Iterativne numerične metode v linearni algebri 2017/2018

2. domača naloga

Rešitve oddajte do **ponedeljka, 19. februarja 2018**, do 23. ure. Navodila:

- Programe in poročilo stisnite v ZIP datoteko z imenom `ime-priimek-vpisna-2.zip`, ki jo oddate preko spletne učilnice (`http://ucilnica.fmf.uni-lj.si`).
- V poročilo ni potrebno stisniti testnih datotek z matrikami, ki so na voljo na spletni učilnici. Če pa imate kakšne druge testne podatke, jih priložite.
- V poročilu za vsako nalogo opišite postopek reševanja, zapišite rešitev in komentirajte rezultat. Če poročilo skenirate, mora biti oddano v pdf obliki.
- Rešitvi priložite izjavo, da ste naloge reševali samostojno.
- Navedite, s katerim programom ste reševali naloge, namesto Matlaba lahko uporabite Octave ali Scilab. Programi naj bodo smiselno poimenovani in razporejeni v mapah, ki so poimenovane nal1, nal2, ... K vsaki nalogi spada glavna skripta, ki izpiše rešitve naloge (nal1.m, ..., nal4.m). Preverite, da se skripte res izvedejo v ukazni vrstici (npr. klic nal1 se mora izvesti brez napak), v nasprotnem boste izgubili polovico točk pri konkretni nalogi.
- Z vprašanji o nalogah ali Matlabu se lahko obrnete name. Če menite, da je vprašanje zanimivo tudi za ostale, uporabite forum. Vprašanja so dobrodošla.

Naj bodo $c_1c_2c_3c_4$ zadnje 4 cifre vaše vpisne številke in $V = (6 * c_1c_2 + c_3c_4 + 20)/1000$. Vsaka naloga je vredna 5%, ena naloga je za bonus, skupno lahko torej zberete do 20%.

1. Pri računanju Googleovega rangiranja strani moramo izračunati dominantno lastno vrednost matrike A, kjer je $A = \alpha P + (1-\alpha)\frac{1}{n}ee^T$ in $P = Q + \frac{1}{n}ed^T$. Matrika Q je utežena matrika povezav med internetnimi stranmi in jo naložiš z ukazom

   ```
   Q=loadStanfordMatrix;
   ```

   n je dimenzija matrike, $\alpha \in [0, 1]$ je faktor teleportacije, e je vektor samih enic. Vektor d ima i-to komponento enako 1, če je i-ti stolpec matrike Q ničeln, vse njegove preostale komponente pa so enake 0. Potrebne datoteke so priložene. Učinkovito implementirajte množenje z matriko A in izračunajte njeno dominantno lastno vrednost pri $\alpha = V$ in še dodatno za

   $$\alpha = 0.01, 0.04, 0.1, 0.3, 0.5, 0.8, 0.95.$$

   Kaj opazite?

   Za izračun dominantne lastne vrednosti primerjajte uporabo potenčne metode in Arnoldijeve metode. Primerjajte hitrost kovergence in preverite, da dobite pravilen rezultat še z uporabo Matlabove funkcije `eigs`.

   Namig: Pri učinkovitem množenju z matriko A same matrike A ali matrike Q nikoli ne izračunamo eksplicitno, saj sta to polni matriki.

2. Boben si lahko predstavljate kot opno s fiksnim robom. Oblika določa njegove frekvence, ki so lastne vrednosti Laplaceovega operatorja. Če si predstavljamo, da boben zavzame obliko območja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, potem je potrebno poiskati rešitve lastnega problema

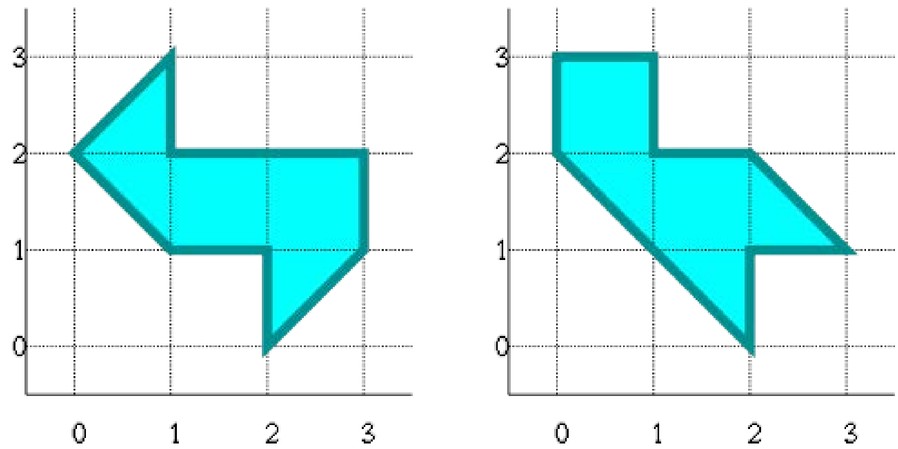
$$-\Delta u = \lambda u$$

pri robnem pogoju

$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Vsakemu bobnu ustreza neskončno zaporedje lastnih frekvenc. Leta 1966 je Mark Kac postavil znamenito vprašanje: "Ali lahko slišimo obliko bobna?". Pozitiven odgovor bi pomenil, da ne obstajata dva bobna različnih oblik, ki bi imela enake lastne frekvence.

Na to vprašanje sta odgovorila Carolyn Gordon in David Webb leta 1992 z odgovorom "Ne, oblike bobna ne moremo slišati!". Kot dokaz sta podala bobna oblike



in pokazala, da se vse njune lastne frekvence ujemajo. Njun rezultat potrdite še numerično. Diferencialno enačbo za vsak boben aproksimirajte s pettočkovno shemo in z metodo `eigs` v Matlabu preverite, da se prvih 5 lastnih vrednosti, ki jih izračunajte na čim več decimalnih mest točno, res ujema. Za oba bobna tudi grafično prikažite ustrezne lastne funkcije.

Namig: Pomagajte si z Matlabovo funkcijo `delsq`. Ukaz `A=delsq(M)` vrne matriko, ki ustreza pettočkovni aproksimaciji enačbe $-\Delta u = 0$ za območje znotraj $[0,1] \times [0,1]$, ki ga opisujejo neničelni indeksi točk v mreži M. Za oba bobna (katerih obliko ustrezno preslikajte na $[0,1] \times [0,1]$) zgenerirajte ustrezni mreži in primerjajte nekaj najmanjših lastnih vrednosti, ki jih dobite z ukazom `eigs`.

3. Dana je trikotna mreža točk s celoštevilskimi koordinatami (i, j), za katere velja $0 \le i, j$ in $i + j \le m$. Na teh točkah izvajamo slučajni sprehod na naslednji način. Iz točke (i, j) v mreži se premaknemo v eno izmed tistih sosednjih točk $(i+1, j)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, ki so v mreži. Pri tem je verjetnost prehoda v eno izmed točk $(i-1, j)$ ali $(i, j-1)$ enaka $pd(i, j) = (i+j)/m$. To se enakomerno razdeli med obe točki, če sta obe v mreži. Verjetnost prehoda v eno izmed točk $(i+1, j)$ ali $(i, j+1)$ je $pu(i, j) = 1 - pd(i, j)$, kar se spet enakomerno razdeli med točki, če sta obe v mreži.

Če $m(m+1)/2$ točk ustrezno indeksiramo, se naključni sprehod izraža z Markovsko verigo s prehodno matriko A, katere elementi so verjetnosti za prehod iz enega stanja (točke) v drugega. Limitno distribucijo dobimo iz levega lastnega vektorja lastne vrednosti 1 matrike A, oziroma desnega lastnega vektorja matrike A^T.

Nariši mrežo z dobljenimi verjetnostmi in določi točko v mreži (oziroma točke v mreži, če jih je več), z maksimalno vrednostjo prehoda za $m = 10, 100, 1000$. Kje ležijo točke, kjer so verjetnosti prehoda maksimalne?

4. Na strani 19 v knjigi lahko najdete opis modela Brusselator za reševanje sistema parcialnih diferencialnih enačb iz kemije.

   Naj bo $\mathbf{B} = \mathbf{5.45}$, $C = 2$, $D_u = 0.004$ in $D_v = 0.008$. Model opisujeta enačbi

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{D_u}{L^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}\right) - (B+1)u + u^2 v + C \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{D_v}{L^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}\right) - u^2 v + Bu,\end{aligned}$$

   kjer je $(X, Y) \in (0,1) \times (0,1)$, z robnimi pogoji $u(X,Y) = v(X,Y) = 0$ na robu kvadrata $[0,1] \times [0,1]$.

   Če definiramo $h_u = h_v = 1/(n+1)$, lahko diferencialni enačbi s pomočjo simetričnih diferenc aproksimiramo s sistemom navadnih diferencialnih enačb $\dot{x} = f(x)$, kjer je

$$x = \begin{bmatrix} u_{11} & v_{11} & u_{12} & v_{12} & \cdots & u_{nn} & v_{nn} \end{bmatrix}^T$$

   vektor dolžine $N = 2n^2$. Podrobneje, dobimo sistem enačb oblike

$$\begin{aligned}\dot{u}_{ij} &= \frac{D_u}{L^2}\left(\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_u^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_u^2}\right) - (B+1)u_{ij} + u_{ij}^2 v_{ij} + C \\ \dot{v}_{ij} &= \frac{D_v}{L^2}\left(\frac{v_{i-1,j} - 2v_{ij} + v_{i+1,j}}{h_v^2} + \frac{v_{i,j-1} - 2v_{ij} + v_{i,j+1}}{h_v^2}\right) - u_{ij}^2 v_{ij}^2 + Bu_{ij}\end{aligned}$$

   za $i, j = 1, \ldots, n$.

   Fiksna točka dinamičnega sistema je točka $x \in \mathbb{R}^N$, za katero velja $f(x) = 0$. Fiksna točka x je stabilna, če vse lastne vrednosti Jacobijeve matrike funkcije f v točki x ležijo v levem delu kompleksne polravnine (kar je ekvivalentno temu, da so realni deli vseh lastnih vrednosti strogo negativni).

   Zanima nas stabilnost fiksne točke, ki ni odvisna od L, to je $u \equiv C$ in $v \equiv B/C$, kar pomeni $u_{ij} = C$ in $v_{ij} = B/C$ za vse $i, j = 1, \ldots, n$. Izkaže se, da je ta fiksna točka pri $L = 0.5$ stabilna, pri $L = 1$ pa nestabilna.

   V Matlabu sestavite program, ki bo generiral matriko A, ki predstavlja Jacobijevo matriko funkcije f v fiksni točki $u \equiv C$ in $v \equiv B/C$.

   S pomočjo bisekcije in funkcije `eigs`, na tri decimalme natačno določite mejno vrednost parametra L, pri kateri pride do prehoda iz stabilnega v nestabilen sistem. Pri tem funkcijo `eigs` uporabite tako (poglejte v navodila za `eigs`), da vam vrača lastno vrednost matrike A z največjim realnim delom.

   Namig: Prva decimalka mejne vrednosti je 7. Med podatki je datoteka `A10.mat`. Če uporabite `load A10`, dobite za primerjavo matriko, ki ustreza $L = 0.5$ in $N = 200$.

Veliko uspeha pri reševanju!