Diskretna matematika - Zadatak 11

Grupa 10

Januar 2025

1 Istorijski osvrt na Hamiltonov graf

Godine 1857, matematičar Vilijam Rouan Hamilton osmislio je igru poznatu kao "The Icosian game". O ovom događaju postoji više verzija. Jedna kaže da je matematičar igru opisao i pismom poslao prijatelju, dok druga tvrdi da je Hamilton prodao prava na igru proizvođaču igračaka. U svakom slučaju, igra se zasnivala na dodekaedru, geometrijskoj figuri sa 12 podudarnih petougaonih strana.

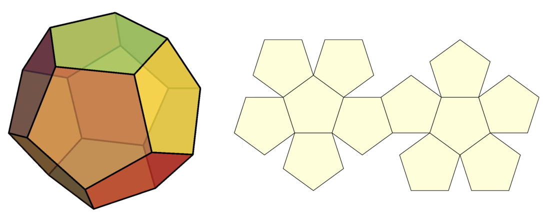

Figure 1: Dodekaedar, geometrijska figura sa 12 podudarnih petougaonih strana, koja je osnova igre "The Icosian game".

Na svakom od 20 temena (čvorova) ove figure izbušena je rupa u kojoj je bio postavljen ekser koji predstavlja grad. Cilj igre bio je da igrač, koristeći strunu, pronađe put kroz svaki grad tačno jednom, pri čemu se na kraju mora vratiti u početni grad. Struna predstavlja nit kojom se prati put kroz gradove. Dodekaedar se može "spljoštiti" u dvodimenzionalnu sliku, čime problem postaje zadatak pronalaženja ciklusa u grafu gde svaki čvor, osim početnog, biva posećen tačno jednom.

Prema ovoj igri, svaki ciklus grafa sa ovim svojstvom naziva se Hamiltonov ciklus. Ovo je u kontrastu sa Ojlerovim ciklusom, gde se svaka grana grafa koristi tačno jednom. Iako na prvi pogled deluju slično, Hamiltonov ciklus je značajno složeniji problem za rešavanje.

Hamiltonovi grafovi dobili su ime po ovom irskom matematičaru i predstavljaju grafove koji poseduju Hamiltonov ciklus. Iako sama igra nije postigla veliki komercijalni uspeh, ideja je postala osnova za razvoj teorije grafova. Hamiltonov ciklus danas ima široku primenu u optimizaciji, logistici i računarstvu, kao i u rešavanju mnogih praktičnih problema.

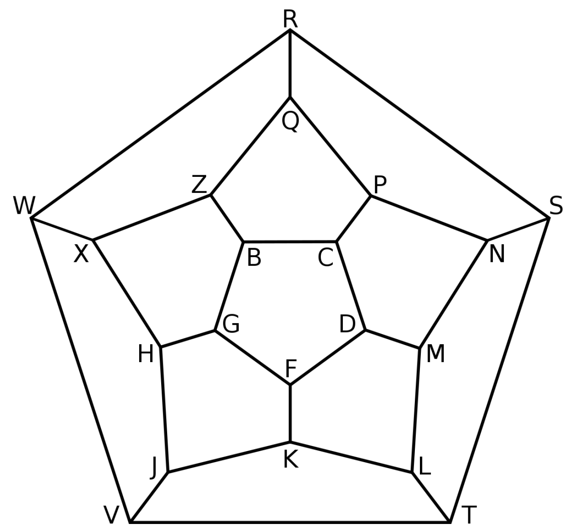

Figure 2: Dodekaedar spljošten u dvodimenzionalnu sliku

2 Hamiltonov i polu Hamiltonov graf

Pre svega, daćemo nekoliko definicija i teorema koje su vezane za Hamiltonov i polu Hamiltonov graf.

2.1 Definicije

Definicija. Neka je G graf. *Hamiltonov put* u G je put koji sadrži sve čvorove tog grafa. *Hamiltonova kontura* je Hamiltonov put koji je ujedno i kontura.

Primer. Hamiltonov put u grafu G_1 je $dacbhkfiejg$, dok je $dacbhkfiejg$ Hamiltonova kontura u grafu G_2. Grafovi su prikazani na slici ispod:

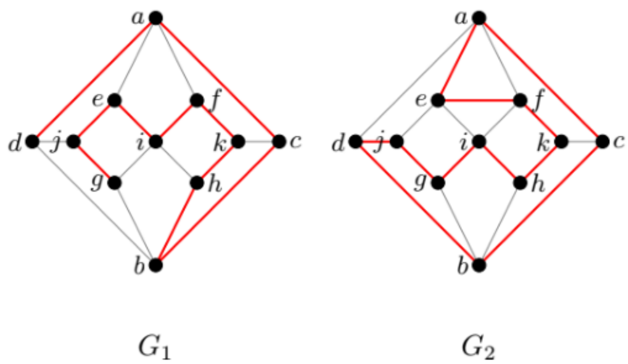

Figure 3: Grafovi G_1 i G_2

Definicija 1. Neka je G graf. *Hamiltonov put* je prost put koji prolazi kroz svaki čvor grafa G. *Hamiltonov ciklus* je prost ciklus koji prolazi kroz svaki čvor grafa G.

Definicija 2. Graf je *Hamiltonov* ako sadrži Hamiltonovu konturu. Graf je *polu Hamiltonov* ako sadrži Hamiltonov put. U prethodnom primeru, graf G_1 je polu Hamiltonov, dok je graf G_2 Hamiltonov.

2.2 Primeri

Primer 1. Potpun graf K_n za $n \geq 3$ ima Hamiltonov ciklus.

Dokaz. Neka su $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ čvorovi za K_n. Pošto između bilo koja dva čvora postoji grana, uvek postoji grana od v_i do v_{i+1}, i konačno, od poslednjeg čvora v_n nazad do v_1.

Primer 2. Kompletan graf K_n je Hamiltonov graf za svako $n \geq 3$.

Dokaz. Neka su čvorovi grafa $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geq 3$. Jedna Hamiltonova kontura je:

$$v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n \to v_1.$$

2.3 Teoreme i dokazi

Teorema U Hamiltonovom ciklusu, za dati čvor, postoje tačno dve grane ciklusa koje su incidentne sa posmatranim čvorom.

Dokaz. Prateći ciklus, za svaki čvor v postoji grana ciklusa koja vodi ka njemu i grana koja vodi iz njega. Kada bi postojala još neka grana ciklusa incidentna sa v, tada bi se ciklus vratio u v i v bi se ponovo pojavilo u ciklusu, što je u protivurečnosti sa definicijom Hamiltonovog ciklusa. Zbog toga, u Hamiltonovom ciklusu postoje tačno dve grane incidentne sa v.

Posledica. Bilo koji graf sa čvorom stepena 1 ne može biti Hamiltonov.

Teorema. Ako graf G ima most, tada G ne može imati Hamiltonov ciklus. Ako komponente grafa, nastale uklanjanjem mosta, imaju Hamiltonove cikluse, tada G ima Hamiltonov put.

Dokaz.

Prvi deo: Ako graf G ima most, tada G ne može imati Hamiltonov ciklus.

Pretpostavimo suprotno, tj. da graf G ima Hamiltonov ciklus C i da postoji most $e = uv$ u grafu G. Uklanjanjem mosta e, graf G se razdvaja na dve komponente, što znači da je most e jedina veza između tih komponenti. Međutim, Hamiltonov ciklus C mora posetiti svaki čvor tačno jednom i vratiti se u početni čvor. Pošto most e razdvaja graf G na dve komponente, svaki Hamiltonov ciklus bi morao posetiti oba čvora u i v, što zahteva prelazak preko mosta e dva puta — jednom u svakom smeru. Ovo je u suprotnosti sa definicijom Hamiltonovog ciklusa, koji prolazi kroz svaki čvor tačno jednom. Dakle, graf G sa mostom ne može imati Hamiltonov ciklus. □

Drugi deo: Ako komponente grafa, nastale uklanjanjem mosta, imaju Hamiltonove cikluse, tada G ima Hamiltonov put.

Neka je $e = uv$ most u grafu G. Uklanjanjem mosta e, graf G se razdvaja na dve komponente G_1 i G_2, gde čvor u pripada komponenti G_1, a čvor v komponenti G_2. Prema pretpostavci, obe komponente G_1 i G_2 imaju Hamiltonove cikluse. Označimo Hamiltonov ciklus u komponenti G_1 kao C_1, a u komponenti G_2 kao C_2.

Pošto su C_1 i C_2 Hamiltonovi ciklusi, možemo ih zapisati na sledeći način:

- C_1: $u \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u$, - C_2: $v \to w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_{m-1} \to v$.

S obzirom na to da je $e = uv$ most koji povezuje ove dve komponente, možemo konstruisati Hamiltonov put u grafu G spajanjem ciklusa C_1 i C_2 preko mosta e. Hamiltonov put P u grafu G može se zapisati kao:

$$P : v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{k-1} \to u \to v \to w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_{m-1}.$$

Ovaj put prolazi kroz sve čvorove grafa G tačno jednom, što znači da je P Hamiltonov put u grafu G. □

2.4 Dovoljni uslovi

Napomena. Ako dovoljni uslovi nisu zadovoljeni, to ne znači da graf nije Hamiltonov.

Lema. Neka je G prost graf sa n, $n \geq 3$, čvorova u kojem postoje nesusedni čvorovi $u, v \in V(G)$ sa osobinom:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n.$$

Tada je G Hamiltonov ako i samo ako je $G + \{u, v\}$ Hamiltonov.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Ako je G Hamiltonov, onda je i $G + \{u, v\}$ Hamiltonov, zato što je Hamiltonova kontura u G istovremeno i Hamiltonova kontura u $G + \{u, v\}$.

(⇐) Ako je $G+\{u,v\}$ Hamiltonov, ali G nije, tada su u i v susedni čvorovi u toj konturi.

Tada postoji Hamiltonov uv-put u G:

$$u \to u_1 \to \ldots \to u_{i-1} \to u_i \to \ldots \to u_n \to v.$$

Ako postoji grana uu_i, onda ne postoji grana $u_{i-1}v$. Ako bi postojala ta grana, onda bi postojala Hamiltonova kontura u G:

$$u \to v_1 \to \ldots \to v_n \to u.$$

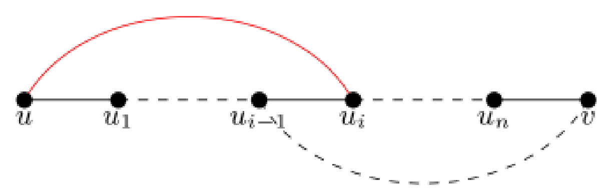

Figure 4

Ovo vodi do sledeće nejednakosti:

$$d_G(v) \leq n-1-d_G(u) \iff d_G(u)+d_G(v) \leq n-1 \iff d_G(u)+d_G(v) < n$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom. □

U nastavku dajemo dve teoreme, odnosno izdvajamo tvrđenje Diraka i tvrđenje Orea.

2.5 Teorema Ore

Teorema (Ore). Neka je G prost graf sa $n \geq 3$ čvorova. Ako za svaka dva nesusedna čvora u i v u grafu G važi:

$$\deg(u)+\deg(v) \geq n,$$

tada G sadrži Hamiltonov ciklus.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, tj. da G nema Hamiltonov ciklus. Dodajmo grafu G sve moguće grane između nesusednih čvorova dok ne dobijemo graf H, koji ima svojstvo da dodavanje bilo koje nove grane dovodi do Hamiltonovog ciklusa u H. Ovaj proces mora da stane pre nego što dobijemo potpuni graf, jer potpuni graf K_n ima Hamiltonov ciklus. Dakle, H je graf sa svim čvorovima iz G i dodatim nekim granama, ali bez Hamiltonovog ciklusa.

Dodajmo još jednu granu u H između čvorova u i v, i dobijamo graf H' sa Hamiltonovim ciklusom. Neka je ovaj ciklus u H' označen kao C. Ako uklonimo granu uv iz C, dobijamo Hamiltonov put u H, koji povezuje u i v.

Neka su $v_1, v_2, \ldots, v_n$ čvorovi u H koji čine Hamiltonov put, gde su $v_1 = u$ i $v_n = v$. Jasno je da su v_1 i v_n nesusedni u G, jer u suprotnom G već ima Hamiltonov ciklus. Prema hipotezi Oreove teoreme:

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n.$$

U Hamiltonovom putu, broj čvorova koji nisu susedni sa v_n jednak je:

$$n - \deg(v_n).$$

Pošto $\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$, sledi da ima najviše $\deg(v_1)$ čvorova koji nisu susedni sa v_n (uključujući v_1 samog). Dakle, svi čvorovi susedni v_1 moraju biti uključeni u Hamiltonov put, a v_n nije susedan v_1, što vodi u kontradikciju sa hipotezom.

Zbog ove kontradikcije, zaključujemo da G mora imati Hamiltonov ciklus. $\square$

Formalniji dokaz.

Ako je G kompletan graf, tvrdnja sledi direktno. U suprotnom, pretpostavimo da je:

$$E(K_n) \setminus E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_l\}.$$

Primećujemo da se dodavanjem grana grafu G ne može promeniti uslov da je zbir stepena nesusednih čvorova bar n. Uzastopnom primenom leme sa početka ovog poglavlja, u l koraka možemo zaključiti da G ima Hamiltonovu konturu ako i samo ako kompletan graf K_n ima Hamiltonovu konturu. $\square$

2.6 Primer

Primer. Graf G na slici je Hamiltonov zato što je suma stepena čvorova bar 6, a toliki je i broj čvorova u grafu. Crvenom bojom je označena jedna Hamiltonova kontura grafa.

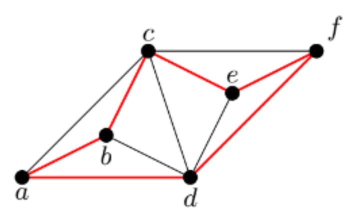

Figure 5: Primer Hamiltonovog grafa sa jednom Hamiltonovom konturom označenom crvenom bojom.

2.7 Teorema Diraka

Teorema (Dirak). Neka je G prost graf sa $n \geq 3$ čvorova. Ako za svaki čvor v u grafu G važi:

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

tada G sadrži Hamiltonov ciklus.

Dokaz.

Neka je $P = p_1p_2 \dots p_k$ najduži put u grafu G. Ako je p_1 sused nekom čvoru v koji nije u P, tada bi put $vp_1p_2 \dots p_k$ bio duži od P, što je u kontradikciji sa izborom P. Isti argument se može primeniti i za čvor p_k. Dakle, p_1 i p_k su susedni samo čvorovima iz P.

Pošto važi $\deg(p_1) \geq \frac{n}{2}$ i p_1 ne može biti susedan samom sebi, sledi:

$$k \geq \frac{n}{2} + 1.$$

Tvrdnja. Postoji vrednost $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ takva da: - p_j je susedan p_k, i - p_{j+1} je susedan p_1.

Pretpostavimo suprotno, tj. da tvrdnja nije tačna.

S obzirom na to da su svi čvorovi susedni p_1 ili p_k na P, mora postojati najmanje $\deg(p_1)$ čvorova na P koji nisu susedni p_k. Pošto su svi čvorovi susedni p_k i p_k sam takođe leži na P, put mora imati najmanje:

$$\deg(p_1) + \deg(p_k) + 1 \geq n + 1$$

čvorova.

Međutim, graf G ima samo n čvorova, što je kontradikcija.

Ovo daje ciklus:

$$C = p_{j+1}p_{j+2} \dots p_k p_j p_{j-1} \dots p_2 p_1 p_{j+1}.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da $G \setminus C$ nije prazan. Pošto je G povezan, mora postojati čvor $v \in G \setminus C$ koji je susedan nekom čvoru p_i. Tada je put od v do p_i, a zatim oko C, do čvora susednog p_i, duži od P, što je kontradikcija definiciji P.

Dakle, svi čvorovi u G sadržani su u C, čime je C Hamiltonov ciklus. □

Posledica iz Oreove teoreme.

Na osnovu tvrdnje Orea, možemo dokazati tvrdnju Diraka.

Dokaz. Na osnovu tvrdnje Orea, zaključujemo da za svaki par čvorova u i v važi:

$$\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n.$$

Prema Oreovoj teoremi, ako ovo važi za svaki par nesusednih čvorova, G mora biti Hamiltonov graf. Dakle, tvrdnja Diraka je direktna posledica Oreove teoreme. □

2.8 Potrebni uslovi

*Napomena: Ako su ispunjeni potrebni uslovi, to ne znači da je graf Hamiltonov. Ovakva tvrdnja se najčešće koristi u kontrapozitivnom obliku, tj. ako se pokaže da ne važe potrebni uslovi, onda se može tvrditi da graf nije Hamiltonov.

Teorema. Ako je G Hamiltonov graf, onda za svako $U \subset V(G)$ sa osobinom $U \neq \emptyset$ važi:

$$\omega(G - U) \leq |U|.$$

Dokaz. Ako je G Hamiltonov graf, onda postoji Hamiltonova kontura oblika:

$$C = u_1 u_2 \dots u_n u_1.$$

Za proizvoljno $U \subseteq V(G)$ za koje je $|U| = l$, broj komponenti povezanosti u $C - U$ ne može biti veći od l. Pored toga, $G - U$ ne može imati više komponenti povezanosti nego $C - U$. Odatle zaključujemo sledeće:

$$\omega(G - U) \leq \omega(C - U) \leq |U|.$$

□

Teorema. Ako je G polu Hamiltonov graf, onda za svako $U \subset V(G)$ sa osobinom $U \neq \emptyset$ važi:

$$\omega(G - U) \leq |U| + 1.$$

Primer. Graf na slici nije polu Hamiltonov, zato što oduzimanjem skupa čvorova $U = \{b, d, f, h, p\}$ dobijamo graf sa 8 komponenti povezanosti.

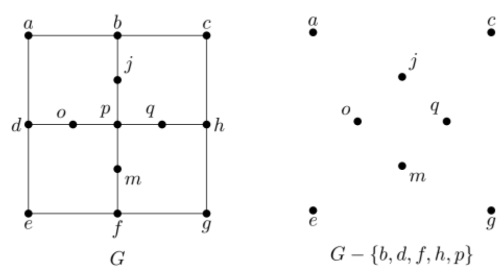

Figure 6: Graf koji nije polu Hamiltonov zbog viška komponenti povezanosti.

Primer. Graf $K_{2,3}$ nije Hamiltonov, zato što brisanjem čvorova d i e dobijamo graf sa tri komponente povezanosti, tačnije ostaje više komponenti povezanosti nego što smo obrisali čvorova.

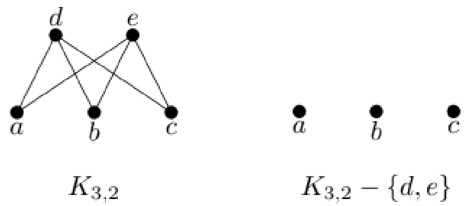

Figure 7: Graf $K_{2,3}$ koji nije Hamiltonov zbog viška komponenti povezanosti.

2.9 Primer: Petersonov graf

Primer. Petersonov graf ima Hamiltonov put, ali ne i Hamiltonov ciklus.

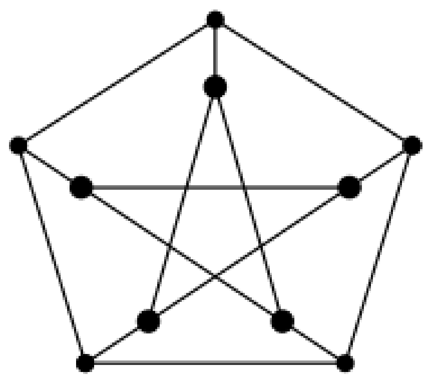

Figure 8: Petersonov graf

Pokušaćemo da konstruisemo Hamiltonov ciklus i uvek ćemo doći u ćorsokak.

Za početak, znamo da zvezda u središtu mora biti povezana sa spoljnim petouglom, pa bez gubitka opštosti uzimamo da je $\{a, f\}$ grana ciklusa. Od f do ostatka ciklusa mora se ići preko i ili preko h. No, po simetriji, nije bitno preko kog čvora se ide, pa pretpostavimo da je $\{f, i\}$ u ciklusu. Onda, po teoremi da u Hamiltonovom ciklusu za dati čvor postoje tačno dve grane ciklusa koje su incidentne sa posmatranim čvorom, $\{f, h\}$ ne može biti u ciklusu, jer bi tada u ciklusu bile tri grane incidentne sa f.

Prema tome, $\{j, h\}$ i $\{h, c\}$ moraju biti u ciklusu, budući da su one jedine moguće grane incidentne sa h. Ako je $\{i, d\}$ u ciklusu, tada, pošto je $\{f, i\}$ u ciklusu, $\{i, g\}$ ne može biti u ciklusu, jer po istoj teoremi, samo dve grane mogu biti incidentne sa i.

Prema tome, $\{j, g\}$ i $\{b, g\}$ moraju biti u ciklusu, jer su to jedine grane koje mogu biti incidentne sa g. Pošto su $\{j, h\}$ i $\{j, g\}$ u ciklusu, $\{j, e\}$ ne može biti u ciklusu, jer bi tada u ciklusu bile tri grane incidentne sa j.

Prema tome, $\{d, e\}$ i $\{e, a\}$ moraju biti u ciklusu, tako da postoje dve grane koje su incidentne sa e. koje su incidetne sa e.

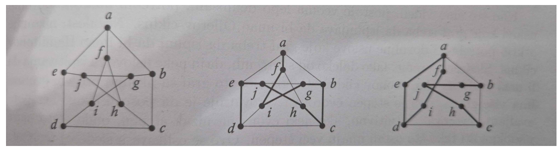

Figure 9: Petersonov graf. Putanja. Progres do kog smo stilgi.

Pošto su $\{i, d\}$ i $\{d, e\}$ u ciklusu, $\{d, c\}$ ne može biti u ciklusu, jer bi tada bile tri grane incidentne sa d, pa $\{c, b\}$ mora biti u ciklusu da bi postojale dve grane incidentne sa c. Budući da su $\{b, g\}$ i $\{c, b\}$ u ciklusu, $\{a, b\}$ ne može biti u ciklusu i imamo graf kao na slici koji nema više grana kandidata za učešće u ciklusu. Stoga, ovaj put ne može proizvesti Hamiltonov ciklus.

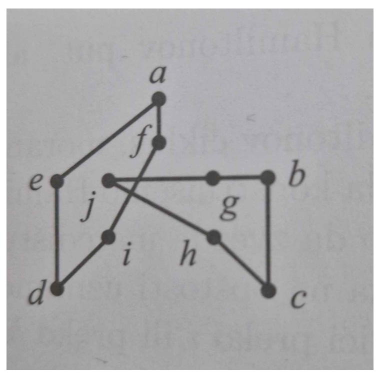

Figure 10: Prikaz grafa koji ne može proizvesti Hamiltonov ciklus.

Ako se vratimo u tačku gde smo imali $\{a, f\}$, $\{f, i\}$, $\{j, h\}$ i $\{h, c\}$ u ciklusu i $\{f, h\}$ van ciklusa, budući da $\{i, d\}$ ne može biti u ciklusu, $\{i, g\}$ mora biti u ciklusu da bi postojale dve grane koje su incidentne sa i. Grane $\{e, d\}$ i $\{d, c\}$ moraju biti u ciklusu da bi postojale dve grane incidentne sa d.

Sada, pošto su $\{h, c\}$ i $\{d, c\}$ u ciklusu, $\{b, c\}$ ne može biti u ciklusu, jer bi u suprotnom postojale tri grane incidentne sa c. Stoga, $\{a, b\}$ i $\{g, b\}$ moraju biti u ciklusu da bi dve grane bile incidentne sa b.

Budući da $\{i, g\}$ i $\{g, b\}$ moraju biti u ciklusu, $\{j, g\}$ ne može biti u ciklusu, jer bi tada bile tri grane incidentne sa g. U ovoj tački imamo graf prikazan na sledećoj slici.

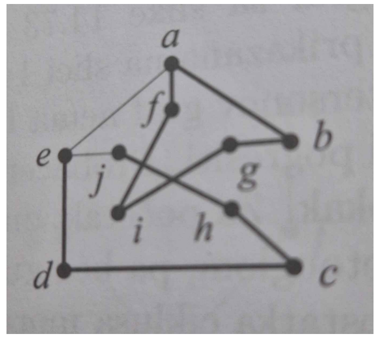

Figure 11

Grana $\{e, j\}$ mora biti u ciklusu da bi postojale dve grane incidentne sa j. Pošto $\{e, d\}$ i $\{e, j\}$ moraju biti u ciklusu, $\{e, a\}$ ne može biti u ciklusu. Tako dobijamo graf sa slike, na kojem ne preostaje nijedna grana, što predstavlja Hamiltonov ciklus. Pošto smo iscrpili sve mogućnosti, sledi da Petersenov graf nema nijedan Hamiltonov ciklus.

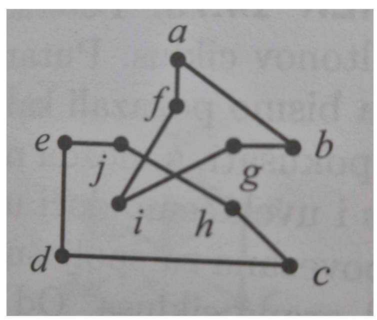

Figure 12: Graf koji prikazuje situaciju bez preostalih grana za formiranje Hamiltonovog ciklusa.

3 Zadaci za samostalni rad

Zadatak 1. Dokazati da bipartitan graf čije su klase različite kardinalnosti nije Hamiltonov graf.

Zadatak 2. Da li postoji graf sa 8 čvorova i 23 grane koji nije Hamiltonov?

Zadatak 3. Neka je G graf sa $n \geq 3$ čvorova i bar $\binom{n-1}{2} + 2$ grane. Dokazati da je G Hamiltonov.

Zadatak 4. Dokazati da sledeći grafovi nisu poluhamiltonovi.

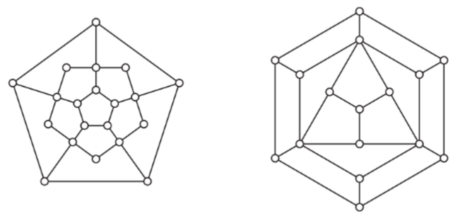

Figure 13: Grafovi za dokazivanje da nisu poluhamiltonovi.

Zadatak 5. Konstruisati Hamiltonov graf. Detaljno obrazložiti odgovor.

Zadatak 6. Dokazati da je za $n \geq 1$ graf $K_{n,2n,3n}$ Hamiltonov, dok $K_{n,2n,3n+1}$ nije Hamiltonov.