DISKRETNA MATEMATIKA: TEORIJA GRAFOVA

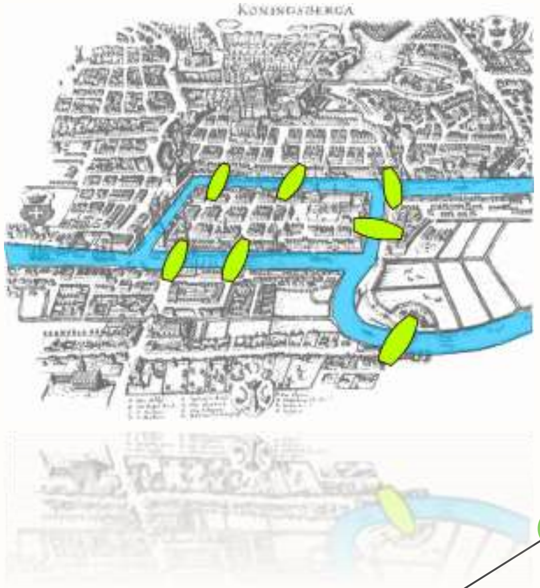
SADRŽAJ:

- Istorijski osvrt na grafove
- Definicija grafa
- Neke specijalne vrste grafova
- Jednakost i izomorfizam
- Operacije sa-na grafovima

Istorija teorije grafova

- **Teorija grafova** započela je sa radom Leonarda Ojlera, koji je rešavao problem *sedam mostova Kenigsberga*.
- Sedam mostova Kenigsberga je jedan od prvih problema koji je (negativno) rešen primenom teorije grafova u 18. veku, odnosno Ojler je dokazao da rešenje **nije moguće**.
- Zaključci do kojih je došao predstavljaju osnovu i začetak teorije grafova.

- Grad Kenigsberg je imao četiri dela povezana sa sedam mostova preko reke Pregel. Gradjani su se pitali je li moguće preći sve mostove samo jednom, a na kraju se vratiti na početnu tačku



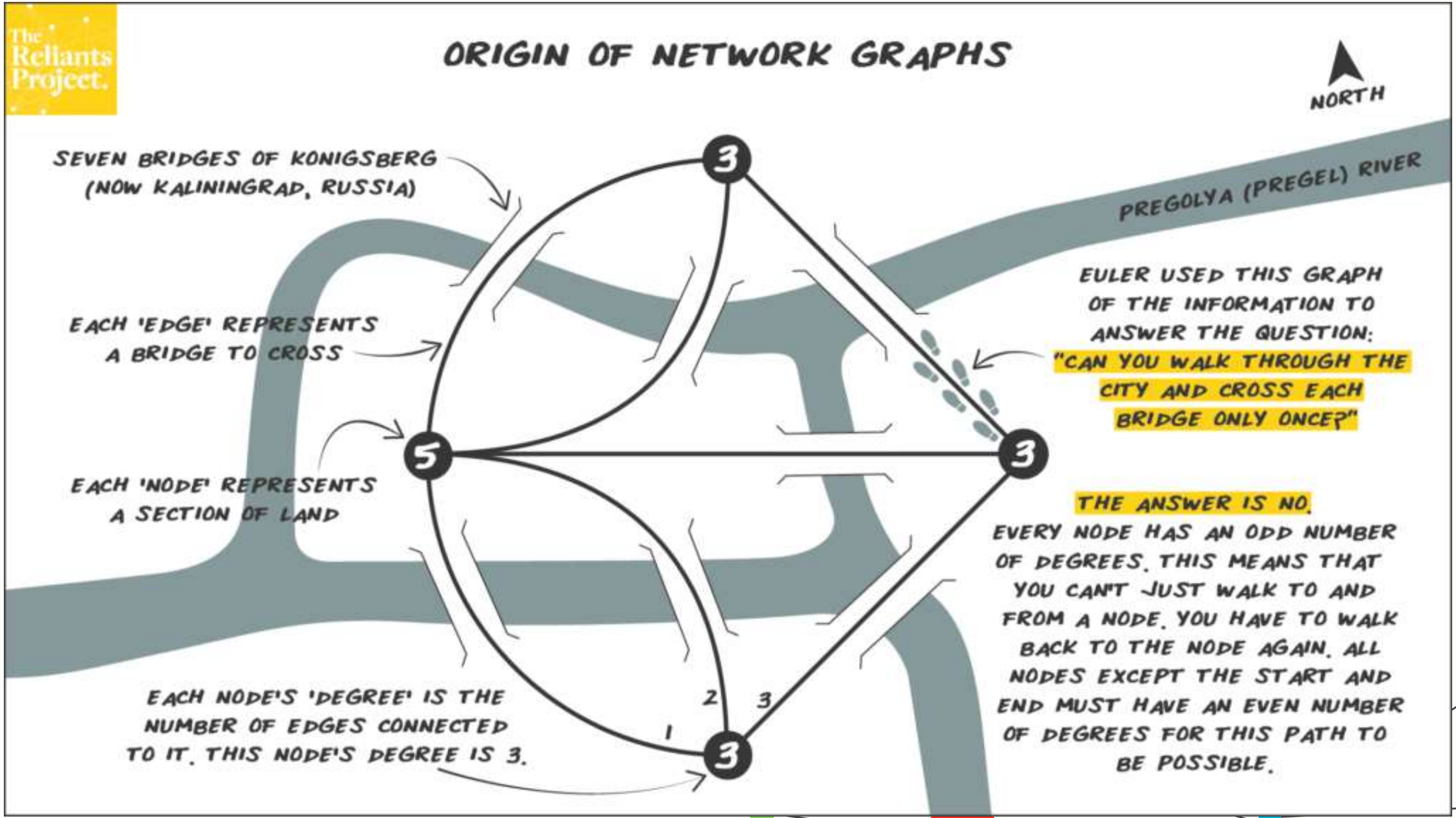
Istorija teorije grafova

- Analiza problema:

- Ojler je posmatrao ovaj problem na drugačiji način. Svaki deo grada je posmatrao kao celinu, odnosno kao čvor, a mostove kao veze izmedju tih čvorova. Na taj način je predstavio problem u vidu graf strukture. Zatim je analizirao sve moguće putanje izmedju čvorova tako da se poseti svaki čvor, a da se pri tome predje preko svake veze samo jednom. Odgovor je da tako nešto nije moguće.

- Za Ojlerovu analizu bitan pojam je stepen čvora, koji predstavlja broj veza koje čvor formira sa susedima. Analizom svih mogućih putanja Ojler je zaključio da čvor koji nije polazna ili završna tačka puta mora imati stepen koji je paran broj. Sledeći to pravilo u zavisnosti od odabira početne i krajnje tačke možemo zaključiti koja je veza „suvišna“ da bi problem bio rešiv.

Istorija teorije grafova



Istorija teorije grafova

- Dalji razvoj:

Augustin-Louis Cauchy i *Gustav Kirchhoff*: Razvili matematičke alate za analizu grafova, posebno u vezi s električnim mrežama (Kirchhoffove zakone).
Arthur Cayley (1857): Proučavao strukturu stabala (specijalni tip grafova), što je bilo značajno za proučavanje hemijskih spojeva.
William Hamilton (1859): Uveo Hamiltonove cikluse, koji proučavaju puteve koji prolaze kroz svaki čvor tačno jednom i vraćaju se *u* početnu tačku.
Francis Guthrie (1852): Postavio problem četiri boje – pitanje koliko najmanje boja je potrebno za bojenje mape tako da susedne oblasti imaju različite boje. Ovaj problem je kasnije analiziran pomoću teorije grafova.
Julius Petersen (1891): Predstavio Petersenov graf, jedan od najpoznatijih primera u teoriji grafova.
König i Kőnig (1936): Razvili prvu sveobuhvatnu knjigu o teoriji grafova.
Paul Erdős i Alfréd Rényi (1959): Razvili teoriju nasumičnih grafova, istražujući kako se strukture ponašaju kada se veze između čvorova biraju nasumično.
Kenneth Appel i Wolfgang Haken (1976): Dokazali problem četiri boje uz pomoć računara – prvi put u matematici da je kompjuter korišćen za dokazivanje teorema.

Primena

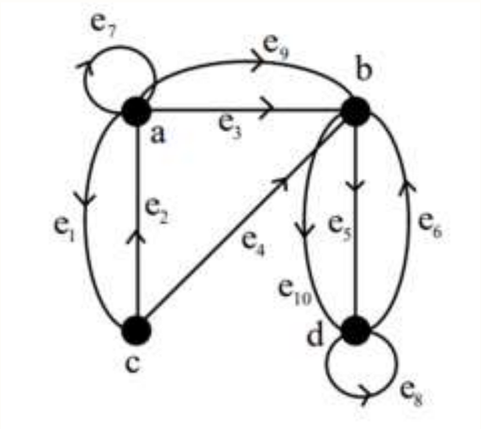
- Teorija grafova danas igra ključnu ulogu u mnogim disciplinama, a neke od njih su:

- **Računarstvo**: Algoritmi pretrage (npr. Dijkstra i BFS/DFS), optimizacija mreža.
- **Transport i logistika**: Planiranje ruta (GPS sistemi), problemi putujućeg trgovca.
- **Društvene mreže**: Analiza povezanosti, uticaja i mreža prijateljstava.
- **Biologija**: Analiza mreža proteina i gena, proučavanje ekoloških mreža i lanaca ishrane.
- **Telekomunikacije**: Dizajn i analiza mreža: internet, mobilne mreže i optički kablovi, optimizacija prenosa podataka.
- **Ekonomija i finansije**: Analiza tržišnih mreža i tokova novca, procena rizika u finansijskim sistemima.

Usmeren graf

Usmeren multigraf (*multidigraf*) je uređena trojka $G = (V, E, \psi)$ gde je:

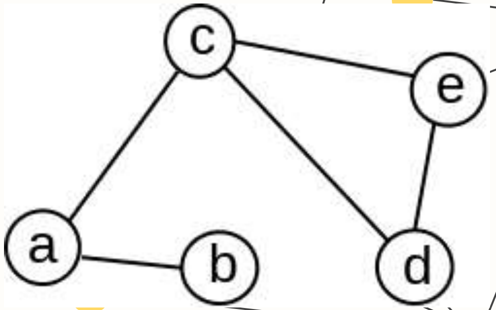
- $V = \emptyset$ Konačan skup čvorova
- E je skup grana, pri čemu je $V \cap E = \emptyset$
- $\Psi : E \rightarrow \{(u, v) : u, v \epsilon V, u \neq v\}$ funkcija incidencije



Neusmeren graf

Neusmeren multigraf predstavlja par $G = (V, E)$ gde je V skup čvorova, a E multiskup koji sadrži grane. Kod neusmerenog multigrafa:

- **Grane nemaju usmerenja** – veza između dva čvora je simetrična, tj. ne razlikuje se (u,v) od (v,u).
- **Mogu postojati višestruke grane između istog para čvorova**, što znači da isti čvorovi mogu biti povezani više puta.
- **Petlje su dozvoljene** – grana može povezivati čvor sa samim sobom, u zavisnosti od definicije specifične za zadati problem.



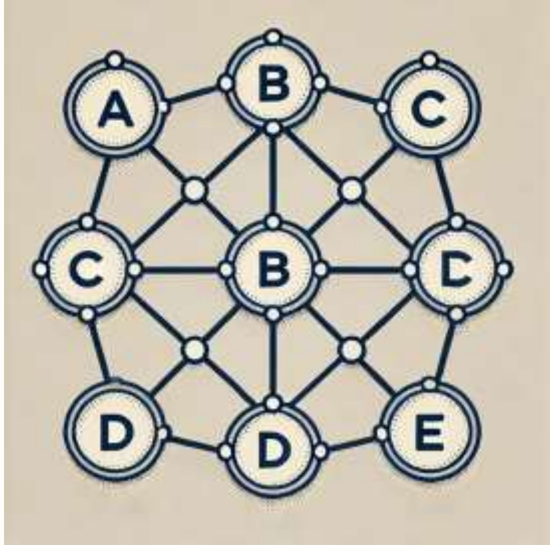
Prost graf

Prost (neusmeren) graf je uređen par G = (V, E) gde je

- $V \neq \emptyset$ konačan skup čvorova i
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ je skup grana.

Neke osobine prostog grafa:

- **Jedinstvene grane:** Između bilo koja dva čvora postoji najviše jedna grana.
- **Bez petlji:** Nijedan čvor nije povezan sam sa sobom.
- **Neusmerenost:** Grane nemaju smer, što znači da su veze između čvorova simetrične.



Prost graf

- Za dva čvora u i v prostog grafa kažemo da su **susedni** ako leže na krajevima iste grane e. Za takvu granu kažemo da je **incidentna** sa čvoroima u i v, a takođe i da povezuje čvorove u i v. Neka je G = (V,E) prost graf i neka je $v \in V$. Broj grana koje su incidentne sa čvorom v nazivamo stepenom čvora u grafu G i označavamo $deg_G(v)$.

- <u>Lema</u> Neka je G = (V, E) prost graf. Tada je:

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = 2|E|$$

Dokaz. Treba primetiti da za svaku granu $\{u, v\} \in E$ važi

$$\{u,v\} \in \Omega_G(u) \quad \text{i} \quad \{u,v\} \in \Omega_G(v) \quad \text{i} \quad \{u,v\} \notin \Omega_G(w), w \notin \{u,v\},$$

odnosno

$$\{u,v\} \in^2 \biguplus_{w \in V} \Omega_G(w).$$

Odatle sledi

$$\sum_{v \in V} deg_G(v) = \sum_{v \in V} |\Omega_G(v)| = \left| \biguplus_{v \in V} \Omega_G(v) \right| = 2|E|.$$

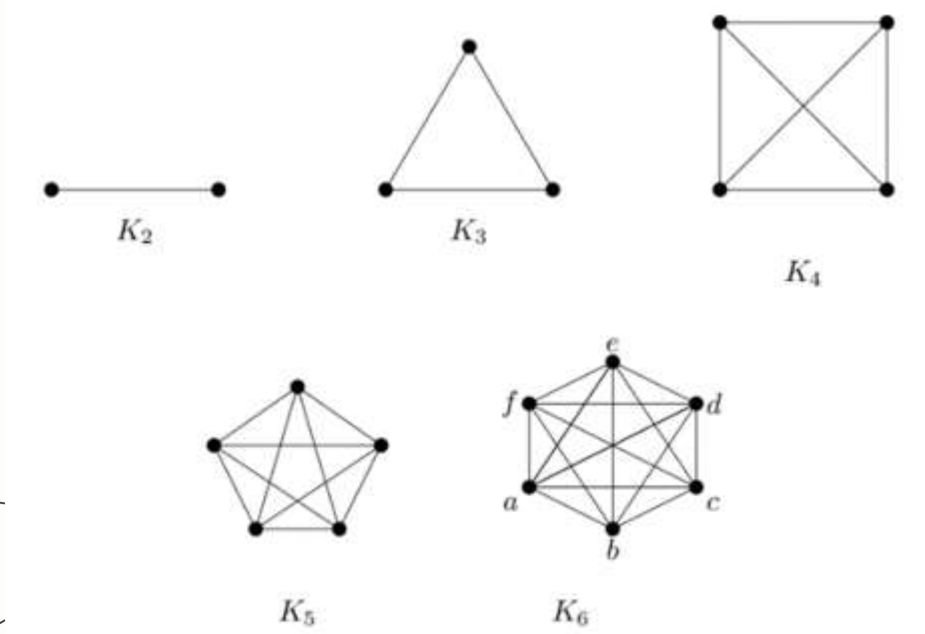
Manje formlano, treba zaključiti da je svaka grana incidentna sa 2 čvora, što znači da sabiranjem stepena čvorova svaku granu brojimo dva puta. □

Prost graf

- **<u>Teorema</u>** : Prost graf ima paran broj čvorova neparnog stepena.
- *<u>Dokaz</u>* : Neka je G = (V,E) i V = V1 U V2, gde su V1 i V2 redom skupovi čvorova parnog i neparnog stepena. Tada je:
  - $\sum_{v\in V} deg_G(v) = \sum_{v\in V1} deg_G(v) + \sum_{v\in V2} deg_G(v)$
  - $2|E| - \sum_{v\in V1} deg_G(v) = \sum_{v\in V2} deg_G(v)$
- Kako je zbir(razlika) dva parna broja paran broj, suma sa desne strane mora biti paran broj, odakle direktno sledi tvrđenje.
- **<u>Posledica</u>** : Ako je broj čvorova prostog grafa neparan, onda u njemu postoji bar jedan čvor parnog stepena.
- **<u>Dokaz</u>** : Kada bi svi čvorovi tog grafa bili neparnog stepena, onda bi u tom grafu bio neparan broj čvorova neparnog stepena, što je u kontradikciji sa prethodnim tvrđenjem.

Neke specijalne klase prostih grafova

Kompletan graf Kn je prost graf u kojem je $E = \binom{V}{2}$, tj. za svaka dva čvora postoji tačno jedna grana u grafu koja im je incidentna.

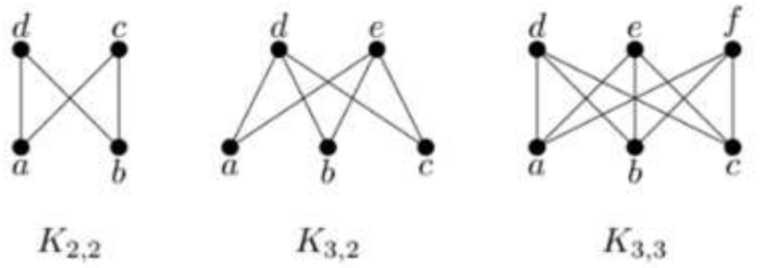


Neke specijalne klase prostih grafova

Bipartitan graf je graf G = (V_1 U V_2, E) sa osobinama:

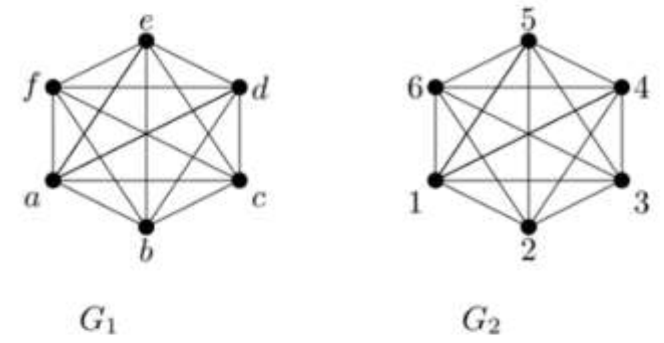
1. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
2. $E \subseteq \{\{v_1, v_2\}\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$

To znači da se skup čvorova može razdeliti na dva disjunktna podskupa, tako da je svaka grana incidentna sa jednim čvorom iz jednog skupa i drugim iz drugog. Ako E sadrži sve takve grane onda kažemo da je graf kompletan bipartitan i označavamo ga sa $K_{m,n}$ ako je | V_1| = m i | V_2| = n



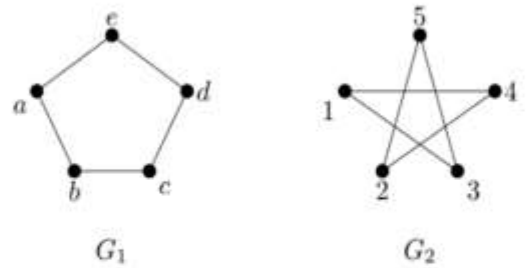
Jednakost grafova

- Možemo reći da iz definicije grafa direktno sledi da su dva grafa jednaka **akko** imaju jednake skupove čvorova i jednake skupove grana.
- Na osnovu ovoga, možemo reći da grafovi u ovom primeru nisu jednaki jer nemaju jednake skupove čvorova tj. $V(G1) = \{a, b, c, d, e, f\} \neq \{1,2,3,4,5,6\} = V(G2)$



Izomorfni grafovi

- Za grafove koji imaju osobinu da preimenovanjem čvorova postaju jednaki kažemo da su izomorfni.
- Neka su G1 = (V1, E1) i G2 = (V2, E2) prosti grafovi. Kažemo da je G1 izomorfan sa G2 ako postoji bijektivno preslikavanje h : V1 → V2 sa osobinom :
- $$\{u, v\} \in E1 \; akko \; \{h(u), h(v)\} \in E2$$
- Za takvu funkciju h kažemo da je **izomorfizam grafa G1 u graf G2.**



Jedan izomorfizam je

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Izomorfni grafovi

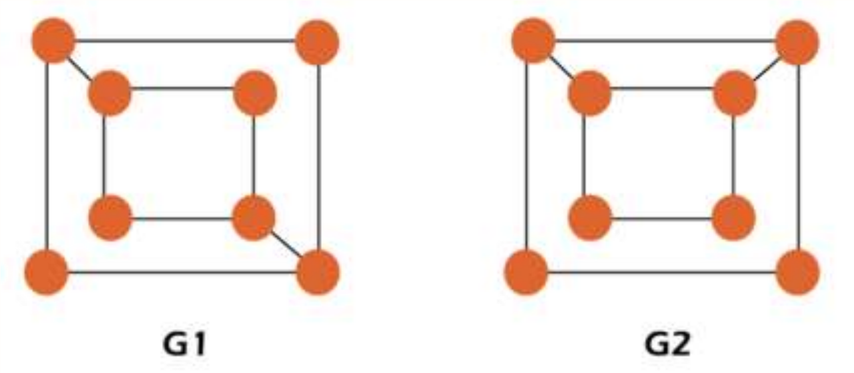
- <u>**Teorema**: *Relacija "je izomorfan" je relacija ekvivalencije na skupu grafova.*</u>
- Da bismo pokazali da su dva grafa izomorfna, dovoljno je konstruisati jedan izomorfizam. Mnogo je teže utvrditi da grafovi nisu izomorfni. Naredna teorema daje neke potrebne uslove koji mogu pomoći pri ispitivanju da li su dva grafa izomorfna.

- <u>**Teorema**</u> : Neka su dati izomorfni grafovi G1 = (V1, E1) i G2 = (V2, E2). Tada je:
  - |V1| = |V2|
  - |E1| = |E2|
  - $deg_{G1}(v) = deg_{G2}(h(v))$,za svaki čvor $v \in V1$.

- <u>**Dokaz**</u> : Sve tri osobine slede direktno iz definicije izomorfnih grafova. Ako jedna od tri osobine iz teoreme ne važi, odmah se može tvrditi da grafovi nisu izomorfni. Obratno tvrđenje ne važi.

Izomorfni grafovi

- Ako bar jedno tvrđenje ne važi iz prethodne teoreme, tada grafovi nisu izomorfni. Međutim obrnuto ne važi, odnosno ako sva tvrđenja važe, to nije dovoljan dokaz da su grafovi izomorfni.
- Primer dva neizomorfna grafa koja ispunjavaju sva tri uslova iz pretghodne teoreme:



Izomorfni grafovi

- Pokažimo sada da je relacija „*je izomorfan sa*” zapravo relacija ekvivalencije.
- **Refleksivnost**:
- U ovom slučaju naša funkcija bi bila identična funckija $h: V \to V$, $h(v) = v$, onda je bijektivna i čuva susedstva. Zaključujemo da ova osobina važi za svaki graf.
- **Simetričnost**:
- Funkcija h je po definiciji bijekcija, te postoji njena inverzna funkcija h^{-1}.
- Funkcija h^{-1} takođe čuva susedstva, jer $\{h(u), h(v)\} \in E_2 \Leftrightarrow \{u, v\} \in E_1$, gde su E_1 i E_2 skupovi ivica grafova G_1 i G_2 .

Izomorfni grafovi

- Tranzitivnost:
- Ako postoji bijekcija $h_1 : V_1 \to V_2$ između G_1 i G_2, i bijekcija $h_2 : V_2 \to V_3$ između G_2 i G_3, tada je kompozicija $h = h_2 \circ h_1 : V_1 \to V_3$ bijekcija između G_1 i G_3.
- Ako $\{u, v\} \in E_1$, tada $\{h_1(u), h_1(v)\} \in E_2$ i $\{h_2\big(h_1(u)\big), h_2(h_1(v))\} \in E_3$. Dakle h čuva susedstva.

Izomorfni grafovi

- Brute force algoritam za proveru da li su dva grafa izomorfna

```python
from itertools import permutations

def are_isomorphic(graph1, graph2):
    # Provera osnovnih uslova: broj čvorova i grana
    if len(graph1) != len(graph2):
        return False

    # Generisanje permutacija čvorova
    nodes1 = list(graph1.keys())
    nodes2 = list(graph2.keys())

    # Sve moguće permutacije čvorova grafa 2
    # Odnosno sve bijekcije
    for perm in permutations(nodes2):
        mapping = dict(zip(nodes1, perm))  # Kreiranje preslikavanja
        if is_valid_mapping(graph1, graph2, mapping):
            return True

    return False

def is_valid_mapping(graph1, graph2, mapping):
    # Provera da li preslikavanje čuva ivice
    for node1, neighbors1 in graph1.items():
        # Gledamo koji čvor i susede daje bijekcija
        mapped_node = mapping[node1]
        mapped_neighbors = {mapping[neighbor] for neighbor in neighbors1}
        # Provera da li se poklapaju sa stvarnim
        if set(graph2[mapped_node]) != mapped_neighbors:
            return False
    return True
```

```python
# Primer grafova
graph1 = {
    1: [2, 3],
    2: [1, 4],
    3: [1, 4],
    4: [2, 3]
}

graph2 = {
    'a': ['b', 'c'],
    'b': ['a', 'd'],
    'c': ['a', 'd'],
    'd': ['b', 'c']
}

print(are_isomorphic(graph1, graph2))  # Očekivani rezultat: True
```

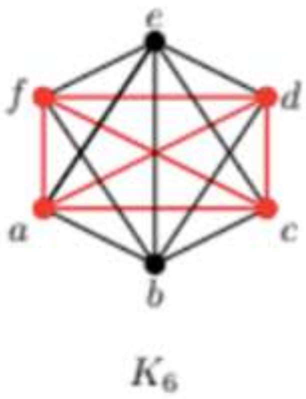
Operacije sa grafovima

- **Podgraf** $G_1 = (V_1, E_1)$ grafa $G = (V, E)$ je graf sa osobinama $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$. G_1 je **pravi podgraf** grafa G ako je V $\neq V_1$. Ovde treba primetiti da je G_1 takođe graf, što znači da je $E_1 \subseteq \binom{V_1}{2}$

- **Podgraf indukovan** skupom čvorova $V_1 \subseteq V$ grafa $G = (V, E)$ je graf $G_1 = (V_1, E_1)$ sa osobinom $E_1 \subseteq \binom{E}{2} \cap \binom{V_1}{2}$, tj. sa osobinom da je $\{u, v\}$ grana u G_1 akko $u, v \in V_1$ i $\{u, v\} \in E$.

Operacije sa grafovima

- Primer: Na slici je prikazan podgraf grafa K_6 koji je indukovan skupom čvorova $\{a, b, c, d, f\}$. (primer iz skripte 86.str.)



Hvala na pažnji!