Zadatak 2

Grupa 10

October 16, 2024

1 Klasifikacija za uredjene izbore elemenata

Uređeni izbori elemenata se mogu podijeliti na sledeće dijelove:
a) uređenje m elemenata iz multiskupa koji ima n elemenata:
b) m-permutacije multiskupa $(m \leq n, M = [b_1, \ldots, b_l]_{m,\ldots,m})$
c) permutacije multiskupa $(m = n, M = [b_1, \ldots, b_l]_{m_1,\ldots,m_l})$
d) uređenje m elemenata iz skupa od n elemenata
e) m-permutacije skupa $(m \leq n)$
f) permutacije skupa $(m = n)$

Ukoliko je dozvoljeno ponavljanje elemenata radi se o uređenju m elemenata iz multiskupa koji ima n elemenata, a ukoliko nije dozvoljeno ponavljanje elemenata radi se o uređenju m elemenata iz skupa od n elemenata

2 m-permutacije skupa

Definicija:
Kada biramo m elemenata iz skupa od n elemenata, bez ponavljanja i sa bitnim redosledom, govorimo o m-permutacijama bez ponavljanja.

Formula:
Broj m-permutacija bez ponavljanja iz skupa od n elemenata je:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

gde je n broj elemenata u skupu i m broj elemenata koje biramo i ređamo.

Dokaz:
Za prvi element imamo n mogućnosti, jer biramo bilo koji od n elemenata. Pošto se elementi ne ponavljaju, za drugi element preostaje $n-1$ mogućnosti. Na trećem mestu imamo $n-2$ mogućnosti, i tako dalje, sve dok ne izaberemo m elemenata. Na m-tom mestu preostaje $n-m+1$ mogućnosti.

Prema tome, broj uređenih izbora iznosi:

$$V_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

Ovaj proizvod možemo izraziti kao:

$$V_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1}{(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Time smo dokazali formulu za broj m-permutacija bez ponavljanja:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

3 m-permutacija multiskupa

Definicija: m-permutacija elemenata multiskupa M je uredjena m-torka elemenata iz multiskupa M, gde se svaki pojedinacan element u M pojavljuje m puta.
Formula

Broj m-permutacija multiskupa M je dat formulom:

$$P(n,m) = n^m$$

Dokaz: Kada biramo element koji zelimo da postavimo na prvo mesto imamo n nacina da ga izaberemo. Za drugi element takodje imamo n nacina i tako biramo n elemenata sve dok ne popunimo m-torku.

4 Permutacija skupa od n elemenata

Definicija:
Permutacija skupa od n elemenata predstavlja uređen niz svih elemenata tog skupa, pri čemu se elementi ne ponavljaju, a redosled je bitan.

Formula:
Broj permutacija skupa od n elemenata računa se pomoću formule:

$$P_n = n!$$

Dokaz:
Dokaz se zasniva na opštoj formuli za m-permutacije bez ponavljanja. Broj m-permutacija skupa od n elemenata je definisan kao:

$$V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Za permutacije biramo svih n elemenata iz skupa, tj. $m = n$. U tom slučaju, m-permutacije postaju permutacije. Zamenom $m = n$ u formulu za m-permutacije dobijamo:

$$V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Po definiciji, $0! = 1$, pa se izraz pojednostavljuje:

$$V_n^n = \frac{n!}{1} = n!$$

Dakle, broj permutacija skupa od n elemenata je jednak $n!$.

5 Permutacija multiskupa od n elemenata

Definicija: Neka je M multiskup koji se sastoji od n elemenata, gde su elementi $m_1, m_2, \ldots, m_l$ (gde je m_i broj ponavljanja i-tog elementa). Broj permutacija multiskupa M je dat formulom:

$$P(m_1, m_2, \ldots, m_l) = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_l)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

Dokaz:

1. Prvo, ukupan broj elemenata u multiskupu M je $m_1+m_2+\ldots+m_l$. Dakle, ukupan broj načina da se permutuju svi elementi bez obzira na ponavljanje je:

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_l)!$$

2. Međutim, s obzirom na to da se neki od elemenata ponavljaju, moramo isključiti višak permutacija koje su identične. Na primer, ako imamo m_1 elemenata koji su identični, oni mogu biti permutovani na $m_1!$ načina, a da se ne promeni raspored.

3. Zato da bismo dobili tačan broj različitih permutacija delimo sa brojem ponavljanja:

$$P(m_1, m_2, \ldots, m_l) = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_l)!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_l!}$$

5.1 Uređeni izbori sa ponavljanjem

PRIMJER 1 Koliko postoji različitih riječi sa 5 slova (koristeći naše pismo sa 30 slova i uključujući i besmislene riječi)?

Rješenje. Pošto se svako od 5 slova može nezavisno izabrati na 30 načina rješenje je 30^5. Zaista se može svaka riječ sa 5 slova predstaviti kao preslikavanje skupa $\{1, 2, \ldots, 5\}$ u skup slova $\{a, b, c, \ldots, \check{z}\}$: za svako od 5 mjesta u riječi, sa rednim brojevima $1, 2, \ldots, 5$, preslikavanje određuje slovo na tom mjestu.

Lako je sada uvidjeti da uređeni izbor n elemenata sa ponavljanjem iz skupa M sa m elemenata u stvari odgovara preslikavanju skupa

$$\{1, 2, \ldots, n\}$$

u skup M.

TEOREMA 1 Neka je N skup sa n elemenata (koji može da bude i prazan, tj. $n \geq 0$) i neka je M skup sa m elemenata, $m \geq 1$. Broj svih mogućih preslikavanja $f : N \to M$ jednak je m^n.

Dokaz. Koristi se metod matematičke indukcije po n. U slučaju $n = 0$ posmatramo sva preslikavanja f skupa $N = \emptyset$ i neki skup M. Definicija preslikavanja kaže da takvo f mora da bude skup uređenih parova (x, y) tako da $x \in N = \emptyset$ i $y \in M$. Pošto prazan skup nema elemenata, f ne može da sadrži nijedan takav uređeni par, pa je jedina mogućnost da je $f = \emptyset$ (nema uređenih parova). S druge strane, $f = \emptyset$ zadovoljava definiciju preslikavanja.

Prema tome, postoji tačno jedno preslikavanje $f : \emptyset \to M$. Ovo se slaže sa formulom, jer je $m^0 = 1$ za $m \geq 1$, pa zaključujemo da smo provjerili slučaj $n = 0$ kao bazu indukcije.

Dalje, pretpostavimo da je teorema dokazana za sve $n \leq n_0$ i sve $m \geq 1$. Neka je $n = n_0 + 1$ i posmatrajmo skup N sa n elemenata i skup M sa m elemenata. Izaberimo proizvoljan element $a \in N$. Za opis preslikavanja $f : N \to M$ potrebno je znati vrijednost $f(a) \in M$ i preslikavanje $f' : N \setminus \{a\} \to M$. Vrijednost $f(a)$ može da se izabere na m načina, a za izbor f' imamo m^{n-1} mogućnosti po induktivnoj hipotezi, pa sada po prinpipu proizvoda dobijamo da je ukupan broj mogućnosti za f jednak $m \cdot m^{n-1} = m^n$.

TEOREMA 2: Svaki skup X sa n elemenata ima tačno 2^n podskupova $(n \geq 0)$

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljan podskup A skupa X i definišimo preslikavanje $f_A : X \to \{0, 1\}$. Za $x \in X$ određujemo

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \in A \\ 0 & \text{ako } x \notin A \end{cases}$$

Ovo preslikavanje se često viđa u matematici i naziva se *karakteristična funkcija* skupa A.

Različiti skupovi A imaju različite funkcije f_A, i obrnuto, svako preslikavanje $f : X \mapsto \{0, 1\}$ određuje skup $A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ tako da je $f = f_A$. Prema tome, broj podskupova X je isti kao broj svih preslikavanja $X \mapsto \{0, 1\}$, a to je 2^n po Teoremi 1.

Primjer: Da li među brojevima $1, 2, \ldots, 10^{10}$ ima više onih koji sadrže cifru 9 u decimalnom zapisu ili onih koji je ne sadrže?

Rješenje. Ako broj ne sadrži cifu 9 u decimalnom zapisu, onda su sve njegove cifre u skupu $\{0, 1, \ldots, 8\}$. Ovakvih brojeva sa najviše deset cifara ima ukupno

$$9^{10} - 1 + 1 = 3\,486\,784\,401$$

Naime, postoji 9 mogućnosti za svaku od deset cifara, pri čemu se broj sa manje od deset cifara dobija tako što se na njegov početak stavi potreban broj nula. Razlog za '-1+1' u gornjem izrazu je što najprije izostavljamo broj sastavljen od svih deset nula, a zatim dodajemo broj 10^{10}.

Sada se vidi da brojeva koji sadrže cifru 9 u svom zapisu ima

$$10^{10} - 9^{10} = 6\,513\,215\,599$$

što je mnogo više nego brojeva koji ne sadrže cifru 9.

5.2 Uređeni izbori bez ponavljanja

Neka je

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto M$$

Preslikavanje koje odgovara uređenom izboru elemenata iz skupa M.Kada je ponavljanje elemenata dozvoljeno, moguće je izabrati isti element dva puta, tako da važi $f(r) = f(s)$ za različite r i s iz $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ako ponavljanje nije dozvoljeno, tada $f(r) \neq f(s)$ za svako $r \neq s$, pa vidimo da uređenim izborima elemenata bez ponavljanja odgovaraju injektivna preslikavanja (injektivna preslikavanja se nazivaju još i "1-1" preslikavanja).

TEOREMA 3 Neka je N skup n elemenata i neka je M skup sa m elemenata, $n, m \geq 0$. Broj svih injektivnih preslikavanja $f : N \mapsto M$ jednak je

$$\prod_{i=0}^{n-1}(m-i) = m*(m-1)*\cdots*(m-n+1)$$

Dokaz. Dokaz se izvodi indukcijom po n. Prazno preslikavanje je injektivno, pa stoga za $n = 0$ postoji tačno jedno injektivno preslikavanje, i ovo se slaže sa dogovorom da se vrijednost praznog proizvoda definiše sa 1. Znači, formula važi za $n = 0$. Iz teoreme

Ako su m i n prirodni brojevi tako da je $m < n$, tada ne postoji injekcija iz $\mathbb{N}_n$ u $\mathbb{N}_m$

znamo da ne postoji injektivno preslikavanje za $n > m$ i ovo se takođe slaže sa gornjom formulom (jer se tada u njoj pojavljuje činilac 0).

Posmatrajmo sada skup N sa n elemenata, $n \geq 1$, i skup M sa m elemenata, $m \geq n$. Fiksirajmo element $a \in N$ i izaberimo proizvoljno vrijednost $f(a) \in M$ na jedan od m mogućih načina. Preostaje nam da izaberemo injektivno preslikavanje iz $N \setminus \{a\}$ u $M \setminus \{f(a)\}$. Po induktivnoj hipotezi, postoji $(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ mogućnosti za ovaj izbor, pa stoga vidimo da postoji ukupno $m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$ injektivnih preslikavanja $f : N \mapsto M$.

PRIMJER Klub ima 25 članova. Koliko ima načina da se izaberu predsjednik, potpredsjednik, sekretar i blagajnik kluba?

Rješenje. Predsjednik kluba može da se izabere na 25 načina, između preostalih osoba potpredsjednik može da se izabere na 24 načina, sekretar na 23 i, konačno, blagajnik na 22 načina, tako da je broj različitih izbora jednak broju uređenih izbora bez ponavljanja 4 osobe iz skupa sa 25 osoba, tj.

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600$$

PRIMJER: U kompaniji pred predsjedničke izbore, kandidat K treba da obiđe sedam od petnaest gradova u Srbiji. Da bi postigao što bolji efekat pred izbore, kandidat je izabrao da svoju kampanju završi u Beogradu. Na koliko različitih načina se može realizovati kampanja?

Rješenje. S obzirom da je poslednji grad u kampanji već izabran, kandidat K u stvari treba da izabere prvih šest gradova koje će obići od preostalih četrnaest gradova u Srbiji. Kako je bitan redoslijed obiđenih gradova, broj ovih izbora jednak je

$$14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 2\,162\,160$$

6 Primena

U programiranju, permutacije često igraju ključnu ulogu u rešavanju problema sa kombinatornim svojstvima. Jedan od interesantnih problema je nalaženje sledeće leksikografski veće permutacije.

6.1 Zadatak

Zadato je n-elementni niz. Pronađi sledeću leksikografski veću permutaciju tog niza. Ako takva permutacija ne postoji (tj. niz je u opadajućem redosledu), vrati leksikografski najmanju permutaciju (sortirani niz).

6.2 Rešenje

Algoritam se sastoji od sledećih koraka:

1. Pronađi najveći indeks i takav da je $arr[i] < arr[i+1]$. Ako ne postoji takav i, niz je već u opadajućem redosledu.
2. Pronađi najveći indeks j takav da je $arr[j] > arr[i]$.
3. Zameni $arr[i]$ i $arr[j]$.
4. Obrni deo niza od indeksa $i+1$ do kraja.

6.3 Kod implementacije u Python-u

```
def next_permutation(arr):
i = len(arr) - 2
while i >= 0 and arr[i] >= arr[i + 1]:
i -= 1

if i == -1:
arr.reverse()
return arr

j = len(arr) - 1
while arr[j] <= arr[i]:
j -= 1

arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]

arr[i + 1:] = reversed(arr[i + 1:])
return arr

# Primer
niz = [1, 2, 3]
```

```
sledeca_permutacija = next_permutation(niz)
print(sledeca_permutacija)
```

Ovaj algoritam efikasno generiše sledeću leksikografski veću permutaciju i koristi se u različitim aplikacijama kao što su generisanje kombinatornih rasporeda i rešavanje problema optimizacije.

Generisanje Permutacija

```
import itertools

def generisi_permutacije(n):
elementi = list(range(1, n + 1))
return list(itertools.permutations(elementi))

# Primer korišćenja
n = 3
permutacije = generisi_permutacije(n)
print("Permutacije skupa od", n, "elemenata:")
for perm in permutacije:
print(perm)
```

Generisanje M-permutacija

```
import itertools

def generisi_m_permutacije(n, m):
elementi = list(range(1, n + 1))
return list(itertools.permutations(elementi, m))

# Primer korišćenja
n = 5
m = 3
m_permutacije = generisi_m_permutacije(n, m)
print(f"M-permutacije skupa od {n} elemenata (m={m}):")
for perm in m_permutacije:
print(perm)
```

Generisanje Permutacija Multiskupa

```
import itertools
from collections import Counter

def generisi_permutacije_multiskupa(elemeni):
return list(itertools.permutations(elemeni))
```

```
# Primer korišćenja
multiskup = ['a', 'a', 'b', 'c']
permutacije_multiskupa = generisi_permutacije_multiskupa(multiskup)
permutacije_jedinstvene = set(permutacije_multiskupa)  # Uklanjamo duplikate

print("Permutacije multiskupa:")
for perm in permutacije_jedinstvene:
print(perm)
```