Zadatak 12 - Planarni grafovi

Grupa 10

Januar 2025

1 Uvod

Definicija 1 (Planarni graf)**.** *Graf je planaran ukoliko ga možemo nacrtati u ravni tako da ne postoje grane koje se seku.*

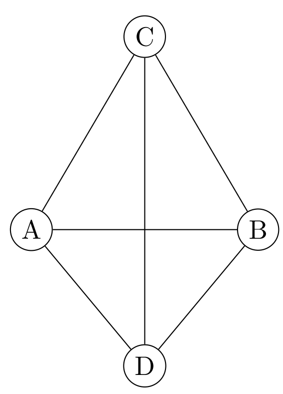
Graf je **planaran** ako može biti iscrtan u ravni tako da se njegove grane ne seku, osim eventualno u zajedničkim čvorovima. Drugim rečima, postoji takav raspored čvorova u ravni da se sve grane mogu nacrtati kao krive koje se međusobno ne preklapaju osim u tačkama koje predstavljaju njihove zajedničke čvorove.

Primer 1. *Vidimo da postoje različite grafičke reprezentacije istog grafa. Planarna reprezentacija grafa je ona u kojoj se grane ne seku.*

2 Osnovni primeri

2.1 Planarni graf K_4

Na slici 1 prikazan je planarni graf K_4 (kompletan graf nad 4 temena), koji je moguće nacrtati bez ukrštanja grana.



Slika 1: Planarni prikaz grafa K_4

2.2 Problem tri kuće i tri usluge

Primer 2. *Zamislite mali komšiluk sa 3 kuće. Grad želi da poveže tri kuće sa tri korisne usluge: struju, gas i telefon. Ovo možemo prikazati koristeći kompletan bipartitan graf* $K_{3,3}$.

Da li je ovaj graf planaran? Odnosno, da li možemo da prepravimo crtež tako da ne postoje grane koje se seku od usluga do kuća?

Teorema 1. *Kompletan bipartitan graf* $K_{3,3}$ *nije planaran.*

Dokaz. Obeležimo čvorove grafa sa a, b, c, d, e i f. Sada pokušajmo da napravimo planarnu reprezentaciju. Možemo početi tako što ćemo dodati čvorove a, b, d i e. Pošto je a povezano i sa d i sa e, a b je takođe povezano sa ovim čvorovima, ova četiri čvora dele ravan na dve oblasti, r_1 i r_2.

Sada moramo dodati čvor c. Postoje dve mogućnosti: ili ćemo ga dodati u regiju r_1 ili u regiju r_2.

Slučaj 1: c je u r_1. Pošto c mora biti povezano sa d i e, planarna reprezentacija mora izgledati nekako ovako. Imamo problem - moramo da dodamo čvor f tako da je povezan sa a, b i c i da nema presecajućih grana, a to je nemoguće. (f mora biti u jednoj od 3 regije, u svakom slučaju bar jedan čvor od a, b, c neće moći biti povezan bez presecajućih grana)

Slučaj 2: c je u r_2. Pošto c mora biti povezano sa d i e, planarna reprezentacija mora izgledati nekako ovako. Imamo isti problem - ponovo je nemoguće spojiti čvor f bez presecajućih grana. □

3 Ojlerova formula

Teorema 2 (Ojlerova formula)**.** *Neka je* $G = (V, E)$, $|V| \geq 2$, *povezan planaran prost graf i neka je* f *broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je:*

$$f = |E| - |V| + 2$$

Dokaz. Neka je $|E| = m$. Posmatrajmo planarnu reprezentaciju grafa.

Neka je G_1 graf koji sadrži proizvoljan granu grafa G i njoj incidentne čvorove. Ako je $m \geq 2$, konstruišemo dalje sukcesivno podgrafove $G_2, \ldots, G_m$ tako što ćemo svakom sledećem grafu dodati granu koja je incidenta sa jednim čvorom prethodnog podgrafa, kao i eventualno novi čvor incidentan sa tom granom. Takva grana sigurno postoji, zato što je graf povezan.

Dokazaćemo da za svako $k \in \{1, \ldots, m\}$ važi:

$$f_k = |E_k| - |V_k| + 2$$

primenom matematičke indukcije.

Baza $k = 1$: $f_1 = |E_1| - |V_1| + 2 \Leftrightarrow 1 = 1 - 2 + 2$

Induktivni korak $T_k \Rightarrow T_{k+1}$: Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve vrednosti manje od k. Neka je $G_{k+1} = G_k + \{u, v\}$.

1. Ako je $u, v \in V(G_k)$, onda je:

$$f_{k+1} = f_k + 1 \tag{1}$$
$$|V(G_{k+1})| = |V(G_k)| \tag{2}$$
$$|E(G_{k+1})| = |E(G_k)| + 1 \tag{3}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo:

$$f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2$$

2. Ako je $u \in V(G_k)$ i $v \notin V(G_k)$, onda je:

$$f_{k+1} = f_k \tag{4}$$
$$|V(G_{k+1})| = |V(G_k)| + 1 \tag{5}$$
$$|E(G_{k+1})| = |E(G_k)| + 1 \tag{6}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobijamo:

$$f_{k+1} = |E_{k+1}| - |V_{k+1}| + 2$$

□

4 Stepeni oblasti

Definicija 2. *Stepen oblasti D, u oznaci $st(D)$, je broj grana na rubu te oblasti. Ako se grana pojavljuje dva puta na rubu, ona se računa dva puta.*

Ako graf ima samo dva čvora i jednu granu, onda taj graf određuje samo jednu oblast koja ima stepen 2. U slučaju da postoje bar tri čvora u povezanom grafu, stepen svake oblasti je bar 3.

5 Gornja granica za broj grana

Teorema 3. *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$, povezan planaran i prost graf i neka je f broj oblasti na koje on deli ravan. Tada je:*

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Dokaz. Znamo da je za svaku oblast $st(D) \geq 3$, dobijamo:

$$2|E| = \sum_{i=1}^{f} st(D_i) \geq 3f \Rightarrow f \leq \frac{2}{3}|E|$$

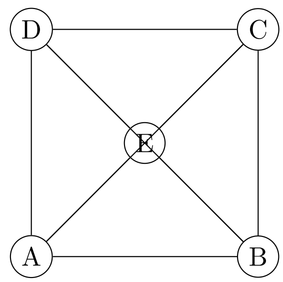
Iz Ojlerove formule dobijamo:

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 3|V| - 6$$

□

6 Neplanarnost kompletnog grafa K_5

Teorema 4. *Kompletan graf K_5 nije planaran.*



Slika 2: Neplanarni graf K_5

Dokaz. Broj čvorova u grafu je $|V| = 5$, a broj grana $|E| = 10$. Pretpostavimo da je K_5 planaran. Pošto je broj čvorova veći od 3, možemo primeniti teoremu:

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

$$10 \leq 3 \cdot 5 - 6$$

$$10 \leq 9$$

Pošto nejednakost nije zadovoljena, ovo je kontradikcija. Graf K_5 nije planaran. □

7 Homeomorfni grafovi

Definicija 3. *Dva grafa su homeomorfna ako se oba mogu izvesti iz zajedničkog pretka koristeći samo konačan niz elementarnih deoba grana.*

Grafovi $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su homeomorfni ako mogu biti dobijeni od istog grafa primenom konačno mnogo elementarnih deoba grana.

8 Teorema bez trouglova

Teorema 5. *Neka je $G = (V, E)$, $|V| \geq 3$, povezan planaran prost graf bez kontura dužine 3. Tada je:*

$$|E| \leq 2|V| - 4$$

Dokaz. Ako u grafu ne postoje konture dužine tri, onda je stepen svake oblasti bar četiri. Odatle je:

$$2|E| = \sum_{i=1}^{f} st(D_i) \geq 4f \Rightarrow f \leq \frac{1}{2}|E|$$

Iz Ojlerove teoreme dobijamo:

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{1}{2}|E| \Leftrightarrow |E| \leq 2|V| - 4$$

□

9 Kuratovska teorema

Teorema 6 (Teorema Kuratovskog)**.** *Graf G nije planaran ako i samo ako on sadrži podgraf koji je homeomorfan jednom od dva grafa K_5 ili $K_{3,3}$.*

Obratite pažnju na formulaciju teoreme. Ne kaže da G mora da sadrži grafove K_5 ili $K_{3,3}$ kao podgrafove, već kao podgrafove homeomorfne njima. Takođe, graf G ne mora da bude homeomorfan grafovima K_5 ili $K_{3,3}$.

Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži podgraf koji je homeomorfan sa potpunim grafom K_5 (kompletan graf nad 5 temena) ili potpunim bipartitnim grafom $K_{3,3}$ (potpuno povezana bipartitna mreža sa 3+3 čvora).

10 Značaj planarnosti

Planarni grafovi su od posebnog značaja u:

- **Topologiji** i **geometriji** — omogućavaju analizu prostora i mreža bez preseka.
- **Elektronskom dizajnu** — planarne šeme su lakše za implementaciju na pločama (PCB).
- **Kartografiji** — omogućavaju kreiranje mapa bez preklapanja.
- **Vizualizaciji podataka** — pružaju estetski pregledne prikaze.
- **Algoritmima** — mnogi algoritmi na planarnim grafovima imaju bolju složenost.

11 Zaključak

Planarni grafovi predstavljaju važnu klasu grafova u teoriji grafova. Kuratovska teorema daje potpunu karakterizaciju planarnih grafova kroz zabranjena podstruktura. Ojlerova formula i njene posledice omogućavaju nam da efikasno testiramo planarnost određenih tipova grafova.

Razumevanje planarnosti grafova je ključno za mnoge praktične aplikacije, od dizajna elektronskih kola do kartografije i vizualizacije podataka.