

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

ITERATIVNE NUMERIČNE METODE V LIENARNI ALGEBRI

1.domača naloga

Miha Avsec

13. december 2017

Naloga je bila samostojno reševana s porgramom Matlab 2016a.

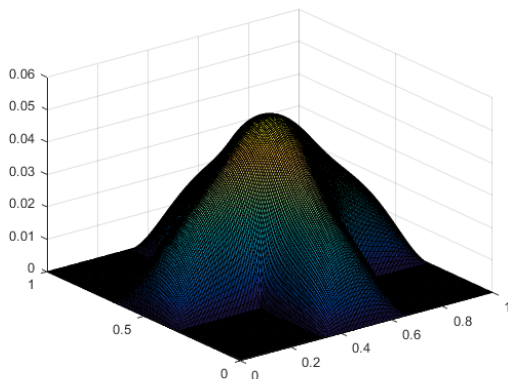
1.naloga

Prvo nalogo rešujemo s pomočjo ugrajenih funkcij numgrid in delsq. Najprej konstruiramo matriko delilnih točk, kjer so te točke v obliki plusa. To je narejeno s pomočjo funkcije numgridPlus. Funkciji podamo število točk na katere želimo razdeliti naše območje. Število točk mora biti v obliki $k*3+2$, saj imamo dve zunanji točki notranji del območja pa moramo enakomerno razdeliti na 3 dele. V funkciji numgridPlus zaporedoma kličemo funkcijo numgrid('S',n+2). kjer je $n = ((k*3+2)-2)/3$. Paziti moramo da prištejemo 2 točki saj moramo upoštevati, da numgrid('S',n+2) razdeli kvadrat na $n+2$ točk od katerih sta 2 robni. Končni integral nato izračunamo s funkcijo integral(N,risi), kjer je N število točk, ki jih podamo kot argument funkciji numgridPlus. Risi pa pove ali problem narišemo ali ne. Funkcija integral nastavi levo stran sistema s pomočjo funkcij numgridPlus in delsq. Za desno stran sistema pa vzamemo $2 \cdot h^2 \cdot e_1$. Tako dobimo U rešitev sistema v danem območju, da pa izračunamo integral množimo z matriko $t \cdot t'$, kjer je t oblike

$$[1, 2, 2, \dots, 2, 1].$$

Za boljši približek integrala na koncu interpoliramo vrednosti integrala glede na število delilnih točk in potem ta interpolant izračunamo v točki nič, ki naj bi predstavljala ničelno napako. Končni rezultat je tako 0.471081327583354, ki ga dobimo s klicom skripte nal1.

Na spodnji sliki je prikazana slika območja, ki ga dobimo pri reševanju problema.



2.naloga

Naloga je rešena s funkcijo `DLanczosPivot(A,b,x0,tol,maxit)`, ki dobi enake vhodne podatke, kot funkcija `DLanczos`. Funkcija deluje tako, da preveri ali bo trenutnem koraku diagonalni element 0 ali blizu ničle. V tem primeru gre funkcija v vejo pivotiranja, v nasprotnem primeru pa se korak izvede enako, kot pri `DLanczosu`. Če je element blizu ničle moramo izvesti pivotiranje. Element prve poddiagonale matrike L $l(j)$ izračunamo, kot $u(j-1)/b(j-1)$, kjer je u diagonalna matrike U , ter b naddiagonala matrike T . Novi $u(j)$ izračunamo kot, $u(j) = b(j) - l(j)*a(j)$, kjer je a idagonalna matrike T . Novo formula za izračun vektorja z se glasi $z(j) = -l(j)*z(j-1) - l(j-1)*z(j-2)$. Novi vektor p pa izračunamo po formuli $p = 1/u(j)*(vz - a(j)*p - b(j)*pz)$, kjer je vz novi vektor matrike V , pz pa je predzadnji vektor matrike P .

3.naloga

a) Matrika c-63

Matrika $c - 63$ je simetrična, vendar ni pozitivno definitna.

Konvergenca `gmres` brez predpogojevanja je počasna, saj 1000 korakov metode zadošča le za ostanek velikosti 10^{-2} . S predpogojevanjem pa lahko konvergenco pospešimo. Uporabimo lahko le nepopolni LU razcep saj matrika ni pozitivno definitna. A kljub predpogojevanju z delnim LU, kjer odstranimo elemente manjše od 0.1 metoda še vedno ne skonvergira do natančnosti 10^{-6} po 300 korakih. Optimalna izbira velikosti podprostorja je 25, saj je tako časovna zahtevnost kot tudi število korakov majhno.

Podobno, kot pri `gmres` je tudi pri `minres` konvergenca počasna. Po 1000 korakih imamo ostanek velikosti 10^{-1} . Pri `minres` si ne moremo pomagati s predpogojevanjem ker delni LU razcep ni simetričen in pozitivno definiten.

Metode `pcg` ne moremo uporabiti, ker matrika ni pozitivno definitna.

Metoda `qmr` konvergira pocasi. Po 1000 korakih imamo ostanek velikosti 10^{-1} . Z enakim LU razcepom kot pri `gmres` je za željeni ostanek metoda potrebovala dobrih 700 korakov. A je za to potrebovala skoraj dvakrat toliko časa kot `gmres(25)`.

Metoda `bicg` brez predpogojevanja ni delovala. S predpogojevanjem pa je metoda prišla do približka, a le ta je bil slabši kot približek metode `qmr` izračunan v podobnem času.

Metoda `bicg-stab` brez predpogojevanja ni prišla do rezultata. S predpogojevanjem, pa je metoda dala rezultat, a je bila konvergenca se vedno počasna.

Metoda `symmlq` nam v tem primeru ni dala odgovora, predpogojevanje pa nismo mogli izvesti, saj pri LU razcepu ne dobimo simetrične pozitivne matrike.

Najbolje se je na dani matriki odrezala metoda `gmres` s ponovnim zagonom.

Pričakovali bi, da se bo glede na obliko matrike najbolje odrezala metoda `minres`, a je konvergenca prepočasna, za predpogojevanje pa ne moremo uporabiti LU ali razcepa Choleskega. Glede na obliko pa se bi morala dobro obnesti tudi metoda `gmres`, ki je res najboljše za to matriko. Če hočemo imeti napako velikosti 10^{-3} ali več, pa metoda `gmres(25)` deluje hitreje kakor reševanje sistema v `matlabu`.

b) Matrika `gridgena`

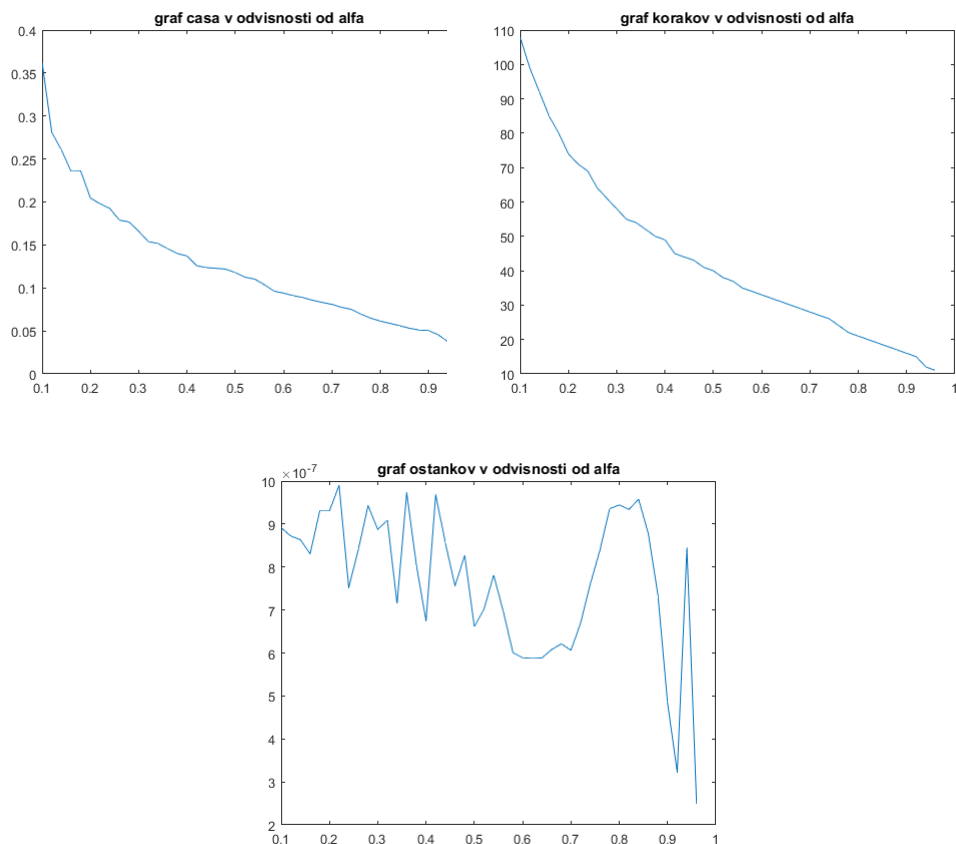
Konvergenca te matrike je izjemno hitra že brez predpogojevanja. Uporabimo lahko vse metode, saj je matrika simetrična in pozitivno definitna. Pričakovali bi, da se bo najbolje odrezala metoda `pcg` zaradi strukture matrike, a temu ni tako. Najbolje od vseh metod se je odrezala metoda `bicgstab`, ki je za izračun potrebovala najmanj časa. S to metodo lahko tudi za veliko natančnost 10^{10} sistem rešimo hitreje, kot z ugrajeno `matlabovo` metodo `A\b`.

c) Matrika `raja25`

Matrika `raja25` ni ne simetrična ne pozitivno definitna. Konvergenca je pri vseh metodah, ki jih lahko uporabimo počasna. Za predpogojevanje ne moremo uporabiti LU razcepa saj imamo na diagonali ničelne elemente, prav tako pa ne moremo uporabiti razcepa choleskega. Na voljo imamo le metode `gmres`, `bicg`, `qmr`, `bicgstab`. Najbolje se je odrezala metoda `bicgstab` če smo dopustili veliko število korakov, a se napaka ni dosti izboljšala. Za večjo napako okoli 10^{-3} pa je najboljše metoda `qmr`, kar bi tudi pričakovali glede na odločitveno drevo. Če smo zadovoljni s z ostankom okoli 10^{-3} , potem vse metode delujejo hitreje kakor reševanje sistema.

4.naloga

S pomočjo funkcije `ocena` določimo optimalen α , pri katerem želimo računati celoten inverz. Funkcija `ocena` za različne α poračuna `pcg(A,b)` in shrani potrebno število korakov, ostanek metode in časovno zahtevnost metode. Na koncu za vse nariše grafe v odvisnosti od α .



Vidimo, da se optimalen α nahaja okoli 0.7, saj so ostanki dobri časovna zahtevnost pa je tam majhna. Ko izberemo α poženemo funkcijo `RegularizacijaInverz(B,test,20489,razlika,100)`, kjer je `B` funkcija množenja matrike pri danem α , `test` je matrika s katero hočemo množiti, 20489 je velikost matrike `train`, `razlika` je zahtevana natančnost, 100 pa je število korakov posamezne metode `pcg`. Funkcija deluje tako, da za vsak enotski vektor izračuna inverzni stolpec matrike `B`, ki ga pomnoži z `test` in ga shrani v začasni matriki. V vsakem koraku izračuna še razliko

$$\|train * train' * inverznispolpec(i) - e_i\|_{\infty}.$$

Ostane je potem največja od teh razlik. Končna rešitev se nahaja v datoteki `resitev.mat`.