Variables aléatoires continues

Lois usuelles continues

Mohamad Ghassany

ESILV

Variables aléatoires continues: Rappel

V.A.Continues

- X est une **variable aléatoire continue** s'il existe une **densité** f non négative t.q.

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

V.A.Continues

- X est une **variable aléatoire continue** s'il existe une **densité** f non négative t.q.

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

V.A.Continues

- X est une **variable aléatoire continue** s'il existe une **densité** f non négative t.q.

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

V.A.Continues

- X est une **variable aléatoire continue** s'il existe une **densité** f non négative t.q.

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

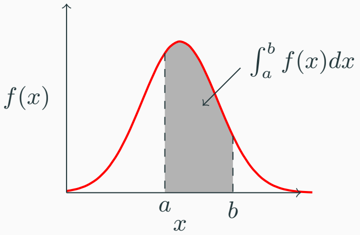


Figure 1: $P(a \leq X \leq b) =$ *surface grisée*

Fonction de répartition des V.A.Continues

- Définition: $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

Fonction de répartition des V.A.Continues

- Définition: $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
- f est le dérivé de F
- $F'_X(x) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} F_X(x) = f(x)$

Fonction de répartition des V.A.Continues

- Définition: $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
- f est le dérivé de F
- $F'_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) = f(x)$
- $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx$

Fonction de répartition des V.A.Continues

- Définition: $\forall\ a \in \mathbb{R} \quad F_X(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$
- f est le dérivé de F
- $F'_X(x) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x} F_X(x) = f(x)$
- $P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(x)dx$

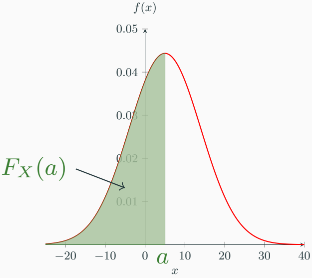


Figure 2: $F_X(a) = P(X < a) =$ *L'aire hachurée en vert*

Moments de V.A.C

Espérence:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Moments de V.A.C

Espérence:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

Moments de V.A.C

Espérence:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème de transfert:

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$

Moments de V.A.C

Espérence:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème de transfert:

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$
- e.g. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

Moments de V.A.C

Espérence:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème de transfert:

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$
- e.g. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

Variance:

- $V(X) = E\big([X - E(X)]^2\big) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Moments de V.A.C

Espérence:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème de transfert:

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$
- e.g. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$

Variance:

- $V(X) = E\big([X - E(X)]^2\big) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- $V(X) \geq 0$

Moments de V.A.C

Espérence:

- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- $E(aX + b) = aE(X) + b \qquad a \geq 0$ et $b \in \mathbb{R}$

Théorème de transfert:

- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$
- e.g. $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$

Variance:

- $V(X) = E\big([X - E(X)]^2\big) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- $V(X) \geq 0$
- $\forall \quad (a, b) \in \mathbb{R}, V(aX + b) = a^2 V(X)$

Loi Usuelle de Variables Aléatoires Continues

Loi Uniforme $U(a, b)$

Loi Uniforme $U(a, b)$

Définition

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ avec $a < b$ si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a, b] \end{cases} = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

Loi Uniforme $U(a,b)$

Définition

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur le segment $[a,b]$ avec $a<b$ si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a,b] \end{cases} = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

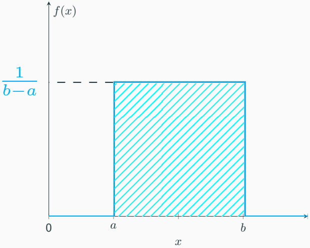


Figure 3: Fonction de densité de $U([a,b])$

Loi Uniforme $U(a, b)$

- La *fonction de répartition* associée à la loi uniforme continue est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

Loi Uniforme $U(a, b)$

- La *fonction de répartition* associée à la loi uniforme continue est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{b+a}{2}$

Loi Uniforme $U(a, b)$

- La *fonction de répartition* associée à la loi uniforme continue est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad x > b \end{cases}$$

- $E(X) = \frac{b+a}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X est **exponentielle** (ou suit la loi exponentielle) de paramètre λ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$$

On dit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X est **exponentielle** (ou suit la loi exponentielle) de paramètre λ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$$

On dit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

- La fonction de répartition F d'une variable aléatoire exponentielle est donnée par

$$\text{Si } x \geq 0 \quad F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X est **exponentielle** (ou suit la loi exponentielle) de paramètre λ si sa densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$$

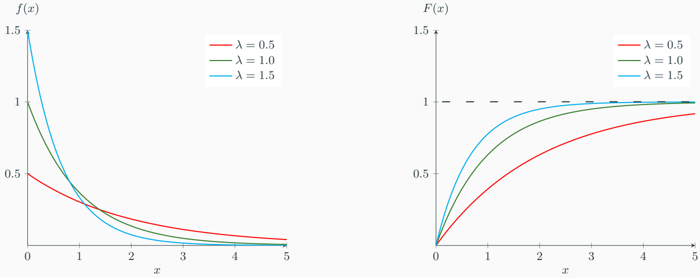
On dit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

- La fonction de répartition F d'une variable aléatoire exponentielle est donnée par

$$\text{Si } x \geq 0 \quad F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$



(a) Représentation graphique de la densité d'une loi exponentielle

(b) Représentation graphique de la fonction de répartition d'une loi exponentielle

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Cas d'utilisations de la loi exponentielle:

- Représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.
- Modéliser la durée de vie d'un phénomène **sans mémoire**, ou sans vieillissement, ou sans usure.

Cas d'utilisations de la loi exponentielle:

- Représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.
- Modéliser la durée de vie d'un phénomène **sans mémoire**, ou sans vieillissement, ou sans usure.
- On dit qu'une variable aléatoire non négative X est *sans mémoire* lorsque

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h) \qquad \forall \quad t, h \geq 0$$

Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

Cas d'utilisations de la loi exponentielle:

- Représenter le temps d'attente avant l'arrivée d'un événement spécifié.
- Modéliser la durée de vie d'un phénomène **sans mémoire**, ou sans vieillissement, ou sans usure.
- On dit qu'une variable aléatoire non négative X est *sans mémoire* lorsque

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h) \qquad \forall \quad t, h \geq 0$$

- Par exemple, la durée de vie de la radioactivité ou d'un composant électronique.

Loi Normale ou de Laplace-Gauss $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition

Une variable aléatoire X est dite **normale** avec paramètres μ et σ^2 si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$. On dit que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Définition

Une variable aléatoire X est dite **normale** avec paramètres μ et σ^2 si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^+$. On dit que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Moments de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Densité de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Densité de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

- La fonction f est paire autour d'un axe de symétrie $x = \mu$ car $f(x+\mu) = f(\mu - x)$.

Densité de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

- La fonction f est paire autour d'un axe de symétrie $x = \mu$ car $f(x+\mu) = f(\mu - x)$.
- $f'(x) = 0$ pour $x = \mu$, $f'(x) < 0$ pour $x < \mu$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \mu$

Densité de la loi Normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

- La fonction f est paire autour d'un axe de symétrie $x = \mu$ car $f(x+\mu) = f(\mu - x)$.
- $f'(x) = 0$ pour $x = \mu$, $f'(x) < 0$ pour $x < \mu$ et $f'(x) > 0$ pour $x > \mu$

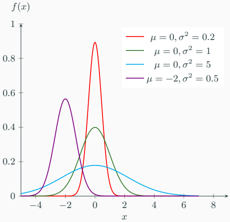


*Figure 5: **Remarque:** Le paramètre μ représente l'axe de symétrie et σ le degré d'aplatissement de la courbe de la loi normale dont la forme est celle d'une courbe en cloche.*

Stabilité de la loi Normale

Stabilité de la loi Normale

Théorème

- $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$
- $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

Stabilité de la loi Normale

Théorème

- $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$
- $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
- X_1 et X_2 sont indépendantes.

Stabilité de la loi Normale

Théorème

- $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$
- $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
- X_1 et X_2 sont indépendantes.

Alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Définition

Une variable aléatoire continue X suit une **loi normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

On dit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Définition

Une variable aléatoire continue X suit une **loi normale centrée réduite** si sa densité de probabilité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

On dit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Moments de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$

- $E(X) = 0$
- $V(X) = 1$

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

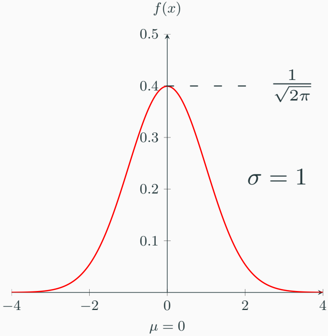


Figure 6: Densité d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Loi Normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

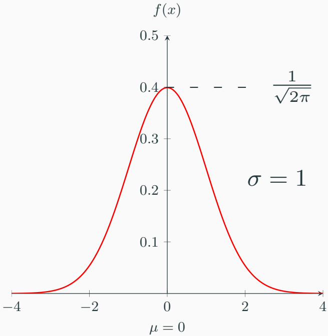


Figure 6: Densité d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

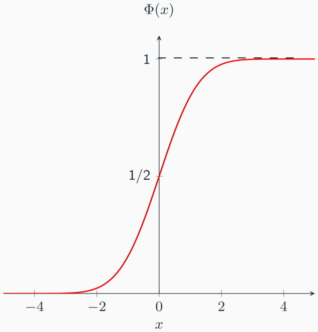


Figure 7: Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$

Relation entre loi normale et loi normale centrée réduite

Relation entre loi normale et loi normale centrée réduite

Théorème

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable centrée réduite qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Relation entre loi normale et loi normale centrée réduite

Théorème

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable centrée réduite qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite permet d'obtenir les probabilités associées à toutes variables aléatoires normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ après transformation en variable centrée réduite.

Relation entre loi normale et loi normale centrée réduite

Théorème

Si X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ est une variable centrée réduite qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

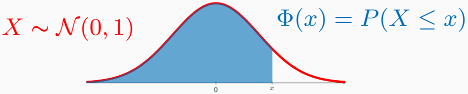
La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite permet d'obtenir les probabilités associées à toutes variables aléatoires normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ après transformation en variable centrée réduite.

Définition

On appelle fonction Φ, la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, telle que

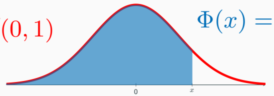
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

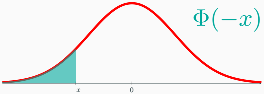


Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$



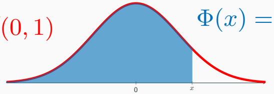
$\Phi(x) = P(X \leq x)$



$\Phi(-x) = P(X \leq -x)$

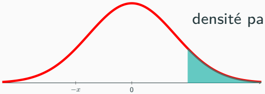
Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$



$\Phi(x) = P(X \leq x)$

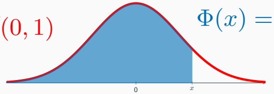
$\Phi(-x) = P(X \leq -x)$



densité paire $\Rightarrow$ courbe symétrique % $x = 0$

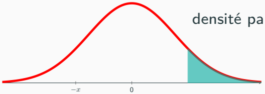
Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$

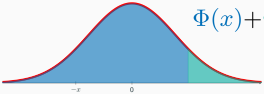


$\Phi(x) = P(X \leq x)$

$\Phi(-x) = P(X \leq -x)$



densité paire $\Rightarrow$ courbe symétrique % $x = 0$



$\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Propriétés de Φ

Les propriétés associées à la fonction de répartition Φ sont:

1. Φ est croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie:
   $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Propriétés de Φ

Les propriétés associées à la fonction de répartition Φ sont:

1. Φ est croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie:
   $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$
2. $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

Propriétés de Φ

Les propriétés associées à la fonction de répartition Φ sont:

1. Φ est croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie:
   $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$
2. $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$
3. $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) - \Phi(-x) =$

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

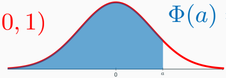
Propriétés de Φ

Les propriétés associées à la fonction de répartition Φ sont:

1. Φ est croissante, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie: $\lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} \Phi(x) = 1$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$
3. $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1$

Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$

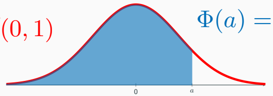


$\Phi(a) = P(X \leq a)$

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$



$\Phi(a) = P(X \leq a)$

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Par exemple, pour $x = 1.23$ (intersection de la ligne 1.2 et de la colonne 0.03), on obtient : $\Phi(1.23) \approx$ 0.8907.

Calcul des probabilités d'une loi normale

Exemple 1

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Calculer:

1. $P(X > 2)$
2. $P(2 < X < 5)$

Exemple 1

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Calculer:

1. $P(X > 2)$
2. $P(2 < X < 5)$

Exemple 2

Soit X une variable aléatoire normale de paramètres $\mu = 3$ et $\sigma^2 = 4$. Calculer:

1. $P(X > 0)$
2. $P(2 < X < 5)$
3. $P(|X - 3| > 4)$

Approximation normale d’une répartition binomiale

Approximation normale d'une répartition binomiale

Théorème de Moivre Laplace

On suppose que pour tout n, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$.

Approximation normale d'une répartition binomiale

Théorème de Moivre Laplace

On suppose que pour tout n, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$.

Alors la variable $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Approximation normale d'une répartition binomiale

Théorème de Moivre Laplace

On suppose que pour tout n, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $p \in]0, 1[$.

Alors la variable $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

- Ce résultat a été progressivement généralisé par Laplace, Gauss et d'autres pour devenir le théorème actuellement connu comme théorème centrale limite qui est un des deux résultats les plus importants de la théorie de probabilités.

Approximation normale d'une répartition binomiale

Théorème de Moivre Laplace

On suppose que pour tout n, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p \in]0,1[$.

Alors la variable $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

- Ce résultat a été progressivement généralisé par Laplace, Gauss et d'autres pour devenir le théorème actuellement connu comme théorème centrale limite qui est un des deux résultats les plus importants de la théorie de probabilités.
- En pratique de très nombreux phénomènes aléatoires suivent approximativement une distribution normale.

Approximation normale d'une répartition binomiale

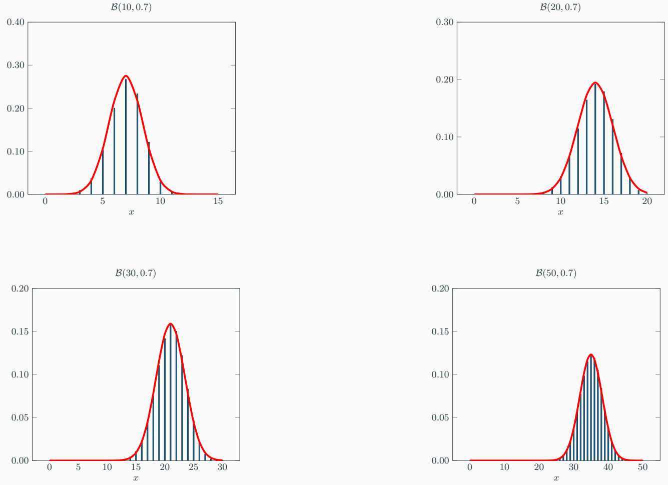


Figure 8: La loi de probabilité d'une variable aléatoire $\mathcal{B}(n, p)$ devient de plus en plus "normale" à mesure que n augmente.

Lois déduites de la loi normale

Loi de χ^2 de Pearson

Loi de χ^2 de Pearson

Définition

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables **normales centrées réduites**, et Y la variable aléatoire définie par

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_i^2 + \ldots + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

On dit que Y suit la loi de χ^2 (ou loi de Pearson) à n degrés de liberté, $Y \sim \chi^2(n)$

Loi de χ^2 de Pearson

Définition

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables **normales centrées réduites**, et Y la variable aléatoire définie par

$$Y = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_i^2 + \ldots + X_n^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

On dit que Y suit la loi de χ^2 (ou loi de Pearson) à n degrés de liberté, $Y \sim \chi^2(n)$

- La loi de χ^2 trouve de nombreuses applications dans le cadre de la comparaison de proportions, des tests de conformité d'une distribution observée à une distribution théorique et le test d'indépendance de deux caractères qualitatifs. Ce sont les *tests du khi-deux*.
- Remarque: Si $n = 1$, la variable du χ^2 correspond au carré d'une variable normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi de Student $St(n)$

Loi de Student $St(n)$

Définition

Soit U une variable aléatoire suivant une loi **normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$ et V une variable aléatoire suivant une loi de $\chi^2(n)$, U et V étant indépendantes, on dit alors que $T_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ suit une **loi de Student** à n degrés de liberté. $T_n \sim St(n)$

Loi de Student $St(n)$

Définition

Soit U une variable aléatoire suivant une loi **normale centrée réduite** $\mathcal{N}(0,1)$ et V une variable aléatoire suivant une loi de $\chi^2(n)$, U et V étant indépendantes, on dit alors que $T_n = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ suit une **loi de Student** à n degrés de liberté. $T_n \sim St(n)$

- La loi de Student est utilisée lors des tests de comparaison de paramètres comme la moyenne et dans l'estimation de paramètres de la population à partir de données sur un échantillon (Test de Student).

Loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(n, m)$

Loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(n, m)$

Définition

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de χ^2 respectivement à n et m degrés de liberté.

On dit que $F = \frac{U/n}{V/m}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à (n, m) degrés de liberté. $F \sim \mathcal{F}(n, m)$

Loi de Fisher-Snedecor $\mathcal{F}(n, m)$

Définition

Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de χ^2 respectivement à n et m degrés de liberté.

On dit que $F = \frac{U/n}{V/m}$ suit une loi de Fisher-Snedecor à (n, m) degrés de liberté. $F \sim \mathcal{F}(n, m)$

- La loi de Fisher-Snedecor est utilisée pour comparer deux variances observées et sert surtout dans les très nombreux tests d'analyse de variance et de covariance.

Quelques références – interactives

- A visual introduction to probability and statistics: `http://students.brown.edu/seeing-theory/`
- Distribution Calculator: `https://gallery.shinyapps.io/dist_calc/`

Couple de variables aléatoires

Rappel: Couple de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a. discrètes

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$

Rappel: Couple de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a. discrètes

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$
- Probabilité conjointe:
  $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j), \quad p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$

Rappel: Couple de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a. discrètes

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$
- Probabilité conjointe:
  $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j), \quad p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$
- Loi marginale de X:
  $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, l$

Couple de v.a. discrètes

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$
- Probabilité conjointe:
  $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j), \quad p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$
- Loi marginale de X:
  $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, l$
- Loi marginale de Y:
  $p_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{l} p_{ij} \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, k$

Rappel: Couple de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a. discrètes

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$
- Probabilité conjointe:
  $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j), \quad p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$
- Loi marginale de X:
  $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, l$
- Loi marginale de Y:
  $p_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{l} p_{ij} \qquad \forall\, j = 1, 2, \ldots, k$
- Loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$:
  $p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X=x_i;Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, l$

Rappel: Couple de variables aléatoires discrètes

Couple de v.a. discrètes

- $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$
- Probabilité conjointe:
  $p_{ij} = P(X = x_i; Y = y_j), \quad p_{ij} \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$
- Loi marginale de X:
  $p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{k} p_{ij} \qquad \forall\, i = 1, 2, \dots, l$
- Loi marginale de Y:
  $p_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{l} p_{ij} \qquad \forall\, j = 1, 2, \dots, k$
- Loi conditionnelle de X sachant $Y = y_j$:
  $p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X=x_i;Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}} \qquad \forall i = 1, 2, \dots, l$
- Indépendance:
  $P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \qquad \forall\, i = 1, 2, \dots, l$ et $j = 1, 2, \dots, k$

Couple de variables aléatoires continues

Densité conjointe

On dit que (X, Y) est un couple aléatoire continu s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $D \subseteq \mathbb{R}$ on a

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_{(x,y)\in D} f(x, y) dx dy$$

Densité conjointe

On dit que (X, Y) est un couple aléatoire continu s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $D \subseteq \mathbb{R}$ on a

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)dxdy$$

- On a la condition de normalité $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = 1$
- Notons par A et B deux ensembles de nombres réels. En définissant $D = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$, on obtient

$$P(X \in A, Y \in B) = \int_A \int_B f(x, y)dxdy$$

Fonction de répartition

La fonction de répartition du (X, Y) est définie par

$$F(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x,y)dxdy$$

- f est le dérivé de F: $f(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a,b)$

Couple de variables aléatoires continues

Fonction de répartition

La fonction de répartition du (X, Y) est définie par

$$F(a, b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{a} f(x, y) dx dy$$

- f est le dérivé de F: $f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b)$

Densités marginales

- Densité marginale de X:

$$f(x, .) = f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

- Densité marginale de Y:

$$f(., y) = f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

Espérance, indépendance, distribution conditionnelle

Espérance:

$$E[g(X,Y)] = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

Exemple: $E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy$

Espérance, indépendance, distribution conditionnelle

Espérance:

$$E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

Exemple: $E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy$

Indépendance:

Les v.a. X et Y sont indépendantes ssi $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Espérance, indépendance, distribution conditionnelle

Espérance:

$$E[g(X,Y)] = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

Exemple: $E(XY) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)dxdy$

Indépendance:

Les v.a. X et Y sont indépendantes ssi $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Distribution conditionnelle:

Densité conditionnelle de X, sous la condition $Y = y$:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Exemples

Exemple 1

Soit (X,Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{si} \quad x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que:

1. f est une densité.
2. $P(X>1, Y<1) = e^{-1}(1-e^{-2})$
3. $P(X<a) = 1-e^{-a}$
4. $P(X<Y) = 1/3$
5. $E(XY) = 1/2$
6. X et Y sont indépendantes.

Exemple 2

Soit (X, Y) un couple aléatoire continu de densité

$$f(x,y) = \begin{cases} axy^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver la constante a.
2. Trouver les densités marginales de X et Y.
3. X et Y sont elles indépendantes?

Exemple 3

Supposons que X et Y aient pour densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} & \text{si} \quad x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la densité conditionnelle de X lorsque $Y = y$.
2. Calculer $P(X > 1 | Y = y)$