Uvod u Hamiltonove Grafove

Hamiltonov graf je graf koji sadrži Hamiltonov ciklus, tj. ciklus koji posećuje svaki čor grafa tačno jednom i vraća se u početni čor. Ovaj koncept predstavlja osnovu teorije grafova i ima značajne primene u optimizaciji, računarstvu i operacionim istraživanjima, posebno u problemu trgovačkog putnika.

Istorijski Kontekst

Koncept Hamiltonovih grafova dobio je ime po irskom matematičaru Sir Vilijamu Rouanu Hamiltonu, koji je sredinom 19. veka predstavio ovu ideju. Njegov najpoznatiji doprinos je „Ikosijanska igra," koja je zahtevala nalaženje Hamiltonovog ciklusa na temenima dodekaedra. Ova zagonetka inspirisala je dalju matematičku analizu Hamiltonovih ciklusa.

Teoreme i Kriterijumi

Iako ne postoji univerzalni kriterijum za prepoznavanje Hamiltonovih grafova, poznati su sledeći dovoljni uslovi:

1. Dirakova Teorema (1952): Ako prost graf sa temena zadovoljava (gde je minimalan stepen grafa), onda je Hamiltonov.
2. Oreova Teorema (1960): Ako za svaki par nesusednih temena u grafu važi, tada je Hamiltonov.
3. Chvátal–Erdős Uslov: Graf je Hamiltonov ako njegova zatvorenost (dodavanje grana prema Oreovom kriterijumu) rezultira kompletnim grafom.

Definicija: Hamiltonov graf

Hamiltonov graf je neusmereni graf koji ima **Hamiltonov put** i **Hamiltonov ciklus**.

1. **Hamiltonov put**: Put u grafu koji posećuje svaki čvor tačno jednom.
2. **Hamiltonov ciklus**: Ciklus u grafu koji posećuje svaki čvor tačno jednom i vraća se na početni čvor.

Hamiltonov graf je graf koji sadrži Hamiltonov ciklus.

Primer Hamiltonovog grafa

Graf:

```
   A -- B
  /      \
 D        C
  \______/
```

- Hamiltonov put: A→B→C→D
- Hamiltonov ciklus: A→B→C→D→A

Definicija: Polu-Hamiltonov graf

Polu-Hamiltonov graf je neusmereni graf koji ima **Hamiltonov put**, ali nema Hamiltonov ciklus.

Primer Polu-Hamiltonovog grafa

Graf:

```
   A -- B
  /      \
 D        C
```

- Hamiltonov put: A→B→C→D
- Nema Hamiltonov ciklus jer nije moguće vratiti se na početni čvor nakon obilaska svih čvorova.

Razlika između Hamiltonovog i Polu-Hamiltonovog grafa

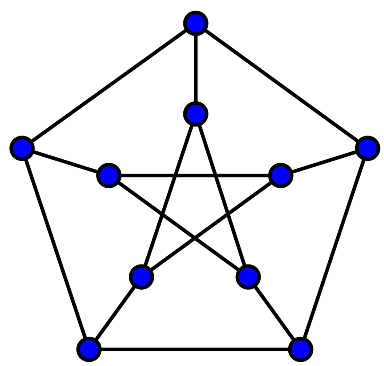
- **Hamiltonov graf**: Ima Hamiltonov ciklus (put koji posećuje sve čvorove i vraća se na početni čvor).

- **Polu-Hamiltonov graf**: Ima Hamiltonov put (obilazak svih čvorova bez vraćanja na početni čvor).

Potrebni uslovi

Jedan od najtežih i još uvijek neriješenih problema teorije grafova je karakterizacija Hamiltonovih grafova. Do sada je otkriveno više potrebnih i više dovoljnih uslova da graf bude Hamiltonov, ali među njima nijedan nije istovremeno i potreban i dovoljan uslov.

Na primjer, ako je G Hamiltonov graf tada zbog prisustva Hamiltonove konture nema artikulacionih čvorova(čvorovi čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan). Prema tome graf G je 2-povezan. Zbog toga, potreban uslov za graf G da bude Hamiltonov je da je 2-povezan. Dakle, graf koji nije 2-povezan nije Hamiltonov. Međutim, 2- povezanost nije i dovoljan uslov. Na primjer, Petersenov graf je 2-povezan, a nije Hamiltonov. Na slici je prikazan Petersenov graf.



Napomena:

Ako je graf Hamiltonov, onda važe potrebni uslovi. Ovo se često koristi u kontrapozitivnom obliku, odnosno ako potrebni uslovi ne važe graf sigurno nije Hamiltonov.

Potrebni uslovi su oni koji slijede iz toga da u grafu postoji Hamiltonova kontura.

Direktno iz definicije Hamiltonov grafa slijedi i prva teorema koja kaze:

Teorema 1:

Neka je G Hamiltonov graf. Tada postoji pokrivajući podgraf G_1 grafa G koji zadovoljava sljedeće uslove:

1. *G_1 je povezan*
2. *Svaki čvor u G_1 je stepena 2*
3. *G_1 sadrži jednak broj čvorova i grana*

Teorema 2:

Ako je G Hamiltonov graf, tada za svaki pravi neprazan podskup S ⊂ V (G) važi

$$\omega\ (G \ \ S) \leq |S|$$

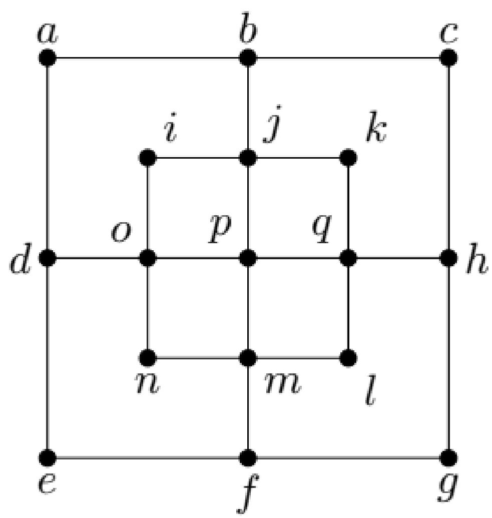
Dokaz:

Neka je S ⊂ V(G) i pretpostavimo da je ω(G - S) = k ≥ 1, gde su $G_1, G_2, \ldots\ G_k$ komponente G - S. Neka je C Hamiltonova kontura u G. Tada je E(C) ⊂ E(G), pa važi ω(G - S) ≤ ω(C - S). Razlog je što se dodavanjem novih grana ne povećava broj komponenti. Međutim važi ω(C - S) ≤ |S|. Zaista, uklanjanjem određenog broja čvorova kontura se raspada na jedan ili više disjunktnih puteva. Pri tome jednakost važi samo u slučaju kada nikoja dva čvora iz S nisu susjedi u konturi C. Tada se C raspada na tačno |S| disjunktnih puteva. Iz navedenih jednakosti zaključujemo da važi ω(G - S) ≤ |S|. □

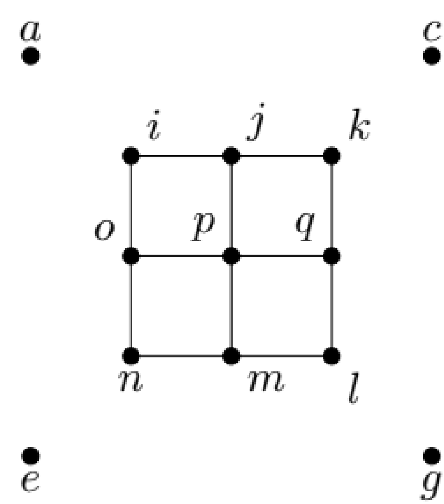
Navedeni rezultat je često efikasan metod za dokaz da dati graf nije Hamiltonov. Sastoji se u tome da se uoči zgodan podskup S, takav da je ω(G - S) > |S|

Primjer:

Graf na slici nije Hamiltonov jer oduzimanjem skupa čvorova $U = \{b, d, f, h\}$ dobijamo graf sa 5 komponenti povezanosti.



G



$G - \{b, d, f, h\}$

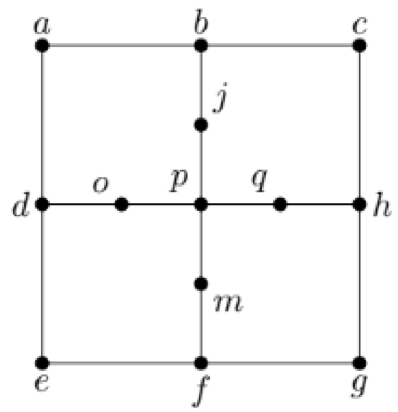
Teorema 3:

Ako je G polu Hamiltonov graf, onda za svako $U \subset V(G)$ sa osobinom $U \neq \emptyset$ važi:

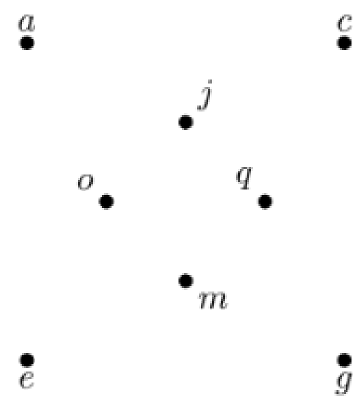
$$w(G - U) \leq |U| + 1$$

Primjer 2:

Graf na slici nije polu Hamiltonov, zato što oduzimanjem skupa čvorova $U = \{b, d, f, h, p\}$ dobijamo graf sa 8 komponenti povezanosti.



G



$G - \{b, d, f, h, p\}$

Dovoljni uslovi

U teoriji grafova, proučavanje Hamiltonovih ciklusa je jedno od centralnih pitanja. Iako ne postoji jednostavan kriterijum koji bi za svaki graf mogao reći da li je Hamiltonov ili ne, matematičari su razvili različite **dovoljne uslove** — uslove koji, ako su zadovoljeni, **garantuju postojanje Hamiltonovog ciklusa** u grafu.

Međutim, važno je naglasiti: **Dovoljan uslov ne mora biti potreban.** To znači da **ako je neki dovoljan uslov ispunjen, graf je sigurno Hamiltonov**, ali **ako nije ispunjen, ne možemo zaključiti da graf nije Hamiltonov** — možda postoji drugi put do ciklusa koji taj uslov ne pokriva.

U nastavku ćemo predstaviti nekoliko poznatih dovoljnih uslova, zajedno sa njihovim formulacijama i dokazima.

Teorema 1(Oreov teorem):

Neka je G prost graf sa n≥3 čvorova. Ako za svaka dva nepovezana čvora u i v važi:

$$(1) : \deg(u)+\deg(v) \geq n,$$

onda je graf G Hamiltonov.

Dokaz:

Pretpostavimo, radi kontradikcije, da je moguće konstruisati graf koji ispunjava uslov (1), a nije Hamiltonov.

Za dato $n \geq 3$, neka je G graf sa najviše mogućih ivica, takav da G nije Hamiltonov, a zadovoljava uslov (1).

Iako ne sadrži Hamiltonov ciklus, G mora sadržati Hamiltonov put $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. U suprotnom, bilo bi moguće dodavati ivice u G bez da G postane Hamiltonov.

Pošto G nije Hamiltonov, v_1 nije povezan sa v_n, inače bi $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ bio Hamiltonov ciklus.

Prema uslovu (1) imamo:

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n.$$

Prema Dirihleovom principu, za neki i, gde je $2 \leq i \leq n - 1$, važi da je v_i povezan sa v_1, i v_{i-1} povezan sa v_n.

Međutim, ciklus $(v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, ..., v_i, v_1)$ tada predstavlja Hamiltonov ciklus. Tako da je G ipak Hamiltonov.

Teorema 2(Dirakov teorem):

Neka je G prost graf sa $n \geq 3$ čvorova. Ako za svaki čvor $v \in V(G)$ važi $\deg(v) \geq n/2$ onda je graf G Hamiltonov.

Dokaz:

Uzmimo bilo koja dva nepovezana čvora $u, v \in G$.

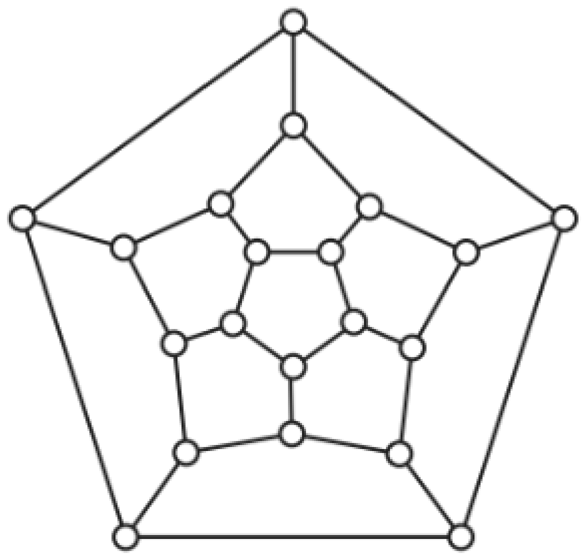
Tada:

$\deg(u) + \deg(v) \geq n/2 + n/2 = n.$

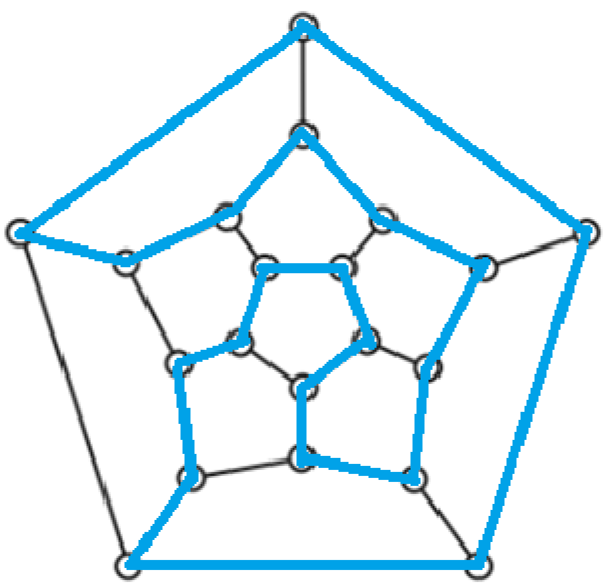
Rezultat sledi direktnom primenom Oreovog teorema.

Pogledajmo sledeće primere:

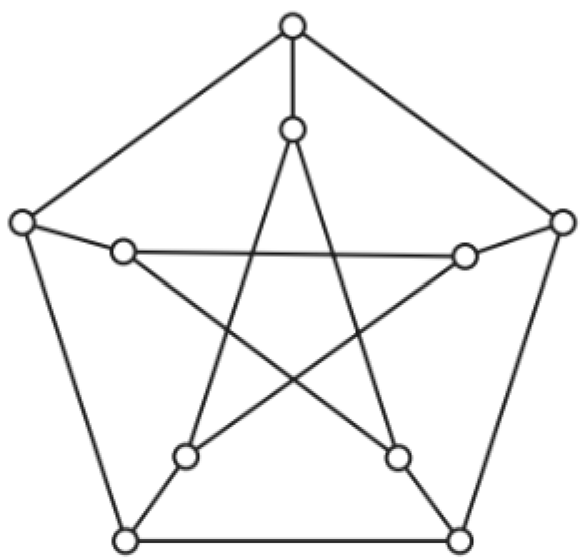
1. Hamiltonov graf



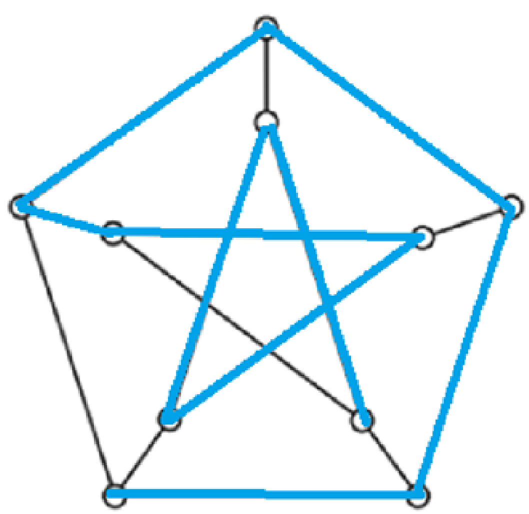
Njegov Hamiltonov ciklus :



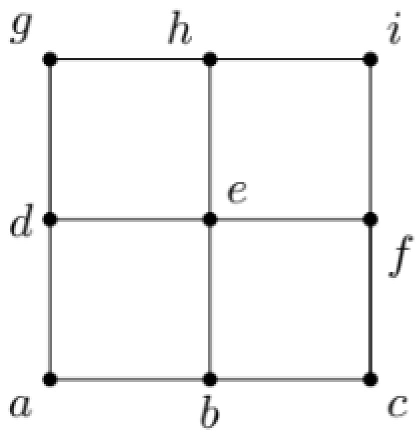
2. Poluhamiltonov graf



Njegov Hamiltonov put :



3. Poluhamiltonov graf, koji nije Ojlerov



Postoji Hamiltonov put – abcfedghi. Graf je povezan ali nije Ojlerov jer svi čvorovi nemaju paran stepen (b,d,f,h).