Definisanje binomnog koeficijenta

Algebarska definicija:

Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ predstavlja koeficijent uz član $x^k\ y^{n-k}$ u razvoju binoma $(x+y)^n$. Matematički, binomni koeficijent se računa formulom:

$$\binom{n}{k} = n!\,\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

gde je n! faktorijel broja n, odnosno proizvod svih pozitivnih cijelih brojeva do n.

Binomna teorema kaže da se svaki binom na stepen n može zapisati kao zbir svih članova oblika:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} x^k y^{n-k}$$

Primjer: Razmotrimo izraz (x+y)4. Prema Binomnoj teoremi, možemo ga proširiti koristeći binomne koeficijente:

$$(x+y)^4 = \sum_{k=0}^{4} \begin{matrix} 4 \\ k \end{matrix} x^k y^{4-k}$$

Izračunajmo svaki član u izrazu:

- Za k=0: $\binom{4}{0}\ x^0y^4 = 1 \cdot y^4 = y^4$
- Za k=1: $\binom{4}{1}\ x^1y^3 = 4 \cdot xy^3 = 4xy^3$
- Za k=2: $\binom{4}{2}\ x^2y^2 = 6 \cdot x^2y^2 = 6x^2y^2$
- Za k=3: $\binom{4}{3}\ x^3y^1 = 4 \cdot x^3y = 4x^3y$
- Za k=4: $\binom{4}{4}\ x^4y^0 = 1 \cdot x^4 = x^4$

Kombinovanjem članova dobijamo prošireni oblik:

$$(x+y)^4 = y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4$$

Kombinatorna definicija:

Kombinatorno, binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ predstavlja broj različitih načina da se iz skupa sa n elemenata izabere podskup od k elemenata, pri čemu redoslijed odabranih elemenata nije bitan.

To se naziva **kombinacija bez ponavljanja**.

Primjer: Zamislimo da imamo grupu od 10 ljudi i želimo da odaberemo tim od 4 osobe. Koliko načina postoji da se izabere taj tim, ako nas ne zanima redoslijed kojim ih biramo?

Kombinatorno, broj mogućih izbora je upravo binomni koeficijent $\binom{10}{4}$:

$$\binom{10}{4} = \frac{4!(10-4)!}{10!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Dakle, postoji 210 načina da odaberemo tim od 4 osobe iz grupe od 10.

Izvođenje osobina binomnog koeficijenta

Faktorijelna reprezentacija:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Kombinatorna interpretacija: Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ predstavlja broj načina na koji možemo izabrati k elemenata iz skupa od n elemenata bez obzira na redosled.

Na primer, ako imamo skup od 5 elemenata {a, b, c, d, e} i želimo izabrati 2 elementa, binomni koeficijent $\binom{5}{2}$ nam daje broj različitih kombinacija, što je 10:

{a, b}, {a, c}, {a, d}, {a, e}, {b, c}, {b, d}, {b, e}, {c, d}, {c, e}, {d,e}

Algebarski dokaz:

Za $m \in \{0, n\}$ imamo:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!} = 1 = \binom{n}{0}$$

Ako je $1 \leq m \leq n - 1$, množenjem brojioca i imenioca sa $(n - m)!$ dobijamo:

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)!}{m(m-1)\cdots 2\cdot 1\cdot (n-m)!} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Simetričnost:

Simetričnost binomnog koeficijenta može se iskazati kao identitet:

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Ovaj identitet kaže da je broj načina da odaberemo m elemenata iz skupa od n elemenata jednak broju načina da odaberemo n−m elemenata iz istog skupa. Postoje dva načina da se dokaže ovaj identitet: kombinatorno i algebarski.

Kombinatorna interpretacija:

Kombinatorni dokaz identiteta koristi intuiciju o izboru elemenata iz skupa. Kada biramo m elemenata iz skupa sa n elemenata, preostalih n−m elemenata ostaje neizabrano. Dakle, izbor m elemenata automatski odredjuje i podskup od n−m elemenata koji nisu izabrani. Drugim rečima, broj načina da izaberemo m elemenata jednak je broju načina da izaberemo n− m elemenata iz istog skupa

Algebarski dokaz:

Za algebarski dokaz, koristimo definiciju binomnog koeficijenta:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Da bismo pokazali da je $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, posmatramo desnu stranu izraza za $\binom{n}{n-m}$:

$$\binom{n}{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Vidimo da je ovaj izraz isti kao izraz za, jer je množenje komutativno, odnosno redosled činilaca u imeniocu ne menja rezultat. Dakle,

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

Ovimsmo dokazali simetričnost binomnog koeficijenta kako kombinatorno, tako i algebarski.

Paskalov identitet:

Paskalov identitet za binomne koeficijente glasi:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Kombinatorna interpretacija

Pretpostavimo da imamo skup od n elemenata i želimo da izaberemo k elemenata iz tog skupa. Paskalov identitet koristi ideju da jedan odredjeni element možemo uključiti u izbor ili ne.

- Ako uključimo taj element, onda nam preostaje da izaberemo k−1 elemenata iz preostalih n−1 elemenata. To možemo učiniti na $\binom{n-1}{k-1}$ načina.
- Ako ne uključimo taj element, tada treba da izaberemo svih k elemenata iz preostalih n − 1 elemenata. To možemo učiniti na $\binom{n-1}{k}$ načina.

Ukupan broj načina da izaberemo k elemenata iz n elemenata je zbir ovih mogućnosti, što je upravo Paskalov identitet:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Algebarski dokaz:
Za algebarski dokaz Paskalovog identiteta koristimo definiciju binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Sa desne strane imamo izraz:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

Sredjivanjem imenilaca i brojioca, dolazimo do zajedničkog imenioca k!(n − k)!:

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{k\cdot(n-1)!+(n-k)\cdot(n-1!)}{k!(n-k)!}$$

Na kraju, možemo srediti i uočiti da se dobija identitet:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Uvođenje binomne formule

Tvrđenje:

Za svako n iz skupa prirodnih brojeva važi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} (n\ i)\ a^{n-i} b^i$$

$$(a+b)^n \ = \ (n\ 0) a^n b^0 + (n\ 1) a^{n-1} b^1 + \ldots + (n\ n-1) a^1 b^{n-1} + (n\ n) a^0 b^n$$

gde je:

$$(n\ i) = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} - binomni\ koeficijent$$

Dokaz:

Formula se može dokazati matematičkom indukcijom po n.

Baza indukcije:

$$n = 0$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{0} (0\ i)\ a^{0-i} b^i = (0\ 0) a^0 b^0 = 1$$

Jednakost je zadovoljena.

Indukciona hipoteza:

Pretpostavimo da važi za

$$n \ = \ k$$

$$(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} (k\ i)\ a^{k-i} b^i$$

Indukcioni korak:

Pokažimo da važi za

$$n = k + 1$$

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (k+1\ \ i)\, a^{k+1-i} b^{i}$$

$$(a+b)(a+b)^{k} = \{po\ I.H\} =$$

$$= (a+b) \sum_{i=0}^{k} \quad (k\ i) a^{k-i} b^{i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \quad (k\ i) a^{k+1-i} b^{i} + \sum_{i=0}^{k} \quad (k\ i) a^{k-i} b^{i+1} = \{t = i+1;\ i = t-1\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \quad (k\ i) a^{k+1-i} b^{i} + \sum_{t=1}^{k+1} \quad (k\ \ t-1) a^{k-(t-1)} b^{t} = \{t = i;\ zbog\ lakšeg\ snalaženja\} =$$

$$= (k\ 0) a^{k+1-0} b^{0} + \sum_{i=1}^{k} \quad (k\ i) a^{k+1-i} b^{i} + \sum_{i=1}^{k} \quad (k\ \ i-1) a^{k-i+1} b^{i} + (k\ k+1-1) a^{k-k-1+1} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \quad [(k\ i) + (k\ \ i-1)] a^{k-i+1} b^{i} + a^{k+1} + b^{k+1} = \{Paskalov\ identitet\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \quad (k+1\ \ i) a^{k-i+1} b^{i} + a^{k+1} b^{0} + a^{0} b^{k+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} \quad (k+1\ \ i) a^{k+1-i} b^{i}$$

Dokaz završen.

Definisanje polinomnog koeficijenta

-Polinomni koeficijent je proširenje koncepta binomnog koeficijenta na polinome s više od dva člana.

Algebarska definicija

Polinomni koeficijent u algebri javlja se kada razvijemo izraz $(x_1 + x_2 + ... + x_m)^n$ pomoću polinomne formule.

Polinomna formula: Neka su $n, k, m \in N$. Tada za sve $x_1, x_2, ..., x_m \in C$ važi:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{(k_1, k_2, \ldots, k_m) \\ k_i \geq 0,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n}} \binom{n}{k_1 k_2 \ldots k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}$$

pri čemu se sumiranje vrši po svim m-torkama $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$ nenegativnih celih brojeva, takvih da je $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Polinomni koeficijent ovde je $\binom{n}{k_1 k_2 \ldots k_m}$ i on predstavlja broj načina da se raspodeli eksponent n između m različitih elemenata $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$ tako da suma eksponenata bude jednaka n.

Matematički, polinomni koeficijent se računa formulom:

$$\binom{n}{k_1 k_2 \ldots k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!}$$

gde su $k_1, k_2, \ldots, k_m$ nenegativni celi brojevi koji zadovoljavaju $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Primer: Ako želimo da razvijemo $(x + y + z)^3$, koristimo polinomne koeficijente:

$$(x + y + z)^3 = \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = 3} \binom{3}{k_1, k_2, k_3} x^{k_1} x^{k_2} x^{k_3}$$

Ovo će generisati sve članove, poput x^3, x^2y, xyz, i tako dalje, sa odgovarajućim polinomnim koeficijentima.

Kombinatorna definicija:

U kombinatorici, polinomni koeficijent opisuje broj načina da se n elemenata rasporedi u m različitih grupa, gde je broj elemenata u svakoj grupi $k_1, k_2, \ldots, k_m$ i gde važi $k_1, k_2, \ldots, k_m = n$.

Polinomni koeficijent zapravo opisuje **permutaciju multiskupa s ponavljanjem**. Ovo je vrsta permutacije gde imamo različite vrste objekata (u ovom slučaju, različite "grupe"), a broj elemenata u svakoj grupi može biti različit.

Dakle, kako u kombinatoričkom smislu, polinomni koeficijent odgovara broju načina da se n elemenata rasporedi u m grupa, gde je broj elemenata u svakoj grupi unapred određen (tj. $k_1, k_2, \ldots, k_m$), vidimo da je ovo analogno permutacijama multiskupa jer imamo n elemenata koji su raspoređeni u m različitih podgrupa, ali **s ponavljanjem** elemenata unutar svake podgrupe. Svaka grupa ima određeni broj elemenata, ali redosled unutar grupa se ne menja.

Primer: Pretpostavimo da imamo multiskup sa 5 elemenata podeljenih u grupe sa $k_1=2$, $k_2=2$, i $k_3=1$. Tada, polinomni koeficijent $\binom{5}{2, 2, 1}$ daje broj permutacija ovog multiskupa:

$$\binom{5}{2, 2, 1} = \frac{5!}{2! * 2! * 1!} = 30$$

Dakle, broj različitih načina za permutovanje ovih 5 elemenata s ponavljanjem, gde su dva elementa identična u jednoj grupi, druga dva identična u drugoj grupi, i poslednji jedinstven, je 30.

Izvođenje osobina polinomnog koeficijenta

$$\binom{n}{m_1, m_2 \ldots m_l} = \frac{n!}{m_1 \cdot \ldots \cdot m_l}$$

Slede osobine:

1. **Neka su dati nenegativni celi brojevi m1 , … , ml i neka je n = m1 + … + ml**

$$\binom{n}{m_1, \ldots, m_l} = \binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\binom{n-(m_1+m_2)}{m_3}\ldots\binom{m_l}{m_l}$$

Ovo je način izračunavanja polinomnog koeficijenta putem binomnih koeficijenata. U kombinatorici predstavlja broj načina da se n objekata može rasporediti u l grupa.

Dokaz:

$$\binom{n}{m_1}\binom{n-m_1}{m_2}\ldots\binom{m_l}{m_l} = \frac{n!}{m_1! \cdot (n-m_1)!} \cdot \frac{(n-m_1)!}{m_2! \cdot (n-m_1-m_2)!} \ldots \left(\frac{m_l!}{m_l! \cdot 0!}\right) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_l!} = \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l}$$

Ovo je veza između permutacija multiskupa i kombinacija bez ponavljanja.

2. **Neka su dati nenegativni celi brojevi m1 , … , ml i neka je n = m1 + … + ml i {{m1 , … , ml}} = {{k1 , … , kl}}**

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_l}$$

Ovaj izraz pokazuje da je polinomni koeficijent jednak dok god je zbir brojeva objekata u grupama jednak n, bez obzira na oznake ili raspored grupa.

Dokaz:

Iz uslova {{m1 , … , ml}} = {{k1 , … , kl}} direktno sledi:

$$m_1! m_2! \ldots m_l! = k_1! k_2! \ldots k_l!$$

3. **Neka su dati nenegativni celi brojevi m1 , … , ml i neka je n = m1 + … + ml i neka je 0< m1 , … , ml<n, onda važi:**

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} = \binom{n-1}{m_1-1, m_2, \ldots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \ldots, m_l} + \ldots + \binom{n-1}{m_1, m_2, \ldots, m_l-1}$$

Ovo je izraz za rekurzivno računanje polinomnog koeficijenta preko polinomnih koeficijenata sa manjim brojem objekata.

Dokaz:

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, .., m_l} = \frac{(n-1)!}{(m_1-1)!m_2!\dots m_l!} = \frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\dots m_l!}$$

$$\binom{n-1}{m_1, m_2-1, .., m_l} = \frac{(n-1)!}{m_1!(m_2-1)!\dots m_l!} = \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\dots m_l!}$$

$$\dots$$

$$\binom{n-1}{m_1, m_2, \dots, m_l-1} = \frac{(n-1)!}{m_1!m_2!\dots(m_l-1)!} = \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\dots m_l!}$$

I dobijamo da je suma:

$$\binom{n-1}{m_1-1, m_2, \dots, m_l} + \binom{n-1}{m_1, m_2-1, \dots, m_l} + \dots + \binom{n-1}{m_1, m_2, \dots, m_l-1} =$$

$$\frac{m_1(n-1)!}{m_1!m_2!\dots m_l!} + \frac{m_2(n-1)!}{m_1!m_2!\dots m_l!} + \dots + \frac{m_l(n-1)!}{m_1!m_2!\dots m_l!} =$$

$$\frac{(m_1+m_2+\dots+m_l)(n-1)!}{m_1!m_2!\dots m_l!} =$$

$$\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_l!}$$

4. Neka su dati nenegativni celi brojevi m1 , … , ml i neka je n = m1 + … + ml. Tada je:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, 0} = \binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}}$$

Što zapravo znači da kada imamo polinomni koeficijent sa grupom veličine 0, taj koeficijent jednak je polinomnom koeficijentu sa l-1 grupa, tj. bez te grupe veličine 0.

Dokaz:

$$\binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}, 0} = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_{l-1}!0!} = \frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_{l-1}!} = \binom{n}{m_1, m_2, \dots, m_{l-1}}$$

Uvođenje polinomne formule

Teorema: Neka su x_1, ... x_l ($l \geq 2$) proizvoljni realni brojevi i neka je $n \geq 1$. Tada je:

$$(x_1 + \cdots + x_l)^n = \sum_{\substack{m_1 + \cdots + m_l = n \\ m_1 \geq 0 \ldots m_l \geq 0}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_l} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_l^{m_l}$$

Uvod: Polinomna formula je uopštavanje binomne formule. U razvijenom obliku ona bi koristila sve kombinacije stepena uz multinomne koeficijente i glasila bi:

$$(x_1 + \cdots + x_l)^n =$$
$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} x_1^n + \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} x_2^n + \cdots + \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} x_l^n + \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} x_1^{n-1} x_2^1 +$$
$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} x_1^{n-1} x_3^1 + \cdots + \binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_l} x_1^1 x_2^1 x_3^1$$

Primer:

Ako je n = 4 i l = 3, kombinacija ima 15 i one glase:

(4,0,0) (3,1,0) (3,0,1) (2,2,0) (2,1,1) (2,0,2) (1,3,0) (1,2,1) (1,1,2) (1,0,3) (0,4,0) (0,3,1) (0,2,2) (0,1,3) (0,0,4)

Svaka od ovih zagrada je (m_1, m_2, m_3) koje ćemo koristiti kao stepene x_1, x_2, x_3, tim redom.

Samim tim, opšti član nam je $\frac{4!}{m_1! m_2! m_3!} x_1^{n1} x_2^{n2} x_3^{n3}$ i razloženi oblik polinoma glasi:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^4 = x_1^4 + 4x_1^3 x_2 + 4x_1^3 x_3 + 6x_1^2 x_2^2 + 12x_1^2 x_2\, x_3 + 6x_1^2 x_3^2 + 4x_1\, x_2^3 +$$
$$12x_1\, x_2^2 x_3 + 12x_1\, x_2\, x_3^2 + 4x_1\, x_3^3 + x_2^4 + 4x_2^3 x_3 + 6x_2^2 x_3^2 + 4x_2\, x_3^3 + x_3^4$$

Program za kreiranje Paskalovog trougla

Tehnika: Program je pisan u c# jeziku. Nakon unosa broja redova, poziva se funkcija GenerateTriangle koja sadrži for petlju za prolazak kroz redove trougla. U njoj je još jedna for petlja za svaki pojedinačni element u tom redu. Primetimo da u 1. redu imamo 1 element, u 2. redu imamo dva i tako dalje. Rezultat za pet redova:

```
1. Program za kreiranje Paskalovog trougla
2. Program za razvoj binomne formule
3. Program za razvoj polinomne formule
Unesite izbor: 1

Unesite broj redova Paskalovog trougla: 5
             1
           1   1
         1   2   1
       1   3   3   1
     1   4   6   4   1
```

Kod funkcije:

```
public static List<List<int>> GenerateTriangle(int rows){
    List<List<int>> triangle = new List<List<int>>();
    if (rows == 0){
        return triangle;
    }

    for (int i = 0; i < rows; i++){
        List<int> row = new List<int>();
        row.Add(1);

        for (int j = 1; j < i; j++){
            row.Add(triangle[i - 1][j - 1] + triangle[i - 1][j]);
        }
        if (i > 0){
            row.Add(1);
        }
        triangle.Add(row);
    }
    return triangle;
}
```

Program za razvoj binomne formule

Tehnika: Kroz glavnu for petlju prolazimo onoliko puta na koji stepen dižemo binom(n). Svaki put nameštamo eksponente brojeva a i b tako da njihov zbir daje n. Onda kroz if petlje proveravamo i ispisujemo svaki naredni broj i njegov eksponent.

```
1. Program za kreiranje Paskalovog trougla
2. Program za razvoj binomne formule
3. Program za razvoj polinomne formule
Unesite izbor: 2

Unesite broj za razvoj binomne formule: 3
Razvoj za (a + b)^3: a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
```

Kod:

```
public static void DevelopBinomialFormula(int n){
    List<List<int>> triangle = GenerateTriangle(n + 1);
    List<int> coefficients = triangle[n];
    StringBuilder result = new StringBuilder();

    for (int k = 0; k <= n; k++){
        int coeff = coefficients[k];
        int aExponent = n - k;
        int bExponent = k;

        if (coeff != 0){
            if (result.Length > 0){
                result.Append(" + ");
            }
            if (coeff != 1){
                result.Append($"{coeff}");
            }
            if (aExponent > 0){
                result.Append($"a");
                if (aExponent > 1){
                    result.Append($"^{aExponent}");
                }
            }
            if (bExponent > 0){
                result.Append($"b");
                if (bExponent > 1)
                {
                    result.Append($"^{bExponent}");
                }
            }
        }
    }
    Console.WriteLine($"Razvoj za (a + b)^{n}: {result.ToString()}");
}
```

Program za razvoj polinomne formule

Tehnika: Tehnika je ista kao i u primeru uvođenja polinomne formule. Prosleđuje se broj promenljivih u polinomu i stepen na koji ga dižemo. U sledećem koraku generišemo sve moguće kombinacije I na osnovu njih ispisujemo eksponente razloženog polinoma.

```
1. Program za kreiranje Paskalovog trougla
2. Program za razvoj binomne formule
3. Program za razvoj polinomne formule
Unesite izbor: 3

Unesite broj promenljivih za razvoj polinomne formule: 3
Unesite stepen za razvoj polinomne formule: 2
x3^2 + 2 * x2 * x3 + x2^2 + 2 * x1 * x3 + 2 * x1 * x2 + x1^2
```

Kod:

```
static void DevelopPolynomialFormula(int n, int m){
    List<int[]> combinations = new List<int[]>();
    GenerateCombinations(n, m, new List<int>(), combinations);

    List<string> terms = new List<string>();
    foreach (var ks in combinations){
        long coeff = MultinomialCoefficient(n, ks);
        List<string> termParts = new List<string>();

        for (int i = 0; i < m; i++) {
            if (ks[i] > 0) {
                termParts.Add(ks[i] > 1 ? $"x{i + 1}^{ks[i]}" : $"x{i + 1}");
            }
        }
        if (coeff != 1) {
            terms.Add($"{coeff} * " + string.Join(" * ", termParts));
        }
        else {
            terms.Add(string.Join(" * ", termParts));
        }
    }
    Console.WriteLine(string.Join(" + ", terms));
}
```