. Posebno rešenje

Sada tražimo posebno rešenje a_n^p . S obzirom na to da je $f(n) = n$, pretpostavićemo oblik:

$$a_n^p = Cn + D,$$

gde su C i D konstante. Uvrstimo a_n^p u rekurentnu relaciju:

$$Cn + D = 2(C(n-1) + D) + C(n-2) + D + n.$$

Raširimo i pojednostavimo:

$$Cn + D = 2(Cn - C + D) + Cn - 2C + D + n.$$

$$Cn + D = 2Cn - 2C + 2D + Cn - 2C + D + n.$$

$$Cn + D = 3Cn - 4C + 3D + n.$$

Sada uporedimo koeficijente:

$$C = 3C + 1 \implies 2C = -1 \implies C = -\frac{1}{2},$$

$$D = -4C + 3D \implies D = -4\left(-\frac{1}{2}\right) + 3D \implies D = 2 + 3D \implies -2D = 2 \implies D = -1.$$

Dakle, posebno rešenje je:

$$a_n^p = -\frac{1}{2}n - 1.$$

3. Ukupno rešenje

Ukupno rešenje je:

$$a_n = a_n^h + a_n^p = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n - \frac{1}{2}n - 1.$$

4. Određivanje konstanti

Sada koristimo početne uslove da pronađemo A i B .

Za $n = 0$:

$$a_0 = 1 = A(1 + \sqrt{2})^0 + B(1 - \sqrt{2})^0 - \frac{1}{2}(0) - 1 \implies 1 = A + B - 1 \implies A + B = 2.$$

Za $n = 1$:

$$a_1 = 1 = A(1+\sqrt{2})^1 + B(1-\sqrt{2})^1 - \frac{1}{2}(1) - 1 \implies 1 = A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2}) - \frac{1}{2} - 1.$$

Uređujemo:

$$1 + \frac{1}{2} = A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) \implies \frac{3}{2} = A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}).$$

Sada imamo sistem:

$$1. \ A + B = 2 \quad 2. \ A(1 + \sqrt{2}) + B(1 - \sqrt{2}) = \frac{3}{2}$$

Rešavanjem ovog sistema dobijamo vrednosti za A i B .

5. Prvi članovi

Nakon što nađemo A i B , možemo izračunati prvih pet članova rekurentne relacije koristeći ukupno rešenje.

1. Za $n = 2$:

$$a_2 = 2a_1 + a_0 + 2 = 2(1) + 1 + 2 = 5.$$

2. Za $n = 3$:

$$a_3 = 2a_2 + a_1 + 3 = 2(5) + 1 + 3 = 14.$$

3. Za $n = 4$:

$$a_4 = 2a_3 + a_2 + 4 = 2(14) + 5 + 4 = 37.$$

Dakle, prvih pet članova rekurentne relacije su:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 14, \quad a_4 = 37.$$