Fakulteta za matematiko in fiziko

Iterativne numerične metode v lienarni algebri

2.domača naloga

Miha Avsec

18. februar 2018

Naloga je bila samostojno reševana s programom Matlab 2016a.

1.naloga

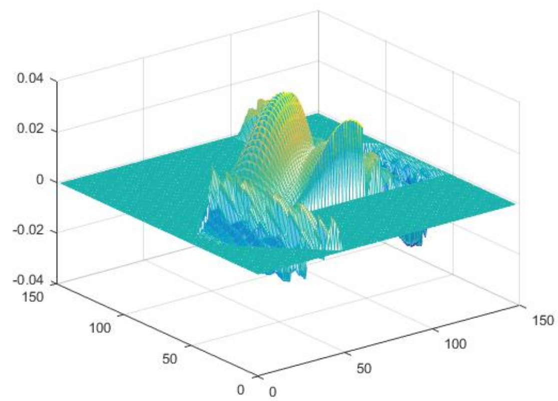
Množenje z matriko A implementiramo tako, da računamo produkt

$$Ax = \alpha Qx + 1/ne(d^t x) + (1-\alpha)1/nee^T x.$$

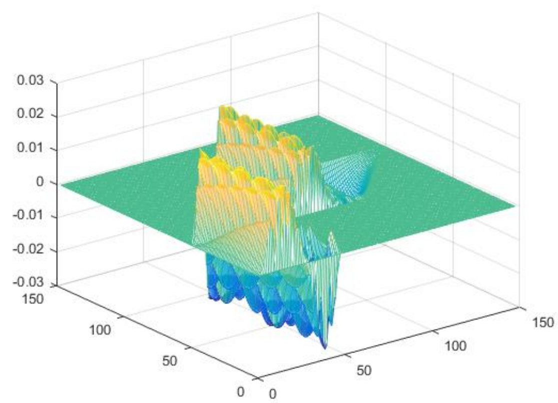
Na ta način ne potrebujemo polne matrike A, da bi izračunali produkt. Dominantne lastne vrednosti izračunamo s pomočjo potenčne in Arnoldijeve metode, ki smo jih implementirali na vajah. Opazimo, da so ne glede na izbiro parametra α dominantne lastne vrednosti vedno 1. Ne potenčna ne arnoldijeva metoda ne skonvergirata niti do natančnosti 10^{-3} po 150 korakih. Vidimo, da pri Arnoldijevi metodi potrebujemo manj korakov, a je le ta počasnejša. Najbolj natančna in ekonomična pa je vgrajena matlabova metoda.

2.naloga

Območje $(0,3) \times (0,3)$ skrčimo na $(0,1) \times (0,1)$ tako, da $(0,1) \times (0,1)$ razdelimo na 9 delov. V vsakem delu posebaj naredimo mrežo z n točkami. To je ekvivalentno temu, da imamo v notranjosti $n-2$ točk na robu pa 2 točki. Ko zlepimo vseh 9 kosov skupaj dobimo mrežo, ki ima v vsaki smeri $3n-2$ delilnih točk, ker se v notranjih na robu odsekov $(i, i+1) \times (j, j+1)$ točke ujemajo. Funkciji lik1(n) in lik2(n) tako vrneta matriki oštevilčenih točk velikosti $(3n-2)^2$. S pomočjo funkcije delsq potem rešimo diferencialni enačbi. Pri primerjavi najmanjših lastnih vrednosti vidimo da se le te razlikujejo za manj kot 10^{-6}.



Slika 1: Lastna funkcija pri 5 najmanjši lastni vrednosti za lik1.



Slika 2: Lastna funkcija pri 5 najmanjši lastni vrednosti za lik2.

3.naloga

Matriko A zapišemo kot incidenčno matriko povezav, kjer $(i,j)-ti$ element pomeni verjetnost prehoda iz $i-tega$ v $j-to$ vozlišče. Pri čemer so vozlišča urejena v stolpcu na naslednji način

$$(0,0),\dots,(0,m-1),(1,0),\dots,(1,m-2),\dots$$

Pri $m=10$ kot rešitev tako dobimo največjo verjetnost 0.9.

i-koordinata	j-koordinata	i-kordinata kamor gremo	j-koordinata kamor gremo
0	9	0	8
9	0	8	0

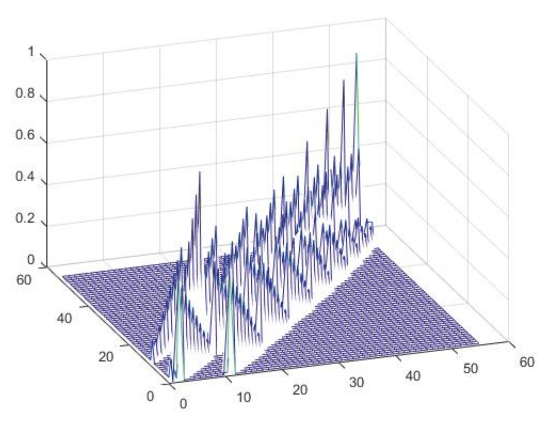
Pri $m=100$ kot rešitev tako dobimo največjo verjetnost 0.99.

i-koordinata	j-koordinata	i-kordinata kamor gremo	j-koordinata kamor gremo
0	99	0	98
99	0	98	0

Pri $m=1000$ kot rešitev tako dobimo največjo verjetnost 0.999.

i-koordinata	j-koordinata	i-kordinata kamor gremo	j-koordinata kamor gremo
0	999	0	998
999	0	998	0

Opazimo, da je največja verjetnost prehoda ravno v levem zgornjem in desnem spodnjem kotu.



Slika 3: Graf verjetnosti prehoda iz posameznih točk za m=10.

4.naloga

Jacobijevom matriko generiramo tako, da najprej izračunamo vse odvode, ki so različni od 0. Za u so to le odvodi po $u_{i,j}, u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, u_{i,j-1}, u_{i,j+1}, v_{i,j}$. Podobno pride tudi za v. Prav tako opazimo, da je Jacobijeva matrika brez naddiagonale in poddiagonale v resnici bločna matrika z bloki velikosti $2n$. Zato zgeneriramo posamezen blok, ki ga potemo vstavimo na prava mesta v matriki. Na koncu pa dodamo še obe zunanji diagonali, ki imata prav tako iste elemente, ki se ponavljajo. Nato naredimo funkcijo, ki v odvisnosti od parametra L generira Jacobijevo matriko in še funkcijo, ki vrne 1, če je največja realna lastna vrednost matrike, ki jo podamo kot argument, večja kot 0 in -1 sicer. Nato na kompoziciji teh dveh funkcij poženemo bisekcijo. Kot rešitev dobimo vrednost $L = 0.7236$.