UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Miha Avsec

KUBIČNE KRIVULJE V KRIPTOGRAFIJI

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Anita Buckley
Somentor: pred. mag. Matjaž Praprotnik

Ljubljana, 2019

Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se ...

Kazalo

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [?], [?], [?], [?].

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[?]

[?]

[?]

[?]

Podpis mentorja:

Kubične krivulje v kriptografiji

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx`

Ključne besede: kubična krivulja , kriptografija , ...

Keywords: cubic curve , cryptography

1 Uvod

Kubične krivulje se v kriptografiji uporabljajo, ker zagotavljajo isto varnost, kot drugi klasični kriptosistemi, pri tem pa potrebujejo manjšo velikost ključa. Ocenjuje se, da je 2048 bitni ključ v RSA algoritmu enako varen kot 224 bitni ključ nad kubičnimi krivuljami. Krajši kluči predstavljajo veliko prednost v okoljih s slabšo procesorsko močjo in/ali omejenim pomnilnikom. Primer take uporabe predstavljajo pametne kartice. Uporaba kubičnih krivulj v namene kriptografije je prvi predlagal Victor S. Miller leta 1985, a so le te v širšo rabo vstopile še le okoli leta 2004.

2 Kubične krivulje

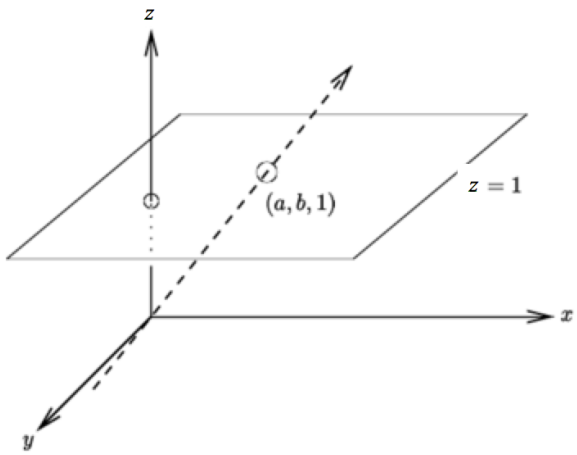
KOPIRANO IZ DIPLOME ALI JE OK????

2.1 Točke na krivulji

Definicija 2.1.

Projektivna ravnina $\mathbb{P}^2$ nad poljem $\mathbb{F}$ je kvocientni prostor $\mathbb{F}^3 - \{0\}/\sim$, kjer je ekvivalenčna relacija podana z $(a, b, c) \sim (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ za vsak $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Točke v $\mathbb{P}^2$ so torej podane s homogenimi koordinatami $[a, b, c] = [\alpha a, \alpha b, \alpha c]$ za vse $\alpha \neq 0$.

Točko projektivne ravnine si lahko predstavljamo kot premico skozi izhodišče, kot prikazuje slika 1.



Slika 1: Točka [a,b,1] v projektivni ravnini.

Definicija 2.2.

Polinom P je *homogen* stopnje d, če velja $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$ za vse $\lambda \in \mathbb{F}$.

Definicija 2.3.

Algebraična krivulja, podana s homogenim polinomom P, je množica točk

$$\mathcal{C}_P = \{A \in \mathbb{P}^2, P(A) = 0\}.$$

Kubična krivulja je algebraična krivulja, podana s homogenim polinomom stopnje 3. V splošnem je torej oblike

$$a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{201}x^2z + a_{120}xy^2 + a_{102}xz^2 + \\ + a_{012}yz^2 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 + a_{111}xyz + a_{021}y^2z = 0,$$

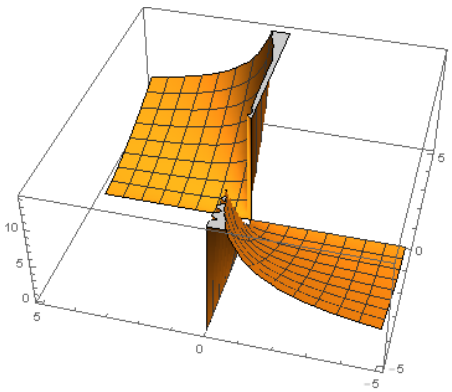
kjer so $a_{ijk} \in \mathbb{F}$. Ta zapis vsebuje 10 koeficientov, vendar se v gladkih primerih lahko polinom poenostavi.

Definicija 2.4.
Algebraična krivulja je *gladka*, če nima nobenih samopresečišč ali singularnosti.

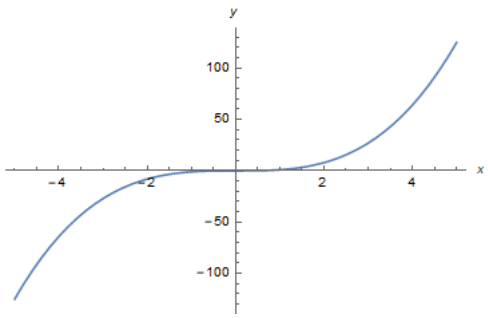
Izrek 2.5 ([?], Izrek 15.2)**.**
Gladko kubično krivuljo nad algebraično zaprtim poljem lahko zapišemo v Weierstrassovi obliki

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

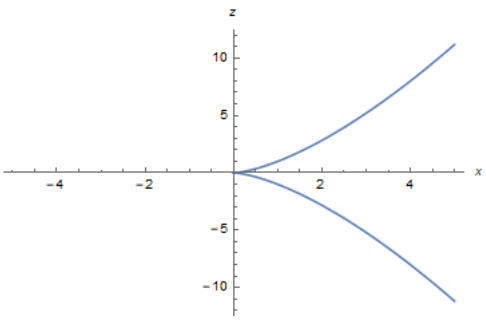
Primer 2.6.
Polinom $P(x, y, z) = z^2y - x^3$ je homogen polinom stopnje 3. Rešitve enačbe $z^2y - x^3 = 0$ pa podajajo točke na kubični krivulji.



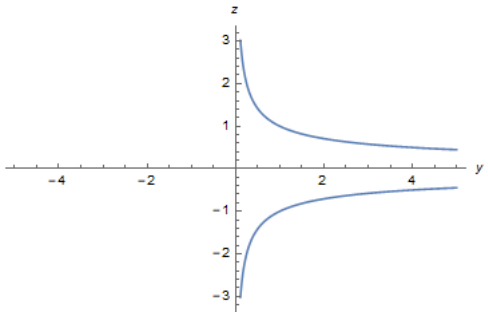
Slika 2: Algebraična krivulja, podana s polinomom $z^2y - x^3$.



Slika 3: Presek algebraične krivulje z ravnino $z = 1$.



Slika 4: Presek algebraične krivulje z ravnino $y = 1$.



Slika 5: Presek algebraične krivulje z ravnino $x = 1$.

Na zgornjih slikah lahko vidimo, kako krivuljo predstavimo v projektivni ravnini, ter njene preseke z različnimi afinimi ravninami.

V nadaljevanju nas bodo zanimale predvsem gladke kubične krivulje v polju $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Definicija 2.7. Za dani števili a, $b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ je *kubična krivulja* nad poljem $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ množica točk

$$E_{(a,b)}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\right\}.$$

Drugače povedano, afina kubična krivulja je množica rešitev enačbe

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Pri čemer upoštevamo zvezo med afinimi in projektivnimi koordinatami točk:

$$(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \Leftrightarrow [x, y, 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

2.2 Struktura grupe na kubičnih krivuljah

Za definicijo grupe na kubičnih krivuljah uvedimo najprej pomožno operacijo

$$* : \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P \to \mathcal{C}_P,$$

tako da za poljubni točki A, B na krivulji velja:

$$A * B = \begin{cases} A & \text{če je } A = B \text{ prevoj,} \\ C & \text{če je } \overline{AB} \cap \mathcal{C}_P = \{A, B, C\}, \\ A & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } A, \text{ ter } A \neq B, \\ B & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } B, \text{ ter } A \neq B, \\ C & \text{če je } A = B \text{ \{in tangenta v A\}} \cap \mathcal{C}_P = \{A, C\}. \end{cases}$$

Intuitivno operacija $*$ vrne tretjo točko v preseku premice skozi A in B in $\mathcal{C}_P$. Poglejmo si še nekaj lastnosti operacije $*$. Dokaze sledečih trditev najdemo v [**?**, Poglavje 17.3].

Trditev 2.8.
Operacija $*$ ima naslednje lastnosti:

- *komutativnost:* $A * B = B * A$,
- *absorpcija:* $(A * B) * A = B$,
- $((A * B) * C) * D = A * ((B * D) * C)$.

Izrek 2.9.
Kubična krivulja ($\mathcal{C}_P$,+) je Abelova grupa za operacijo

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P & \to & \mathcal{C}_P \\ & (A, B) & \to & (A * B) * O \ , \end{array}$$

kjer je O poljubna izbrana točka na krivulji $\mathcal{C}_P$.

Dokaz.
S pomočjo trditve 2.8 dokažimo, da je ($\mathcal{C}_P$,+) res Abelova grupa.

- Operacija + je komutativna:

$$A + B = (A * B) * O = (B * A) * O = B + A.$$

- Točka O je nevtralni element:

$$A + O = (A * O) * O = A.$$

- Nasprotni element A definiramo kot $-A = A * (O * O)$ in preverimo:

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (A * (A * (O * O))) * O \\ &= (O * O) * O \\ &= O, \end{aligned}$$

kjer smo uporabili absorbcijo.

- Asociativnost $(A+B)+C = A+(B+C)$ dokažemo z računom:

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= ((A+B)*C)*O \\ &= (((A*B)*O)*C)*O \\ &= (A*((B*C)*O))*O \\ &= (A*(B+C))*O = A+(B+C). \end{aligned}$$ □

Ta definicija operacije nudi eleganten opis strukture grupe, za numerično računanje pa ni primerna. Možno pa je izpeljati formule, s katerimi lahko eksplicitno izračunamo vsoto dveh točk, v kolikor imamo kubično krivuljo v Weierstrassvi obliki.

Lema 2.10 (Seštevanje točk na Weierstrassovi kubični krivulji)**.**
Naj bo $\mathcal{C}_P$ afina krivulja v Weierstrassovi obliki $y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ter O prevoj v neskončnosti. Če sta $A_1 = (a_1, b_1)$ in $A_2 = (a_2, b_2)$ točki na afinem delu $\mathcal{C}_P$, potem za $A_3 = A_1 + A_2 = (a_3, b_3)$ velja

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda^2 - \alpha - a_1 - a_2 \\ b_3 &= -\lambda a_3 - \mu, \end{aligned}$$

kjer sta

$$\lambda = \begin{cases} \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} & \text{če } a_1 \neq a_2, \\ \frac{3a_1^2 + 2\alpha a_1 + \beta}{2b_1} & \text{sicer}, \end{cases}$$

ter $\mu = b_1 - \lambda a_1$.

Opomba 2.11. Če krivuljo $\mathcal{C}_P$ predstavimo v projektivni ravnini, torej s homogenim polinomom $yz^2 = x^3 + \alpha x^2 z + \beta x z^2 + \gamma y z^2$ je prevoj $O = [0, 1, 0]$.

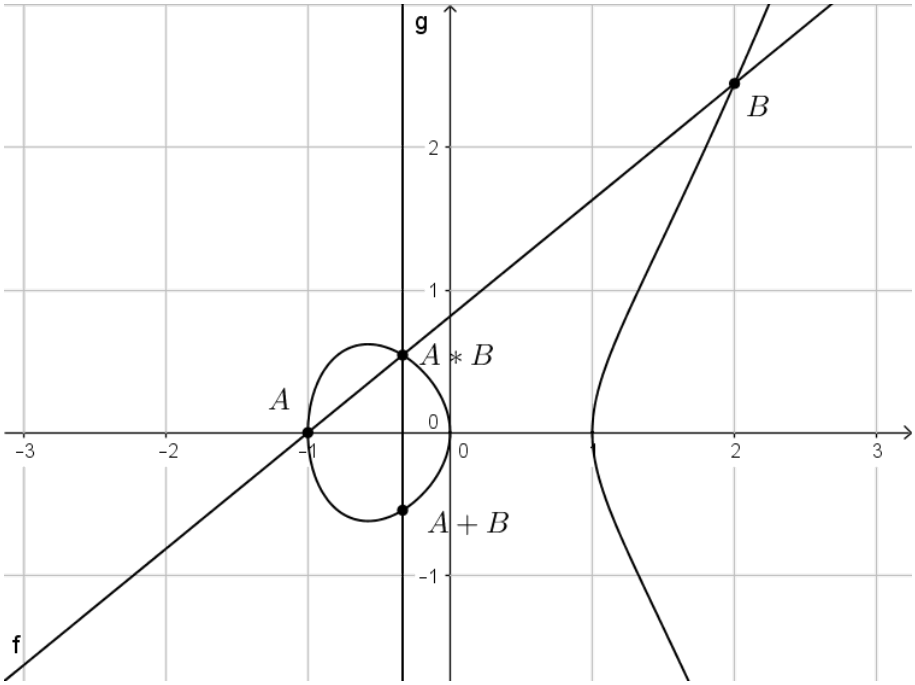
Primer 2.12.
Na spodnji sliki je v afini ravnini $y = 1$ prikazano kako grafično seštevamo točke na Weierstrassovi kubiki $yz^2 - x(x-y)(x+y) = 0$. Sešteti želimo točki $A = (-1, 0)$ in $B = (2, \sqrt{6})$.

Primer 2.13.
Seštejmo točki $A = (-1, 0), B = (2, \sqrt{6})$ na Weierstrassovi kubični krivulji $yz^2 - x(x-y)(x+y) = 0$ v preseku s projektivno ravnino $y = 1$ še računsko z uporabo zgornje leme 2.10. Prepišimo našo krivuljo najprej v afino obliko iz leme 2.10. Ker smo v ravnini $y = 1$, najprej zamenjajmo vlogi y in z.

$$z^2 - x(x-1)(x+1) = 0$$

Dobimo $z^2 = x^3 - x$, torej je $\alpha = 0$, $\beta = -1$ in $\gamma = 0$. Izračunajmo sedaj λ in μ, pri čemer upoštevamo prvi predpis, saj sta x-koordinati točk različni:

$$\lambda = \frac{-\sqrt{6}}{-1-2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$



Slika 6: Grafično seštevanje točk na kubični krivulji.

$$\mu = 0 - \frac{\sqrt{6}}{3}(-1) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Koordinati vsote $A + B = (x, y)$ sta torej enaki

$$x = \frac{6}{9} - 0 + 1 - 2 = -\frac{1}{3}$$

in

$$z = -\frac{\sqrt{6}}{3}(-\frac{1}{3}) - \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{2\sqrt{6}}{9} \doteq -0.5443.$$

Iskana točka $A + B \in \mathbb{P}^2$ je torej enaka $[-\frac{1}{3}, 1, -\frac{2\sqrt{6}}{9}]$. Dobljeni rezultat se ujema s točko, ki smo jo dobili z grafičnim seštevanjem.

3 Diffie-Hellmanova izmenjava ključev nad gladkimi kubičnimi krivuljami

Diffe-Hellmanova izmenjava ključev je postopek, pri katerem se dve osebi npr. Alenka in Boris dogovorita za skrivni ključ na takšen način, da tudi v primeru ko njun pogovor posluša tretji nepovabljeni gost npr. Ciril le ta iz pogovora ne more rekonstruirati ključa za katerega sta se tekom pogovora dogovorila Alenka in Boris.

Algoritem 1 Diffie-Hellmanova izmenjava ključev.

1. Alenka in Boris se dogovorita za elitpično krivuljo E nad končnim obsegom $\mathbb{F}q$, ter za točko $P \in E(\mathbb{F}_q)$.
2. Alenka se odloči za skrivno število $a \in \mathbb{N}$, in izračuna $P_a = aP$, ter to pošlje Borisu.
3. Boris se odloči za skrivno število $b \in \mathbb{N}$, in izračuna $P_b = bP$, ter to pošlje Alenki.
4. Alenka izračuna $aP_b = abP$.
5. Boris izračuna $bP_a = baP$.

Kot sam ključ bi lahko na koncu Alenka in Boris uporabila npr. zadnjih 256 bitov x-koordinate točke abP. Tu se zanašamo na to, da je iz $E, \mathbb{F}q, P, P_a, P_b$ težko izračunati baP. Zelo veliko pa je tu odvisno od same izbire krivulje E.

To nas privede do t. i. problema diskretnega logaritma.

Definicija 3.1. Naj bosta $a, b \in \mathbb{N}$, ter naj bo p praštevilo. Iščemo število k tako, da bo

$$a^k \equiv b \pmod{p}.$$

Trditev 3.2. *Če lahko rešimo problem diskretnega logaritma, potem smo rešili tudi problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev. Povedano drugače velja*

$$DL \Rightarrow DH.$$

Dokaz. Problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev lahko enostavno prevedemo na problem diskretnega logaritma na sledeč način:

- Vzemi aP in izračunaj a tako, da rešiš problem diskretnega logaritma.
- Izračunaj $a(bP)$.

□

3.1 Index Calculus

Naj bo p praštevilo in naj bo g generator ciklične grupe $\mathbb{F}_p^\times$. Naj $L(h)$ označuje vrednost, za katero velja

$$g^{L(h)} \equiv h \pmod{p}.$$

Iz definicije $L(h)$ sledi, da velja

$$L(h_1 h_2) = L(h_1) + L(h_2) \pmod{p}.$$

Idejo napada na problem diskretnega logaritma v taki grupi najlažje vidimo na primeru.

Primer 3.3. Naj bo $p = 1217$ in $g = 3$. Rešiti hočemo $3^k \equiv 37 \mod 1217$. Izberimo si bazo praštevil $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Pri tem upoštevamo, da bo večja baza pomenila več računanja a hkrati lažjo pot do odgovora. Išemo x-e tako, da bo

$$3^x \equiv \pm\text{produktu praštevil iz baze} \mod 1217.$$

Ob iskanju takih x najdemo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned}
3^1 &\equiv 3 \pmod{1217} \\
3^{24} &\equiv -2^2 \cdot 7 \cdot 13 \pmod{1217} \\
3^{25} &\equiv 5^3 \pmod{1217} \\
3^{30} &\equiv -2 \cdot 5^2 \pmod{1217} \\
3^{54} &\equiv -5 \cdot 11 \pmod{1217} \\
3^{87} &\equiv 13 \pmod{1217}
\end{aligned}$$

Z večjo bazo bi v tem primeru lažje našli take enačbe, a bi jih hkrati potrebovali več. Z uporabo malega Fermatovega izreka, velja

$$3^{1216} \equiv 1 \equiv (-1)^2 \mod 1217,$$

od koder sledi $L(-1) \equiv 608 \mod 1216$. Če enačbe sedaj zapišemo z uporabo $L(h)$, dobimo

$$\begin{aligned}
1 &\equiv L(3) \pmod{1216} \\
24 &\equiv 608 + 2L(2) + L(7) + L(13) \pmod{1216} \\
25 &\equiv 3L(5) \pmod{1216} \\
30 &\equiv 608 + L(2) + 2L(5) \pmod{1216} \\
54 &\equiv 608 + L(5) + L(11) \pmod{1216} \\
87 &\equiv L(13) \pmod{1216}
\end{aligned}$$

Od tod bobimo $L(2) = 216, L(11) = 1059, L(7) = 113, L(5) = 819, L(13) = 87, L(3) = 1$. Sedaj poračunamo za različne j vrednost $3^j * 37$, dokler ne dobimo $3^j * 37 \equiv$ produktu elementov iz baze. Pri vrednosti $j = 16$ dobimo

$$3^{16} \cdot 37 \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \pmod{1217}.$$

Iščemo $L(37)$, iz definicije L pa velja

$$3^{L(37)} \equiv 37 \pmod{1217} \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3^{-16} \pmod{1217}.$$

Če sedaj namesto baze vstavimo primerne L dobimo

$$3^{L(37)} \equiv 3^{3L(2)} \cdot 3^{L(7)} \cdot 3^{L(11)} \cdot 3^{-16L(3)} \pmod{1217}.$$

$L(37)$ lahko sedaj zapišemo kot

$$L(37) \equiv 3L(2) + L(7) + L(11) - 16L(3) \pmod{1216} \equiv 588 \pmod{1216}.$$

Torej je naš iskani $k = 588$.

3.2 Index Calculus program

```
import mip
import math
import random
import numpy as np
from base import *


def PrimeSearch(num,mod,base):
    """
    Opis:
        PrimeSearch vrne razcep na prafaktorje iz baze ce
        tak razcep obstaja, v nasprotnem primeru vrne None.

     Definicija:
        PrimeSearch(num,mod,base)

     Vhodni podatki:
        num...stevilo, ki ga hocemo razcepiti na prafaktorje
        mod...modul s katerim delamo
        base...baza prastevil s katerimi delamo

     Izhodni podatek:
        seznam_prafaktorjev ,kjer prvi element pomeni
        ali je spredaj - ali + (ce je element 0
        potem je +, ce je element 1 potem je -)
        ce tak razcep obstaja(npr. [1,2,0,3,1] pri bazi
        [2,3,5,7] pomeni da se to stevilo
        zapise kot -2**2*3**0*5**3*7), sicer None
    """

    factors = [0]*len(base)
    num1 = NumberMod(num,mod)
    Prime = num1.isPrime()
    #ce je stevilo prastevilo pogledamo
    #ce lahko razcepimo stevilo - mod
    if Prime and num1.num not in base:
        num1 = NumberMod(-num,mod)

    stevilo = num1.num
    st = 0
    for el in base:
        while stevilo % el == 0:
            factors[st] += 1
            stevilo = stevilo // el
```

```
            st += 1

        if Prime and num1.num not in base and stevilo == 1:
            odg = [1] + factors
        else:
            odg = [0] + factors

        if (odg != [1] +[0]*len(base) and
            odg != [0]*(len(base)+1) and
            stevilo == 1):
            return odg
        else:
            return None

def FindSystemMod(mod,g,base):
    """
    Opis:
       FindSystemMod vrne sistem enacb, ki jih moramo
       resiti, da resimo problem diksretnega logaritma.

     Definicija:
       FindSystemMod(mod,g,base)

     Vhodni podatki:
       g...generator multiplikativne grupe $\Z_mod$.
       mod...modul s katerim delamo
       base...baza prastevil s katerimi delamo

     Izhodni podatek:
       par (A,b)...A je matrika sistema,
                   b je desna stran sistema
    """
    #kratnik doloca koliko enacb je v sistemu
    #(n pomeni dolzina_baze*n enacb)
    kratnik = 5
    #pove ali dodamo enacbo v sistem ali ne
    dodamo = False
    #pove ali ze imamo pokrite vse spremenljivke
    #z dosedanjimi enacbami
    VSE = False
    #porazdelitev spremenljivk v posameznih
    #enacbah ki smo jih dodali
    mamo = [[0]*len(base) for i in range(kratnik*len(base))]
    #katere spremenljivke smo ze pokrili
    mamoSPR = [0]*len(base)
    st = 0#stevilo dodanih enacb
```

```
A = []
b = []
for i in range(1,mod-1):
    #razcepimo stevilo na faktorje iz baze
    odg = PrimeSearch(g**i,mod,base)
    if odg != None:
        #pogledamo ce smo dobili kaksno
        #novo spremenljivko
        if VSE == False:
            for j in range(1,len(base)+1):
                #zamik zarad += 1 spredi
                if odg[j] != 0 and mamoSPR[j-1] == 0:
                    #ce se nimamo pokrite te
                    #spremenljivke to enacbo
                    #vzamemo
                    mamoSPR[j-1] = 1
                    dodamo = True

        elif VSE and len(A) < kratnik*len(base):
            #nimamo se dovolj velikega sistema
            #preverimo ce tako enacbo ze mamo
            dodamo = True
            tmp = list(map(bool,odg[1:]))
            for k in range(st):
                if mamo[k] == tmp:
                    dodamo = False
        if dodamo:
            mamo[st] = list(map(bool,odg[1:]))
            st += 1
            A.append(odg[1:])
            b.append(i-((mod-1)//2)*odg[0])
            dodamo = False
            if np.prod(mamoSPR) == 1:
                VSE = True


    if (np.prod(mamoSPR) != 0 and
        len(A) >= kratnik*len(base)):
        #prekinemo iskanje ce imamo dovolj enacb
        break


return(A,b)
```

```
def SolveSystemMod(A,b,mod):
    """
Opis:
    SolveSystemMod vrne resitev sistema linearnih enacb
    podanih z matrikama A in b (Ax = b) modulo stevilo mod.
    Metoda za resevanje sistem pretvori v novo obliko tako,
    da vsako vrstico pretvori v novo enacbo in potem
    celotni sistem resi s pomocjo celostevilskega linearnega
    programa iz paketa mip

    Zgled:
        A = [[0   ,1       ,0       ,0       ,0       ,0       ],
             [2   ,0       ,0       ,1       ,0       ,1       ],
             [0   ,0       ,3       ,0       ,0       ,0       ],
             [1   ,0       ,2       ,0       ,0       ,0       ],
             [0   ,0       ,1       ,0       ,1       ,0       ],
             [0   ,0       ,0       ,0       ,0       ,1       ]]
        b = [1,-584,25,-578,-554,87]

        mod = 1216

        posamezno vrstico pretvori tako, da namesto x2 = 1
        dobimo vrstico x2 + mod*X1(dodatna spremenljivka) = 1
        (za vsako vrstico uvedemo novo dodatno spremenljivko)

  Definicija:
    SolveSystemMod(A,b,mod)

  Vhodni podatki:
    A...matrika podana kot [[...],[...],[...],...,[...]]
    b...desna stran sistema podana s seznamom
    mod...modulo glede na katerega resujemo sistem

  Izhodni podatek:
    x  seznam vrednosti resitve sistema
"""
    n =len(A)
    dol_vrstice = len(A[0])
    Kopija = A[:]
    #pretvorimo matriko A v primerno obliko
    for i in range(n):
        tmp = [0]*n
        tmp[i] = mod
        Kopija[i] = Kopija[i] + tmp

    #naredimo linearni program(zanimajo nas samo
```

```
    #spremenljivke, ki predstavljajo bazo,
    #katere omejimo med 0 in mod-1)
    m = mip.Model()
    x = [ m.add_var(var_type=mip.INTEGER,lb=1,ub = mod-1)
          for i in range(dol_vrstice) ]
    #spremenljivk tok kukr jih je v vrstici
    for i in range(n):
        x.append(m.add_var(var_type=mip.INTEGER,lb = -10,ub = 10))
        #dodatna spremenljivka za vsako vrstico posebaj
    m.objective = mip.minimize(
        mip.xsum(0*x[j] for j in range(dol_vrstice)))
    for i in range(n):
        m += mip.xsum(
            Kopija[i][j]*x[j] for j in range(dol_vrstice + n)) == b[i]
    m.optimize()

    #zaokrozimo za lepsi izpis(vcasih
    #lahko pride resitev 0.999999999 namesto 1, kar je isto)
    resitev = [int(round(x[i].x)) for i in range(dol_vrstice)]

    return(resitev)


def IndexCalculus(g,mod,a,base):
    """
    Opis:
        IndexCalculus vrne tak $k$, da velja
        $$g^k \equiv a (mod mod)$$, kjer je g generator
        multiplikativne grupe $\Z_mod$.

        Zgled:
            g = 3
            mod = 1217
            a = 37
            base = [2,3,5,7,11,13]

      Definicija:
        IndexCalculus(g,mod,a,base)

      Vhodni podatki:
        g...generator multiplikativne grupe $\Z_mod$.
        mod...modul s katerim delamo
        a...desna stran problema, ki ga resujemo
        base...baza prastevil s katerimi delamo

      Izhodni podatek:
```

```
    $k$, da velja $$g^k \equiv a (mod mod)$$
    """
    Temp = FindSystemMod(mod,g,base)
    A = Temp[0]
    b = Temp[1]
    resitev = SolveSystemMod(A,b,mod-1)
    k = 0

    for i in range(1,mod-1):
        faktorji = PrimeSearch((g**i)*a,mod,base)
        if faktorji != None:
            k = sum([a*b for a,b in zip(faktorji[1:],resitev)])
            k+=faktorji[0]*((mod-1)//2) -i
            return NumberMod(k,mod-1).num


#primer
base = [2,3,5,7,11,13]
g = 27
mod = 1217
k = IndexCalculus(g,mod,37,base)
```

4 Parjenja

Parjenja imajo pomembno vlogo pri napadih na problem diskretnega logaritma nad gladkimi kubičnimi krivuljami.

Definicija 4.1. *Eliptična* krivulja je gladka kubična krivulja.

Definicija 4.2. Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K, ter naj bo $n \in \mathbb{N}$. *Torizjske točke* so množica

$$E[n] = \{P \in E(\overline{K}) | nP = \infty\}.$$

Izrek 4.3. *Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Če karakteristika polja K ne deli n, ali je enaka 0 potem*

$$E[n] \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$$

Dokaz. Se ne vem kako bo napisan □

Definicija 4.4. Definirajmo *deliteljski polinom* $\gamma_m \in \mathbb{Z}[x, y, A, B]$ kot,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0\\
\gamma_1 &= 1\\
\gamma_2 &= 2y\\
\gamma_3 &= 3x^4 + 6Ax^2 + 12Bx - A^2\\
\gamma_4 &= 4y(x^6 + 5Ax^4 + 20Bx^3 - 5A^2x^2 - 4ABx - 8B^2 - A^3)\\
\gamma_{2m+1} &= \gamma_{m+2}\gamma_m^3 - \gamma_{m-1}\gamma_{m+1}^3 \text{za } m \geq 2\\
\gamma_{2m} &= (2y)^{-1}\gamma_m(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2) \text{za } m \geq 3
\end{aligned}$$

Lema 4.5. *γ_n je element $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$, za vse lihe n. Za sode n pa je γ_n element $2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$.*

Dokaz. Dokažimo to s pomočjo indukcije. Za $n \leq 4$ lema očitno velja. Obravnavajmo primera, ko je $n = 2m$ in $n = 2m + 1$ za nek $m \in \mathbb{N}$.

- n=2m Indukcijska predpostavka je v tem primeru, da lema velja za vse $n < 2m$. Predpostavimo lahko, da je $2m > 4$, saj vemo da lema velja za $n \leq 4$, torej velja $m > 2$. Potem velja $2m > m + 2$, kar pomeni, da vsi polinomi v definiciji γ_{2m} zadoščajo indukcijski predpostavki. Če je m sodo število ,potem se $\gamma m, \gamma m + 2, \gamma m - 2$ nahajajo v $2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$. Od tod pa sledi, da je tudi $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$. Če je m lih, potem sta $\gamma m - 1, \gamma m + 1 \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$. To pa pomeni, da je tudi $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$.

- n=2m+1 Primer obravnavamo podobno kot $n = 2m$.

□

Definicija 4.6. Naj bo K polje in naj bo $n \in \mathbb{N}$ tak, da karakteristika K ne deli n.

$$\mu_n = \{x \in \overline{K} | x^n = 1\}$$

je *grupa n-tih korenov enote* grupe $\overline{K}$.

Trditev 4.7. *Naj bo E eliptična krivulja definirana nad poljem K, in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Predpostavimo, da karakteristika polja K ne deli n. Potem obstaja Weilovo parjenje*

$$e_n : E[n] \times E[n] \to \mu_n,$$

za katerega velja:

- *e_n je bilinearna v obeh spremenljivkah*

  $$e_n(S_1 + S_2, T) = e_n(S_1, T)e_n(S_2, T)$$

  in

  $$e_n(S, T_1 + T_2) = e_n(S, T_1)e_n(S, T_2)$$

  za vse $S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 \in E[n]$.

- e_n *je nedegenerirana v obeh spremenljivkah. To pomeni če je* $e_n(S,T) = 1$ *za vse* $T \in E[n]$ *potem* $S = \infty$*, ter obratno.*
- $e_n(T,T) = 1$ *za vse* $T \in E[n]$
- $e_n(T,S) = e_n(S,T)^{-1}$ *za vse* $S,T \in E[n]$
- $e_n(\rho S, \rho T) = \rho(e_n(S,T))$ *za vse avtomorfizme* ρ *iz* $\bar{K}$*, za katere je* ρ *identiteta na koeficientih* E*.*
- $e_n(\alpha(S), \alpha(T)) = e_n(S,T)^{deg(\alpha)}$ *za vse separabilne endomorfizme* α *polja* E*.*

Dokaz. Naj bo $T \in E[n]$. Po izreku 6.9 obstaja funkcija f, tako da velja

$$div(f) = n[T] - n[\infty]. \tag{4.1}$$

To drži ker je $D = n[T] - n[\infty]$ delitelj za katerega velja $deg(D) = 0$. Prav tako pa velja $sum(D) = \infty$, ker se nahajamo v $E[n]$. Izberimo sedaj še točko $T' \in E[n^2]$, za katero velja $nT' = T$. Pokazati želimo, da obstaja funkcija g, tako da velja

$$div(g) = \sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R]).$$

Preden lahko uporabimo izrek 6.9 moramo preveriti, da vse potrebne lastnosti držijo. Veljati mora torej

$$sum(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \infty$$

in

$$deg(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = 0.$$

Po izreku 4.3, se da $E[n]$ zapisati kot $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$. To pomeni, da $E[n]$ vsebuje n^2 različnih točk R. Velja torej

$$sum(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \sum_{R \in E[n]} T' + R - R = \sum_{R \in E[n]} T' = n^2 T' = nT = \infty.$$

Podobno preverimo, še da velja $deg(\sum_{R \in E[n]}([T' + R] - [R])) = 0$. Torej po izreku 6.9 taka funkcija g obstaja. Označimo z $f \circ n$ funkcijo, ki začne z neko točko jo pomnoži z n in nato na njej uporabi f. Točke $P = T' + R$, kjer je $R \in E[n]$ so točke za katere velja $nP = T$. Iz 4.1 sledi

$$div(f \circ n) = n(\sum_{R \in E[n]} [T' + R]) - n(\sum_{R \in E[n]} [R]) = div(g^n).$$

Iz definicije delitelja funckije sledi, da je funkcija $f \circ n$ oblike g^n krat neka konstanta. Če za nov f vzamemo ta f pomnožen s primerno konstanto potem lahko predpostavimo, da velja

$$f \circ n = g^n.$$

Naj bo $S \in E[n]$, ter naj bo $P \in E(\overline{K})$. Potem velja

$$g(P+S)^n = f(n(P+S)) = f(nP) = g(P)^n.$$

Zaradi tega velja $g(P+S)/g(P) \in \mu_n$. Tako lahko sedaj definiramo Weilovo parjenje kot

$$e_n(S,T) = \frac{g(P+S)}{g(P)}.$$

Ta definicija je dobra, ker je g zaradi delitelja določen do skalarja natančno, zaradi tega pa je definicija neodvisna od izbire g. Prav tako pa je definicija noedvisna od izbire P, a je obrazložitev bolj zahtevna in je ne bomo navedli.

Sedaj, ko smo uspeli definirati Weilovo parjenje moramo preveriti, da zanj veljajo lastnosti 1-6.

1. Ker je definicija neodvisna od izbire točke P lahko uporabimo $P, P+S_1$.

$$\begin{aligned} e_n(S_1,T)e_n(S_2,T) &= \frac{g(P+S_1)}{g(P)}\frac{g(P+S_1+S_2)}{g(P+S_1)} \\ &= \frac{g(P+S_1+S_2)}{g(P)} \\ &= e_n(S_1+S_2,T). \end{aligned}$$

   Pokazati moramo še

$$e_n(S,T_1)e_n(S,T_2) = e_n(S,T_1+T_2).$$

   Dokaz linearnosti v drugi spremenljivki pa je malce težji kot dokaz za prvo spremenljivko. Predpostavimo da $T_1, T_2, T_3 \in E[n]$ z lastnostjo $T_1 + T_2 = T_3$. Označimo z f_i, g_i funkcije ki spdajo k definicijam $e_n(S,T_i)$. Po izreku 6.9 obstaja funkcija h, za katero velja

$$div(h) = [T_3] - [T_1] - [T_2] + [\infty].$$

   Enačba 4.1 nam da

$$div\left(\frac{f_3}{f_1 f_2}\right) = ndiv(h) = div(h^n).$$

   Zato obstaja konstanta $c \in \overline{K}^\times$, tako da velja

$$f_3 = c f_1 f_2 h^n.$$

   Od tod pa sledi

$$g_3 = c^{1/n}(g_1)(g_2)(h \circ n)$$

   .

   To pa nas končno pripelje do

$$\begin{aligned} e_n(S,T_1+T_2) = \frac{g_3(P+S)}{g_3(P)} &= \frac{g_1(P+S)}{g_1(P)}\frac{g_2(P+S)}{g_2(P)}\frac{h(n(P+S))}{h(nP)} \\ &= e_n(S,T_1)e_n(S,T_2). \end{aligned}$$

   Tu smo upoštevali $nS = \infty$, od koder sledi $h(n(P+S)) = h(nP)$.

2. Predpostavimo, da $T \in E[n]$, tak da velja $e_n(S,T) = 1$ za vse $S \in E[n]$. To pomeni, da je $g(P+S) = g(P)$ za vse P in $S \in E[n]$. Po trditvi **??**obstaja funkcija h, tako da velja $g = h \circ n$. Od tod sledi

$$(h \circ n)^n = g^n = f \circ n.$$

Ker je množenje z n surjektivno na $E(\overline{K})$, od tod sledi $h^n = f$. To pa pomeni

$$ndiv(h) = div(f) = n[T] - n[\infty],$$

kar pa pomeni, da je $div(h) = [T] - [\infty]$. Po izreku 6.9 pa od tod sledi $T = \infty$. S tem smo, dokazali eno polovico točke 2, druga polovica pa avtomatično sledi iz tega ter uporabe točke 4.

3. Označimo z τ_{jT} točko jT. V tem primeru $f \circ \tau_{jT}$ označuje funkcijo $P \mapsto f(P + jT)$. Delitelj te funkcije je torej $n[T - jT] - n[-jT]$. Zaradi tega velja

$$\begin{aligned} div(\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}) &= \sum_{j=0}^{n-1} (n[(1-j)T] - n[-jT]) \\ &= n[T] - n[-T] + n[-T] - n[-2T] + \cdots + n[(-n+2)T] - n[(-n+1)T] \\ &= n[T] - n[(-n+1)T] = n[T] - n[-nT+T] = n[T] - n[\infty + T] \\ &= n[T] - n[T] = 0 \end{aligned}$$

To pomeni, da je funkcija $\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}$ konstantna. N-ta potenca funkcije $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$ pa je ravno produkt f komponirane z n.

$$\begin{aligned} (\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'})^n &= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ n \circ \tau_{jT'} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT} \end{aligned}$$

To pa tudi pomeni, da je funkcija $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$ konstantna. To pa pomeni, da lahko namesto točke P vanjo vstavimo točko $P + T'$ in dobimo

$$\prod_{j=0}^{n-1} g(P + T' + jT') = \prod_{j=0}^{n-1} g(P + jT').$$

Ko pokrajšamo stavri na levi in desni strani, dobimo

$$g(P + nT') = g(P).$$

Ker pa velja $nT' = T$, to ravno pomeni

$$e_n(T,T) = \frac{g(P+T)}{g(P)} = 1.$$

4. Iz točke 1 in 3 sledi

$$\begin{aligned} 1 &= e_n(S+T, S+T) = e_n(S,S)e_n(S,T)e_n(T,S)e_n(T,T) \\ &= e_n(S,T)e_n(T,S). \end{aligned}$$

5. MANKA

6. MANKA

   To pa pomeni $e_n(T,S) = e_n(S,T)^{-1}$.

□

Posledica 4.8. *Naj bosta T_1, T_2 baza $E[n]$. Potem je $e_n(T_1, T_2)$ generator grupe μ_N.*

Dokaz. Vemo, da za poljubni točki T_1, T_2 velja $e_n(T_1,T_2)^n = 1$, ker se slika parjenja nahaja v grupi n-tih korenov enote. Pokazati moramo torej, da če za neko število d velja $e_n(T_1,T_2)^d = 1$ potem od tod sledi, da je $d \geq n$. Recimo torej, da je $e_n(T_1,T_2) = \zeta$, kjer velja $\zeta^d = 1$. Po točki ena trditve 4.7 velja

$$e_n(T_1, dT_2) = e_n(T_1,T_2)^d = 1.$$

Prav tako velja $e_n(T_2, dT_2) = e_n(T_2,T_2)^d = 1$. Naj bo $S \in E[n]$, potem se S izraža kot $S = aT_1 + bT_2$ za neka $a, b \in \mathbb{N}$. S ponovno uporabo trditve 4.7 vidimo, da velja

$$e_n(S, dT_2) = e_n(T_1, dT_2)^a e_n(T_2, dT_2)^b = 1.$$

Ker to valja za vsak S po točki dva trditve 4.7 sledi, da je $dT_2 = \infty$. To pa je mogoče le če $n|d$, kar pomeni da je $n \leq d$. □

4.1 Učinkovit algoritem za izračun Weilovega parjenja

Leta 1986 je Vicor Miller napisal članek o tem, kako učinkovito izračunati Weilovo parjenje. Članek ni bil nikoli objavljen.

Izrek 4.9. *Naj bo E eliptična krivulja in naj bosta $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$ ne ničelni točki na E.*

1. *Označimo z λ naklon premice, ki povezuje točki P, Q. V primeru, da sta ti točki enaki, λ predstavlja naklon tangente v točki. Če je premica navpična ($x_P = x_Q$), potem privzamemo, da je $\lambda = \infty$. Definirajmo funkcijo $g_{P,Q}$ na sledeči način:*

$$g_{P,Q} = \begin{cases} \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2} & \text{če } \lambda \neq \infty, \\ x - x_P & \text{sicer.} \end{cases}$$

   Potem velja

$$div(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P+Q] - [\infty].$$

2. (Millerjev algoritem) Naj bo $m \geq 1$. Zapišimo m v binarnem kot

$$m = m_0 + m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2^2 + \ldots + m_{n-1} \cdot 2^{n-},$$

kjer so $m_i \in \{0, 1\}$ in $m_{n-1} \neq 0$. Potem algoritem 2 vrne funckijo f_P, za katero velja

$$div(f_P) = m[P] - [mP] - (m-1)[\infty].$$

Algoritem 2 Millerjev algoritem

```
T = P,f = 1
for i = n − 2 : 0 do
    f = f^2 · g_{T,T}
    T = 2T
    if m_i = 1 then
        f = f · g_{T,P}
        T = T + P
    end if
end for
```

Dokaz. 1. Predpostavimo najprej, da $\lambda \neq \infty$, ter naj $y = \lambda x + \mu$ predstavlja premico skozi P, Q (ali tangento v primeru, da je $P = Q$). Taka premica seka krivuljo E v treh točkah $P, Q, -P - Q$. To sledi iz sestave grupe nad E. Za to premico torej velja

$$div(y - \lambda x - \mu) = [P] + [Q] + [-P - Q] - 3[\infty].$$

Navpične premice pa sekajo E neki točki P in $-P$. Torej velja

$$div(x - x_{P+Q}) = [P + Q] + [-P - Q] - 2[\infty].$$

Od tod sledi, da ima funkcija

$$g_{P,Q} = \frac{y - \lambda x - \mu}{x - x_{P+Q}}$$

željeni delitelj

$$div(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P + Q] - [\infty].$$

Z uporabo formule za seštevanje točk sedaj lahko to funkcijo problikujemo v željeno obliko

$$g_{P,Q} = \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2}.$$

V primeru da velja $\lambda = \infty$, potem velja $P + Q = \infty$. V tem primeru hočemo imeti delitelj oblike $div(g_{P,Q}) = [P] + [-P] - 2[\infty]$. Tak delitelj pa ima ravno funkcija $x - x_P$.

2. Dokažemo s pomočjo indukcije, pri čemer upoštevamo $div(g_{T,T}) = 2[T]-[2T]-[\infty]$, $div(g_{T,P}) = [T]+[P]-[T+P]-[\infty]$. Preverimo, na primeru $m = 3$. binarni zapis m je torej 11.Sledimo korakom algoritma 2.

$$f = f^2 \cdot g_{T,T} = g_{P,P}$$

Ker je v tem primeru $m_0 = 1$ moramo f popraviti v $f = f \cdot g_{T,P}$. To nam da

$$f = g_{P,P} \cdot g_{2T,P}.$$

Če uporabimo sedaj zgornji zvezi dobimo

$$div(f) = 2[P]-[2P]-[\infty]+[2P]+[P]-[2P+P]-[\infty] = 3[P]-[3P]-2[\infty].$$

To pa je ravno to kar želimo.

□

S pomočjo izreka 4.9 lahko sedaj izračunamo Weilovo parjenje $e_m(P,Q)$ kot

$$e_m(P,Q) = (f_P(Q+S)/f_P(S))/(f_Q(P-S)/f_Q(-S)).$$

Tu moramo za točko S izbrati $S \notin \{\infty, P, -Q, P-Q\}$.

4.2 Implementacija Millerjevega algoritma

```
from base import *


def naklon(P,Q):
    """
    Opis:
        Funkcija naklon izracuna naklon premice med tockama
        P in Q, ki lezita na elipticni krivulji

     Definicija:
        naklon(P,Q)

     Vhodni podatki:
        P... razred Point, ki predstavlja tocko na
             elipticni krivulji
        Q... razred Point, ki predstavlja tocko na
             elipticni krivulji

     Izhodni podatek:
        stevilo po modolu P.mod, ki predstavlja naklon
    """
    mod = P.mod
    if P == Q:
```

```
        st = (3*(P.x**2)+P.a) % mod
        im = NumberMod(2*(P.y),mod).inverse().num
        rez = (st*im) % mod
        return rez
    else:
        st = (Q.y-P.y) % mod
        im = NumberMod(Q.x-P.x,P.mod).inverse().num
        rez = (st*im) % mod
        return rez



def g(P,Q,X):
    """
    Opis:
        Funkcija g del funkcije potrebne za izracun Weilovega
        parjenja, s pomocjo Millerjevega algoritma.
        Funkcija izracuna funkcijo $g_{P,Q}(X)$

     Definicija:
        g(P,Q,X)

     Vhodni podatki:
        P...razred Point, ki predstavlja tocko na
            elipticni krivulji
        Q...razred Point, ki predstavlja tocko na
            elipticni krivulji
        X...razred Point, ki predstavlja tocko na
            elipticni krivulji

     Izhodni podatek:
        stevilo, ki predtavlja vrednost $g_{P,Q}(X)$
    """
    if P.x == Q.x and P.y != Q.y:
        rez = (X.x-P.x) % P.mod
        return rez
    else:
        #lambda je naklon premice
        lam = naklon(P,Q)
        st = (X.y-P.y-lam*(X.x-P.x)) % P.mod
        im = NumberMod(X.x+P.x+Q.x-lam**2,P.mod)
        im = im.inverse().num
        rez = (st*im) % P.mod
        return rez

def Miller(P,X,m):
```

```
    """
    Opis:
        Funkcija Miller je implementacija Millerjevega
        algoritma potrebnega za izracun Weilovega
        parjenja. Ce je
        $$e_m(P,Q)=(f_P(Q+S)/f_P(S))/(f_Q(P-S)/f_Q(-S))$$
        potem funkcija Miller predstavlja izracun
        vrednosti $f_P(X)$.

      Definicija:
        Miller(P,X,m)

      Vhodni podatki:
        P...razred Point, ki predstavlja tocko na
            elipticni krivulji
        X...razred Point, ki predstavlja tocko na
            elipticni krivulji
        m...red tocke P

      Izhodni podatek:
        vrednost funkcije $f_P(X)$
    """
    binarno = bin(m)[2:]
    #vrne niz porezemo 0b na zacetku niza
    n = len(binarno)
    T = P
    f = 1
    for i in range(1,n):
        f = (f**2 * g(T,T,X)) % P.mod
        T = 2*T
        if int(binarno[i]) == 1:
            f = (f* g(T,P,X)) % P.mod
            T = T + P
    return f


def WeilPairing(P,Q,S,N):
    """
    Opis:
        Funkcija WeilPairing je implementacija Weilovega
        parjenja $e_N(P,Q)$, kjer je
        $$e_N(P,Q)=(f_P(Q+S)/f_P(S))/(f_Q(P-S)/f_Q(-S))$$

      Definicija:
        WeilPairing(P,Q,S,N)
```

```
    Vhodni podatki:
      P...razred Point, ki predstavlja tocko na
          elipticni krivulji
      Q...razred Point, ki predstavlja tocko na
          elipticni krivulji
      S...razred Point, ki predstavlja tocko, ki
          ni v podgrupi generirani z P,Q
      N...red tocke P

    Izhodni podatek:
      int k, ki predstavlja red tocke P (kP = $\infty$)
    """

    fpQS = Miller(P,Q+S,N)
    fpS = Miller(P,S,N)
    fqPS = Miller(Q,P-S,N)
    fqS = Miller(Q,-S,N)

    fpS = NumberMod(fpS,P.mod).inverse().num
    eN1 = (fpQS * fpS) % P.mod

    fqS = NumberMod(fqS,P.mod).inverse().num
    eN2 = (fqPS * fqS) % P.mod
    eN2 = NumberMod(eN2,P.mod).inverse().num

    eN  = (eN1*eN2) % P.mod

    return eN


P = Point(30,34,631,617,5)
Q = Point(30,34,631,121,244)
S = Point(30,34,631,0,36)

eN = WeilPairing(P,Q,S,5)
```

5 MOV

MOV napad s pomočjo Weilovega parjenja pretvori problem diskretnega logaritma iz $E(\mathbb{F}q)$ v problem diskretnega logaritma nad $\mathbb{F}_{q^m}^{\times}$. Na ta način se izognemo težji strukturi grupe. Nov problem diskretnega logaritma pa lahko sedaj rešimo z različnimi napadi, med drugim tudi z napadom Index-Calculus 3.1. MOV napad deluje če velikost polja $\mathbb{F}q^m$ ni dosti večja od velikosti polja $\mathbb{F}q$. Postopek napada sledi poteku dokaza naslednje trditve.

Trditev 5.1. *Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}q$. Naj bosta $P, Q \in E(\mathbb{F}q)$, ter naj bo N red točke P. Predpostavimo, da velja $gcd(N, q) = 1$. Potem obstaja tako število*

k, da velja $Q = kP$ natanko tedaj ko $NQ = \infty$ in $e_N(P, Q) = 1$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Če je $Q = kP$, potem je $NQ = kNP$, ampak ker je red P enak N od tod sledi $kNP = \infty$. Prav tako

$$e_n(P, Q) = e_n(P, P)^k = 1^k = 1.$$

($\Leftarrow$) Naj bo $NQ = \infty$, torej je po definiciji $Q \in E[N]$. Ker je $\gcd(N, q) = 1$ lahko uporabimo izrek 4.3 in zapišemo $E[N] \cong \mathbb{Z}_N \oplus \mathbb{Z}_n$. Sedaj izberemo točko R tako, da je $\{P, R\}$ baza $E[N]$. Ker sta P, R baza lahko Q zapišemo kot

$$Q = aP + bR,$$

za neki števili $a, b \in \mathbb{N}$. Po posledici definicije Weilovega parjenja 4.8 velja $e_N(P, R) = \zeta$ je generator μ_N. Po predpostavki velja $e_N(P, Q) = 1$ dobimo torej

$$1 = e_N(P, Q) = e_N(P, P)^a e_N(P, R)^b = \zeta^b.$$

Od tod sledi, da je b večkratnik števila N, od tod pa po definiciji sledi $bR = \infty$, ter $Q = aP$. □

Ideja dokaza nam sedaj, da korake MOV napada.

Algoritem 3 MOV napad

Izberi m tako, da

$$E[N] \subset E(\mathbb{F}q^n).$$

Ker imajo vse točke $E[N]$ koordiante v $\bar{\mathbb{F}}q = \cup_{j \geq 1} \mathbb{F}_{q^j}$ tak m obstaja. Prav tako je μ_N v $\mathbb{F}q^m$. Nato postopaj po naslednjih korakih.

1. Izberi točko $T \in E(\mathbb{F}q^m)$.
2. Izračunaj red M točke T.
3. Naj bo $d = \gcd(M, N)$ in naj bo $T_1 = (M/d)T$. Potem ima T_1 red, ki deli N, torej je $T_1 \in E[N]$.
4. Izračunaj $\zeta_1 = e_N(P, T_1)$ in $\zeta_2 = e_N(Q, T_1)$. Tu sta ζ_1 in ζ_2 v $\mu_d \subset \mathbb{F}_{q^m}^{\times}$.
5. Reši problem diskretnega logaritma $\zeta_2 = \zeta_1^k$ v $\mathbb{F}_{q^m}^{\times}$. To nam da $k \mod d$.
6. Ponovi korake 1-5 za različnke točke T dokler ni k določen.

MOV napad deluje hitreje, kot če hočemo rešiti porblem diskretnega algoritma direktno nad krivuljo, če velja

$$k > log^2(p),$$

kjer je krivulja $E(\mathbb{F}_p)$ in MOV pretvori to grupo v $\mathbb{F}_{p^k}^{\times}$.

Preden pa lahko podamo podrobnejši algoritem, moramo razrešiti še nekaj vprašanj. Kako izračunamo red točke na nek ekonomičen način? Trenutno je najhitrejši algoritem za izračun reda točke Schoof–Elkies–Atkinsonov algoritem (SEA). Tu pa si bomo pogledali malo bolj preprost algoritem, ki pa vseeno predstavlja veliko izboljšanje glede na naiven pristop seštevanja točke same s seboj.

5.1 Mali korak, Velik korak

Naj bo $P \in E(\mathbb{F}q)$. Radi bi izračunali red točke P. Iščemo torej tako število k, da bo veljalo $kP = \infty$. Algoritem Mali korak, Velik korak lahko izračuna red točke v približno $4q^{\frac{1}{4}}$ korakih. Koraki algoritma so sledeči:

Algoritem 4 Mali korak, Velik korak

1. Izračunaj $Q = (q+1)P$.
2. Izberi število m za katero velja $m > q^{\frac{1}{4}}$. Za $j = 0, 1, \ldots, m$ izračunaj in shrani jP.
3. Za $k = -m, -m+1, \ldots, m-1, m$ izračunaj točke $Q + k(2mP)$. V primeru, da se kakšna od teh točk ujema z $\pm jP$ prekini računanje in si zapomni ustrezna k, j.
4. Izračunaj $(q + 1 + 2mk \mp j)P$ in poglej v katerem primeru je to enako ∞. V tem primeru naj bo $M = (q + 1 + 2mk \mp j)$.
5. Faktoriziraj M. Označimo faktorje števila M z $p_1, \ldots, p_r$.
6. Izračunaj $(M/p_i)P$, za $i = 1, \ldots r$. Če je $(M/p_i)P = \infty$ za nek i, potem zamenjaj M z M/p_i in pojdi nazaj na korak (5). V nasprotnem primeru je M red točke P.

Opomba 5.2. Algoritem 4 lahko preoblikujemo do te mere, da namesto reda točke izračunamo število točk na krivulji. Vse kar moramo narediti, je ponavljati korake (1)-(6) za naključno izbrane točke $P \in E(\mathbb{F}q)$. Ustavimo se ko najmanjši skupni večkratnik redov točk, deli le eno število N v območju $q+1-2\sqrt{q} \leq N \leq q+q+2\sqrt{q}$. To število N je potem število točk na dani krivulji. Pri tem postopku se upremo na Hassejev izrek o številu točk na eliptični krivulji.

Tu se sedaj pojavi še vprašanje zakaj ta algoritem deluje. Odgovor na to vprašanje pa nam da naslednja lema.

Lema 5.3. *Naj bo G aditivna grupa in naj bo $g \in G$. Denimo da velja $Mg = 0$ za nek $M \in \mathbb{N}$. Označimo z $p_1, \ldots, p_r$ različna prešttevila, ki delijo M. Če velja $(M/p_i)g \neq= 0$ za vse i, potem je M red g.*

Dokaz. Naj bo k red $g \in G$. Ker velja $Mg = 0$ vemo, da $k|M$. Denimo, da $k \neq M$. Pokazati moramo, da obstaja praštevilo p_i, tako da $(M/p_i)g = 0$. Naj bo p_i praštevilo, ki deli M/k. Tako število obstaja, ker $M \neq k$. Potem velja $p_i k|M$, to pa pomeni da $k|(M/p_i)$. Ker pa je k red elementa g, to pomeni $(M/p_i)g = 0$.

□

6 Delitelji

Definicija 6.1. Naj bo K polje in naj bo $P \in E(\overline{K})$. Za vsako točko P definirajmo formalen simbol $[P]$. *Delitelj* D na krivulji E je končna linearna kombinacija takih

simbolov z celoštevilskimi koeficienti.

$$D = \sum_j a_j[P_j],\ a_j \in \mathbb{Z}$$

Iz same definicije sledi, da je delitelj element Abelove grupe generirane s simboli $[P]$. Označimo to grupo z $\mathrm{Div}(E)$.

Definicija 6.2. Definirajmo *vsoto* in *stopnjo* delitelja kot

$$sum(\sum_j a_j[P_j]) = \sum_j a_j P_j \ \in E(\overline{K}),$$

$$deg(\sum_j a_j[P_j]) = \sum_j a_j \ \in \mathbb{Z}.$$

Definicija 6.3. Naj bo E eliptična krivulja. *Funkcija* na E je racionalna funkcija

$$f(x,y) \in \overline{K},$$

ki je definirana za vsaj eno točko na $E(\overline{K})$. Funkcija torej zavzame vrednosti v $\overline{K} \cup \infty$.

Opomba 6.4. Naj bo E podana z enačbo $y^2 = x^3 + Ax + B$. Racionalna funkcija $\frac{1}{y^2 - x^3 - Ax - B}$ torej ne predstavlja funkcije.

Trditev 6.5. *Obstaja taka funkcija u_P, imenovana* uniformizer *v točki P z lastnostjo $u_P(P) = 0$, ter lastnostjo, da se da vsaka funckijca $f(x,y)$ zapisati kot*

$$f = u_P^r g,\ r \in \mathbb{Z}, g(P) \neq 0, \infty.$$

Definirajmo red *funckije f v točki P kot*

$$ord_P(f) = r.$$

Primer 6.6. Naj bo $y^2 = x^3 - x$ eliptična krivulja, naj bo $f(x,y) = x$. Izberimo $u(x,y) = y$. Očitno je $u(0,0) = 0$. Nad eliptično krivuljo velja

$$y^2 = x^3 - x = x(x^2 - 1),$$

od tod sledi $x = y^2 \frac{1}{x^2 - 1}$ nad E. Prav tako velja $1/(x^2 - 1) \neq 0$ v točki $(0,0)$. Od tod sledi, da je

$$ord_{(0,0)}(x) = 2, ord_{(0,0)}(x/y) = 1.$$

Definicija 6.7. Naj bo f funkcija nad E, ki ni indentično enaka 0. Definirajmo *delitelja* funkcije f kot,

$$div(f) = \sum_{P \in E(\overline{K})} ord_P(f)[P] \in \mathrm{Div}(E).$$

Trditev 6.8. *Naj bo E eliptična krivulja in naj bo f funkcija na E, ki ni identično enaka* 0. *Potem veljajo naslednje trditve:*

- *f ima le končno mnogo ničel in polov*
- *$deg(div(f)) = 0$*
- *Če f nima ničel ali polov, potem je f konstantna.*

Izrek 6.9. *Naj bo E eliptična krivulja. Naj bo D delitelj nad E z $deg(D) = 0$. Potem obstaja taka funkcija f na E z lastnostjo*

$$div(f) = D$$

natanko tedaj ko

$$sum(D) = \infty.$$

Dokaz. Pokažimo najprej, da se da $[P_1]+[P_2]$ zapisati kot $[P_1+P_2]+[\infty]$ plus delitelj neke funkcije. Recimo, da imamo tri točke P_1, P_2, P_3 na neki krivulji E, ki ležijo na premici $ax+by+c=0$. Naj bo $f(x,y) = ax+by+c$. Potem ima funkcija f ničle v točkah P_1, P_2, P_3. Če b ni enak 0 potem ima funkcija po trditvi 6.8 trojni pol v ∞. Velja torej

$$div(ax+by+c) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[\infty].$$

Ker se nahajamo na Weierstrassovi krivulji, kjer točko $-P$ dobimo tako, da samo zamenjamo predznak y-koordinate, lahko za premico skozii točki $P_3 = (x_3, y_3)$, ter $-P_3 = (x_3, -y_3)$ vzamemo $x - x_3 = 0$. Po trditvi 6.8 ponovno velja

$$div(x - x_3) = [P_3] + [-P_3] - 2[\infty].$$

Od tod sledi

$$div\left(\frac{ax+by+c}{x-x_3}\right) = div(ax+by+c) - div(x-x_3) = [P_1] + [P_2] - [-P_3] - [\infty].$$

Ker na krivulji velja $P_1 + P_2 = -P_3$ (to sledi iz načina kako na krivulji seštevamo točke), lahko zgornjo enačbo prepišemo v

$$[P_1] + [P_2] = [P_1 + P_2] + [\infty] + div(g).$$

Hitro se vidi, da velja

$$sum(div(g)) = P_1 + P_2 - (P_1 + P_2) - \infty = \infty.$$

Prav tako, pa se iz zgornje enačbe vidi, da velja $[P_1] + [P_2] = 2[\infty] + div(h)$, če velja $P_1 + P_2 = \infty$. Zaradi tega je vsota vseh členov s pozitivnimi koeficienti v D enaka nekemu simbolu $[P]$, večkratniku $[\infty]$, ter delitelju neke funkcije. Podobno velja tudi za člene z negativnimi koeficienti. Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + n[\infty] + div(g_1).$$

Zaradi tega, ker je g_1 kvocient produkta funkcij, ki sestavljajo g, velja tudi $sum(div(g_1)) = \infty$. Po trditvi 6.8 velja $deg(div(g_1)) = 0$, ker funkcija ni konstantna. Imamo torej

$$0 = deg(D) = 1 - 1 + n + 0 = n.$$

Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + div(g_1).$$

Prav tako velja

$$sum(D) = P - Q + sum(div(g_1)) = P - Q.$$

Predpostavimo sedaj, da velja $sum(D) = \infty$. Potem $P - Q = \infty$, kar pomeni da mora veljati $P = Q$ in $D = div(g_1)$. Če predpostavimo $D = div(f)$ za neko funkcijo f, potem

$$[P] - [Q] = div(f/g_1).$$

Od tod po lemi 6.10 sledi $P = Q$ in torej $sum(D) = \infty$.

□

Lema 6.10. *Naj bosta $P, Q \in E(\overline{K})$, ter naj obstaja funkcija h na E za katero velja*

$$div(h) = [P] - [Q].$$

Potem sledi $P = Q$.

[4] [3] [2] [1]

Literatura

[1] H. Jeffrey, P. Jill in J. H. Silverman, *An Introduction to Mathematical Cryptography*, Springer, 2008.

[2] V. S. Miller, *Short Programs for functions on Curves.*

[3] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, second edition izd., 2009.

[4] L. C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography*, Chapman and Hall/CRC, second edition izd., 2008.