# Generatorne funkcije

*Bogdan Ljubinković, Miljan Jokić, Dalibor Nikolić, Lazar Jović, Anastazija Petrov, Marko Djordjević, Aleksa Nenadović i Meris Bilalović*

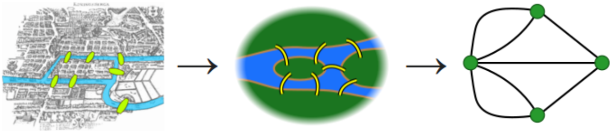
Januar 2025, FTN

# Teme kojima ćemo se baviti

- Istorijski osvrt na grafove
- Primena grafova
- Usmeren i neusmeren multigraf
- Prost graf
- Osobine grafova
- Specijalne klase prostih grafova
- Jednakost i izomorfizam grafova
- Algoritam za ispitivanje izomorfnosti grafova
- Vrste podgrafova

# Istorijski osvrt na grafove

**Sedam Mostova Kingsberga** je matematički problem iz 18. veka, gde je zadatak bio preći svih sedam mostova tačno jednom, tako da se nakon svih prelazaka vratimo na deo kopna sa kog smo krenuli. Matematičar Leonard Ojler je 1736. godine dokazao da je problem nemoguće rešiti. Da bi to dokazao, on je apstraktno posmatrao delove kopna kao čvorove, i mostove kao grane kojima su povezani ti čvorovi. Matematička struktura koja se time dobija se naziva se graf, sa kojom počinje razvoj teorije grafova.



# Primena grafova

Grafovi su korišćeni da modeliraju veze izmedju objekata u raznim oblastima, neke od kojih su:

- Informacione tehnologije, gde mogu predstavljati mreže i njihove veze
- Veštačka inteligencija, gde predstavljaju neuronske mreže
- Transport, gde predstavljaju mesta i puteve koji ih povezuju
- Biologija, gde opisuju gensku regulatornu mrežu, i metaboličke puteve
- Hemija, gde predstavljaju hemijska jedinjenja i reakcije medju njima

# Multigraf

Usmeren multigraf je uredjena trojka $G = (V, E, \psi)$ gde važi:

- $V \neq \emptyset$ je skup svih čvorova grafa
- E je skup grana grafa, gde je $E \cap V = \emptyset$
- $\psi : E \to \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$

Dve grane, $e$ i $e'$, gde važi $\psi(e) = \psi(e')$, su paralelne grane. Grana koja povezuje čvor sa samim sobom se zove petlja. Mi ćemo se fokusirati na neusmerene grafove bez paralelnih grana, kod kojih grane nemaju početak i kraj, tako da neće postojati ni petlje. Takvi grafovi se nazivaju prosti grafovi.

# Multigraf

Ispod su prikazane slike grafa sa paralelnom granom i petljom. Ako graf sadrži neku od ovih osobina, naziva se multigraf.

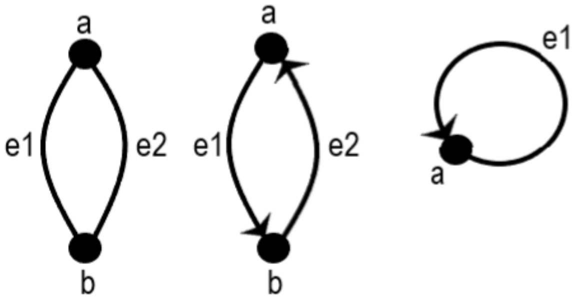



Figure: Graf sa paralelnom granom, usmeren graf sa paralelnom granom i usmerena petlja

# Prost graf

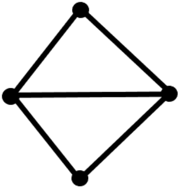
Prost graf je uredjen par $G = (V, E)$ gde važi:

- $V \neq \emptyset$ je konačan skup čvorova grafa
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ je skup grana grafa

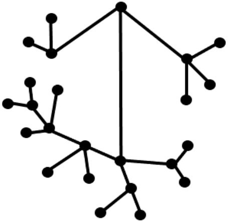
Ako čvorovi $u, v \in V$ su na krajevima iste grane $e \in E$, oni su susedni. Tada je grana $e$ incidentna sa $u$ i $v$, odnosno ona ih povezuje.

# Prost graf

Neki primeri prostih grafova:



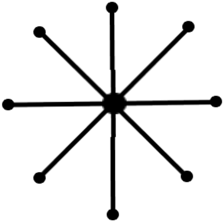
**Graf**



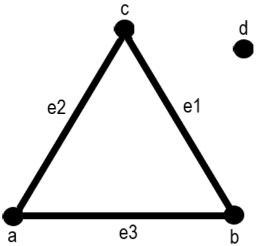
**Stablo**

# Prost graf

Neki primeri prostih grafova:



**Prsten**




**Graf sa izolovanim čvorom**

# Osobine grafova

- Stepen čvorova
- Grafovski multiskup
- Odnos stepena čvorova i broja grana

# Stepen čvorova

Ako je $G = (V, E)$ prost graf i $v \in V$, onda se broj grana koje su incidentne sa čvorom $v$ naziva stepenom čvora $v$ u grafu $G$, i označava se: $deg_G(v)$

Skup čvorova susednih sa $v$ u grafu $G$ se označava: $\omega_G(v)$
Skup grana incidentnih sa $v$ u grafu $G$ se označava: $\Omega_G(v)$
Najmanji stepen grafa $G$: $\delta(G) = min(deg_G(v) : v \in V)$
Najmanji stepen grafa $G$: $\Delta(G) = max(deg_G(v) : v \in V)$

# Grafovski multiskup

Za multiskup nenegativnih celih brojeva $\{\{d_1, \dots, d_n\}\}$ kažemo da je grafovski multiskup ako postoji graf $G = (V, E)$, gde je $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ i $d_i = deg_G(v_i)$ za svako $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ovaj pojam se u literaturi takodje pojavljuje kao grafovski niz, ili niz stepena grafa. Obično se koristi neopadajući poredak elemenata, jer ne postoji odredjen redosled, i zbog toga se može umesto niza koristiti i multiskup.

# Odnos stepena čvorova i broja grana

Ako je $G = (V, E)$ prost graf, važi:

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$$

Dokaz:
Za svaku granu važi:

$$\{u, v\} \in \Omega_G(u) \text{ i } \{u, v\} \in \Omega_G(v) \text{ i } \{u, v\} \notin \Omega_G(\omega), \omega \notin \{u, v\}$$

Odnosno:

$$\{u, v\} \in^2 \biguplus_{\omega \in V} \Omega_G(\omega)$$

Iz toga sledi:

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \sum_{v \in V} |\Omega_G(v)| = |\biguplus_{v \in V} \Omega_G(v)| = 2|E|$$

Kako je svaka grana incidentna sa 2 čvora, sabiranjem stepena čvorova svaku granu brojimo 2 puta. $\square$

# Odnos stepena čvorova i broja grana

Prost graf ima paran broj grana neparnog stepena.

Dokaz:
Ako je $G = (V, E)$, $V_1$ i $V_2$ skupovi čvorova parnog i neparnog stepena, važi:

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = \sum_{v \in V_1} \deg_G(v) + \sum_{v \in V_2} \deg_G(v)$$

$$2|E| - \sum_{v \in V_1} \deg_G(v) = \sum_{v \in V_2} \deg_G(v)$$

Razlika dva parna broja je paran broj, tako da je suma sa desne strane takodje paran broj, što znači da prost graf mora imati paran broj grana neparnog stepena. $\square$

# Odnos stepena čvorova i broja grana

Ako je $G = (V, E)$ prost graf, u kojem je $|V| = n$ i $|E| < n$, tada postoji čvor $v \in V$ takav da je $deg_G(v) \leq 1$.

Dokaz:
Pretpostavljamo suprotno, da za svaki čvor $v \in V$ važi $deg_G(v) \geq 2$. Iz pršolog dokaza dobijamo:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg_G(v) \geq \sum_{v \in V} 2 = 2 * |V| = 2n$$

odnosno $|E| \geq n$ što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $|E| < n$. $\square$

# Specijalne klase prostih grafova

Kompletan graf je graf za koji važi $|E| = \binom{V}{2}$, odnodno da izmedju svaka dva čvora postoji grana.

Graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitan, ako važi:

- $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
- $E \subseteq \{\{v_1, v_2\} : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

Skup čvorova kod bipartitnog grafa se može podeliti na dva disjunktna podskupa, tako da je svaka grana tog grafa incidentna sa po jednim čvorom iz oba podskupa. Ako graf sadrži sve takve grane, on je kompletan bipartitan, i označava se: $K_{m,n}$ gde je $|V_1| = m$ i $|V_2| = n$

# Jednakost i izomorfizam grafova

Iz definicije grafa zaključujemo da su dva grafa jednaka, akko su im skupovi čvorova i grana jednaki.

Grafovi su izomorfni ako možemo da preimenujemo čvorove jednog grafa da bi dobili drugi.

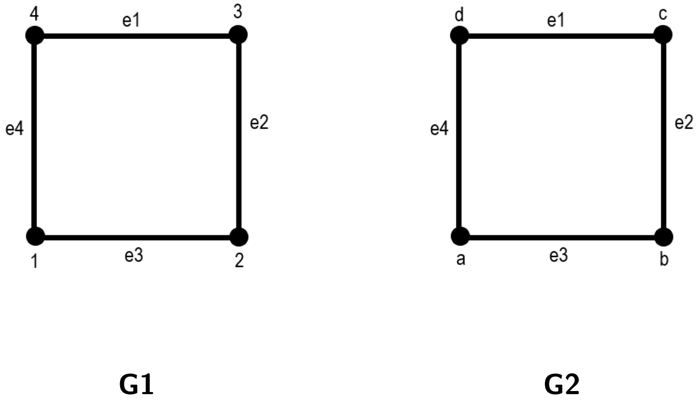
Ako su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ prosti grafovi, $G_1$ je izomorfan sa $G_2$ ako postoji bijektivno preslikavanje $h : V_1 \to V_2$ takvo da važi:

$$\{u, v\} \in E_1 \text{ akko } \{h\{u\}, h\{v\}\} \in E_2$$

Funkcija $h$ je izomorfizam grafa $G_1$ u graf $G_2$.

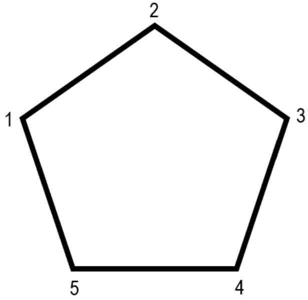
# Izomorfizam

Primer dva izomorfna grafa koji se mogu izjednačiti preimenovanjem:

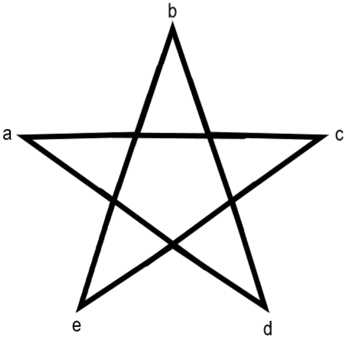


# Izomorfizam

Još jedan primer dva izomorfna grafa, ali ovde izomorfizam nije toliko očigledan:




**G1**




**G2**

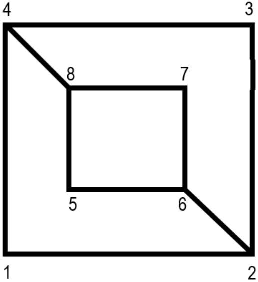
# Izomorfizam grafova

Potrebni ali ne i dovoljni uslovi da grafovi $G_1$ i $G_2$ budu izomorfni su:

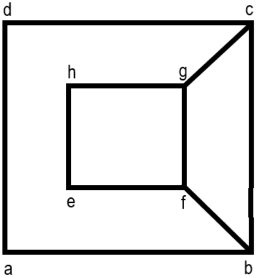
- Jednak broj čvorova: $|V(G_1)| = |V(G_2)|$
- Jednak broj grana: $|E(G_1)| = |E(G_2)|$
- Jednaki stepeni čvorova: $\deg(G_1)(v) = \deg(G_2)(h(v))$ za svaki čvor $v \in V_1$

# Izomorfizam grafova

Naredni primer ilustruje neizomorfne grafove koji ispunjavaju sva tri potrebna uslova za izomorfnost. U ovom slučaju, izomorfizam ne važi zbog stepena suseda. Graf G2 ima dva susedna čvora sa stepenom 3, a graf G1 ne, i zbog toga grafovi nisu izomorfni.



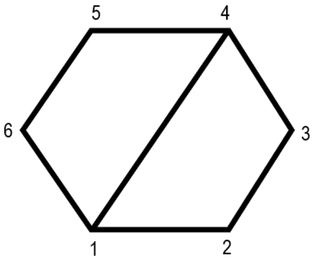

**G2**



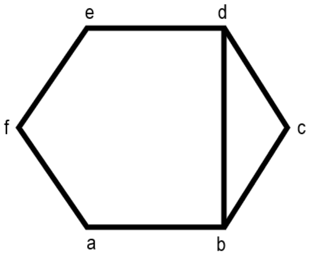

**G2**

# Podgrafovi

Još jedan primer:




**G1**




**G2**

# Izomorfizam grafova kao relacija ekvivalencije

Dokazujemo da je izomorfizam relacija ekvivalencije proverom sledećih svojstava:

- **Refleksivnost:** Svaki graf je izomorfan sam sebi.
- **Simetričnost:** Ako je $G \cong H$, tada je $H \cong G$.
- **Tranzitivnost:** Ako je $G_1 \cong G_2$ i $G_2 \cong G_3$, tada je $G_1 \cong G_3$.

# Refleksivnost

Relacija $R$ je refleksivna ako je svaki graf G izomorfan samom sebi ($G \cong G$).

- Da bismo dokazali refleksivnost, dovoljno je uzeti identično preslikavanje:

$$\phi : V(G) \to V(G), \quad \phi(v) = v \text{ za svako } v \in V(G).$$

- Ovo preslikavanje je bijekcija (injekcija i surjekcija).
- Sada za čvorove $u, v \in V(G)$, imamo: $(u, v)$ je ivica u $G \iff (\phi(u), \phi(v)) = (u, v)$ je ivica u $G$.
- Dakle, identično preslikavanje zadovoljava uslove izomorfizma, pa $G \cong G$.

**Zaključak:** Relacija izomorfizma je refleksivna.

# Simetričnost

Da bi dokazali simetričnost mora da važi ako je $G \cong H$, onda je i $H \cong G$.

- Pretpostavimo da je $G \cong H$. To znači da postoji bijekcija:

$$\phi : V(G) \to V(H),$$

- Inverzna funkcija $\phi^{-1} : V(H) \to V(G)$ takodje je bijekcija.
- Za svaka dva čvora $u, v \in V(H)$, $(u, v)$ je ivica u $H \iff (\phi^{-1}(u), \phi^{-1}(v))$ je ivica u $G$.

**Zaključak:** Relacija izomorfizma je simetrična.

# Tranzitivnost

Relacija izomorfizma je tranzitivna ako važi: kada je $G \cong H$ i $H \cong K$, tada je i $G \cong K$.

- Iz $G \cong H$ sledi da postoji bijekcija $\phi : V(G) \to V(H)$.
- Iz $H \cong K$ sledi da postoji bijekcija $\psi : V(H) \to V(K)$.
- Sastavimo preslikavanja $\psi \circ \phi : V(G) \to V(K)$. To znači da za svako $v \in V(G)$ važi $(\psi \circ \phi)(v) = \psi(\phi(v))$.

# Tranzitivnost - nastavak

**Dokaz:** Pošto su $\phi$ i $\psi$ bijekcije, njihova kompozicija $\psi \circ \phi$ je takodje bijekcija.
Treba da proverimo i očuvanje ivica:

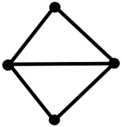
- Za svaka dva temena $u, v \in V(G)$, $(u, v)$ je ivica u $G$ ako i samo ako $(\phi(u), \phi(v))$ je ivica u $H$ (zbog izomorfizma $\phi$).
- Zatim, $(\phi(u), \phi(v))$ je ivica u $H$ ako i samo ako $(\psi(\phi(u)), \psi(\phi(v)))$ je ivica u $K$ (zbog izomorfizma $\psi$).
  - Dakle, $(u, v)$ je ivica u $G$ ako i samo ako $(\psi(\phi(u)), \psi(\phi(v)))$ je ivica u $K$.

  Ovo pokazuje da je $\psi \circ \phi$ traženi izomorfizam izmedju $G$ i $K$.
  Dakle, $G \cong K$.
  **Zaključak:** Relacija izomorfizma je tranzitivna.

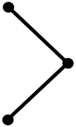
# Podgrafovi

- $H$ je podgraf grafa $G$ ako su svi njegovi čvorovi i sve njegove grane sadržane u grafu $G$.
- Ako je $H$ podgraf od $G$, tada je $G$ nadgraf od $H$.
- Pokrivajući podgraf grafa $G$ je podgraf $H$ takav da važi $V(H) = V(G)$.

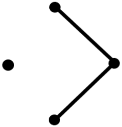
# Podgrafovi



Originalan graf



Podgraf



Pokrivajući podgraf

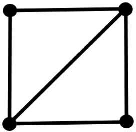
# Podgrafovi

Neka je $V'$ neprazan podskup od $V(G)$. Podgraf grafa $G$ indukovan skupom čvorova $V'$ predstavlja graf $G'$ sa:

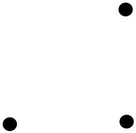
- Skupom čvorova $V(G') = V'$,
- Skupom grana $E(G')$ koji čine sve grane grafa $G$ čija su oba kraja u $V'$.

Ovaj podgraf ćemo označavati sa $G[V']$.

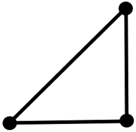
# Podgrafovi



Originalan graf



Biramo čvorove za indukovani graf



Graf indukovan skupom čvorova $V'$

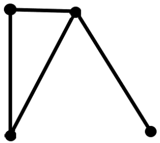
# Podgrafovi

Neka je $E'$ neprazan podskup od $E(G)$. Podgraf grafa $G$ indukovan skupom grana $E'$ predstavlja graf $G'$ sa:

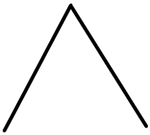
- Skupom grana $E(G') = E'$,
- Skupom čvorova $V(G')$ koji čine svi krajevi grana iz $E'$.

Ovaj podgraf ćemo označavati sa $G[E']$.
Jednostavnije rečeno: uzmemo podskup grana i samo one čvorove koji se nalaze na krajevima tih grana.

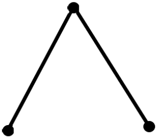
# Podgrafovi



Originalan graf



Biramo grane za indukovani graf



Graf indukovan skupom grana $V'$

# Algoritam za proveru izomorfnosti grafova

```
def izomorfizam_p_g(graph1, graph2):
    # Provera da li grafovi sadrže isti broj čvorova
    if len(graph1) != len(graph2):
        return False

    # Provera da li grafovi sadrže čvorove sa istim brojem grana
    degree_seq1 = sorted(len(neighbors) for neighbors in graph1.values())
    degree_seq2 = sorted(len(neighbors) for neighbors in graph2.values())
    if degree_seq1 != degree_seq2:
        return False

    vertices1 = list(graph1.keys())
    vertices2 = list(graph2.keys())
```

Funkcija za proveru izomorfizma deo 1

# Algoritam za proveru izomorfnosti grafova

```python
"""
    Generisanje permutacija čvorova grafa 2, i provera da li se čvorovi grafa 1 mogu mapirati na bilo koju
    od permutacija čvorova grafa 2
"""
for perm in generisi_permutacije_skupa(vertices2):
    # Mapiranje čvorova prvog na permutacije čvorova drugog grafa
    mapping = {vertices1[i]: perm[i] for i in range(len(vertices1))}

    # Provera izomorfizma pomoću provere mapiranih čvorova i grana
    is_isomorphic = True
    for v1, neighbors in graph1.items():
        mapped_v1 = mapping[v1]
        mapped_neighbors = {mapping[n] for n in neighbors}

        # Provera postojanja mapiranih čvorova i grana grafa 1 u grafu 2
        if mapped_v1 not in graph2 or set(graph2[mapped_v1]) != mapped_neighbors:
            is_isomorphic = False
            break

    if is_isomorphic:
        return True

return False
```

**Funkcija za proveru izomorfizma deo 2**

# Algoritam za proveru izomorfnosti grafova

```python
def generisi_permutacije_skupa(A):
    if len(A) == 0:
        return [[]]

    permutacije = []

    for i in range(len(A)):
        trenutni_elem = A[i]

        ostatak = A[:i] + A[i + 1:]

        # Rekurzivno generisanje permutacija za ostale elemente skupa
        for perm in generisi_permutacije_skupa(ostatak):
            # Dodavanje trenutnog elementa na permutacije ostatka skupa
            permutacije.append([trenutni_elem] + perm)

    return permutacije
```

**Funkcija za generisanje permutacija skupa**

# Algoritam za proveru izomorfnosti grafova

```python
if __name__ == "__main__":

    G1 = {
        0: [1, 2],
        1: [0, 2],
        2: [0, 1, 3],
        3: [2]
    }
    G2 = {
        3: [4, 5],
        4: [3, 5],
        5: [3, 4, 6],
        6: [5]
    }

    print("Da li su prosti grafovi izomorfni?", izomorfizam_p_g(G1, G2))
```

Definicija grafova i ispis izomorfnosti dva grafa