PLANARNI GRAFOVI

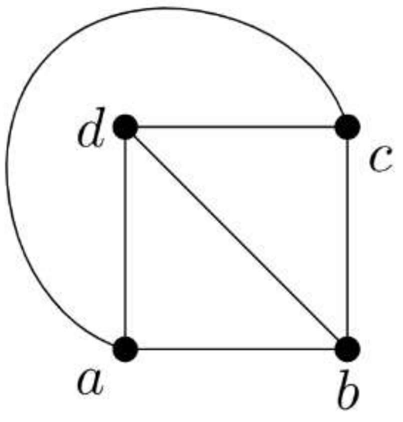
DEFINICIJA

- Jedan graf se može nacrtati na više načina. Ako možemo da ga nacrtamo tako da mu se grane ne seku, onda za njega kažemo da je planaran.

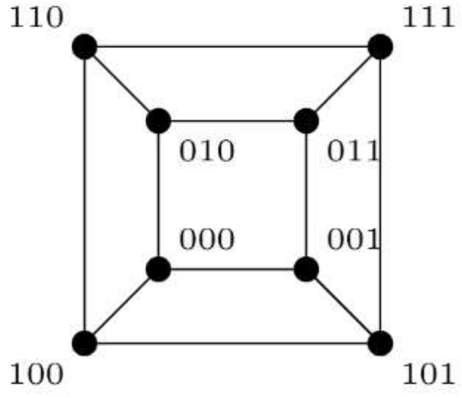
- Def. Graf je planaran ako se može nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku (osim eventualno zajedničkih čvorova). Za takvu grafičku reprezentaciju grafa reći ćemo da je planarna.

PRIMERI PLANARNIH GRAFOVA

- Grafovi K4 I Q3 su planarni. Njihove planarne reprezentacije su date na slici.



K_4



Q_3

STEPEN OBLASTI U PLANARNOM GRAFU

- Planarna reprezentacija grafa deli ravan na konačan broj (ograničenih ili neograničenih) oblasti.

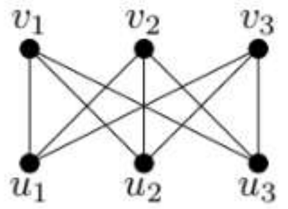
OJLEROVA TEOREMA

- Teorema (Ojlerova formula) Neka je $G = (V, E), V \geq 2$, povezan planaran prost graf I neka je f broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je
$$f = |E| - |V| + 2$$

STEPEN OBLASTI U PLANARNOM GRAFU

- Definicija – Stepen oblasti D, u oznaci st(D) je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.
- Graf koji ima samo dva čvora i jednu granu određuje samo jednu oblast stepena dva. Ako postoje bar tri čvora u povezanom grafu, stepen svake oblasti je bar tri.
- Pretpostavimo da planarna reprezentacija grafa $G = (V, E)$ deli ravan na oblasti $D_1, \dots, D_l$. Kako se svaka grana računa dva puta u sumi rubova oblasti, sledi

$$\sum_{1 \le i \le l} st(D_i) = 2|E(G)|$$



$K_{3,3}$

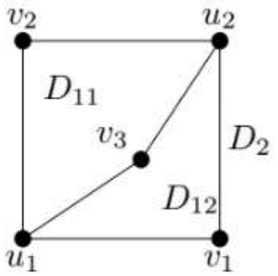
Primetimo da grane $\{u_1, v_1\}$, $\{v_1, u_2\}$, $\{u_2, v_2\}$, $\{v_2, u_1\}$ kreiraju zatvorenu krivu koja deli ravan na dve oblasti, označićemo ih sa D_1 i D_2. Imamo dve mogućnosti da nacrtamo čvor u_3.

(i) Ako čvor v_3 nacrtamo unutar oblasti D_1, za u_3 imamo jednu od tri mogućnosti:

(1) $u_3 \in D_{11} : \{u_3, v_1\}$ seče rub oblasti D_{11};

(2) $u_3 \in D_{12} : \{u_3, v_2\}$ seče rub oblasti D_{12};

(3) $u_3 \in D_2 : \{u_3, v_3\}$ seče rub oblasti D_2.

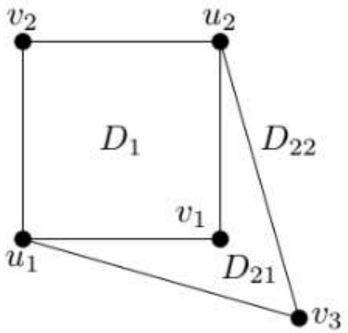


(ii) Ako čvor v_3 nacrtamo unutar oblasti D_2, za u_3 imamo jednu od tri mogućnosti:

(1) $u_3 \in D_1 : \{u_3, v_3\}$ seče rub oblasti D_1;

(2) $u_3 \in D_{21} : \{u_3, v_2\}$ seče rub oblasti D_{21};

(3) $u_3 \in D_{22} : \{u_3, v_1\}$ seče rub oblasti D_{22}.



TEOREMA 1

- Teorema: U povezanom planarnom grafu sa bar tri čvora, broj grana nije veći od trostrukog broja čvorova umanjenog za 6
- Formulacija:

Neka je:

$G = (V, E),\ |V| \geq 3$ - povezan, planaran i prost

f – broj oblasti na koje G deli ravan

Tada sledi:
$|E| \leq 3|V| - 6$

TEOREMA 1

- Dokaz:
- Podsetimo se da u slučaju da u povezanom grafu postoje bar 3 čvora, stepen svake oblasti je bar 3. Dakle:

$$(\forall D_i\ , i \in \{1, 2, \dots, f\})(st(D_i) \geq 3) \quad (1)$$

- Iz prethodne definicije važi:

$$\sum_{1 \leq i \leq f} st(D_i) = 2|E(G)| \quad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi:

$$2|E(G)| = \sum_{1 \leq i \leq f} st(D_i) \geq 3f$$

TEOREMA 1

- Dokaz:

Dakle:

$2|E(G)| \geq 3f$ (3)

Ojlerova formula:

$f = |E(G)| - |V(G)| + 2$ (4)

Iz (3) I (4) sledi:

$$2|E(G)| \geq 3(|E(G)| - |V(G)| + 2)$$

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 \ \blacksquare$$

TEOREMA 2

- Teorema: U povezanom prostom grafu sa bar tri čvora, koji nema konture dužine 3, broj grana nije veći od dvostrukog broja čvorova umanjenog za 4.
- Formulacija:

Neka je:

$G = (V, E),\ |V| \geq 3$ - povezan, planaran, prost, bez kontura dužine 3

f – broj oblasti na koje G deli ravan

Tada sledi:

$|E| \leq 2|V| - 4$

TEOREMA 2

- Dokaz:

Iz prethodne definicije važi:

$$\sum_{1 \le i \le f} st(D_i) = 2|E(G)|$$

Ako u grafu ne postoje konture dužine 3, onda je stepen svake oblasti bar 4, pa sledi:

$$2|E(G)| = \sum_{1 \le i \le f} st(D_i) \ge 4 \cdot f \Rightarrow f \le \frac{1}{2}|E(G)|$$

TEOREMA 2

- Dokaz:

Iz Ojlerove formule dobijamo:

$$|E(G)| - |V(G)| + 2 \leq \frac{1}{2}|E(G)|$$

$$|E(G)| \leq 2|V(G)| - 4 \quad \blacksquare$$

KOMPLETAN GRAF K_5

- Primer: Kompletan graf K_5 nije planaran.
- Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, da je K_5 planaran.
$|V(K_5)| = 5$
$|E(K_5)| = \binom{5}{2} = 10$

Zbog toga što je graf planaran mora da važi formula iz teoreme 1.
$|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6$

$10 \leq 3 \cdot 5 - 6 \iff 10 \leq 9$ (kontradikcija)

KOMPLETAN GRAF $K_{3,3}$

- Primer: Kompletan graf $K_{3,3}$ nije planaran.
- Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, da je K_5 planaran.
$|V(K_5)| = 3$
$|E(K_5)| = 3 \cdot 3 = 9$

Zbog toga što je graf planaran mora da važi formula iz teoreme 1.
$|E(K_5)| \leq 3|V(K_5)| - 6$

$9 \leq 3 \cdot 3 - 6 \iff 9 \leq 3$ (kontradikcija)

Napomena: Ovaj graf nema konturu dužine 3, pa je moguće dokazati koristeći teoremu 2.

HOMEOMORFNI GRAFOVI

- Homeomorfni grafovi su grafovi koji se mogu dobiti jedan od drugog umetanjem ili brisanjem čvorova stepena 2.

- Drugim rečima, ako u ivicu dodamo novi čvor (sa dve ivice koje ga povezuju sa susedima), graf ostaje homeomorfan originalnom grafu.

HOMEOMORFNI GRAFOVI

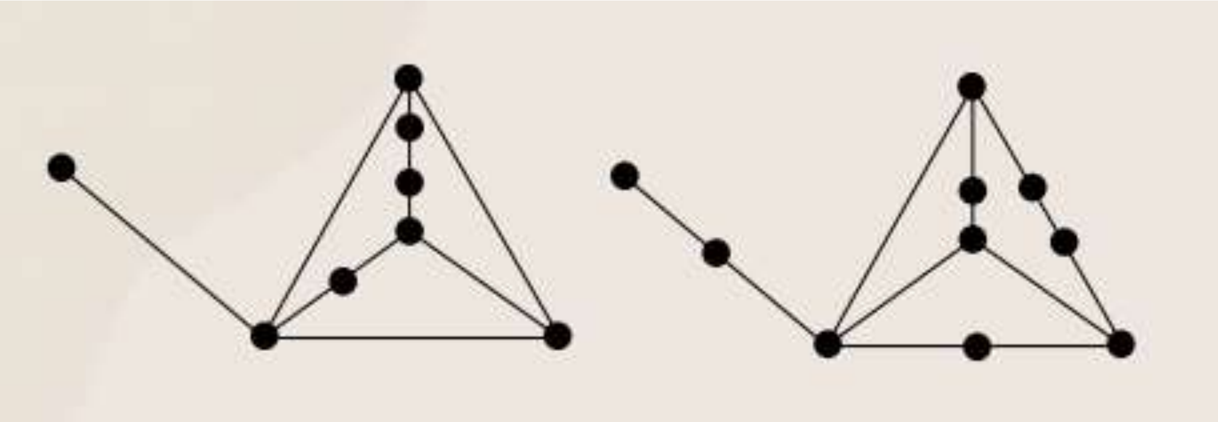
- Opis procesa:

1. Umetanjem čvora na ivicu: razbijanjem ivice na dve ivice povezane novim čvorom.

2. Brisanjem čvora stepena 2: spajanjem dve susedneivice u jednu ivicu.

HOMEOMORFNI GRAFOVI

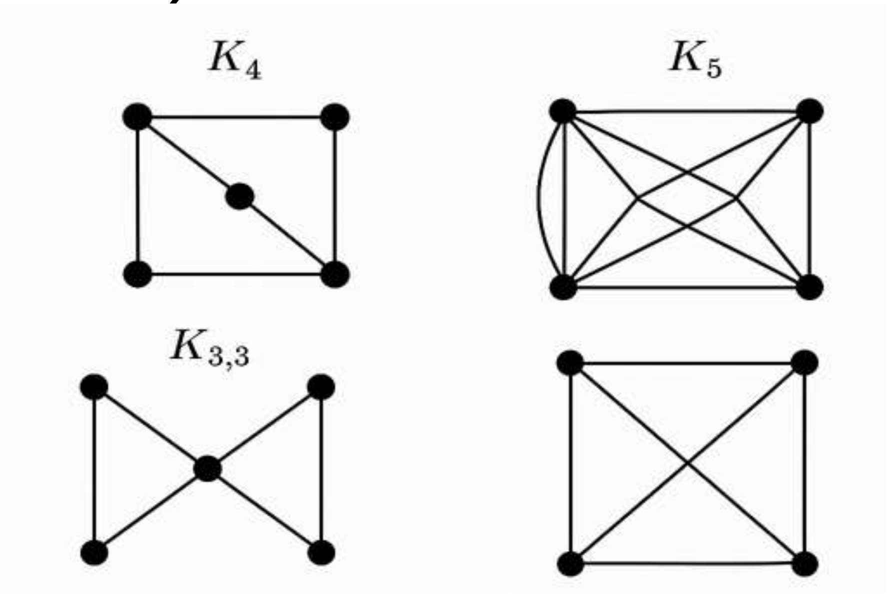
- Primer:



- Graf A–B i graf A–C–B su homeomorfni jer se graf može dobiti umetnjem ili brisanjem čvora stepena 2.

TEOREMA KURATOVSKOG

- Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži podgraf koji je homeomorfan grafu K_5 (potpuni graf sa 5 temena) ili grafu $K_{3,3}$ (potpuni bipartitni graf sa po 3 temena).



- Primeri:

- K_4 je planaran.
- K_5 i $K_{3,3}$ nisu planarni.
- Kvadrat sa dijagonalama je planaran.