Zadatak 11

Grupa 8

Februar 2025

1 Planarni grafovi

1.1 Definicija

Planarni graf je graf koji se može nacrtati u ravni (na papiru), a da se pri tom nijedne dve grane ne seku, osim u temenima koja ih povezuju.

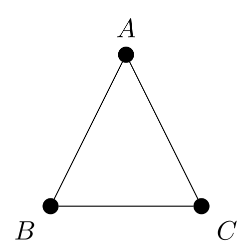
Formalno, graf $G = (V, E)$ je planaran ako postoji takva predstava grafa u ravni da su sve grane predstavljene kao krive koje se ne presecaju (osim u zajedničkim temenima).

Napomena

Važno je napomenuti da planarnost zavisi od načina crtanja grafa, a ne od njegove strukture. Neki grafovi na prvi pogled deluju neplanarno, ali postoje načini da se nacrtaju bez preseka grana.

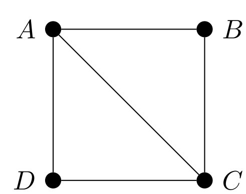
Primeri planarnih grafova

Primer 1: Trougaoni graf (tri temena, tri grane)



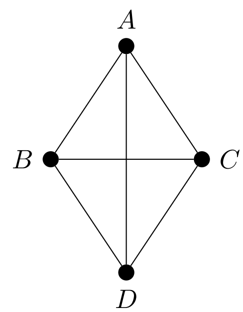
Ovaj graf je očigledno planaran jer se može nacrtati bez presecanja grana.

Primer 2: Kvadrat sa dijagonalom (4 temena, 5 grana)



Iako sadrži dijagonalu, graf je i dalje planaran jer se sve grane mogu prikazati bez ukrštanja.

Primer 3: Graf K_4 (kompletan graf sa 4 temena)



Kompletan graf sa 4 temena (K_4) jeste planaran i može se prikazati bez ukrštanja grana.

Napomena o neplanarnim grafovima

Prvi neplanarni grafovi su:

- Kompletan graf sa 5 temena: K_5
- Biplanarni graf $K_{3,3}$ (dvodeli graf sa po 3 temena u svakoj grupi)

Oni se ne mogu nacrtati u ravni bez preseka, što je dokazano u okviru **Kuratovskog teorema**.

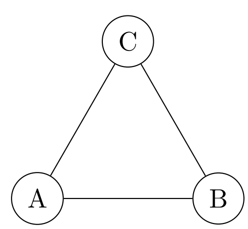
1.2 Stepen oblasti

Neka je G planarni graf i neka je F neka oblast u planarnom ucrtanju grafa G. **Stepen oblasti** F (označava se sa $\deg(F)$) je broj ivica koje se nalaze na granici te oblasti. Ako se neka ivica nalazi više puta na granici iste oblasti, ona se broji više puta.

Primer 1: Trougao

Neka je graf G jednostavan trougao.

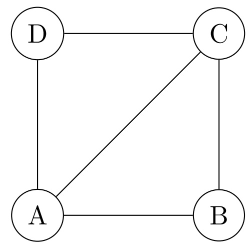
$$V = \{A, B, C\}, \quad E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}\}$$



Ovaj graf ima dve oblasti: - **Unutrašnju oblast** (trougao) sa stepenom $\deg(F_1) = 3$ - **Spoljašnju oblast** (okružuje trougao) takodje sa $\deg(F_2) = 3$

Primer 2: Kvadrat sa dijagonalom

$$V = \{A, B, C, D\}, \quad E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}, \{A, C\}\}$$



Ovde imamo: - **Tri oblasti:** 1. Trokut ABC: deg = 3 2. Trokut ACD: deg = 3 3. Spoljašnja oblast (okružuje sve): deg = 4

Napomena

Uvek važi formula Ejlere za planarne grafove:

$$n - m + f = 2$$

gde je: - n broj temena, - m broj ivica, - f broj oblasti.

Definicija 1.1 *Neka je $G = (V, E)$ planaran graf. Neka su $D_1, \ldots, D_l$ oblasti u ravanskoj predstavi grafa G. Tada važi:*

$$\sum_{1 \leq i \leq l} st(D_i) = 2|E(G)|.$$

Korolar 1.2 *Neka je $G = (V, E)$ planaran graf i $|V| \geq 3$. Tada važi:*

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Dokaz 1.3 *Ako je G planaran, tada je svaka oblast omedjena sa najmanje tri ivice, pa važi:*

$$\sum_{1 \leq i \leq l} st(D_i) \geq 3f,$$

gde je f broj oblasti.

Po prethodnoj definiciji:

$$\sum_{1 \leq i \leq l} st(D_i) = 2|E|.$$

Kombinovanjem:

$$2|E| \geq 3f.$$

Sa druge strane, iz Eulerove formule znamo da je $f = |E| - |V| + 2$. Zamenom:

$$2|E| \geq 3(|E| - |V| + 2),$$

$$2|E| \geq 3|E| - 3|V| + 6,$$

$$0 \geq |E| - 3|V| + 6,$$

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Primer 1.4 *Graf K_5 nije planaran.*

Dokaz 1.5 *Za graf K_5 važi:*

$$|V| = 5, \quad |E| = \binom{5}{2} = 10.$$

Po korolaru, za planaran graf sa 5 temena važi:

$$|E| \leq 3 \cdot 5 - 6 = 9.$$

Pošto K_5 ima 10 ivica, što je više od dozvoljenih 9, zaključujemo da K_5 nije planaran.

Definicija 1.6 *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$, povezan planaran prost graf bez kontura dužine 3. Tada je*

$$|E| \leq 2|V| - 4.$$

Dokaz 1.7 *Ako u grafu ne postoje konture dužine tri, onda je stepen svake oblasti bar četiri. Odatle je*

$$2|E| = \sum_{1 \leq i \leq f} st(D_i) \geq 4 \cdot f \Rightarrow f \leq \frac{1}{2}|E|.$$

Iz Ojlerove formule dobijamo:

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 2|V| - 4.$$

Primer 1.8 *Kompletan graf $K_{3,3}$ nije planaran.*

Dokaz 1.9 *Pretpostavimo da je $K_{3,3}$ planaran. Kako je $|V(K_{3,3})| = 6$ i $|E(K_{3,3})| = 3 \cdot 3 = 9$, na osnovu posledice 112,*

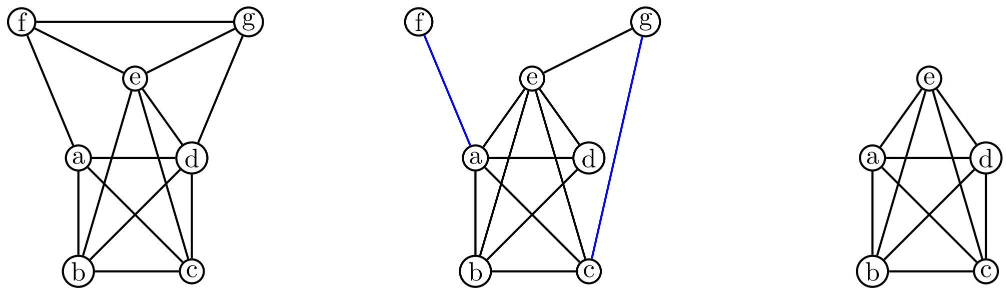
$$9 \leq 2 \cdot 6 - 4 \Leftrightarrow 9 \leq 8$$

što dovodi do kontradikcije. □

1.3 Homeomorfni grafovi

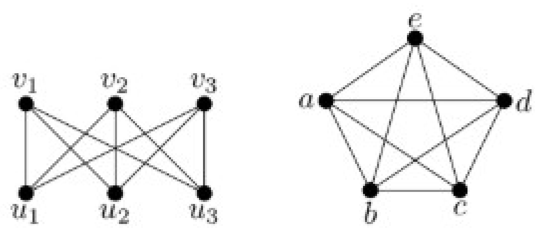
Definicija. Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su *homeomorfni* ako mogu biti dobijeni od istog grafa primenom konacno mnogo elementarnih deoba grana.

Primer. Grafovi G_1 i G_2 su homeomorfni, zato sto je G_1 dobijen od K_5 deobom grana $\{a, e\}$ i $\{e, d\}$, dok je G_2 dobijen od K_5 deobom grana $\{a, b\}$ i $\{c, d\}$.



G_1 G_2 K_5

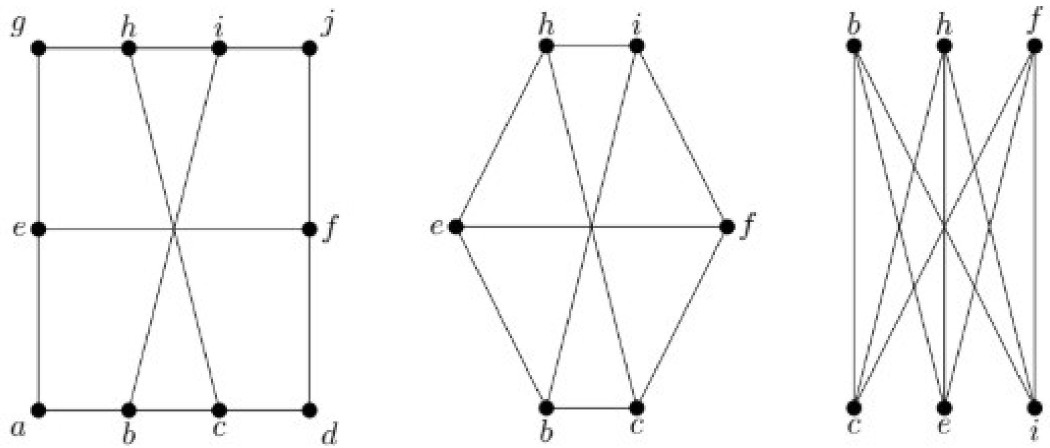
1.4 Tvrdjenje Kuratovskog



$K_{3,3}$ K_5

Teorema (Kuratowski): *Graf $G = (V, E)$ nije planaran ako sadrži podgraf koji je homeomorfan sa $K_{3,3}$ ili K_5.*

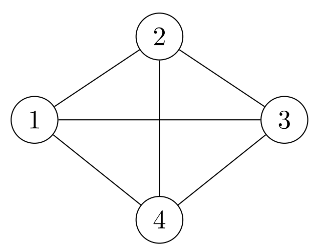
Primer: *Pokazaćemo da graf G nije planaran, zato što je homeomorfan grafu $K_{3,3}$. Graf G je dobijen od grafa G_1 deobom grana $\{e, h\}$, $\{i, j\}$, $\{b, e\}$ i $\{f, c\}$. Kada dalje posmatramo G_1, možemo primetiti da skupovi $\{c, e, i\}$ i $\{b, f, h\}$ imaju osobinu da par čvorova iz istog skupa nije povezan granom, dok su parovi koji pripadaju različitim skupovima povezani granom. Ako čvorove drugačije rasporedimo onda graf G_1 možemo grafički predstaviti kao G_2. Sada se vidi da je G homeomorfan sa $K_{3,3}$, odakle zaključujemo da nije planaran.*



G G_1 G_2

1.5 Zadaci

1. Da li je potpuni graf K_4 planaran?



Rešenje: K_4 ima 4 čvora i $\binom{4}{2} = 6$ grana. Može se nacrtati u ravni bez presecanja. **Zaključak:** K_4 je planaran.

2. Da li je potpuni graf K_5 planaran?

Rešenje: K_5 ima 5 čvorova i 10 grana. Po Eulerovoj teoremi za planarnost:

$$|E| \leq 3|V| - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9$$

Ali $|E| = 10 > 9$, dakle ne može biti planaran.

Zaključak: K_5 nije planaran.

3. Da li je potpuni bipartitni graf $K_{3,3}$ planaran?

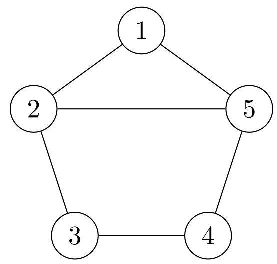
Rešenje: $K_{3,3}$ ima 6 čvorova i $3 \cdot 3 = 9$ grana. Po uslovu:

$$|E| \leq 2|V| - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$$

Ali 9 > 8, pa nije planaran. Takodje, Kuratowski kaže da je $K_{3,3}$ jedan od minimalnih neplanarnih grafova.

Zaključak: $K_{3,3}$ nije planaran.

4. Nacrtaj planaran graf koji ima 5 čvorova i 6 grana.



Rešenje: Ovaj graf je povezan, ali ne sadrži nijedan potgraf izomorfan K_5 ili $K_{3,3}$ i može se nacrtati bez preseka.

5. Dokaži da graf sa 8 čvorova i 21 granu nije planaran.

Rešenje: Za planarni graf važi:

$$|E| \leq 3|V| - 6 = 3 \cdot 8 - 6 = 18$$

Ovde je $|E| = 21 > 18$, dakle graf nije planaran.

Zaključak: Graf sa 8 čvorova i 21 granu nije planaran.

6. Koliki je maksimalan broj grana koje može imati planaran graf sa 7 čvorova?

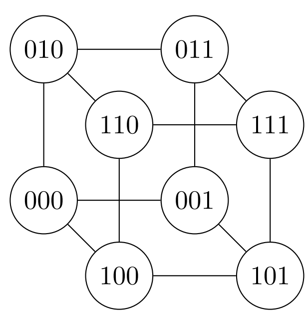
Rešenje: Po formuli:

$$|E| \leq 3|V| - 6 = 3 \cdot 7 - 6 = 15$$

Dakle, najviše 15 grana.

Zaključak: Maksimalno 15 grana za planaran graf sa 7 čvorova.

7. Da li je kockasti graf (graf Q_3) planaran?



Rešenje: Q_3 se može nacrtati u ravni bez ukrštanja. Dakle, jeste planaran.

Zaključak: Q_3 je planaran graf.

8. Neka je G graf sa 10 čvorova i 28 grana. Može li G biti planaran?

   Rešenje: Po formuli:

   $$|E| \leq 3|V| - 6 = 3 \cdot 10 - 6 = 24$$

   Ali $28 > 24$, dakle graf nije planaran.

   Zaključak: Ne, G nije planaran.

9. Da li graf sa 6 čvorova i 8 grana može biti planaran?

   Rešenje:

   $$3 \cdot 6 - 6 = 12 \Rightarrow 8 < 12$$

   Pošto broj grana je manji od dozvoljenog maksimuma, i ako ne sadrži K_5 ili $K_{3,3}$, može biti planaran.

   Zaključak: Da, može biti planaran.

10. Pronadji broj područja (lica) u planarnom grafu sa 6 čvorova i 9 grana.

    Rešenje: Koristimo Eulerovu formulu:

    $$f = |E| - |V| + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$$

    Zaključak: Graf ima 5 područja (lica).