Definicija: Planarni graf

Planarni graf je graf koji se može nacrtati u ravni tako da se njegove grane međusobno ne seku, osim u tačkama koje predstavljaju čvorove.

Drugim rečima, graf je planaran ako postoji **ravninska reprezentacija** (nacrt) grafa u kojoj su sve grane **disjunktne** osim na njihovim krajevima.

Formalniji opis

- **Ulaz**: Graf G=(V,E), gde je V skup čvorova, a E skup grana.
- G je planaran ako postoji funkcija f:G→R^2 koja mapira čvorove v∈V u tačke u ravni, a grane e∈E u krive linije, tako da se krive linije ne presecaju osim u tačkama koje predstavljaju čvorove grafa.

Primer planarnog grafa

Graf:

```
A ---- B
|      |
D ---- C
```

Ovaj graf je planaran jer se može nacrtati u ravni bez preklapanja grana.

Primer neplanarnog grafa

Grafovi K5 i K3,3 nisu planarni:

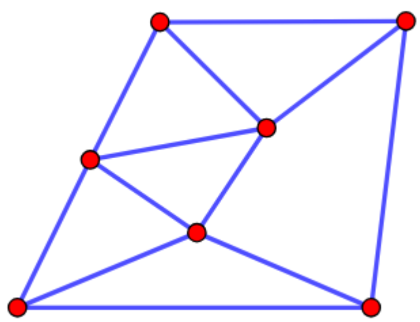
1. **K5**: Potpuni graf sa 5 čvorova.
2. **K3,3**: Potpuni dvo-partitni graf sa skupovima od 3 i 3 čvora.

Ovi grafovi se ne mogu nacrtati u ravni bez presecanja grana.

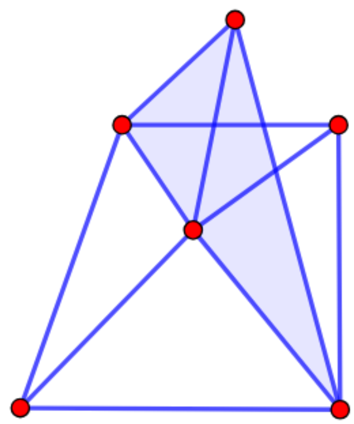
Eulerov kriterijum za planarne grafove

Za povezane neusmerene grafove bez petlji i višestrukih grana:

1. Ako je graf **planaran**, broj čvorova n, grana m, i lica f zadovoljavaju **Eulerovu formulu**: n−m+f=2
2. Ako graf ima n≥3 čvorova, mora važiti:
   - m≤3n−6 (za prost graf).
   - m≤2n−4 (za prost dvo-partitni graf).



planarni graf



neplanarni graf

Ojlerova teorema

Teorema 1 (Ojlerova teorema)

Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, povezan planarni prost graf i neka je f broj oblasti na koje on dijeli ravan. Tada je:

$$f = |E| - |V| + 2$$

Dokaz:

Definišemo sukcesivne podgrafove $G_1, G_2, \ldots, G_m$ na sljedeći način:

- **Baza indukcije**: G_1 je graf koji sadrži jednu proizvoljnu ivicu i njene incidentne čvorove.
- **Induktivni korak**: G_k je graf koji nastaje dodavanjem nove ivice na G_{k-1}, pri čemu nova ivica mora biti incidentna na već dodate čvorove jer je graf povezan.

Dokazujemo matematičkom indukcijom da za svako $k \in \{1, . . . , m\}$ važi:

$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2$$

Baza indukcije (k = 1)

- Ako imamo samo jednu ivicu e_1 i dva čvora $v1,\ v2$, tada postoji samo jedna oblast (cijela ravan,$f_1 = 1$).
- Broj ivica:$|E_1| = 1$, broj čvorova:$|V_1| = 2$.
- ProvJerimo formulu:$f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$

  što je tačno.

Induktivni korak
Pretpostavimo da važi za neki *k*, tj. da je:

$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2$$

Pokazaćemo da važi i za $k + 1$, kada dodamo novu ivicu e_{k+1} u G_k.

Postoje dva slučaja:

1. Ako je $u, v \in V(G_k)$, onda je

   $f_{k+1} = f_k + 1$

   $|V_{k+1}| = |V_k|$

   $|E_{k+1}| = |E_k| + 1$

   Koristeći induktivnu pretpostavku dobijamo:

   $f_k = |E_k| - |V_k| + 2 \Rightarrow f_{k+1} = |E_k| + 1 - |V_k| + 2 \Rightarrow f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2$

2. Ako je $u \in V(G_k)\ i\ v \notin V(G_k)$, onda je

   $f_{k+1} = f_k$

   $|V_{k+1}| = |V_k| + 1$

$\left|E_{k+1}\right| = \left|E_k\right| + 1$

Koristeći induktivnu pretpostavku dobijamo:

$f_k = \left|E_k\right| - \left|V_k\right| + 2 \Rightarrow f_k = \left|E_k\right| + 1 - \left|V_k\right| - 1 + 2 \Rightarrow f_{k+1} = \left|E_{k+1}\right| - \left|V_{k+1}\right| + 2$

Stepen oblasti u planarnom grafu

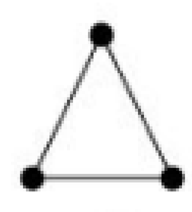
Definicija 1. Stepen oblasti D u oznaci `st`**(D)** je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grane pojavljuju dva puta na rubu, ona se računa dva puta.

Pretpostavimo da planarna reprezentacija grafa G=(V,E) dijeli ravan na oblasti $D_1, D_2, \ldots, D_l$. Kako se svaka grana računa dva puta u sumi rubova oblasti, slijedi:

$$\sum_{1 \le i \le l} \mathrm{st}(D_i) = 2|E(G)|$$

Primjer:

Razmotrimo trougaoni graf(graf u obliku trougla):



- Ima 3 tjemena, 3 ivice i 2 oblasti (unutrašnja oblast i spoljašnja oblast)
- Svaka oblast je okružena sa 3 ivice
- Ukupan zbir stepena oblasti je 6 (jer su dvije oblasti, svaka sa 3 ivice)
- To potvrđuje gore navedeno pravilo jer je 2*3=6

Posledica 1: U povezanom planarnom prostom grafu sa najmanje 3 čvora, broj grana m zadovoljava:

$$m \le 3n - 6,$$

gde je n broj čvorova, a m broj grana u grafu.

Dokaz:

Ojlerova formula za povezani planaran graf jeste $f = 2 + m - n$.

Definicija stepena oblasti kaže da je: $\sum_{1 \le i \le f} \mathtt{st}(D_i) = 2|E(G)| = 2m$

Znamo da je broj čvorova bar 3, a to znači da svaka oblast koju graf formira ima stepen bar 3.

Iz svega navedenog slijedi $2m = \sum_{1 \le i \le f} \mathtt{st}(D_i) \ge 3f$, što znači da je $f \le 3m/2$

S obzirom da je $f = 2 + m - n$, iz ovoga sledi da je:

$3(2 + m - n) \le 2m \Rightarrow 6 + 3m - 3n \le 2m \Rightarrow m \le 3n - 6.$

Posledica 2: U povezanom planarnom prostom grafu sa najmanje 3 čvora, koji nema konture dužine 3, broj grana e zadovoljava :

$$e \le 2n - 4,$$

gde je n broj čvorova, a e broj grana u grafu.

Dokaz:

Ako u grafu ne postoje konture dužine 3 onda je stepen svake oblasti bar 4, tj.

$2e = \sum_{1 \le i \le l} \mathtt{st}(D_i) \ge 4f.$

Odatle je $f \le e/2$.

Kada primenimo Ojlerovu formulu : $f = 2 + e - n$, dobijamo

$2 + e - n \le e/2 \Rightarrow e \le 2n - 4$.

K_5 I $K_{3,3}$ nisu planarni grafovi

Dokaz.

Na osnovu prethodne posljedice 1, u slučaju K_5 imamo:

$|V(K_5)|$ =**5** , $|E(K_5)|$ = $\binom{5}{2}$ = **10**

10 <= 3***5** – 6 => 10 <= 9 što je kontradikcija.

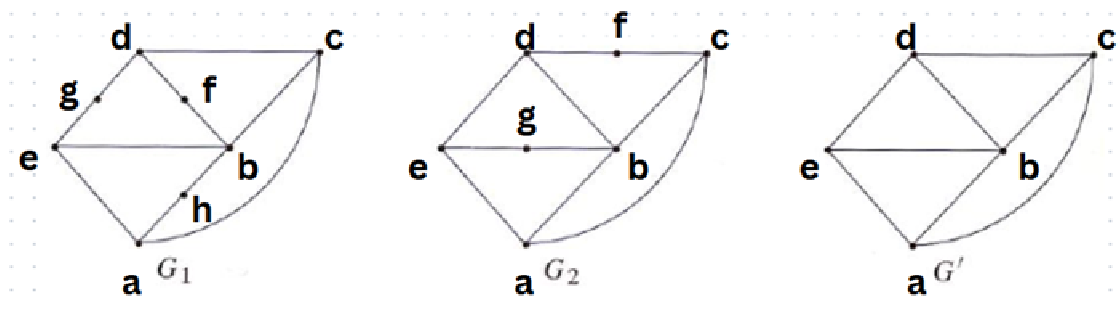
Za $K_{3,3}$ imamo $|V(K_{3,3})|$ = **6**, $|E(K_5)|$ = $3 * 3$ = **9**

Na osnovu formule iz posljedice 2:

9 <= 2***6** – 4 => 9 <= 8 što je kontradikcija.

Definicija homeomorfnih grafova.

Grafovi G1 = (V_1, E_1) i G2 = (V_2, E_2) su homeomorfni ako se mogu dobiti od istog grafa primjenom konačno mnogo elementarnih dioba grana.



Grafovi G1 i G2 su homeomorfni jer se G2 dobije od G\` diobom grana {e, b} i {c, d}, a G1 se od G\` dobije diobom {e, d}, {b, d} i {a, b}.

Tvrdjenje Kuratovskog

Tvrdjenje Kuratovskog je jedno od temeljnih rezultata u teoriji grafova, posebno u oblasti planarnih grafova.
Ono glasi:
Graf je ravan (planaran) ako i samo ako ne sadrži podgraf koji je homeomorfan sa K_5 ili $K_{3,3}$.

-K_5 je kompletan graf sa 5 tjemena, svako tjeme je povezano sa svakim drugim.
-$K_{3,3}$ je kompletan bipartitni graf - 2 grupe sa po 3 tjemena, svako tjeme iz jedne grupe povezano sa svakim iz druge (ima 9 ivica).

Drugim rječima:
Graf nije planaran ⇔ sadrži podgraf koji je moguće transformisati u K_5 ili $K_{3,3}$ ubacivanjem ili uklanjanjem čvorova stepena 2 (tzv. homeomorfizam),
Graf jeste planaran ⇔ ne sadrži takav podgraf.

Primjer 1 : planaran graf (provjera prema Kuratovskom)

Opis grafa:
Graf ima 6 tjemena: A, B, C, D, E, F
Ivica: AB, AC, AD, BC, BD, CD, AE, BE

Analiza:

- Nema podgrafa koji je homeomorfan K_5 (ima samo 6 tjemena i nema dovoljno ivica).
- Nema potpune veze između 5 tjemena (nema kompletne međuveze).
- Nema ni bipartitne podjele u kojoj je svako tjeme iz jedne grupe povezano sa svakim iz druge.

Zaključak: graf je **planaran**, jer ne sadrži podgraf homeomorfan K_5 ni $K_{3,3}$

Primjer 2 : neplanaran graf (provjera prema Kuratovskom)

Opis grafa:
Graf ima 6 tjemena: A, B, C, D, E, F
Grupe: {A, B, C} i {D, E, F}
Svako tjeme iz prve grupe je povezano sa svakim iz druge → 9 ivica
Ovo je baš $K_{3,3}$

Zaključak: graf je neplanaran, jer sadrži podgraf homeomorfan $K_{3,3}$ (zapravo je baš $K_{3,3}$).

Primer 3 — graf nije očigledno K_5 ali sadrži njegov homeomorfizam:

Opis grafa:

6 tjemena: A, B, C, D, E, F

Ivica: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE

Tjeme F je stepena 2 i spaja A i C: AF, FC

Analiza:

- Ako zanemarimo tjeme stepena 2 (kao F), vidimo da je ostatak skoro potpuni graf sa 5 tjemena.

- Ako uklonimo F i spojimo direktno A–C, dobijamo kompletni K_5.

Zaključak: graf **nije planaran**, jer **sadrži podgraf homeomorfan K_5** (F je ubačeno na ivicu).