Zadatak 1

Grupa 4

October 2024

1 Prebrojavanje i nabrojavanje elemenata skupova

Kardinalnost skupa Kardinalni brojevi predstavljaju meru veličine skupa i definišu se pomoću bijekcija, a označava se kao $|X|$ za skup X. U zavisnosti od svoje kardinalnosti, skupovi mogu biti konačni ili beskonačni. Beskonačni skupovi se zatim dele na neprebrojive i prebrojive.

Definicija 1: Skup je konačan u sledećim slučajevima:

1. $X = \emptyset \Rightarrow |X| = 0$
2. $X \neq \emptyset \land \exists f$ bijekcija: $X \to \mathbb{N}_n \Rightarrow |X| = n$

Na osnovu prethodne definicije izvodimo princip bijekcije.

Teorema 1 (princip bijekcije): Uzmimo da su A i B neprazni skupovi. Tada važi:

$$|A| = |B| \iff \exists f : A \to B \text{ bijekcija.}$$

Skup koji nije konačan je beskonačan. Ako važi $\exists f$ bijekcija: $X \to \mathbb{N}_n$, onda je X prebrojiv.

Nabrajanje elemenata skupa: Nabrajanje elemenata nekog skupa predstavlja ureenje svih njegovih elemenata u niz. Nabrajanje elemenata ima smisla samo kada govorimo o konačnim skupovima. Na primer, elemente niza $S = \{a, b, c\}$ bismo nabrojali kao: a, b, c.

Prebrojavanje elemenata skupa: Prebrojavanje elemenata konačnog skupa predstavlja proces odreivanja njegove kardinalnosti. Za konačne skupove možemo na jednostavan način odrediti broj elemenata, poput izgovaranja rednog broja elementa ili pomoću Venovog dijagrama.

Primer 1: Završna godina Srednje škole u Malom Zvorniku ima 100 učenika. Njih 50 se ne bavi sportom, a 70 ne svira nikakav instrument. Znamo i da se njih 40 ne bavi ni jednim od ta dva. Koliko učenika radi oba?

Rešenje: Uzmimo da je U skup svih učenika u školi, A je skup onih koji se bave sportom, a B je skup onih koji sviraju instrument. Znamo da je $|U| = 100$, $|A^c| = 50$, $|B^c| = 30$, i $|(A \cup B)^c| = 40$. Potrebno je da izračunamo $|A \cap B|$.

Dalje imamo:

$$|A| = 100 - 50 = 50, \quad |B| = 100 - 70 = 30, \quad |A \cup B| = 100 - 40 = 60.$$

Koristeći princip uključenja i isključenja, dobijamo:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 50 + 30 - 60 = 20.$$

Dakle, 20 učenika se bavi i sportom i sviranjem instrumenta.

2 Prebrojavanje konačnog skupa

Prebrojavanje ili enumeracije predstavlja važan deo kombinatorike koji se bavi prebrojavanjem skupa objekata sa odreenim svojstvima. Prebrojavanje skupova se možda na prvi pogled čini kao nešto jednostavno što ne zahteva matematičku formalnost i nema neku veliku primenu, ali pokazaćemo da to baš i nije slučaj. Kombinatorika je nauka o rasporedima objekata i kao takva je važan deo diskretne matematike. Proučavanje i razvijanje ove oblasti diskretne matematike počelo je u 17. veku kada su igre na sreću proizvele prva kombinatorna pitanja. Već ovde vidimo da prebrojavanje skupova ima neku praktičnu primenu, tj. prebrojavanje se može koristiti u analizi verovatnoće u različitim igrama na sreću. Neki od primera za ovo su:

1. U igri loto, igrači biraju odreeni broj brojeva i nadaju se da će njihovi brojevi biti izvučeni. Prebrojavanje konačnih skupova ovde je ključno jer omogućava izračunavanje verovatnoće dobitka. Na primer, broj mogućih kombinacija koje igrač može odabrati je kombinatorni broj, što se računa pomoću formule: C(n,k)= n! / k!(nk)!

2. Poker je igra u kojoj se igračima deli ruka od 5 karata iz špila od 52 karte. Prebrojavanje konačnih skupova pomaže u izračunavanju verovatnoće dobijanja odreenih ruku, poput "full house-a" ili "flush-a".

3. U blackjack-u, verovatnoća dobijanja odreenih ruku takoe se zasniva na prebrojavanju konačnih skupova karata. Na primer, šanse da dobijete odreenu vrednost ruke zavise od broja karata koji su preostali u špilu i koje karte ste već dobili.

Pored ovih primera, tehnike prebrojavanje generalno se koriste prilikom odreivanje verovatnoće dogaaja kao i kod odreivanja složenosti algoritma. Svi smo sigurno nekada u životu prebrojavali neki skup i to smo činili tako što smo redom pokazivali ili izgovorali elemente skupa i dodavali im brojeve (1,2,3...). Kada smo svakom elementu dodeli broj i kada smo došli do poslednjeg elementa, broj koji smo dodeli njemu predstavljao je broj elemenata u tom skupu. Na primer, ako imamo skup S=a,b,c,d onda kažemo da je broj elemenata tog skupa S=4—jer ima četiri elementa. Ako se elementi skupa daju u nekom složenijem obliku, na primer kroz neki matematički izraz ili funkciju, prebrojavanje može uključivati brojanje svih mogućih kombinacija koje zadovoljavaju uslove tog izraza ili funkcije. U matematičkoj terminologiji, ovde govorimo o kardinalnosti (meri veličine skupa). Za svaki prirodan broj n N, definišemo skup Nn = 1, 2, 3,. .. ,n. Svakom elementu skupa X koga prebrojavamo pridružujemo element skupa Nn, tj. odreujemo bijektivnu funkciju f iz X u Nn. Funkcija je bijekcija jer svaki element iz skupa X dobija različiti broj I svaki broj iz Nn skupa se dodeljuje nekom element iz X.

Iz svega navedenog u prethodnom pasusu, sledi sledeća definicija. Definicija: Ako je X konačan skup, n prirodan broj I postoji bijekcija iz X u Nn, tada kažemo da X ima n elemenata. Sigurno Vam se desilo da brojite koliko učenika ima u učionici I da dobijete 2 različita broja. Da li to onda znači da naša prethodna definicija nije tačna I da skup istovremeno može imati I m elemenata I n elemenata pri čemu m I n nisu jednaki? Naravno da ne, I zdrava logika nam govori da je ovo moguće samo zbog greške u brojanju I da je broj elemenata skupa jedinstven, a to dodatno potvruje I sledeća teorema. Teorema: Ako su m i n prirodni brojevi tako da je m ¡ n, tada ne postoji injekcija iz Nn u Nm.

Neki od principa koji se koriste za prebrojavanje skupova jesu:

- Princip jednakosti
- Princip zbira
- Princip proizvoda
- Dirihleov princip

3 Kardinalnost skupa

Kardinalni brojevi predstavljaju meru veličine skupa i definišu se uz pomoć bijektivnih preslikavanja. Po svojoj kardinalnosti, skup X može biti:

- Konačan
- Beskonačan
  - Prebrojiv
  - Neprebrojiv

Za skup koji nije konačan kažemo da je beskonačan. Ako postoji bijektivno preslikavanje f skupa X u $\mathbb{N}$, onda je skup X prebrojivo beskonačan (ili prebrojiv).

3.1 Definicija prebrojivo beskonačnog skupa

Skup X je prebrojivo beskonačan ako postoji bijekcija $f : X \to \mathbb{N}$. Skup je prebrojiv ako je konačan ili prebrojivo beskonačan. Skup koji nije prebrojiv je neprebrojiv.

3.2 Teorema

Neka je $X \neq \emptyset$. Sledeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. X je prebrojiv.
2. Postoji surjekcija $f : \mathbb{N} \to X$.
3. Postoji injekcija $g : X \to \mathbb{N}$.

3.3 Dokaz

(a) $\Rightarrow$ (b) Pretpostavimo da je X prebrojiv skup. Tada prema definiciji on može biti konačan ili prebrojivo beskonačan. Promatramo dve situacije:

- Ukoliko je neprazan skup X konačan, tada postoji bijekcija $f : [1..n] \to X$ za neki prirodan broj n. Definišimo funkciju $h : \mathbb{N} \to X$ na sledeći način:

$$h(j) = \begin{cases} f(j), & j \in [1..n] \\ f(1), & j > n \end{cases}$$

  Budući da je funkcija h definisana preko bijekcije f, te za $j > n$ ne važi injektivnost, zaključujemo da je $h : \mathbb{N} \to X$ tražena surjekcija.
- Ukoliko je X prebrojivo beskonačan skup, tada postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to X$ koja je očito i surjekcija.

(b) $\Rightarrow$ (c) Neka je $f : \mathbb{N} \to X$ surjekcija. Treba pronaći injekciju $g : X \to \mathbb{N}$. Uzmimo proizvoljan $x \in X$. Kako je funkcija f surjekcija, sledi da postoji element domena koji se preslikava u element $x \in X$. Kako ne znamo ništa o injektivnosti funkcije f, taj element ne mora biti jedinstven pa je inverz $f^{-1}(x) \subseteq \mathbb{N}$. Sada prema Teoremi o dobrom ureenju skupa prirodnih brojeva sledi da skup $f^{-1}(x)$ ima najmanji element kojeg možemo označiti sa n_x. Kako je f surjekcija, tako je skup $f^{-1}(x)$ neprazan za svaki $x \in X$, a zbog jedinstvenosti najmanjeg elementa možemo definisati funkciju $g : X \to \mathbb{N}$ sa $g(x) = n_x$. Budući da su za različite elemente skupa X njihovi inverzi disjunktni skupovi, funkcija g je traženo injektivno preslikavanje.

(c) $\Rightarrow$ (a) Neka je $g : X \to \mathbb{N}$ injekcija. Ukoliko napravimo restrikciju kodomena na sliku funkcije g, dobijamo bijekciju $g : X \to g(X)$. Prema tome, $X \sim g(X)$. Budući da je $g(X) \subseteq \mathbb{N}$, intuitivno je jasno da on može biti konačan ili prebrojivo beskonačan, u šta ćemo se uveriti u sledećoj teoremi. Iz prethodne ekvipotentnosti zaključujemo da je skup X prebrojiv.

3.4 Primer prebrojivog beskonačnog skupa

Skup $\mathbb{N}$ je prebrojiv jer je $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $id(x) = x$, bijekcija.

Skupovi $2\mathbb{N} - 1$ i $2\mathbb{N}$ su prebrojivo beskonačni jer su funkcije $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} - 1$ i $g : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ bijekcije.

Skup celih brojeva $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je prebrojivo beskonačan. Može se napraviti bijekcija sa $\mathbb{N}$ gde je $0 \to 1$, $1 \to 2$, $-1 \to 3$, i tako dalje.

3.5 Prebrojavanje elemenata prebrojivo beskonačnog skupa

Jedna od metoda za prebrojavanje elemenata prebrojivo beskonačnog skupa je Cantorova dijagonalna metoda.

3.6 Lema: Skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ su prebrojivi

3.6.1 Dokaz:

Pokažimo prvo tvrenje za skup $\mathbb{Z}$. Uvoenjem oznake $\mathbb{Z}^-$ za skup negativnih celih brojeva i $\mathbb{Z}^+$ za skup pozitivnih celih brojeva, skup $\mathbb{Z}$ možemo prikazati kao:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+.$$

Kako je svaki od skupova $\mathbb{Z}^-$, $\{0\}$, $\mathbb{Z}^+$ prebrojiv (štaviše, $\{0\}$ je konačan skup), tvrdnja sledi iz sledeće teoreme: Unija prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.

Neka je sada $\mathbb{Q}^-$ skup negativnih racionalnih brojeva i $\mathbb{Q}^+$ skup pozitivnih racionalnih brojeva. Tada je:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+.$$

Preslikavanje $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$ definisano sa $f(q) = -q$ je očito bijekcija, stoga će tvrdnja biti dokazano ukoliko dokažemo da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv skup.

Neka je:

$$A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N},\ \gcd(x, y) = 1\},$$

odnosno A je skup svih ureenih parova prirodnih brojeva takvih da su oni relativno prosti. Iz definicije skupa A očigledno je da je $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pa znamo da je A prebrojiv jer je $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ prebrojiv skup.

Definišimo $F : A \to \mathbb{Q}^+$ sa $F(x, y) = \frac{x}{y}$. Ovo preslikavanje je očito bijektivno, pa iz toga po definiciji sledi da je $\mathbb{Q}^+$ prebrojiv, te je i sam $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup.

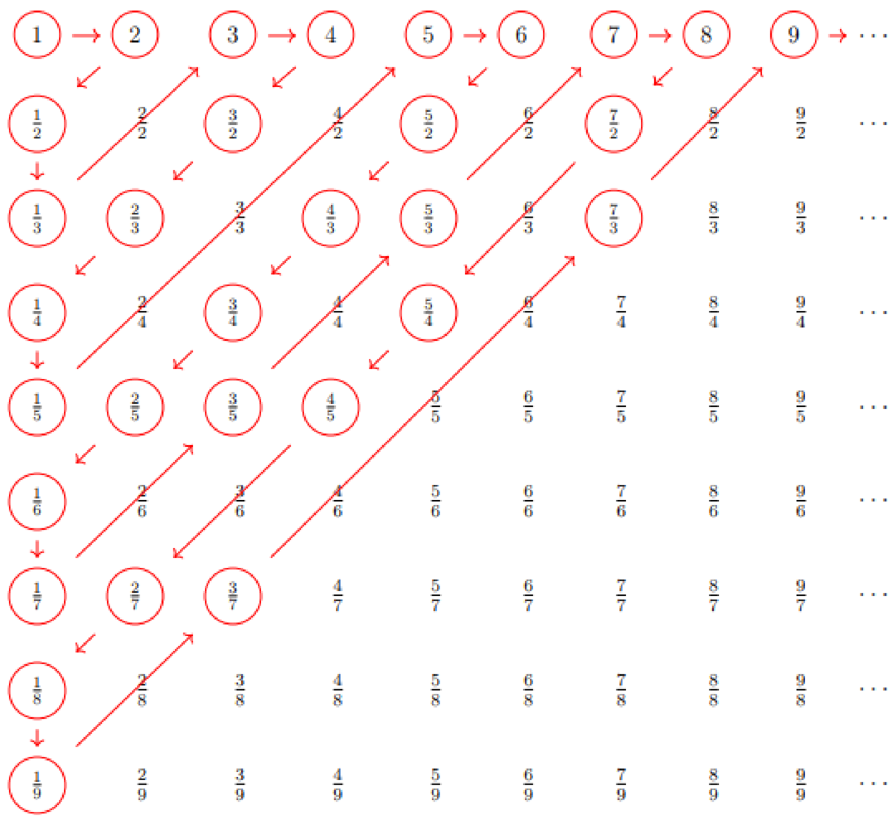
Dokaz prebrojivosti skupa Q možemo i prikazati preko Kantorovog dijagonalnog postupka.

Videli smo da prebrojivost nekih skupova možemo pokazati na dva načina, koristeći neke od navedenih tvrdnji ili direktno nalaženjem prikladne bijekcije u skup N

4 Princip zbira

4.1 Uvod

Princip zbira ili sume (rule of sum) fundamentalan je princip prebrojavanja kojim se ljudi koriste još od nastanka civilizacija. Ideja koja se krije iza prethodno pomenutog principa krajnje je intuitivna i lako razumljiva, a može se, izmedju ostalih primera, predstaviti i na sledeći način: na vežbama iz algoritama i struktura podataka dobili smo zadatak da nadjemo rešenje za odredjeni



problem. Kolega iz klupe došao je do A broja rešenja, dok je drugarica pored njega došla do B broja rešenja, i poredeći ih medjusobno shvatili smo da nijedno rešenje nije istovetno, što znači da su skupovi rešenja A i B medjusobno disjunktni, tj nemaju deljenih metoda za rešavanje problema. U našem slučaju broj rešenja zadatka bi bio A+B.

4.2 Princip zbira dva skupa

Prethodni princip se svakodnevnom životu sreće veoma često, stoga nam je bilo veoma bitno formalizovati ga i predstaviti u vidu leme:

Ako su skupovi A i B disjunktni (tj. $A \cap B = \emptyset$), onda važi:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Dokaz. Neka su $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$, gde važi $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$. Tada:

$$A \cup B = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}.$$

Budući da su $A \cap B = \emptyset$, broj elemenata u uniji je$|A \cup B| = n + m$.
Prethodno važi zato što postoji bijektivno preslikavanje skupa $|A \cup B|$ u skup brojeva $\{1, 2, \ldots, n + m\}$, koja preslikava:

$$a_1 \mapsto 1,\ a_2 \mapsto 2,\ \ldots,\ a_n \mapsto n,\ b_1 \mapsto n+1,\ b_2 \mapsto n+2,\ \ldots,\ b_m \mapsto n+m.$$

Na ovaj način svaki element skupa $A \cup B$ može biti jednoznačno mapiran na neki broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, n + m\}$, što potvrdjuje da:

$$|A \cup B| = n + m.$$

□

4.3 Princip zbira više skupova

Nakon što smo prodiskutovali naša rešenja problema sa asistentom pomogao nam je sa još C različitih načina rešavanja datog zadatka, što bi ukupan broj različitih rešenja povećao za asistentov C broj rešenja, matematički zapisano sa A+B+C. Da se primetiti da princip zbira važi kako za dva skupa tako i za više njih, što je lako dokazivo matematičkom indukcijom, a omogućava nam da princip proširimo na uniju proizvoljnog broja disjunktnih konačnih skupova:

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjunktni skupovi, tj. za sve $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ako $i \neq j$, tada:

$$A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Tada važi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Dokaz. Dokazujemo tvrdnju indukcijom po broju skupova n.
Baza: Neka je $n = 2$. Tada tvrdnja glasi:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|,$$

što je tačno, jer su A_1 i A_2 disjunktni skupovi, i iz principa sume za dva skupa, znamo da je broj elemenata u njihovoj uniji jednak zbiru broja elemenata u svakom od njih.
Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdnja važi za neki broj k, tj. da za disjunktne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_k$ važi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

Induktivni korak: Treba da pokažemo da tvrdnja važi za $k+1$ skup. Posmatrajmo disjunktne skupove $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$. Tada:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}|.$$

Budući da su skupovi disjunktni, znamo da $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1} = \emptyset$. Prema principu sume za dva skupa, imamo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + |A_{k+1}|.$$

Korišćenjem induktivne pretpostavke, možemo dalje izračunati:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = (|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|) + |A_{k+1}|.$$

Dakle, tvrdnja važi za $k+1$ skup.
Zaključak: Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja važi za svaki prirodan broj n. $\square$

U slučaju da imamo n medjusobno disjunktnih skupova od kojih svaki ima m elemenata ukupan broj elemenata unije skupova biće proizvod n.

Princip sume se može koristiti kako bi se dokazalo Paskalovo pravilo i princip množenja.

4.4 Primeri

Zadatak 1. *Student može odabrati računarski projekat sa jedne od tri liste. Tri liste sadrže 23, 15 i 19 mogućih projekata, redom. Nijedan projekat se ne ponavlja na više lista. Koliko mogućih projekata student može da odabere?*

Rešenje. Da bismo izračunali ukupan broj mogućih projekata, potrebno je da saberemo projekte sa svih lista. Pošto nijedan projekat nije na više od jedne liste, možemo koristiti jednostavnu formulu:

$$\text{Ukupan broj projekata} = 23 + 15 + 19$$

Izračunajmo:

$$\text{Ukupan broj projekata} = 57$$

Dakle, student može birati izmedju **57 različitih projekata**. $\square$

Zadatak 2. *Svaki korisnik u računarskom sistemu ima lozinku koja je dugačka izmedju šest i osam karaktera, pri čemu svaki karakter može biti veliko slovo ili cifra. Svaka lozinka mora sadržati barem jednu cifru. Koliko mogućih lozinki postoji?*

Rešenje. Korak 1: Ukupan broj dostupnih karaktera - Velika slova: 26 (A-Z) - Cifre: 10 (0-9)

Ukupan broj karaktera = 26 + 10 = 36.
Korak 2: Izračunavanje ukupnog broja lozinki bez ograničenja
Za lozinku dužine n:

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine } n = 36^n.$$

Dakle, računamo za $n = 6, 7, 8$:

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine } 6 = 36^6$$

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine } 7 = 36^7$$

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine } 8 = 36^8$$

Korak 3: Izračunavanje lozinki bez cifara (nevažeće lozinke)
Sledeće, izračunavamo broj lozinki koje ne sadrže cifre (samo velika slova):
- Ukupan broj velikih slova = 26.
Tako, za lozinku dužine n (bez cifara):

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine } n = 26^n.$$

Dakle, računamo za $n = 6, 7, 8$:

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine 6 bez cifara} = 26^6$$

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine 7 bez cifara} = 26^7$$

$$\text{Ukupan broj lozinki dužine 8 bez cifara} = 26^8$$

Korak 4: Ukupan broj lozinki koje sadrže barem jednu cifru

Da bismo izračunali ukupan broj lozinki koje sadrže barem jednu cifru, oduzimo broj nevažećih lozinki od ukupnog broja lozinki:

$$\text{Ukupan broj važećih lozinki} = \left(36^6 - 26^6\right) + \left(36^7 - 26^7\right) + \left(36^8 - 26^8\right).$$

□

5 Princip uključenja-isključenja

5.1 Uvod

U prethodnom primeru gde se rešavao algoritamski problem jasno je naznačeno da se skupovi koleginih, asistentovih i mojih rešenja ne poklapaju ni za jedno rešenje, tj. skupovi rešenja A, B i C su disjunktni, što je u životu veoma redak slučaj. Češće se javlja slučaj u kome više studenata imaju sličan metod rešavanja problema, premda dolazi do poklapanja izmedju skupova rešenja, stoga kako ne bismo pravili grešku pri prebrojavanju potrebno je koristiti princip uključenja-isključenja.

5.2 Princip uključenja-isključenja za elemente dva skupa

Kod primera dva studenta prebrojali bismo elemente jednog pa drugog skupa, što bi značilo da dvaput prebrojavamo elemente preseka tih skupova. Zato ih moramo oduzeti od zbira elemenata prva dva skupa. To se zapisuje na sledeći način:

Imamo dva proizvoljna konačna skupa A i B. Tada je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Dokaz. Skupovi $A \cap B$ i $A \setminus B$ su medjusobno disjunktni i važe sledeće jednakosti (definicija operacija nad skupovima):

$$A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$$
$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A).$$

Kardinalnost ovih operacija zadovoljava:

$$|A| = |(A \setminus B) \cup (A \cap B)| = |A \setminus B| + |A \cap B|,$$
$$|B| = |(B \setminus A) \cup (A \cap B)| = |B \setminus A| + |A \cap B|.$$

Dakle, unija može biti zapisana i kao:

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

Odatle je $|A| + |B| = |A \cap B| + |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|$, tj.

$$|A \cup B| = |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A|.$$

$\square$

5.3 Princip uključenja-isključenja za elemente tri skupa

Sledeća lema pokazaće nam kako se ovaj princip primenjuje u slučaju tri proizvoljna skupa:

Neka su A, B i C proizvoljni konačni skupovi. Tada je:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ako dva puta primenimo prethodnu lemu, uz korišćenje osobine skupova dobijamo:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned} \tag{1}$$

5.4 Generalni princip uključenja-isključenja

Posmatranjem slučajeva od dva skupa pa naviše uočavamo nastanak obrasca koji se matematički predstavlja sledećom teoremom:

Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ skupovi. Tada važi:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Dokaz indukcijom. Dokazujemo tvrdnju indukcijom po n.

Baza: Neka je $n = 1$. Tada:

$$|A_1| = |A_1|,$$

što je tačno.

Induktivna pretpostavka: Pretpostavimo da tvrdnja važi za $n = k$, tj. za k skupova:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|.$$

Induktivni korak: Treba da pokažemo da tvrdnja važi za $n = k + 1$. Razmotrimo $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$.

Imamo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}|.$$

Primena formule za uniju daje:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}|.$$

Korišćenjem induktivne pretpostavke, dobijamo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|.$$

Zamenjujući u formulu, dobijamo:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = \left(\sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k| \right) + |A_{k+1}| - |(A_1 \cup$$

S obzirom na to da su svi preseci A_{k+1} sa prethodnim skupovima takodje uključeni, možemo napisati:

$$|(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k} |A_i \cap A_{k+1}| - \sum_{1 \leq i < j \leq k} |A_i \cap A_j \cap A_{k+1}| + \cdots + (-1)^{k} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1}|.$$

Kombinovanjem svega, možemo dobiti željenu formulu za $n = k + 1$.

Zaključak: Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja važi za svaki prirodan broj n.

□

5.5 Primeri

Zadatak 3. *Koliko bit nizova dužine osam počinje sa bitom 1 ili završava sa dva bita 00?*

Rešenje. Da bismo izračunali ukupan broj bit nizova koji zadovoljavaju uslove, možemo koristiti princip uključivanja i isključivanja. Definišemo:

- **Skup A**: bit nizovi dužine 8 koji počinju sa 1.
- **Skup B**: bit nizovi dužine 8 koji se završavaju sa 00.

Želimo da pronaemo $|A \cup B|$.

Korak 1: Izračunavanje $|A|$
Bit nizovi koji počinju sa 1 imaju oblik $1xxxxxxx$ (gde je x bilo koji bit).
Dakle, za preostalih 7 bita imamo 2^7 mogućnosti:

$$|A| = 2^7 = 128.$$

Korak 2: Izračunavanje $|B|$
Bit nizovi koji se završavaju sa 00 imaju oblik $xxxxxx00$.

Dakle, za preostalih 6 bita imamo 2^6 mogućnosti:

$$|B| = 2^6 = 64.$$

Korak 3: Izračunavanje $|A \cap B|$
Bit nizovi koji počinju sa 1 i završavaju sa 00 imaju oblik $1xxxxx00$.

Dakle, za preostalih 5 bita imamo 2^5 mogućnosti:

$$|A \cap B| = 2^5 = 32.$$

Korak 4: Primena principa uključivanja i isključivanja
Sada možemo izračunati $|A \cup B|$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 128 + 64 - 32 = 160.$$

□

Zadatak 4. *Jedna kompjuterska kompanija je primila 350 prijava od diplomaca kompjuterskih nauka za posao u planiranju nove linije Web servera. Pretpostavimo da je 220 ovih kandidata završilo kompjuterske nauke, 147 je završilo poslovne studije, a 51 je završilo i kompjuterske nauke i poslovne studije. Koliko od ovih kandidata nije završilo ni kompjuterske nauke ni poslovne studije?*

Rešenje. Da bismo odredili koliko kandidata nije završilo ni kompjuterske nauke ni poslovne studije, možemo koristiti princip uključivanja i isključivanja. Definišemo:

- **Skup A**: kandidati koji su završili kompjuterske nauke.
- **Skup B**: kandidati koji su završili poslovne studije.

Dat je broj kandidata:

$$\begin{aligned}
|A| &= 220 \quad \text{(broj kandidata koji su završili kompjuterske nauke)} \\
|B| &= 147 \quad \text{(broj kandidata koji su završili poslovne studije)} \\
|A \cap B| &= 51 \quad \text{(broj kandidata koji su završili i kompjuterske nauke i poslovne studije)}
\end{aligned}$$

Prvo, izračunajmo broj kandidata koji su završili ili kompjuterske nauke ili poslovne studije (ili oboje):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| = 220 + 147 - 51 = 316$$

Sada, da bismo pronašli broj kandidata koji nije završio ni kompjuterske nauke ni poslovne studije, oduzećemo broj kandidata koji su završili ili jedno ili drugo od ukupnog broja kandidata:

Kandidati koji nisu završili ni jedno = Ukupno kandidata$-|A \cup B| = 350 - 316 = 34$

$\square$

U teoriji skupova i kombinatorici, **principi prebrojavanja** pružaju osnovu za odreivanje broja elemenata u konačnim skupovima. Dva ključna principa koja se koriste u prebrojavanju su **princip proizvoda** i **princip jednakosti**, a njihova formalna matematička formulacija omogućava rešavanje raznih problema u teoriji skupova, algoritmima, kao i u praktičnim aplikacijama poput softverskog inženjerstva.

6 Princip Proizvoda

Princip proizvoda je ključni alat u kombinatorici koji se koristi za prebrojavanje ureenih parova, trojki ili n-torki, kada je svaki element u n-torki iz različitih skupova, a izbor svakog elementa je nezavistan od izbora drugih elemenata.

definicija

Neka su A1 ,A2 ,. . . ,Ak neprazni konačni skupovi. Želimo da odredimo broj elemenata u Dekartovom proizvodu ovih skupova. Dekartov proizvod A1 × A2 ×× Ak je skup svih ureenih k-torki, gde prvi element dolazi iz skupa A1 , drugi iz skupa A2 , i tako dalje, tj:

A1 × A2 × × Ak = {(a1, a2, . . . , ak)a1 A1 ,a2 A2 ,. . . ,ak Ak }

Broj elemenata u Dekartovom proizvodu je jednak proizvodu brojeva elemenata u pojedinačnim skupovima:

A1 × A2 × × Ak =A1 · A2 · ... ·Ak

Ovo znači da ukoliko svaki skup Ai sadrži Ai elemenata, tada se ukupan broj različitih mogućih k-torki dobija kao proizvod brojeva elemenata u skupovima A1 ,A2 ,. . . ,Ak .

Dokaz (radi se indukcijom po n;n-broj konacnih skupova)

Baza indukcije: n = 2:

Imamo dva skupa A1 i A2, Dekartov proizvod je skup svih uredjenih parova (a1,a2) gde a1 A1 i a2 A2 . Broj takvih parova je ocigledno jednak A1 × A2 sto dokazuje bazni slucaj za n=2;

Induktivna pretpostavka (n = k) :

Pretpostavljamo da vazi i za k elemenata, odnosno:

: A1 × . . . × Ak = A1 · . . . · Ak.

Induktivni korak (n = k+1):

Na osnovu baznog slucaja znamo da je (A1 $\times$ . . . $\times$ An) $\times$ An+1 = A1 $\times$ . . . $\times$ An $\cdot$ An+1. Prema induktivnoj pretpostavci ovo je dalje jednako A1 $\times$ . . . $\times$ An $\times$ An+1 = A1 $\cdot$ . . . . $\cdot$ An $\cdot$ An+1.

Primer

Razmotrimo primer iz razvoja nekog softvera gde želimo da generišemo jedinstvene identifikatore (ID) za korisnike u nekom sistemu. Neka se ID sastoji od tri dela:

Prvi deo je izbor slova iz skupa velikih slova engleske abecede A1 ={A,B,. . . ,Z}, pa je A1 =26.

Drugi deo je trocifreni broj, gde svaki broj može biti od 0 do 9, tj. A2 ={0,1,2,. . . ,9}, pa je A2 =10ˆ3=1000.

Treći deo je specijalni simbol iz skupa A3 ={#,@,$,%,&,}, pa je A3 =6.

Ukupan broj mogućih jedinstvenih ID-ova je broj elemenata u Dekartovom proizvodu A1 $\times$ A2 $\times$ A3 , što prema principu proizvoda iznosi:

A1 $\times$ A2 $\times$ A3 =A1 $\cdot$ A2 $\cdot$ A3 =26 $\cdot$ 1000 $\cdot$ 6=156,000

Dakle, postoji ukupno 156,000 mogućih jedinstvenih ID-ova koje sistem može generisati.

7 Princip Bijekcije

Princip bijekcije je ključni koncept u kombinatorici i teoriji skupova koji omogućava prebrojavanje elemenata u jednom skupu prevoenjem tog problema na prebrojavanje elemenata u drugom, poznatom skupu. Osnovna ideja principa bijekcije jeste da ako postoji bijektivna funkcija izmeu dva konačna skupa A i B, onda oba skupa imaju isti broj elemenata, tj. A=B.

definicija-1

7.0.1 Definicija

Neka su A i B konačni skupovi. Funkcija f:A$\to$B je **bijekcija** (bijektivna funkcija) ako je:

- **injektivna** (jedan na jedan): za svaka dva različita elementa a1 ,a2 A, važi f(a1) != f(a2),
- **sirjektivna** (na): za svaki element bB, postoji element aA takav da je f(a)=b.

Ako postoji bijekcija izmeu dva skupa A i B, tada možemo zaključiti da oba skupa imaju isti broj elemenata:

A=B

Na ovaj način, problem prebrojavanja elemenata skupa A se svodi na prebrojavanje elemenata u skupu B, što može biti lakše ako je B neki poznati skup sa jednostavnijom strukturom.

dokaz-principa-bijekcije

7.0.2 Dokaz principa bijekcijeDokaz principa bijekcije

Da bismo dokazali princip bijekcije, potrebno je pokazati da ako postoji bijekcija izmeu dva konačna skupa A i B, onda A i B imaju isti broj elemenata.

dokaz-koriux161ux107enjem-kontradikcije

Pretpostavimo da postoji bijektivna funkcija f:A→B, ali da A!=B. To znači da postoji razlika u broju elemenata izmeu skupova A i B, tj. A>B ili A<B.

1. **Pretpostavimo A>B**:

    - Po definiciji bijekcije, f je sirjektivna, što znači da za svaki bB postoji aA takav da f(a)=b. Meutim, ako je A>B, postoji više elemenata u skupu A nego u skupu B. Prema tome, za neke elemente iz skupa A ne bi postojali odgovarajući elementi u skupu B, što znači da f ne može biti sirjektivna — kontradikcija.

2. **Pretpostavimo A<B**:

    - Po definiciji bijekcije, f je injektivna, što znači da različiti elementi iz A imaju različite slike u B. Meutim, ako je A<B, postoji više elemenata u skupu B nego u skupu A. To znači da neki elementi iz B ne bi imali original (odgovarajući element u A), što znači da f ne bi mogla biti sirjektivna — opet kontradikcija.

Pošto obe pretpostavke vode do kontradikcije, mora biti da je A=B, što dokazuje princip bijekcije.

primer

7.0.3 PrimerPrimer

Pretpostavimo da imamo n različitih servera i n različitih aplikacija koje treba rasporediti na servere. Svaka aplikacija mora biti dodeljena tačno jednom serveru, a svaki server može imati tačno jednu aplikaciju.

Želimo da znamo koliko postoji načina da raspodelimo n aplikacija na n servera, a to možemo modelovati koristeći princip bijekcije.

matematiux10dka-formulacija-problema

Neka je:

- Skup servera S={s1 ,s2 ,. . . ,sn },
- Skup aplikacija A={a1 ,a2 ,. . . ,an }.

Cilj je dodeliti svaku aplikaciju jednom serveru, što matematički znači pronaći bijekciju f:A→S. Funkcija f preslikava svaku aplikaciju na tačno jedan server, tj. svakoj aplikaciji iz skupa A dodeljuje jedan server iz skupa S.

primena-bijekcije

Pošto je f bijektivna funkcija, znamo da svaka aplikacija ima jedinstveni server, i svaki server ima jedinstvenu aplikaciju. Dakle, broj mogućih različitih načina dodele aplikacija serverima je jednak broju različitih bijekcija iz skupa A u skup S, što je zapravo broj permutacija skupa od n elemenata.

Broj permutacija skupa od n elemenata, tj. broj bijekcija iz skupa A u skup S, je dat faktorijelom broja n:

n!=n×(n1)×(n2)××1

Dakle, postoji tačno n! različitih načina da se n aplikacija rasporedi na n servera.

primena-u-softverskom-inux17eenjerstvu

Ovaj primer se odnosi na realne scenarije u softverskom inženjerstvu gde se aplikacije (ili procesi) moraju rasporediti na različite resurse (kao što su serveri ili virtuelne mašine). Ako imamo tačno n resursa i n aplikacija koje moramo distribuirati, princip bijekcije pokazuje da postoji n! različitih načina da to učinimo.

Ako bi, na primer, sistem zahtevao optimalno rasporeivanje resursa ili balansiranje opterećenja, mogli bismo koristiti princip bijekcije da analiziramo sve moguće dodeljene konfiguracije. Korišćenjem ovog principa, znamo da možemo prebrojati koliko ukupno postoji različitih dodela i potencijalno izabrati optimalnu na osnovu dodatnih kriterijuma (kao što su performanse, potrošnja resursa itd.).

8 Dirihelov princip

8.1 Uvod

Dirihelov princip jedan je od starijih matematičkih problema. Originalna verzija Dirihelovog principa koji se naziva i The Pigeonhole Principle/Dirichlet box principle zasniva se na sledećem: posmatramo n golubova kako doleću u m golubarnika. Ako znamo da je broj golubova n manji od broja golubarnika m možemo zaključiti da će se bar u jednoj od golubarnika nalaziti bar dva objekta (goluba). Dokaz ovog principa se jednostavno dokazuje svodjenjem na kontradikciju (reductio ad absurdum): Pretpostavimo da svaki golubarnika sadrži najviše jednog goluba. U tom slučaju je ukupan broj goluba jednak ukupnom broju golubarnika, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je broj golubova veći od broja golubarnika.

8.2 Teorema

Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Ovo znači da su skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podskupovi skupa $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Pretpostavimo da je ukupan broj elemenata m veći od broja skupova n, tj. $m > n$.

Dirihleov princip kaže da u ovom slučaju postoji bar jedan skup A_j koji sadrži više od jednog elementa. Formalno, postoji $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da je $|A_j| \geq 2$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $|A_j| \leq 1$ za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. To znači da nijedan skup A_j ne sadrži više od jednog elementa, odnosno da je:

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \leq n$$

Medjutim, ukupan broj elemenata u uniji svih skupova $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ mora biti m, jer su $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, i svaki element iz $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ pripada nekom od ovih skupova. Dakle, važi:

$$m = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \leq n$$

Ovo je kontradikcija, jer smo pretpostavili da je $m > n$. Stoga, naša pretpostavka da je $|A_j| \leq 1$ za svaki j mora biti netačna. Iz toga sledi da postoji bar jedan skup A_j za koji važi $|A_j| \geq 2$, što dokazuje Dirihleov princip.

□

8.3 Uopšteni Dirihelov princip

Neka su $m, n, q \in \mathbb{N}$, i neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, takvi da:

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\},$$

sa uslovima $m > n \cdot q$ i $q \in \mathbb{N}$.

Uopšteni Dirihleov princip kaže da u ovom slučaju postoji bar jedan skup A_j, za neki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, takav da je $|A_j| \geq q + 1$.

Formalno, postoji $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da:

$$|A_j| \geq q + 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ važi $|A_j| \leq q$. To znači da nijedan skup A_j ne sadrži više od q elemenata, odnosno:

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \leq n \cdot q.$$

Medjutim, ukupan broj elemenata u uniji svih skupova $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ mora biti m, jer važi:

$$m = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \leq n \cdot q.$$

Medjutim, iz uslova $m > n \cdot q$ sledi kontradikcija, jer bi prema ovoj nejednakosti ukupan broj elemenata m bio veći od zbirnog kapaciteta svih skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$, koji je najviše $n \cdot q$.

Stoga, naša pretpostavka da je $|A_j| \leq q$ za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mora biti netačna. Dakle, mora postojati bar jedan skup A_j za koji važi $|A_j| \geq q + 1$, čime smo dokazali uopšteni Dirihleov princip.

□

8.4 Primeri

Zadatak 5. *Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji prirodan broj koji je deljiv sa n i zapisuje se samo pomoću cifara 0 i 1.*

Rešenje. Posmatrajmo n brojeva zapisanih koristeći cifru 1:

1 11 111 ... 11...1

Imamo dve mogućnosti:

1. Ako je neki od posmatranih brojeva deljiv sa n, onda je dokaz završen.
2. Svaki broj pri deljenju sa n daje ostatak iz skupa $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Prema Dirihleovom principu postoje (bar) dva broja koja imaju isti ostatak. Neka su to brojevi s i t sa m cifara, gde je $m \geq l$:

   $$\underbrace{11\ldots1}_{m} = q_1 \cdot n + r \text{ i } \underbrace{11\ldots1}_{l} = q_2 \cdot n + r$$

   Tada je:

$$\underbrace{11\ldots1}_{m}-\underbrace{11\ldots1}_{l}=q_1\cdot n+r-(q_2\cdot+r)=q_1\cdot n-q_2\cdot n=(q_1-q_2)\cdot n$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{m}-\underbrace{11\ldots1}_{l}=\underbrace{11\ldots1}_{m-l}-\underbrace{00\ldots0}_{l}\implies\underbrace{11\ldots1}_{m}-\underbrace{11\ldots1}_{l}=(q_1-q_2)\cdot n$$

□

Zadatak 6. *Fioka sadrži deset crnih i deset belih čarapa. Stavljate ruku unutra i vadite neke bez gledanja. Koliko minimalno čarapa morate izvući da biste bili sigurni da ste dobili par iste boje?*

Rešenje. Intuitivno:
Ako izvučete samo dve čarape, one mogu biti različitih boja. Medjutim, kada izvučete treću čarapu, ona mora biti iste boje kao jedna od već izabranih čarapa. Zbog toga je odgovor tri.
Matematičko:
Ovaj odgovor se može formalnije izraziti na sledeći način: Neka čarape koje se vade budu označene kao $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ i razmotrimo funkciju C koja svaku čarapu šalje svojoj boji. Ako je $n = 2$, funkcija C može biti jedinstvena (ako su dve izvučene čarape različitih boja). Medjutim, ako je $n > 2$, tada je broj elemenata u domenu funkcije C veći od broja elemenata u kodomenu funkcije C. Tako, prema principu golubarnika, funkcija C nije jedinstvena: $C(s_i) = C(s_j)$ za neka $s_i \neq s_j$. To znači da ako se izvuče najmanje tri čarape, onda bar dve od njih imaju istu boju. □

Zadatak 7. *Postoji 42 studenta koji treba da podele 12 računara. Svaki student koristi tačno 1 računar, a nijedan računar ne koristi više od 6 studenata. Pokažite da najmanje 5 računara koristi 3 ili više studenata.*

Rešenje.

1. Koristeći dokazivanje kontradikcijom: Pretpostavimo suprotno. Pretpostavimo da 4 ili manje računara koriste 3 ili više studenata. Tada se koristi 8 ili više računara od strane 2 ili manje studenata. Podelimo skup računara u dva podskupa: C_1 i C_2. U C_1 stavimo 8 računara koji koriste 2 ili manje studenata.

   Ako svaki od 8 računara koristi najviše 2 studenta, tada će ukupno biti $8 \times 2 = 16$ studenata koji koriste računare u C_1. Ostali studenti, $42 - 16 = 26$, će koristiti računare u C_2.

   U C_2 stavimo računare koji koriste 3 ili više studenata, plus bilo koji preostali računar (da bismo imali ukupno 4 računara u C_2). Pošto najviše 6 studenata koristi jedan računar, prema kontrapozitivnom obliku generalizovanog principa golubarnika, računari u skupu C_2 služe najviše $6 \times 4 = 24$ studenta.

   Pošto najviše 2 studenta koristi jedan računar u C_1, prema generalizovanom principu golubarnika (kontrapozitivni oblik), računari u skupu C_1 služe najviše $2 \times 8 = 16$ studenata. Dakle, ukupni broj studenata koje računari opslužuju je $24 + 16 = 40$.

Medjutim, imamo 42 studenta koji koriste računare. To je u kontradikciji sa prethodnim rezultatom. Stoga, naša pretpostavka da 4 ili manje računara koriste 3 ili više studenata nije tačna. Zaključujemo da je **barem 5 računara** korišćeno od strane 3 ili više studenata.

2. Neka k bude broj računara koje koriste 3 ili više studenata. [Moramo pokazati da je $k \geq 5$.] Pošto svaki računar koriste najviše 6 studenata, ovi računari koriste najviše $6k$ studenata (prema kontrapozitivnom obliku generalizovanog principa golubarnika).

   Svaki od preostalih $12 - k$ računara koristi najviše 2 studenta. Stoga, zajedno, oni koriste najviše

   $2(12-k) \leq 24-2k$ studenata (ponovo, prema kontrapozitivnom obliku generalizovanog principa golubarn

   Dakle, maksimalni broj studenata koje računari mogu opslužiti je

   $$6k + (24 - 2k) = 4k + 24.$$

   Pošto 42 studenta koristi računare, imamo:

   $$4k + 24 \geq 42.$$

   Rešavanjem za k dobijamo:

   $$4k \geq 18 \implies k \geq 4.5.$$

   Pošto je k ceo broj, ovo implicira da je $k \geq 5$ [kao što je trebalo da se pokaže].

$\square$