

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Miha Avsec

# KUBIČNE KRIVULJE V KRIPTOGRAFIJI

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Anita Buckley

Somentor: pred. mag. Matjaž Praprotnik

Ljubljana, 2019



# Zahvala

Neobvezno. Zahvaljujem se . . .



# Kazalo

|  |            |
|--|------------|
| <b>Program dela</b>  | <b>vii</b> |
| <b>1 Uvod</b>  | <b>1</b>   |
| <b>2 Končna polja</b>  | <b>1</b>   |
| <b>3 Kubične krivulje</b>  | <b>2</b>   |
| 3.1 Točke na krivulji . . . . .  | 2          |
| 3.2 Struktura grupe na kubičnih krivuljah . . . . .                            | 5          |
| 3.3 Frobeniusev endomorfizem . . . . .   | 9          |
| 3.4 Red grupe nad eliptičnimi krivuljami . . . . .                             | 11         |
| <b>4 Diffie-Hellmanova izmenjava ključev nad gladkimi kubičnimi krivuljami</b> | <b>13</b>  |
| 4.1 Index Calculus . . . . .   | 15         |
| 4.2 Index Calculus program . . . . .   | 16         |
| <b>5 Parjenja</b>  | <b>21</b>  |
| 5.1 Učinkovit algoritem za izračun Weilovega parjenja . . . . .                | 27         |
| 5.2 Implementacija Millerjevega algoritma . . . . .                            | 29         |
| <b>6 MOV</b>   | <b>33</b>  |
| 6.1 Mali korak, Velik korak . . . . .  | 34         |
| <b>7 Anomalne krivulje</b>   | <b>35</b>  |
| <b>8 Delitelji</b>   | <b>39</b>  |
| <b>9 Kriptografija nad Eliptičnimi krivuljami</b>                              | <b>42</b>  |
| 9.1 ElGamalova enkripcija . . . . .  | 42         |
| 9.2 Kriptosistemi nad parjenji . . . . .                                       | 43         |
| <b>Literatura</b>  | <b>45</b>  |



## Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [?], [?], [?], [?].

## Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[?]

[?]

[?]

[?]

Podpis mentorja:





## Kubične krivulje v kriptografiji

### POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

### English translation of the title

### ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2010):** oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu <http://www.ams.org/msc/msc2010.html?t=65Mxx>

**Ključne besede:** kubična krivulja , kriptografija , ...

**Keywords:** cubic curve , cryptography



# 1 Uvod

Kubične krivulje se v kriptografiji uporabljajo, ker zagotavljajo isto varnost, kot drugi klasični kriptosistemi, pri tem pa potrebujejo manjšo velikost ključa. Ocenjuje se, da je 2048 bitni ključ v RSA algoritmu enako varen kot 224 bitni ključ nad kubičnimi krivuljami. Krajši ključ predstavlja veliko prednost v okoljih s slabšo procesorsko močjo in/ali omejenim pomnilnikom. Primer take uporabe predstavljajo pametne kartice. Uporaba kubičnih krivulj v namene kriptografije je prvi predlagal Victor S. Miller leta 1985, a so le te v širšo rabo vstopile še le okoli leta 2004.

## 2 Končna polja

Končna polja ali Galoisova polja, so polja s končnim številom elementov. Najpogostejši primer takih polj so število modulo  $p$ , kjer je  $p$  praštevilo. Polje z  $q$  elementi označimo z  $\mathbb{F}_q$ . Poglejmo si nekaj pomembnih lastnosti takih polj.

**Trditev 2.1.** *Naj bo  $p$  praštevilo, potem veljajo naslednje lastnosti.*

- *Končno polje reda  $q$  obstaja natanko tedaj, ko velja  $q = p^k$ , za nek  $k \in \mathbb{N}$ .*
- *Vsa končna polja reda  $q$  so si izomorfna.*
- *Vsak element polja  $\mathbb{F}_q$  zadošča enačbi  $x^q - x = 0$ .*
- *Multiplikativna grupa končnega polja je ciklična.*

Tekom magistrskega dela bomo večkrat delali v poljih katerih število elementov je potenca praštevila. Poglejmo si kako konstruiramo polje z  $q = p^n$  elementi.

Najprej si izberemo nerazcepni polinom  $P$  v  $\mathbb{F}_p[X]$  stopnje  $n$ . Potem velja, da je kvocientni prostor

$$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(P)$$

polinomov nad  $\mathbb{F}_p$  z idealom generiranim z  $P$ , polje reda  $q$ . Bolj natančno so torej elementi  $\mathbb{F}_q$  polinomi nad poljem  $\mathbb{F}_p$  stopnje strogo manjše, kot  $n$ . Seštevanje in odštevanje poteka na standardni način. Produkt dveh elementov dobimo, kot ostanek pri deljenju z  $P$  produkta polinomov v  $\mathbb{F}_p[X]$ . Invezne elemente pa lahko poiščemo s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma.

**Primer 2.2.** Poglejmo si polje  $\mathbb{F}_4$ . Vzemimo nerazcepni polinom

$$X^2 + X + 1.$$

Velja torej

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1) = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\},$$

kjer je  $\alpha$  ničla zgornjega polinoma v  $\mathbb{F}_4$ . Vse operacije na elementih  $\mathbb{F}_4$  bi lahko zapisali s tabelami

| +          | 0          | 1          | $\alpha$   | $1+\alpha$ | $\times$   | 0 | 1        | $\alpha$   | $1+\alpha$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---|----------|------------|------------|
| 0          | 0          | 1          | $\alpha$   | $1+\alpha$ | 0          | 0 | 0        | 0          | 0          |
| 1          | 1          | 0          | $1+\alpha$ | $\alpha$   | 1          | 0 | 1        | $\alpha$   | $1+\alpha$ |
| $\alpha$   | $\alpha$   | $1+\alpha$ | 0          | 1          | $\alpha$   | 0 | $\alpha$ | $1+\alpha$ | $\alpha$   |
| $1+\alpha$ | $1+\alpha$ | $\alpha$   | 1          | 0          | $1+\alpha$ | 0 | $\alpha$ | $\alpha$   | $1+\alpha$ |

| $x/y$      | 0 | 1          | $\alpha$   | $1+\alpha$ |
|------------|---|------------|------------|------------|
| 0          | / | 0          | 0          | 0          |
| 1          | / | 1          | $1+\alpha$ | $\alpha$   |
| $\alpha$   | / | $\alpha$   | 1          | $1+\alpha$ |
| $1+\alpha$ | / | $1+\alpha$ | $\alpha$   | 1          |

**Primer 2.3.** Poglejmo si še en zanimiv primer. Naj bo  $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^2}$ , kjer je  $p$  praštevilo za katero velja  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . V tem primeru lahko za nerazcepni polinom izberemo  $X^2 + 1$ . Elementi polja  $\mathbb{F}_q$  so torej oblike

$$a + b\alpha,$$

$a, b \in \mathbb{F}_p$ ,  $\alpha$  pa je število za katero velja  $\alpha^2 = -1$ . To nas močno spominja na kompleksna števila. Tudi računske operacije se obnašajo enako kot pri kompleksnih številih. V takih poljih lahko torej namesto s polinomi delamo kar s kompleksnimi števili.

### 3 Kubične krivulje

KOPIRANO IZ DIPLOME ALI JE OK????

#### 3.1 Točke na krivulji

**Definicija 3.1.**

*Projektivna ravnina*  $\mathbb{P}^2$  nad poljem  $\mathbb{F}$  je kvocientni prostor  $\mathbb{F}^3 - \{0\}/\sim$ , kjer je ekvivalenčna relacija podana z  $(a, b, c) \sim (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$  za vsak  $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ . Točke v  $\mathbb{P}^2$  so torej podane s homogenimi koordinatami  $[a, b, c] = [\alpha a, \alpha b, \alpha c]$  za vse  $\alpha \neq 0$ .

Točko projektivne ravnine si lahko predstavljamo kot premico skozi izhodišče, kot prikazuje slika 1.

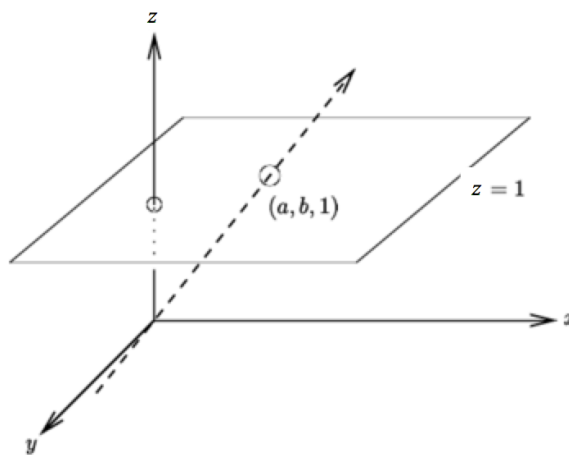
**Definicija 3.2.**

Polinom  $P$  je *homogen* stopnje  $d$ , če velja  $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$  za vse  $\lambda \in \mathbb{F}$ .

**Definicija 3.3.**

*Algebraična krivulja*, podana s homogenim polinomom  $P$ , je množica točk

$$\mathcal{C}_P = \{A \in \mathbb{P}^2, P(A) = 0\}.$$



Slika 1: Točka  $[a, b, 1]$  v projektivni ravnini.

*Kubična krivulja* je algebraična krivulja, podana s homogenim polinomom stopnje 3. V splošnem je torej oblike

$$a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{201}x^2z + a_{120}xy^2 + a_{102}xz^2 + a_{012}yz^2 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 + a_{111}xyz + a_{021}y^2z = 0,$$

kjer so  $a_{ijk} \in \mathbb{F}$ . Ta zapis vsebuje 10 koeficientov, vendar se v gladkih primerih lahko polinom poenostavi.

**Definicija 3.4.**

Algebraična krivulja je *gladka*, če nima nobenih samopresečišč ali singularnosti.

**Izrek 3.5** ([?], Izrek 15.2).

*Gladko kubično krivuljo nad algebraično zaprtim poljem lahko zapišemo v Weierstrassovi obliki*

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

**Primer 3.6.**

Polinom  $P(x, y, z) = z^2y - x^3$  je homogen polinom stopnje 3. Rešitve enačbe  $z^2y - x^3 = 0$  pa podajajo točke na kubični krivulji.

Na zgornjih slikah lahko vidimo, kako krivuljo predstavimo v projektivni ravnini, ter njene preseke z različnimi afinimi ravninami.

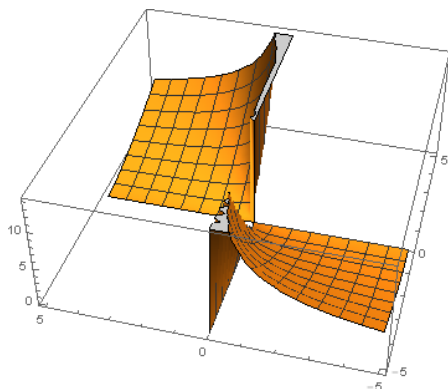
V nadaljevanju nas bodo zanimale predvsem gladke kubične krivulje v polju  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Definicija 3.7.** Za dani števili  $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  je *kubična krivulja* nad poljem  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  množica točk

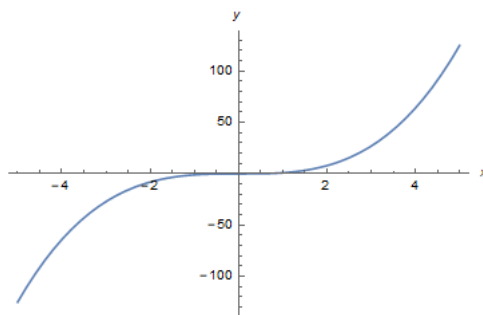
$$E_{(a,b)}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\}.$$

Drugače povedano, afina kubična krivulja je množica rešitev enačbe

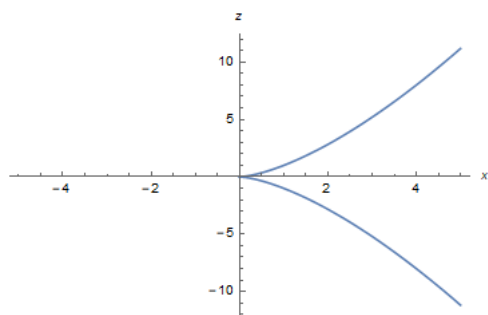
$$y^2 = x^3 + ax + b.$$



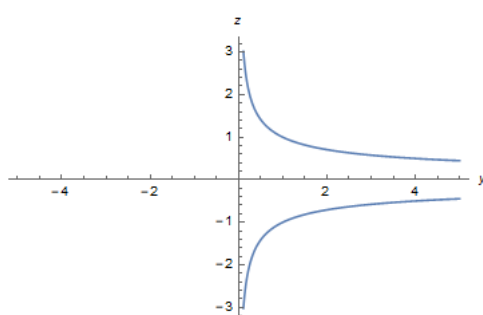
Slika 2: Algebraična krivulja, podana snino  $z = 1$ .  
polinomom  $z^2y - x^3$ .



Slika 3: Presek algebraične krivulje z rav-



Slika 4: Presek algebraične krivulje z rav-



Slika 5: Presek algebraične krivulje z rav-  
nino  $x = 1$ .

Pri čemer upoštevamo zvezo med afinimi in projektivnimi koordinatami točk:

$$(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \Leftrightarrow [x, y, 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Pomembno vlogo v kriptografiji igra tudi naključnost. Če privzamemo, da lahko naključno izberemo število  $0 \leq x \leq n$ , potem nas zanima, kako izberemo naključno točko na krivulji oblike  $y^2 = x^3 + Ax + B \bmod n$ . Ideja je preprosta. Naključno generirajmo koordianto  $x$  in nato probajmo rešiti enačbo  $y^2 = X \bmod n$ , če tak  $y$  obstaja. V nasprotnem primeru generiramo novo  $x$  koordinato in poiskujemo ponovno. Problem se torej skriva le v reševanju kvadratne enačbe. Tu pa nam pomaga Tonneli-Shankov algoritem.

**Trditev 3.8.** *Nak bo  $p > 2$  praštevilo. Če se da  $n \in \mathbb{Z}_p$  zapisati kot  $n = r^2, r \in \mathbb{Z}_p$ , potem na algoritmu 1 vrne  $r$ .*

---

**Algoritem 1** Tonelli-Shanks

---

Najdi tak  $z \in \mathbb{Z}_p$ , da  $z$  ni kvadrat  
Poišči  $s, Q$ , tako da  $p - 1 = Q2^s$   
 $M = s, c = z^Q, t = n^Q, R = n^{\frac{Q+1}{2}}$   
**while** True **do**  
    **if**  $t = 0$  **then**  
        **return**  $r = 0$   
    **else if**  $t = 1$  **then**  
        **return**  $r = R$   
    **else**  
        Poišči  $0 < i < M$ , da velja  $t^{2^i} = 1$   
         $M = i, c = b^2, t = tb^2, R = Rb$   
    **end if**  
**end while**

---

**Opomba 3.9.** V algoritmu 1 lahko prvi korak izvedemo tako, da porabavamo naključne  $g \in \mathbb{Z}_p$ , dokler ne velja  $g^{(p-1)/2} = -1$ .

### 3.2 Struktura grupe na kubičnih krivuljah

Za definicijo grupe na kubičnih krivuljah uvedimo najprej pomožno operacijo

$$* : \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P \rightarrow \mathcal{C}_P,$$

tako da za poljubni točki  $A, B$  na krivulji velja:

$$A * B = \begin{cases} A & \text{če je } A = B \text{ prevoj,} \\ C & \text{če je } \overline{AB} \cap \mathcal{C}_P = \{A, B, C\}, \\ A & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } A, \text{ ter } A \neq B, \\ B & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } B, \text{ ter } A \neq B, \\ C & \text{če je } A = B \text{ \{in tangenta v } A\} \cap \mathcal{C}_P = \{A, C\}. \end{cases}$$

Intuitivno operacija  $*$  vrne tretjo točko v preseku premice skozi  $A$  in  $B$  in  $\mathcal{C}_P$ . Poglejmo si še nekaj lastnosti operacije  $*$ . Dokaze sledečih trditev najdemo v [?, Poglavlje 17.3].

**Trditev 3.10.**

*Operacija  $*$  ima naslednje lastnosti:*

- *komutativnost:*  $A * B = B * A$ ,
- *absorpcija:*  $(A * B) * A = B$ ,
- $((A * B) * C) * D = A * ((B * D) * C)$ .

**Izrek 3.11.**

*Kubična krivulja  $(\mathcal{C}_P, +)$  je Abelova grupa za operacijo kjer je  $O$  poljubna izbrana točka na krivulji  $\mathcal{C}_P$ .*

$$\begin{aligned} + : \quad \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P &\rightarrow \mathcal{C}_P \\ (A, B) &\rightarrow (A * B) * O, \end{aligned}$$

*Dokaz.*

S pomočjo trditve 3.10 dokažimo, da je  $(\mathcal{C}_P, +)$  res Abelova grupa.

- Operacija  $+$  je komutativna:

$$A + B = (A * B) * O = (B * A) * O = B + A.$$

- Točka  $O$  je nevtralni element:

$$A + O = (A * O) * O = A.$$

- Nasprotni element  $A$  definiramo kot  $-A = A * (O * O)$  in preverimo:

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (A * (A * (O * O))) * O \\ &= (O * O) * O \\ &= O, \end{aligned}$$

kjer smo uporabili absorbcijo.

- Asociativnost  $(A + B) + C = A + (B + C)$  dokažemo z računom:

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= ((A + B) * C) * O \\ &= (((A * B) * O) * C) * O \\ &= (A * ((B * C) * O)) * O \\ &= (A * (B + C)) * O = A + (B + C). \end{aligned} \quad \square$$

Ta definicija operacije nudi eleganten opis strukture grupe, za numerično računanje pa ni primerna. Možno pa je izpeljati formule, s katerimi lahko eksplicitno izračunamo vsoto dveh točk, v kolikor imamo kubično krivuljo v Weierstrassovi obliki.

**Lema 3.12** (Seštevanje točk na Weierstrassovi kubični krivulji).

Naj bo  $\mathcal{C}_P$  afina krivulja v Weierstrassovi obliki  $y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ , ter  $O$  prevoj v neskončnosti. Če sta  $A_1 = (a_1, b_1)$  in  $A_2 = (a_2, b_2)$  točki na afinem delu  $\mathcal{C}_P$ , potem za  $A_3 = A_1 + A_2 = (a_3, b_3)$  velja

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda^2 - \alpha - a_1 - a_2 \\ b_3 &= -\lambda a_3 - \mu, \end{aligned}$$

kjer sta

$$\lambda = \begin{cases} \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} & \text{če } a_1 \neq a_2, \\ \frac{3a_1^2 + 2\alpha a_1 + \beta}{2b_1} & \text{sicer,} \end{cases}$$

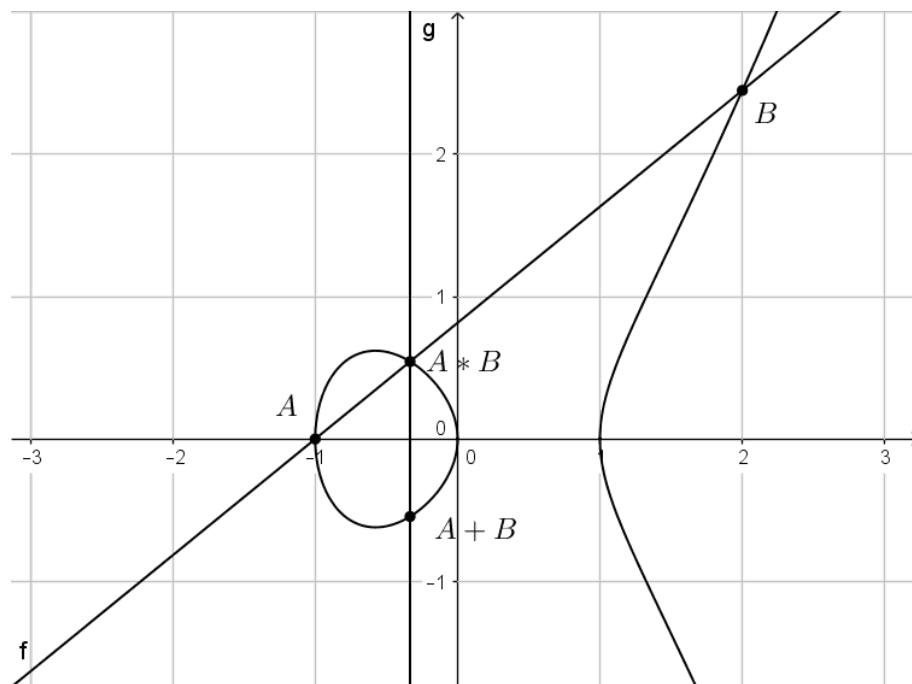
ter  $\mu = b_1 - \lambda a_1$ .



**Opomba 3.13.** Če krivuljo  $\mathcal{C}_P$  predstavimo v projektivni ravnini, torej s homogenim polinomom  $yz^2 = x^3 + \alpha x^2z + \beta xz^2 + \gamma yz^2$  je prevoj  $O = [0, 1, 0]$ .

**Primer 3.14.**

Na spodnji sliki je v afini ravnini  $y = 1$  prikazano kako grafično seštevamo točke na Weierstrassovi kubiki  $yz^2 - x(x - y)(x + y) = 0$ . Sešteti želimo točki  $A = (-1, 0)$  in  $B = (2, \sqrt{6})$ .



Slika 6: Grafično seštevaje točk na kubični krivulji.

**Primer 3.15.**

Seštejmo točki  $A = (-1, 0)$ ,  $B = (2, \sqrt{6})$  na Weierstrassovi kubični krivulji  $yz^2 - x(x - y)(x + y) = 0$  v preseku s projektivno ravnino  $y = 1$  še računsko z uporabo zgornje leme 3.12. Prepišimo našo krivuljo najprej v afino obliko iz leme 3.12. Ker smo v ravnini  $y = 1$ , najprej zamenjajmo vlogi  $y$  in  $z$ .

$$z^2 - x(x - 1)(x + 1) = 0$$

Dobimo  $z^2 = x^3 - x$ , torej je  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$  in  $\gamma = 0$ . Izračunajmo sedaj  $\lambda$  in  $\mu$ , pri čemer upoštevamo prvi predpis, saj sta x-koordinati točk različni:

$$\lambda = \frac{-\sqrt{6}}{-1 - 2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\mu = 0 - \frac{\sqrt{6}}{3}(-1) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Koordinati vsote  $A + B = (x, y)$  sta torej enaki

$$x = \frac{6}{9} - 0 + 1 - 2 = -\frac{1}{3}$$

in

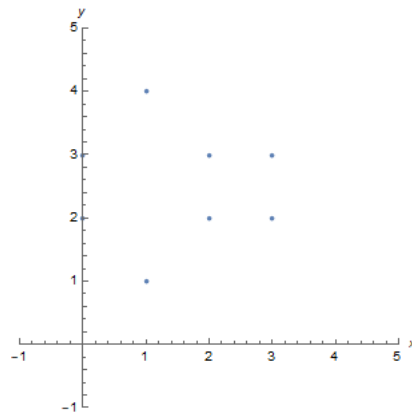
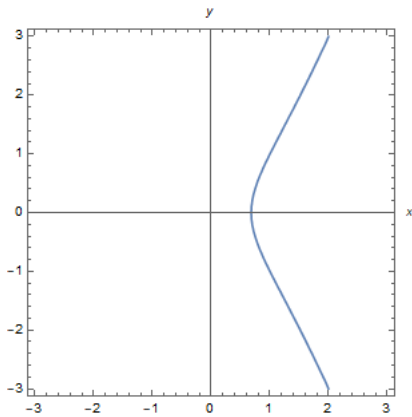
$$z = -\frac{\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{2\sqrt{6}}{9} \doteq -0.5443.$$

Iskana točka  $A + B \in \mathbb{P}^2$  je torej enaka  $[-\frac{1}{3}, 1, -\frac{2\sqrt{6}}{9}]$ . Dobljeni rezultat se ujema s točko, ki smo jo dobili z grafičnim seštevanjem.

Poglejmo si še primer kubične krivulje v  $\mathbb{Z}_n$ .

**Primer 3.16.** Naj bo  $E$  krivulja oblike  $y^2 = x^3 + x - 1$  nad poljem  $\mathbb{Z}_5$ . Poglejmo si kako izgledajo točke na krivulji  $E$ .

| $x$      | $x^3 + x - 1$ | $y$      | Točke            |
|----------|---------------|----------|------------------|
| 0        | -1            | $\pm 3$  | $(0, 3), (0, 2)$ |
| 1        | 1             | $\pm 1$  | $(1, 1), (1, 4)$ |
| 2        | 4             | $\pm 3$  | $(2, 3), (2, 2)$ |
| 3        | 4             | $\pm 3$  | $(3, 3), (3, 2)$ |
| 4        | 2             | /        | /                |
| $\infty$ | $\infty$      | $\infty$ | $\infty$         |



Slika 7: Algebraična krivulja  $y^2 = x^3 + x - 1$  v  $\mathbb{R}$ . Slika 8: Algebraična krivulja  $y^2 = x^3 + x - 1$  v  $\mathbb{Z}_5$ .

Izračunajmo sedaj še  $(2, 3) + (1, 1)$ . Uporabimo formule 3.12, tako dobimo

$$\begin{aligned} m &= \frac{1-3}{1-2} = \frac{3}{4} = 3 \cdot 4 = 2, \\ x_3 &= 4 - 1 - 2 = 1, \\ y_3 &= 2(2 - 1) - 3 = 4. \end{aligned}$$

$(2, 3) + (1, 1)$  je torej enako  $(1, 4)$  nad  $E$ .

### 3.3 Frobeniusev endomorfizem

Naj bo  $\mathbb{F}_q$  končno polje z algebrastičnim zaprtjem  $\overline{\mathbb{F}_q}$  in naj bo

$$\begin{aligned}\phi_q : \overline{\mathbb{F}_q} &\rightarrow \overline{\mathbb{F}_q}, \\ x &\mapsto x^q\end{aligned}$$

Frobeniuseva preslikava na  $\mathbb{F}_q$ . Če je  $E$  eliptična krivulja definirana nad  $\mathbb{F}_q$ , potem  $\phi_q$  deluje na točkah  $E$  kot:

$$\phi_q(x, y) = (x^q, y^q), \quad \phi_q(\infty) = \infty.$$

**Lema 3.17.** *Naj bo  $E$  eliptična krivulja definirana nad  $\mathbb{F}_q$ , in naj bo  $(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$ . Velja*

- $\phi_q(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$ ,
- $(x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$  natanko tedaj ko  $\phi_q(x, y) = (x, y)$ .

*Dokaz.* Za dokaz leme bomo potrebovali lastnost  $(a + b)^q = a^q + b^q$ , če je  $q$  potenca karakteristike polja v katerem delamo. To sledi iz razvoja v vrsto in dejstva, da pri binomskih koeficientih velja  $\binom{q}{i} \equiv 0$ ,  $1 \leq i \leq q - 1$ . To je res ker pri zapisu binomskega koeficienta po krajšanju vedno ostane vsaj en  $q$ , ki je potenca karakteristike. Prav tako bomo potrebovali dejstvo, da velja  $a^q = a$  za vse  $a \in \mathbb{F}_q$ . Vzemimo namesto Weierstrassove oblike splošno Weierstrassovo obliko, saj to ne vpliva na sam dokaz. Imamo torej

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \quad (3.1)$$

$a_i \in \mathbb{F}_q$ . Če to enačbo sedaj potenciramo na  $q$  in uporabimo zgornja dejstva dobimo

$$(y^q)^2 + a_1(x^qy^q) + a_3(y^q) = (x^q)^3 + a_2(x^q)^2 + a_4(x^q) + a_6.$$

To ravno pomeni, da točke oblike  $(x^q, y^q)$  ležijo na krivulji podani z enačbo 3.1.

Za drugi del leme se upremo na dejstvo, da velja  $x \in \mathbb{F}_q$  natanko tedaj, ko  $\phi_q(x) = x$ . Od tod sledi

$$\begin{aligned}(x, y) \in E(\mathbb{F}_q) &\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{F}_q \\ &\Leftrightarrow \phi_q(x) = x \text{ in } \phi_q(y) = y \\ &\Leftrightarrow \phi_q(x, y) = (x, y).\end{aligned}$$

□

**Trditev 3.18.** *Naj bosta  $\alpha, \beta$  enomorfizma na  $E$ , ter naj bosta  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Definirajmo enomorfizem*

$$(a + \alpha + b\beta)(P) = a\alpha(P) + b\beta(P).$$

*Potem velja*

$$\deg(a\alpha + b\beta) = a^2\deg(\alpha) + b^2\deg(\beta) + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg(\alpha) - \deg(\beta)).$$

*Dokaz.* Naj bo  $n \in \mathbb{Z}$ , število ki ni deljivo z karakteristiko  $K$ . Predstavimo  $\alpha, \beta$  z matrikami  $\alpha_n, \beta_n$ , glede na neko bazo  $E[n]$ . Velja

$$\det(a\alpha_n + b\beta_n) = a^2 \det(\alpha_n) + b^2 \det(\beta_n) + ab(\det(\alpha_n + \beta_n) - \det(\alpha_n) - \det(\beta_n))$$

za vse matrike  $\alpha_n, \beta_n$ . Od tod sledi

$$\deg(a\alpha + b\beta) \equiv a^2 \deg(\alpha) + b^2 \deg(\beta) + ab(\deg(\alpha + \beta) - \deg(\alpha) - \deg(\beta)) \pmod{n}.$$

Ker to drži za neskončno mnogo  $n$  v tej enačbi velja enakost.

□

**Izrek 3.19.** *Hasse* Naj bo  $E$  eliptična krivulja nad končnim poljem  $\mathbb{F}_q$ . Potem red  $E(\mathbb{F}_q)$  zadošča zvezi

$$|q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q)| \leq 2\sqrt{q}.$$

*Dokaz.* Zapišimo

$$a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - \deg(\phi_q - 1).$$

Pokazati moramo  $|a| \leq 2\sqrt{q}$ . Za dokaz tega bomo potrebovali še eno lemo.

**Lema 3.20.** *Naj bosta  $r, s \in \mathbb{Z}$ , taka da velja  $\gcd(s, q) = 1$ . Potem velja*

$$\deg(r\phi_q - s) = r^2q + s^2 - rsa.$$

*Dokaz.* Z uporabo trditve 3.18 dobimo

$$\deg(r\phi_q - s) = r^2 \deg(\phi_q) + s^2 \deg(-1) + rs(\deg(\phi_q - 1) - \deg(\phi_q) - \deg(-1)).$$

Če sedaj uporabimo dejstvo  $\deg(\phi_q) = q, \deg(-1) = 1$ , ter  $\deg(\phi_q - 1) = q + 1 - a$ , željeni rezultat sledi. □

Ker velja  $\deg(r\phi_q - s) \geq 0$ , nam lema implicira

$$q\left(\frac{r}{s}\right)^2 - a\frac{r}{s} + 1 \geq 0,$$

za vse  $r, s$  za katere velja  $\gcd(s, q) = 1$ . Množica racionalnih števil oblike  $r/s$ , ki zadoščajo tej lastnosti je gosta v  $\mathbb{R}$ . Zato velja

$$qx^2 - ax + 1 \geq 0,$$

za vse  $x \in \mathbb{R}$ . To pa pomeni, da je diskriminanta polinoma negativna ali nič. Kar povedano z drugimi besedami pomeni

$$a^2 - 4q \leq 0,$$

to pa je ravno pogoj  $|a| \leq 2\sqrt{q}$ .

□

**Izrek 3.21.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja definirana nad  $\mathbb{F}_q$ . Naj bo  $a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - \text{def}(\phi_q - 1)$ . Potem velja

$$\phi_q^2 - a\phi_q + q = 0,$$

kot endomorfizem nad  $E$ . Prav tako pa je  $a$  edino število  $k$  za katerega velja

$$\phi_{q^n}^2 - k\phi_{q^n} + q^n = 0.$$

Povedano drugače velja naslednja lastnost. Naj bo  $(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_q}$ , potem velja

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) - a(x^q, y^q) + q(x, y) = \infty,$$

$a$  pa je edino število, tako da ta lastnost velja za vse  $(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_q}$ . Velja še več

$$a \equiv \text{Trace}((\phi_q)_m) \pmod{m},$$

za vse  $m$ , ki zadoščajo  $\gcd(m, q) = 1$ .

*Dokaz.*

□

### 3.4 Red grupe nad eliptičnimi krivuljami

V kriptografiji nas bo velikokrat zanimalo, koliko točk leži na neki krivulji  $E$ .

**Trditev 3.22.** Naj bo  $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - a$ . Zapišimo  $X^2 - aX + q = (X - \alpha)(X - \beta)$ . Potem velja

$$\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = q^n + 1 - (\alpha^n + \beta^n),$$

za vse  $n \geq 1$ .

*Dokaz.* V dokazu bomo najprej potrebovali lastnost  $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{N}$ . Pri tem nam bo pomagala naslednja lema.

**Lema 3.23.** Naj bo  $s_n = \alpha^n + \beta^n$ . Potem velja  $s_0 = 2, s_1 = a, s_{n+1} = as_n - qs_{n-1}$ , za vse  $n \geq 1$ .

*Dokaz.* Če je  $n = 0$ , potem lema očitno velja. Za  $n = 1$  lema sledi iz definicije  $\alpha, \beta$ , ki sta ničli enačbe  $X^2 - aX + q$ , ter uporabe Vietovih formul. Dokažimo torej še za splošen  $n$ . Ker sta  $\alpha, \beta$  ničli, lahko zapišemo  $\alpha^2 - a\alpha + q = 0, \beta^2 - a\beta + q = 0$ . Sedaj enačbi pomnožimo z  $\alpha^{n-1}, \beta^{n-1}$ . S tem dobimo

$$\alpha^{n+1} = a\alpha^n + q\alpha^{n-1}, \beta^{n+1} = a\beta^n + q\beta^{n-1}.$$

Če enačbi seštejemo dobimo rekurzivno zvezo

$$s_{n+1} = as_n - qs_{n-1}.$$

□

Iz lema takoj sledi, da velja  $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{N}$ . Naj bo  $f$  funkcija

$$f(X) = (X^n - \alpha^n)(X^n - \beta^n) = X^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)X^n + q^n.$$

Tu smo ponovno uporabili Vietovo formulo za produkt ničel funkcije. Iz prve enakosti sledi, da funkcija  $X^2 - aX + q = (X - \alpha)(X - \beta)$  deli  $f$ . Po osnovnem izreku od deljenju lahko  $f$  zapišemo kot  $f(X) = g(X)Q(x) + r(x)$ , kjer je  $g(X) = X^2 - aX + q$ . Prav tako pa ima kvocient  $Q$  celoštevilске koeficiente. Po izreku 3.21 velja

$$(\phi_q^n)^2 - (\alpha^n + \beta^n)\phi_q^n + q^n = f(\phi_q) = Q(\phi_q)(\phi_q^2 - a\phi_q + q) = 0,$$

kjer je  $\phi_q$  endomorfizem na  $E$ . Velja tudi  $\phi_q^n = \phi_{q^n}$ . Ponovno uporabimo izrek 3.21 od koder sledi, da obstaja natanko en  $k \in \mathbb{Z}$ , tako da  $\phi_{q^n}^2 - k\phi_{q^n} + q^n = 0$ . Ta  $k$  pa je določen z  $k = q^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{q^n})$ . Od tod torej sledi

$$\alpha^n + \beta^n = q^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{q^n}).$$

□

**Primer 3.24.** Naj bo  $E$  podana s predpisom  $y^2 + xy = x^3 + 1$ . S preprostim pregledom vseh možnosti vidimo, da je  $\#E(\mathbb{F}_2) = 4$ . Izračunajmo sedaj  $\#E(\mathbb{F}_4)$ . Po trditvi 3.22 moramo  $\#E(\mathbb{F}_2)$  zapisati kot  $q + 1 - a$ . Sledi torej  $a = 2 + 1 - 4 = -1$ . Polinom je potem oblike

$$X^2 + X + 2 = (X - \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2})(X - \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}).$$

Za število točk na krivulji bomo moramli najprej poračunati še  $\alpha^2 + \beta^2$ , pri čemer si lahko pomagamo z lemo 3.23.

$$s_2 = as_1 - qs_0 = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3$$

Od tod sledi

$$\#E(\mathbb{F}_{2^2}) = 2^2 + 1 - s_2 = 4 + 1 + 3 = 8.$$

Če naštejemo vse točke na  $E(\mathbb{F}_4) = \{\infty, (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (3, 0), (0, 3), (1, 3)\}$ , vidimo da se naš rezultat ujema. Moč tega izreka pa se skriva v velikih potencah. Če bi naprimer želeli izračunati  $E(\mathbb{F}_{2^{200}})$  z naštevanjem točk ne bi prišli prav daleč. S pomočjo tega izreka in lema pa lahko hitro poračunamo

$$(\frac{-1 + \sqrt{-7}}{2})^{200} + (\frac{-1 - \sqrt{-7}}{2})^{200} = -2534943693362688758337590430751,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} E(\mathbb{F}_{2^{200}}) &= 2^{200} + 1 + 2534943693362688758337590430751 \\ &= 1606938044258990275541962092343697546215565682541130425732128 \end{aligned}$$

## 4 Diffie-Hellmanova izmenjava ključev nad gladkimi kubičnimi krivuljami

Diffie-Hellmanova izmenjava ključev je postopek, pri katerem se dve osebi npr. Alenka in Boris dogovorita za skrivni ključ na takšen način, da tudi v primeru ko njun pogovor posluša tretji nepovabljeni gost npr. Ciril le ta iz pogovora ne more rekonstruirati ključa za katerega sta se tekom pogovora dogovorila Alenka in Boris.

---

**Algoritem 2** Diffie-Hellmanova izmenjava ključev.

---

1. Alenka in Boris se dogovorita za eliptično krivuljo  $E$  nad končnim obsegom  $\mathbb{F}_q$ , ter za točko  $P \in E(\mathbb{F}_q)$ .
2. Alenka se odloči za skrivno število  $a \in \mathbb{N}$ , in izračuna  $P_a = aP$ , ter to pošlje Borisu.
3. Boris se odloči za skrivno število  $b \in \mathbb{N}$ , in izračuna  $P_b = bP$ , ter to pošlje Alenki.
4. Alenka izračuna  $aP_b = abP$ .
5. Boris izračuna  $bP_a = baP$ .

---

Kot sam ključ bi lahko na koncu Alenka in Boris uporabila npr. zadnjih 256 bitov x-koordinate točke  $abP$ . Tu se zanašamo na to, da je iz  $E, \mathbb{F}_q, P, P_a, P_b$  težko izračunati  $baP$ . Zelo veliko pa je tu odvisno od same izbire krivulje  $E$ .

To nas privede do t. i. problema diskretnega logaritma.

**Definicija 4.1.** Naj bosta  $a, b \in \mathbb{N}$ , ter naj bo  $p$  praštevilo. Iščemo število  $k$  tako, da bo

$$a^k \equiv b \pmod{p}.$$

**Trditev 4.2.** Če lahko rešimo problem diskretnega logaritma, potem smo rešili tudi problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev. Povedano drugače velja

$$DL \Rightarrow DH.$$

*Dokaz.* Problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev lahko enostavno prevedemo na problem diskretnega logaritma na sledeč način:

- Vzemi  $aP$  in izračunaj  $a$  tako, da rešiš problem diskretnega logaritma.
- Izračunaj  $a(bP)$ .

□

Na podoben način lahko definiramo tudi odločitveni Diffie-Hellmanov problem, ki se glasi.

**Definicija 4.3.** Naj bodo dani  $P, aP, bP, Q$  in  $E(\mathbb{F}_q)$ . Ali velja  $Q = abP$ ?

Povedano drugače, če dobimo namig ki vsebuje  $abP$ , ali lahko povemo če je ta informacija pravilna.

Poglejmo si na primeru, kako lahko v določenih primerih dobimo odgovor na ta problem s pomočjo Weilovega parjenja.

**Primer 4.4.** Naj bo  $E$  podana kot  $y^2 = x^3 + 1$  nad  $\mathbb{F}_q$ , kjer je  $q \equiv 2 \pmod{3}$ . Naj bo  $\omega \in \mathbb{F}_{q^2}$  tretji koren enote. Opazimo, da  $\omega \notin \mathbb{F}_q$ , saj je red  $\mathbb{F}_q^\times$  enak  $q - 1$ , kar pa ni deljivo s tri. Definirajmo preslikavo

$$\beta : E(\overline{\mathbb{F}_q}) \rightarrow E(\overline{\mathbb{F}_q}), (x, y) \mapsto (\omega x, y), \beta(\infty) = \infty.$$

Preverimo lahko, da je tako podana preslikava izomorfizem. Denimo, da ima  $P \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$  red  $n$ . Potem iz lastnosti izomorfizmov sledi, da ima tudi  $\beta(P)$  red  $n$ . Definirajmo modificirano Weilovo parjenje

$$e'_n(P_1, P_2) = e_n(P_1, \beta(P_2)),$$

kjer je  $e_n$  običajno Weilovo parjenje in  $P_1, P_2 \in E[n]$ .

Predpostavimo sedaj, da poznamo  $P, aP, bP, Q$  in želimo preveriti ali velja  $Q = abP$ . Najprej preverimo, če je  $Q$  večkratnik  $P$ . Po trditvi 6.1 bo to res natanko tedaj ko  $e_n(P, Q) = 1$ . Predpostavimo, da velja  $Q = tP$ , za nek  $t \in \mathbb{N}$ . Potem imamo

$$e'_n(aP, bP) = e'_n(P, P)^{ab} = e'_n(P, abP),$$

ter

$$e'_n(Q, P) = e'_n(P, P)^t.$$

Če predpostavimo  $3 \nmid n$ , potem je  $e'_n(P, P)$   $n$ -ti koren enote. To pa pomeni

$$Q = abP \iff t \equiv ab \pmod{n} \iff e'_n(aP, bP) = e'_n(P, P)^t.$$

V zgornjem primeru je potrebna še dodatna utemeljitev, ki jo lahko zapišemo kot lemo.

**Lema 4.5.** Naj  $3 \nmid n$ . Če ima  $P \in E(\mathbb{F}_q)$  red  $n$ , potem je  $e'_n(P, P)$   $n$ -ti koren enote.

*Dokaz.* Naj bo  $uP = v\beta(P)$  za neki števili  $u, v$ . Potem zaradi lastnosti izomorfizmov velja

$$\beta(vP) = v\beta(P) = uP \in E(\mathbb{F}_q).$$

Obravnavajmo sedaj dva primera.

- Če je  $vP = \infty$ , potem po definiciji  $\beta$  sledi  $uP = \infty$ . To pa pomeni, da je  $u \equiv 0 \pmod{n}$ .
- Če velja  $vP \neq \infty$ , potem zapišimo  $vP = (x, y)$ , kjer sta  $x, y \in \mathbb{F}_q$ . Velja

$$(\omega x, y) = \beta(vP) \in E(\mathbb{F}_q).$$

Ker  $\omega \notin \mathbb{F}_q$ , mora veljati  $x = 0$ . Torej je točka  $vP$  oblike  $(0, \pm 1)$ . Take točke pa imajo red tri, kar lahko poračunamo z definicijo grupe. To pa ni možno saj smo predpostavili  $3 \nmid n$ .

V obeh primerih mora torej veljati  $u, v \equiv 0 \pmod{n}$ . Od tod pa sledi, da sta  $P$  in  $\beta(P)$  baza  $E[n]$ . Po posledici 5.12 to pomeni, da je  $e'_n(P, P)$   $n$ -ti koren enote.  $\square$



## 4.1 Index Calculus

Naj bo  $p$  praštevilo in naj bo  $g$  generator ciklične grupe  $\mathbb{F}_p^\times$ . Naj  $L(h)$  označuje vrednost, za katero velja

$$g^{L(h)} \equiv h \pmod{p}.$$

Iz definicije  $L(h)$  sledi, da velja

$$L(h_1 h_2) = L(h_1) + L(h_2) \pmod{p}.$$

Idejo napada na problem diskretnega logaritma v taki grupi najlažje vidimo na primeru.

**Primer 4.6.** Naj bo  $p = 1217$  in  $g = 3$ . Rešiti hočemo  $3^k \equiv 37 \pmod{1217}$ . Izberimo si bazo praštevil  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ . Pri tem upoštevamo, da bo večja baza pomenila več računanja a hkrati lažjo pot do odgovora. Išemo  $x$ -e tako, da bo

$$3^x \equiv \pm \text{produktu praštevil iz baze} \pmod{1217}.$$

Ob iskanju takih  $x$  najdemo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned} 3^1 &\equiv 3 \pmod{1217} \\ 3^{24} &\equiv -2^2 \cdot 7 \cdot 13 \pmod{1217} \\ 3^{25} &\equiv 5^3 \pmod{1217} \\ 3^{30} &\equiv -2 \cdot 5^2 \pmod{1217} \\ 3^{54} &\equiv -5 \cdot 11 \pmod{1217} \\ 3^{87} &\equiv 13 \pmod{1217} \end{aligned}$$

Z večjo bazo bi v tem primeru lažje našli take enačbe, a bi jih hkrati potrebovali več. Z uporabo malega Fermatovega izreka, velja

$$3^{1216} \equiv 1 \equiv (-1)^2 \pmod{1217},$$

od koder sledi  $L(-1) \equiv 608 \pmod{1216}$ . Če enačbe sedaj zapišemo z uporabo  $L(h)$ , dobimo

$$\begin{aligned} 1 &\equiv L(3) \pmod{1216} \\ 24 &\equiv 608 + 2L(2) + L(7) + L(13) \pmod{1216} \\ 25 &\equiv 3L(5) \pmod{1216} \\ 30 &\equiv 608 + L(2) + 2L(5) \pmod{1216} \\ 54 &\equiv 608 + L(5) + L(11) \pmod{1216} \\ 87 &\equiv L(13) \pmod{1216} \end{aligned}$$

Od tod dobimo  $L(2) = 216, L(11) = 1059, L(7) = 113, L(5) = 819, L(13) = 87, L(3) = 1$ . Sedaj poračunamo za različne  $j$  vrednost  $3^j * 37$ , dokler ne dobimo  $3^j * 37 \equiv \text{produktu elementov iz baze}$ . Pri vrednosti  $j = 16$  dobimo

$$3^{16} \cdot 37 \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \pmod{1217}.$$

Iščemo  $L(37)$ , iz definicije  $L$  pa velja

$$3^{L(37)} \equiv 37 \pmod{1217} \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3^{-16} \pmod{1217}.$$

Če sedaj namesto baze vstavimo primerne  $L$  dobimo

$$3^{L(37)} \equiv 3^{3L(2)} \cdot 3^{L(7)} \cdot 3^{L(11)} \cdot 3^{-16L(3)} \pmod{1217}.$$

$L(37)$  lahko sedaj zapišemo kot

$$L(37) \equiv 3L(2) + L(7) + L(11) - 16L(3) \pmod{1216} \equiv 588 \pmod{1216}.$$

Torej je naš iskani  $k = 588$ .

## 4.2 Index Calculus program

```
import mip
import math
import random
import numpy as np
from base import *
```

```
def PrimeSearch(num, mod, base):
```

```
    """
```

```
    Opis:
```

```
    PrimeSearch vrne razcep na prafaktorje iz baze ce
    tak razcep obstaja, v nasprotnem primeru vrne None.
```

```
    Definicija:
```

```
    PrimeSearch(num, mod, base)
```

```
    Vhodni podatki:
```

```
    num...stevilo, ki ga hocemo razcepiti na prafaktorje
    mod...modul s katerim delamo
    base...baza prastevil s katerimi delamo
```

```
    Izhodni podatek:
```

```
    seznam_prafaktorjev, kjer prvi element pomeni
    ali je spredaj - ali + (ce je element 0
    potem je +, ce je element 1 potem je -)
    ce tak razcep obstaja (npr. [1, 2, 0, 3, 1] pri bazi
    [2, 3, 5, 7] pomeni da se to stevilo
    zapise kot -2**2*3**0*5**3*7), sicer None
```

```
    """
```

```
    factors = [0]*len(base)
    num1 = NumberMod(num, mod)
```

```

Prime = num1.isPrime()
#ce je stevilo prastevilo pogledamo
#ce lahko razcepimo stevilo - mod
if Prime and num1.num not in base:
    num1 = NumberMod(-num,mod)

stevilo = num1.num
st = 0
for el in base:
    while stevilo % el == 0:
        factors[st] += 1
        stevilo = stevilo // el
    st += 1

if Prime and num1.num not in base and stevilo == 1:
    odg = [1] + factors
else:
    odg = [0] + factors

if (odg != [1] + [0]*len(base) and
    odg != [0]*(len(base)+1) and
    stevilo == 1):
    return odg
else:
    return None

def FindSystemMod(mod,g,base):
    """
    Opis:
        FindSystemMod vrne sistem enacb, ki jih moramo
        resiti, da resimo problem diksretnega logaritma.

    Definicija:
        FindSystemMod(mod,g,base)

    Vhodni podatki:
        g...generator multiplikativne grupe  $\mathbb{Z}_{mod}$ .
        mod...modul s katerim delamo
        base...baza prastevil s katerimi delamo

    Izhodni podatek:
        par (A,b)...A je matrika sistema,
        b je desna stran sistema
    """
    #kratnik doloca koliko enacb je v sistemu
    #(n pomeni dolzina_baze*n enacb)

```

```

kratnik = 5
#pove ali dodamo enacbo v sistem ali ne
dodamo = False
#pove ali ze imamo pokrite vse spremenljivke
#z dosedanjimi enacbami
VSE = False
#porazdelitev spremenljivk v posameznih
#enacbah ki smo jih dodali
mamo = [[0]*len(base) for i in range(kratnik*len(base))]
#katere spremenljivke smo ze pokrili
mamoSPR = [0]*len(base)
st = 0#stevilo dodanih enacb
A = []
b = []
for i in range(1,mod-1):
    #razcepimo stevilo na faktorje iz baze
    odg = PrimeSearch(g**i,mod,base)
    if odg != None:
        #pogledamo ce smo dobili kaksno
        #novo spremenljivko
        if VSE == False:
            for j in range(1,len(base)+1):
                #zamik zarad +- 1 spredi
                if odg[j] != 0 and mamoSPR[j-1] == 0:
                    #ce se nimamo pokrite te
                    #spremenljivke to enacbo
                    #vzamemo
                    mamoSPR[j-1] = 1
                    dodamo = True

        elif VSE and len(A) < kratnik*len(base):
            #nimamo se dovolj velikega sistema
            #preverimo ce tako enacbo ze mamo
            dodamo = True
            tmp = list(map(bool,odg[1:]))
            for k in range(st):
                if mamo[k] == tmp:
                    dodamo = False

    if dodamo:
        mamo[st] = list(map(bool,odg[1:]))
        st += 1
        A.append(odg[1:])
        b.append(i-((mod-1)//2)*odg[0])
        dodamo = False
        if np.prod(mamoSPR) == 1:
            VSE = True

```

```

if (np.prod(mamoSPR) != 0 and
      len(A) >= kratnik*len(base)):
    #prekinemo iskanje ce imamo dovolj enacb
    break

```

```

return(A,b)

```

```

def SolveSystemMod(A,b,mod):
    """

```

*Opis:*

*SolveSystemMod vrne resitev sistema linearnih enacb podanih z matrikama A in b ( $Ax = b$ ) modulo stevilo mod. Metoda za reševanje sistem pretvori v novo obliko tako, da vsako vrstico pretvori v novo enacbo in potem celotni sistem resi s pomocjo celostevilskega linearnega programa iz paketa mip*

*Zgled:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b = [1, -584, 25, -578, -554, 87]$$

*mod = 1216*

*posamezno vrstico pretvori tako, da namesto  $x_2 = 1$  dobimo vrstico  $x_2 + \text{mod} * X_1$  (dodatna spremenljivka) = 1 (za vsako vrstico uvedemo novo dodatno spremenljivko)*

*Definicija:*

*SolveSystemMod(A,b,mod)*

*Vhodni podatki:*

*A... matrika podana kot  $[[...], [...], [...], \dots, [...]]$*

*b... desna stran sistema podana s seznamom*

*mod... modulo glede na katerega resujemo sistem*

*Izhodni podatek:*

```

x seznam vrednosti resitve sistema
"""
n = len(A)
dol_vrstice = len(A[0])
Kopija = A[:]
#pretvorimo matriko A v primerno obliko
for i in range(n):
    tmp = [0]*n
    tmp[i] = mod
    Kopija[i] = Kopija[i] + tmp

#naredimo linearni program(zanimajo nas samo
#spremenljivke, ki predstavljajo bazo,
#katere omejimo med 0 in mod-1)
m = mip.Model()
x = [ m.add_var(var_type=mip.INTEGER, lb=1, ub = mod-1)
      for i in range(dol_vrstice) ]
#spremenljivk tok kukr jih je v vrstici
for i in range(n):
    x.append(m.add_var(var_type=mip.INTEGER, lb = -10, ub = 10))
    #dodatna spremenljivka za vsako vrstico posebj
m.objective = mip.minimize(
    mip.xsum(0*x[j] for j in range(dol_vrstice)))
for i in range(n):
    m += mip.xsum(
        Kopija[i][j]*x[j] for j in range(dol_vrstice + n)) == b[i]

m.optimize()

#zaokrozimo za lepsi izpis(vcasih
#lahko pride resitev 0.999999999 namesto 1, kar je isto)
resitev = [int(round(x[i].x)) for i in range(dol_vrstice)]

return(resitev)

```

```

def IndexCalculus(g, mod, a, base):
    """

```

*Opis:*

*IndexCalculus vrne tak  $k$ , da velja*  
 *$g^k \equiv a \pmod{mod}$ , kjer je  $g$  generator*  
*multiplikativne grupe  $\mathbb{Z}_{mod}$ .*

*Zgled:*

$g = 3$   
 $mod = 1217$   
 $a = 37$

```
base = [2,3,5,7,11,13]
```

*Definicija:*

```
IndexCalculus(g,mod,a,base)
```

*Vhodni podatki:*

*g... generator multiplikativne grupe  $\mathbb{Z}_{mod}$ .*

*mod... modul s katerim delamo*

*a... desna stran problema, ki ga resujemo*

*base... baza prastevil s katerimi delamo*

*Izhodni podatek:*

*$k$ , da velja  $g^k \equiv a \pmod{mod}$*

```
Temp = FindSystemMod(mod,g,base)
```

```
A = Temp[0]
```

```
b = Temp[1]
```

```
resitev = SolveSystemMod(A,b,mod-1)
```

```
k = 0
```

```
for i in range(1,mod-1):
```

```
    faktorji = PrimeSearch((g**i)*a,mod,base)
```

```
    if faktorji != None:
```

```
        k = sum([a*b for a,b in zip(faktorji[1:],resitev)])
```

```
        k+=faktorji[0]*((mod-1)//2) -i
```

```
        return NumberMod(k,mod-1).num
```

```
#primer
```

```
base = [2,3,5,7,11,13]
```

```
g = 27
```

```
mod = 1217
```

```
k = IndexCalculus(g,mod,37,base)
```

## 5 Parjenja

Parjenja imajo pomembno vlogo pri napadih na problem diskretnega logaritma nad gladkimi kubičnimi krivuljami.

**Definicija 5.1.** *Eliptična krivulja je gladka kubična krivulja.*

**Definicija 5.2.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja nad poljem  $K$ , ter naj bo  $n \in \mathbb{N}$ . *Torizjske točke so množica*

$$E[n] = \{P \in E(\overline{K}) | nP = \infty\}.$$

**Izrek 5.3.** *Naj bo  $E$  eliptična krivulja nad poljem  $K$  in naj bo  $n \in \mathbb{N}$ . Če karakteristika polja  $K$  ne deli  $n$ , ali je enaka 0 potem*

$$E[n] \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$$

*Dokaz.* Se ne vem kako bo napisan □

**Definicija 5.4.** Definirajmo *deliteljski polinom*  $\gamma_m \in \mathbb{Z}[x, y, A, B]$  kot,

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 0 \\ \gamma_1 &= 1 \\ \gamma_2 &= 2y \\ \gamma_3 &= 3x^4 + 6Ax^2 + 12Bx - A^2 \\ \gamma_4 &= 4y(x^6 + 5Ax^4 + 20Bx^3 - 5A^2x^2 - 4ABx - 8B^2 - A^3) \\ \gamma_{2m+1} &= \gamma_{m+2}\gamma_m^3 - \gamma_{m-1}\gamma_{m+1}^3 \text{ za } m \geq 2 \\ \gamma_{2m} &= (2y)^{-1}\gamma_m(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2) \text{ za } m \geq 3\end{aligned}$$

**Lema 5.5.**  $\gamma_n$  je element  $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ , za vse lihe  $n$ . Za sode  $n$  pa je  $\gamma_n$  element  $2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ .

*Dokaz.* Dokažimo to s pomočjo indukcije. Za  $n \leq 4$  lema očitno velja. Obravnavajmo primera, ko je  $n = 2m$  in  $n = 2m + 1$  za nek  $m \in \mathbb{N}$ .

- $n=2m$  Indukcijska predpostavka je v tem primeru, da lema velja za vse  $n < 2m$ . Predpostavimo lahko, da je  $2m > 4$ , saj vemo da lema velja za  $n \leq 4$ , torej velja  $m > 2$ . Potem velja  $2m > m + 2$ , kar pomeni, da vsi polinomi v definiciji  $\gamma_{2m}$  zadoščajo indukcijski predpostavki. Če je  $m$  sodo število, potem se  $\gamma_m, \gamma_{m+2}, \gamma_{m-2}$  nahajajo v  $2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ . Od tod pa sledi, da je tudi  $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ . Če je  $m$  lih, potem sta  $\gamma_{m-1}, \gamma_{m+1} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ . To pa pomeni, da je tudi  $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ .
- $n=2m+1$  Primer obravnavamo podobno kot  $n = 2m$ .

□

Definirajmo še polinoma

$$\begin{aligned}\phi_m &= x\gamma_m^2 - \gamma_{m+1}\gamma_{m-1}, \\ \omega_m &= (4y)^{-1}(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2).\end{aligned}$$

Podobno, kot pri polinomih  $\gamma$  lahko tudi tu formuliramo lemo

**Lema 5.6.**  $\phi_n$  je element  $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ , za vse  $n$ . Če je  $n$  lih, potem je  $\omega_n$  element  $y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ . V primeru, da je  $n$  sod pa je  $\omega_n$  element  $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ .

Glejmo sedaj te polinome nad eliptičnimi krivuljami

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B.$$

Polinome v  $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$  lahko gledamo kot polinome v  $\mathbb{Z}[x, A, B]$ , tako da  $y^2$  nadomestimo z  $x^3 + Ax + B$ .

**Opomba 5.7.** Polinom  $\gamma_n$  ni nujno samo polinom spremenljivke  $x$ , saj je odvisno od tega ali je  $n$  lih ali sod. Vseeno pa velja, da  $\gamma_n^2$  vedno lahko zapišemo kot polinoms premenljivke  $x$ .



**Izrek 5.8.** Naj bo  $P = (x, y)$  točka na krivulji  $y^2 = x^3 + Ax + B$ , katere karakteristika ni 2. Naj bo  $n \in \mathbb{N}$ , potem velja

$${}_nP = \left( \frac{\phi_n(x)}{\gamma_n^2(x)}, \frac{\omega_n(x, y)}{\gamma_n^3(x, y)} \right).$$

**Posledica 5.9.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja. Endomorfizem  $E$  podan z množenjem z  $n$  ima stopnjo  $n^2$ .

**Definicija 5.10.** Naj bo  $K$  polje in naj bo  $n \in \mathbb{N}$  tak, da karakteristika  $K$  ne deli  $n$ .

$$\mu_n = \{x \in \bar{K} \mid x^n = 1\}$$

je grupa  $n$ -tih korenov enote grupe  $\bar{K}$ .

**Trditev 5.11.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja definirana nad poljem  $K$ , in naj bo  $n \in \mathbb{N}$ . Predpostavimo, da karakteristika polja  $K$  ne deli  $n$ . Potem obstaja Weilovo parjenje

$$e_n : E[n] \times E[n] \rightarrow \mu_n,$$

za katerega velja:

- $e_n$  je bilinearna v obeh spremenljivkah

$$e_n(S_1 + S_2, T) = e_n(S_1, T)e_n(S_2, T)$$

in

$$e_n(S, T_1 + T_2) = e_n(S, T_1)e_n(S, T_2)$$

za vse  $S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 \in E[n]$ .

- $e_n$  je nedegenerirana v obeh spremenljivkah. To pomeni če je  $e_n(S, T) = 1$  za vse  $T \in E[n]$  potem  $S = \infty$ , ter obratno.
- $e_n(T, T) = 1$  za vse  $T \in E[n]$
- $e_n(T, S) = e_n(S, T)^{-1}$  za vse  $S, T \in E[n]$
- $e_n(\rho S, \rho T) = \rho(e_n(S, T))$  za vse avtomorfizme  $\rho$  iz  $\bar{K}$ , za katere je  $\rho$  identiteta na koeficientih  $E$ .
- $e_n(\alpha(S), \alpha(T)) = e_n(S, T)^{\deg(\alpha)}$  za vse separabilne endomorfizme  $\alpha$  polja  $E$ .

**Dokaz.** Naj bo  $T \in E[n]$ . Po izreku 8.9 obstaja funkcija  $f$ , tako da velja

$$\text{div}(f) = n[T] - n[\infty]. \quad (5.1)$$

To drži ker je  $D = n[T] - n[\infty]$  delitelj za katerega velja  $\deg(D) = 0$ . Prav tako pa velja  $\text{sum}(D) = \infty$ , ker se nahajamo v  $E[n]$ . Izberimo sedaj še točko  $T' \in E[n^2]$ , za katero velja  $nT' = T$ . Pokazati želimo, da obstaja funkcija  $g$ , tako da velja

$$\text{div}(g) = \sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R]).$$

Preden lahko uporabimo izrek 8.9 moramo preveriti, da vse potrebne lastnosti držijo. Veljati mora torej

$$\text{sum}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \infty$$

in

$$\text{deg}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = 0.$$

Po izreku 5.3, se da  $E[n]$  zapisati kot  $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$ . To pomeni, da  $E[n]$  vsebuje  $n^2$  različnih točk  $R$ . Velja torej

$$\text{sum}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \sum_{R \in E[n]} T' + R - R = \sum_{R \in E[n]} T' = n^2 T' = nT = \infty.$$

Podobno preverimo, še da velja  $\text{deg}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = 0$ . Torej po izreku 8.9 taka funkcija  $g$  obstaja. Označimo z  $f \circ n$  funkcijo, ki začne z neko točko jo pomnoži z  $n$  in nato na njej uporabi  $f$ . Točke  $P = T' + R$ , kjer je  $R \in E[n]$  so točke za katere velja  $nP = T$ . Iz 5.1 sledi

$$\text{div}(f \circ n) = n(\sum_{R \in E[n]} [T' + R]) - n(\sum_{R \in E[n]} [R]) = \text{div}(g^n).$$

Iz definicije delitelja funkcije sledi, da je funkcija  $f \circ n$  oblike  $g^n$  krat neka konstanta. Če za nov  $f$  vzamemo ta  $f$  pomnožen s primerno konstanto potem lahko predpostavimo, da velja

$$f \circ n = g^n.$$

Naj bo  $S \in E[n]$ , ter naj bo  $P \in E(\overline{K})$ . Potem velja

$$g(P + S)^n = f(n(P + S)) = f(nP) = g(P)^n.$$

Zaradi tega velja  $g(P + S)/g(P) \in \mu_n$ . Tako lahko sedaj definiramo Weilovo parjenje kot

$$e_n(S, T) = \frac{g(P + S)}{g(P)}.$$

Ta definicija je dobra, ker je  $g$  zaradi delitelja določen do skalarja natančno, zaradi tega pa je definicija neodvisna od izbire  $g$ . Prav tako pa je definicija neodvisna od izbire  $P$ , a je obrazložitev bolj zahtevna in je ne bomo navedli.

Sedaj, ko smo uspeli definirati Weilovo parjenje moramo preveriti, da zanj veljajo lastnosti 1-6.

1. Ker je definicija neodvisna od izbire točke  $P$  lahko uporabimo  $P, P + S_1$ .

$$\begin{aligned} e_n(S_1, T) e_n(S_2, T) &= \frac{g(P + S_1)}{g(P)} \frac{g(P + S_1 + S_2)}{g(P + S_1)} \\ &= \frac{g(P + S_1 + S_2)}{g(P)} \\ &= e_n(S_1 + S_2, T). \end{aligned}$$

Pokazati moramo še

$$e_n(S, T_1)e_n(S, T_2) = e_n(S, T_1 + T_2).$$

Dokaz linearnosti v drugi spremenljivki pa je malce težji kot dokaz za prvo spremenljivko. Predpostavimo da  $T_1, T_2, T_3 \in E[n]$  z lastnostjo  $T_1 + T_2 = T_3$ . Označimo z  $f_i, g_i$  funkcije ki spadajo k definicijam  $e_n(S, T_i)$ . Po izreku 8.9 obstaja funkcija  $h$ , za katero velja

$$\text{div}(h) = [T_3] - [T_1] - [T_2] + [\infty].$$

Enačba 5.1 nam da

$$\text{div}\left(\frac{f_3}{f_1 f_2}\right) = n \text{div}(h) = \text{div}(h^n).$$

Zato obstaja konstanta  $c \in \overline{K}^\times$ , tako da velja

$$f_3 = c f_1 f_2 h^n.$$

Od tod pa sledi

$$g_3 = c^{1/n}(g_1)(g_2)(h \circ n)$$

.

To pa nas končno pripelje do

$$\begin{aligned} e_n(S, T_1 + T_2) &= \frac{g_3(P + S)}{g_3(P)} = \frac{g_1(P + S)}{g_1(P)} \frac{g_2(P + S)}{g_2(P)} \frac{h(n(P + S))}{h(nP)} \\ &= e_n(S, T_1)e_n(S, T_2). \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali  $nS = \infty$ , od koder sledi  $h(n(P + S)) = h(nP)$ .

2. Predpostavimo, da  $T \in E[n]$ , tak da velja  $e_n(S, T) = 1$  za vse  $S \in E[n]$ . To pomeni, da je  $g(P + S) = g(P)$  za vse  $P$  in  $S \in E[n]$ . Po trditvi ?? obstaja funkcija  $h$ , tako da velja  $g = h \circ n$ . Od tod sledi

$$(h \circ n)^n = g^n = f \circ n.$$

Ker je množenje z  $n$  surjektivno na  $E(\overline{K})$ , od tod sledi  $h^n = f$ . To pa pomeni

$$n \text{div}(h) = \text{div}(f) = n[T] - n[\infty],$$

kar pa pomeni, da je  $\text{div}(h) = [T] - [\infty]$ . Po izreku 8.9 pa od tod sledi  $T = \infty$ . S tem smo, dokazali eno polovico točke 2, druga polovica pa avtomatično sledi iz tega ter uporabe točke 4.

3. Označimo z  $\tau_{jT}$  točko  $jT$ . V tem primeru  $f \circ \tau_{jT}$  označuje funkcijo  $P \mapsto f(P + jT)$ . Delitelj te funkcije je torej  $n[T - jT] - n[-jT]$ . Zaradi tega velja

$$\begin{aligned}
div\left(\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} (n[(1-j)T] - n[-jT]) \\
&= n[T] - n[-T] + n[-T] - n[-2T] + \cdots + n[(-n+2)T] - n[(-n+1)T] \\
&= n[T] - n[(-n+1)T] = n[T] - n[-nT + T] = n[T] - n[\infty + T] \\
&= n[T] - n[T] = 0
\end{aligned}$$

To pomeni, da je funkcija  $\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}$  konstantna. N-ta potenca funkcije  $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$  pa je ravno produkt  $f$  komponirane z  $n$ .

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}\right)^n &= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ n \circ \tau_{jT'} \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}
\end{aligned}$$

To pa tudi pomeni, da je funkcija  $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$  konstantna. To pa pomeni, da lahko namesto točke  $P$  vanjo vstavimo točko  $P + T'$  in dobimo

$$\prod_{j=0}^{n-1} g(P + T' + jT') = \prod_{j=0}^{n-1} g(P + jT').$$

Ko pokrajšamo stavri na levi in desni strani, dobimo

$$g(P + nT') = g(P).$$

Ker pa velja  $nT' = T$ , to ravno pomeni

$$e_n(T, T) = \frac{g(P + T)}{g(P)} = 1.$$

4. Iz točke 1 in 3 sledi

$$\begin{aligned}
1 &= e_n(S + T, S + T) = e_n(S, S)e_n(S, T)e_n(T, S)e_n(T, T) \\
&= e_n(S, T)e_n(T, S).
\end{aligned}$$

5. MANKA

6. MANKA

To pa pomeni  $e_n(T, S) = e_n(S, T)^{-1}$ .

□

**Posledica 5.12.** Naj bosta  $T_1, T_2$  baza  $E[n]$ . Potem je  $e_n(T_1, T_2)$  generator grupe  $\mu_N$ .

*Dokaz.* Vemo, da za poljubni točki  $T_1, T_2$  velja  $e_n(T_1, T_2)^n = 1$ , ker se slika parjenja nahaja v grupi  $n$ -tih korenov enote. Pokazati moramo torej, da če za neko število  $d$  velja  $e_n(T_1, T_2)^d = 1$  potem od tod sledi, da je  $d \geq n$ . Recimo torej, da je  $e_n(T_1, T_2) = \zeta$ , kjer velja  $\zeta^d = 1$ . Po točki ena trditve 5.11 velja

$$e_n(T_1, dT_2) = e_n(T_1, T_2)^d = 1.$$

Prav tako velja  $e_n(T_2, dT_2) = e_n(T_2, T_2)^d = 1$ . Naj bo  $S \in E[n]$ , potem se  $S$  izraža kot  $S = aT_1 + bT_2$  za neka  $a, b \in \mathbb{N}$ . S ponovno uporabo trditve 5.11 vidimo, da velja

$$e_n(S, dT_2) = e_n(T_1, dT_2)^a e_n(T_2, dT_2)^b = 1.$$

Ker to velja za vsak  $S$  po točki dva trditve 5.11 sledi, da je  $dT_2 = \infty$ . To pa je mogoče le če  $n|d$ , kar pomeni da je  $n \leq d$ .  $\square$

## 5.1 Učinkovit algoritem za izračun Weilovega parjenja

Leta 1986 je Vicor Miller napisal članek o tem, kako učinkovito izračunati Weilovo parjenje. Članek ni bil nikoli objavljen.

**Izrek 5.13.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja in naj bosta  $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$  ne ničelni točki na  $E$ .

1. Označimo z  $\lambda$  naklon premice, ki povezuje točki  $P, Q$ . V primeru, da sta ti točki enaki,  $\lambda$  predstavlja naklon tangente v točki. Če je premica navpična ( $x_P = x_Q$ ), potem privzamemo, da je  $\lambda = \infty$ . Definirajmo funkcijo  $g_{P,Q}$  na sledeči način:

$$g_{P,Q} = \begin{cases} \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2} & \text{če } \lambda \neq \infty, \\ x - x_P & \text{sicer.} \end{cases}$$

Potem velja

$$\text{div}(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P + Q] - [\infty].$$

2. (Millerjev algoritem) Naj bo  $m \geq 1$ . Zapišimo  $m$  v binarnem kot

$$m = m_0 + m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2^2 + \dots + m_{n-1} \cdot 2^{n-1},$$

kjer so  $m_i \in \{0, 1\}$  in  $m_{n-1} \neq 0$ . Potem algoritem 3 vrne funkcijo  $f_P$ , za katero velja

$$\text{div}(f_P) = m[P] - [mP] - (m - 1)[\infty].$$

---

**Algoritem 3** Millerjev algoritem

---

```
 $T = P, f = 1$ 
for  $i = n - 2 : 0$  do
   $f = f^2 \cdot g_{T,T}$ 
   $T = 2T$ 
  if  $m_i = 1$  then
     $f = f \cdot g_{T,P}$ 
     $T = T + P$ 
  end if
end for
```

---

*Dokaz.* 1. Predpostavimo najprej, da  $\lambda \neq \infty$ , ter naj  $y = \lambda x + \mu$  predstavlja premico skozi  $P, Q$  (ali tangento v primeru, da je  $P = Q$ ). Taka premica seka krivuljo  $E$  v treh točkah  $P, Q, -P - Q$ . To sledi iz sestave grupe nad  $E$ . Za to premico torej velja

$$\operatorname{div}(y - \lambda x - \mu) = [P] + [Q] + [-P - Q] - 3[\infty].$$

Navpične premice pa sekajo  $E$  neki točki  $P$  in  $-P$ . Torej velja

$$\operatorname{div}(x - x_{P+Q}) = [P + Q] + [-P - Q] - 2[\infty].$$

Od tod sledi, da ima funkcija

$$g_{P,Q} = \frac{y - \lambda x - \mu}{x - x_{P+Q}}$$

željeni delitelj

$$\operatorname{div}(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P + Q] - [\infty].$$

Z uporabo formule za seštevanje točk sedaj lahko to funkcijo προβlikujemo v željeno obliko

$$g_{P,Q} = \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2}.$$

V primeru da velja  $\lambda = \infty$ , potem velja  $P + Q = \infty$ . V tem primeru hočemo imeti delitelj oblike  $\operatorname{div}(g_{P,Q}) = [P] + [-P] - 2[\infty]$ . Tak delitelj pa ima ravno funkcija  $x - x_P$ .

2. Dokažemo s pomočjo indukcije, pri čemer upoštevamo  $\operatorname{div}(g_{T,T}) = 2[T] - [2T] - [\infty]$ ,  $\operatorname{div}(g_{T,P}) = [T] + [P] - [T + P] - [\infty]$ . Preverimo, na primeru  $m = 3$ . binarni zapis  $m$  je torej 11. Sledimo korakom algoritma 3.

$$f = f^2 \cdot g_{T,T} = g_{P,P}$$

Ker je v tem primeru  $m_0 = 1$  moramo  $f$  popraviti v  $f = f \cdot g_{T,P}$ . To nam da

$$f = g_{P,P} \cdot g_{2T,P}.$$

Če uporabimo sedaj zgornji zvezi dobimo

$$\operatorname{div}(f) = 2[P] - [2P] - [\infty] + [2P] + [P] - [2P + P] - [\infty] = 3[P] - [3P] - 2[\infty].$$

To pa je ravno to kar želimo.

□

S pomočjo izreka 5.13 lahko sedaj izračunamo Weilovo parjenje  $e_m(P, Q)$  kot

$$e_m(P, Q) = (f_P(Q + S)/f_P(S))/(f_Q(P - S)/f_Q(-S)).$$

Tu moramo za točko  $S$  izbrati  $S \notin \{\infty, P, -Q, P - Q\}$ .

**Primer 5.14.** Naj bo  $y^2 = x^3 + 30x + 34$  eliptična krivulja nad poljem  $\mathbb{F}_{631}$ . Izberimo točki  $P = (36, 60)$ ,  $Q = (121, 387)$ . Izračunati želimo Weilovo parjenje  $e_5(P, Q)$ . Če hočemo uporabiti Millerjev algoritem moramo izbrati točko  $S$ . Izberimo  $S = (0, 36)$ . Hitro lahko preverimo, da  $S$  res zadošča kriterijem izbire. Za izračun  $e_5(P, Q)$  moramo izračunati  $f_P, f_Q$  v dveh različnih točkah. Poglejmo si podrobnejši izračun za  $f_P(S)$ .

V prvem koraku, moramo izračunati  $g_{P,P}(S)$ . Po vseh potrebnih izračunih dobimo

$$\text{naklon} = 569, \text{ stevec} = 268, \text{ imenovalec} = 14.$$

Od tod torej sledi  $g_{P,P}(S) = 560$ . Ker velja  $m_1 = 0$ . Torej po prvem koraku dobimo  $f = 560, T = 2P$ .

V drugem koraku moramo poračunati  $g_{2P,2P}(S)$ , kjer kot rezultat dobimo 399. Vrednost  $f$  pa moramo popraviti na 362. V tem koraku velja  $m_0 = 1$ , torej moramo tu poračunati še  $g_{4P,P}(S)$ . Premica med  $P, 4P$  je navpična zato uporabimo drugo vejo funkcije  $g$ . Kot rezultat dobimo  $g_{4P,P}(S) = 595$ . Še zadnjič popravimo  $f$  in kot končni rezultat dobimo  $f_P(S) = 219$ .

Na podoben način sedaj poračunamo še ostale vrednosti, ter dobimo

$$\begin{aligned} \frac{f_P(Q + S)}{f_P(S)} &= \frac{103}{219} = 473, \\ \frac{f_Q(P - S)}{f_Q(-S)} &= \frac{284}{204} = 88. \end{aligned}$$

Kot končni rezultat imamo torej

$$e_5(P, Q) = \frac{473}{88} = 242.$$

## 5.2 Implementacija Millerjevega algoritma

```
from base import *
```

```
def naklon(P, Q):
```

```
    """
```

```
    Opis:
```

```
        Funkcija naklon izracuna naklon premice med točkama
        P in Q, ki lezita na elipticni krivulji
```

```
    Definicija:
```

```
        naklon(P, Q)
```

*Vhodni podatki:*

*P...razred Point, ki predstavlja točko na elipticni krivulji*

*Q...razred Point, ki predstavlja točko na elipticni krivulji*

*Izhodni podatek:*

*stevilo po modulu P.mod, ki predstavlja naklon*  
*"""*

**mod** = P.mod

**if** P == Q:

**st** = (3\*(P.x\*\*2)+P.a) % mod

**im** = NumberMod(2\*(P.y),mod).inverse().num

**rez** = (st\*im) % mod

**return** rez

**else:**

**st** = (Q.y-P.y) % mod

**im** = NumberMod(Q.x-P.x,P.mod).inverse().num

**rez** = (st\*im) % mod

**return** rez

**def** g(P,Q,X):

*"""*

*Opis:*

*Funkcija g del funkcije potrebne za izracun Weilovega parjenja, s pomocjo Millerjevega algoritma.*

*Funkcija izracuna funkcijo  $g_{\{P,Q\}}(X)$*

*Definicija:*

*$g(P,Q,X)$*

*Vhodni podatki:*

*P...razred Point, ki predstavlja točko na elipticni krivulji*

*Q...razred Point, ki predstavlja točko na elipticni krivulji*

*X...razred Point, ki predstavlja točko na elipticni krivulji*

*Izhodni podatek:*

*stevilo, ki predstavlja vrednost  $g_{\{P,Q\}}(X)$*   
*"""*

**if** P.x == Q.x **and** P.y != Q.y:

**rez** = (X.x-P.x) % P.mod



```

        return rez
    else:
        #lambda je naklon premice
        lam = naklon(P,Q)
        st = (X.y-P.y-lam*(X.x-P.x)) % P.mod
        im = NumberMod(X.x+P.x+Q.x-lam**2,P.mod)
        im = im.inverse().num
        rez = (st*im) % P.mod
        return rez

def Miller(P,X,m):
    """
    Opis:
        Funkcija Miller je implementacija Millerjevega
        algoritma potrebnega za izracun Weilovega
        parjenja. Ce je
        
$$e_m(P,Q) = (f_P(Q+S)/f_P(S)) / (f_Q(P-S)/f_Q(-S))$$

        potem funkcija Miller predstavlja izracun
        vrednosti  $f_P(X)$ .

    Definicija:
        Miller(P,X,m)

    Vhodni podatki:
        P... razred Point, ki predstavlja tocko na
            elipticni krivulji
        X... razred Point, ki predstavlja tocko na
            elipticni krivulji
        m... red tocke P

    Izhodni podatek:
        vrednost funkcije  $f_P(X)$ 
    """
    binarno = bin(m)[2:]
    #vrne niz porezemo ob na zacetku niza
    n = len(binarno)
    T = P
    f = 1
    for i in range(1,n):
        f = (f**2 * g(T,T,X)) % P.mod
        T = 2*T
        if int(binarno[i]) == 1:
            f = (f * g(T,P,X)) % P.mod
            T = T + P
    return f

```

```

def WeilPairing(P,Q,S,N):
    """
    Opis:
        Funkcija WeilPairing je implementacija Weilovega
        parjenja  $e_N(P,Q)$ , kjer je
         $e_N(P,Q) = (f_P(Q+S)/f_P(S)) / (f_Q(P-S)/f_Q(-S))$ 

    Definicija:
         $WeilPairing(P, Q, S, N)$ 

    Vhodni podatki:
        P... razred Point, ki predstavlja točko na
            elipticni krivulji
        Q... razred Point, ki predstavlja točko na
            elipticni krivulji
        S... razred Point, ki predstavlja točko, ki
            ni v podgrupi generirani z P,Q
        N... red točke P

    Izhodni podatek:
        int k, ki predstavlja red točke P ( $kP = \infty$ )
    """

    fpQS = Miller(P,Q+S,N)
    fpS = Miller(P,S,N)
    fqPS = Miller(Q,P-S,N)
    fqS = Miller(Q,-S,N)

    fpS = NumberMod(fpS,P.mod).inverse().num
    eN1 = (fpQS * fpS) % P.mod

    fqS = NumberMod(fqS,P.mod).inverse().num
    eN2 = (fqPS * fqS) % P.mod
    eN2 = NumberMod(eN2,P.mod).inverse().num

    eN = (eN1*eN2) % P.mod

    return eN

P = Point(30,34,631,36,60)
Q = Point(30,34,631,121,387)
S = Point(30,34,631,0,36)

eN = WeilPairing(P,Q,S,5)

```

## 6 MOV

MOV napad s pomočjo Weilovega parjenja pretvori problem diskretnega logaritma iz  $E(\mathbb{F}q)$  v problem diskretnega logaritma nad  $\mathbb{F}_{q^m}^\times$ . Na ta način se izognemo težji strukturi grupe. Nov problem diskretnega logaritma pa lahko sedaj rešimo z različnimi napadi, med drugim tudi z napadom Index-Calculus 4.1. MOV napad deluje če velikost polja  $\mathbb{F}_{q^m}$  ni dosti večja od velikosti polja  $\mathbb{F}q$ . Postopek napada sledi poteku dokaza naslednje trditve.

**Trditev 6.1.** *Naj bo  $E$  eliptična krivulja nad  $\mathbb{F}q$ . Naj bosta  $P, Q \in E(\mathbb{F}q)$ , ter naj bo  $N$  red točke  $P$ . Predpostavimo, da velja  $\gcd(N, q) = 1$ . Potem obstaja tako število  $k$ , da velja  $Q = kP$  natanko tedaj ko  $NQ = \infty$  in  $e_N(P, Q) = 1$ .*

*Dokaz.* ( $\Rightarrow$ ) Če je  $Q = kP$ , potem je  $NQ = kNP$ , ampak ker je red  $P$  enak  $N$  od tod sledi  $kNP = \infty$ . Prav tako

$$e_n(P, Q) = e_n(P, P)^k = 1^k = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Naj bo  $NQ = \infty$ , torej je po definiciji  $Q \in E[N]$ . Ker je  $\gcd(N, q) = 1$  lahko uporabimo izrek 5.3 in zapišemo  $E[N] \cong \mathbb{Z}_N \oplus \mathbb{Z}_n$ . Sedaj izberemo točko  $R$  tako, da je  $\{P, R\}$  baza  $E[N]$ . Ker sta  $P, R$  baza lahko  $Q$  zapišemo kot

$$Q = aP + bR,$$

za neki števili  $a, b \in \mathbb{N}$ . Po posledici definicije Weilovega parjenja 5.12 velja  $e_N(P, R) = \zeta$  je generator  $\mu_N$ . Po predpostavki velja  $e_N(P, Q) = 1$  dobimo torej

$$1 = e_N(P, Q) = e_N(P, P)^a e_N(P, R)^b = \zeta^b.$$

Od tod sledi, da je  $b$  večkratnik števila  $N$ , od tod pa po definiciji sledi  $bR = \infty$ , ter  $Q = aP$ .  $\square$

Ideja dokaza nam sedaj, da korake MOV napada.

---

### Algoritem 4 MOV napad

---

Izberi  $m$  tako, da

$$E[N] \subset E(\mathbb{F}_{q^m}).$$

Ker imajo vse točke  $E[N]$  koordinate v  $\bar{\mathbb{F}}q = \cup_{j \geq 1} \mathbb{F}_{q^j}$  tak  $m$  obstaja. Prav tako je  $\mu_N$  v  $\mathbb{F}_{q^m}^\times$ . Nato postopaj po naslednjih korakih.

1. Izberi točko  $T \in E(\mathbb{F}_{q^m})$ .
  2. Izračunaj red  $M$  točke  $T$ .
  3. Naj bo  $d = \gcd(M, N)$  in naj bo  $T_1 = (M/d)T$ . Potem ima  $T_1$  red, ki deli  $N$ , torej je  $T_1 \in E[N]$ .
  4. Izračunaj  $\zeta_1 = e_N(P, T_1)$  in  $\zeta_2 = e_N(Q, T_1)$ . Tu sta  $\zeta_1$  in  $\zeta_2$  v  $\mu_d \subset \mathbb{F}_{q^m}^\times$ .
  5. Reši problem diskretnega logaritma  $\zeta_2 = \zeta_1^k$  v  $\mathbb{F}_{q^m}^\times$ . To nam da  $k \bmod d$ .
  6. Ponovi korake 1-5 za različne točke  $T$  dokler ni  $k$  določen.
-

MOV napad deluje hitreje, kot če hočemo rešiti problem diskretnega algoritma direktno nad krivuljo, če velja

$$k > \log^2(p),$$

kjer je krivulja  $E(\mathbb{F}_p)$  in MOV pretvori to grupo v  $\mathbb{F}_{p^k}^\times$ .

MOV napad deluje na supersingularnih krivuljah, saj lahko za take krivulje ponavadi vzamemo  $m = 2$ .

**Definicija 6.2.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja nad  $\mathbb{F}_q$ , kjer je  $q$  potenca nekaga praštevila  $p$ . Potem velja  $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - a$  za neko število  $a$ . Krivulja  $E$  je *supersingularna* če velja  $a \equiv 0 \pmod{p}$ .

**Opomba 6.3.** Izkaže se, da je pri pogoju  $q = p \geq 5$  ta definicija ekvivalentna temu, da je  $a = 0$ .

Naslednja trditev, nam bo dala utemeljitev izbire  $m$  pri supersingularnih krivuljah.

**Trditev 6.4.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja nad  $\mathbb{F}_q$ , ter naj velja  $a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = 0$ . Naj bo  $N \in \mathbb{N}$ . Če obstaja točka  $P \in E(\mathbb{F}_q)$  reda  $N$ , potem velja

$$E[N] \subseteq E(\mathbb{F}_{q^2}).$$

*Dokaz.* Frobeniusev endomorfizem  $\phi_q$  po izreku 3.21 zadošča  $\phi_q^2 - a\phi_q + q = 0$ . Ker velja  $a = 0$ , to pomeni

$$\phi_q^2 = -q.$$

Naj bo  $S \in E[N]$ . Ker velja  $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1$  in ker obstaja točka reda  $N$ , od tod sledi  $N|q + 1$ . Povedano drugače to pomeni  $-q \equiv 1 \pmod{N}$ . Od tod sledi

$$\phi_q^2(S) = -qS = 1 \cdot S.$$

Po lemi 3.17 od tod sledi  $S \in E(\mathbb{F}_{q^2})$ . □

## 6.1 Mali korak, Velik korak

Kako izračunamo red točke na nek ekonomičen način? Trenutno je najhitrejši algoritem za izračun reda točke Schoof–Elkies–Atkinsonov algoritem (SEA). Tu pa si bomo pogledali malo bolj preprost algoritem, ki pa vseeno predstavlja veliko izboljšanje glede na naiven pristop seštevanja točke same s seboj. Naj bo  $P \in E(\mathbb{F}_q)$ . Radi bi izračunali red točke  $P$ . Iščemo torej tako število  $k$ , da bo veljalo  $kP = \infty$ . Algoritem Mali korak, Velik korak lahko izračuna red točke v približno  $4q^{\frac{1}{4}}$  korakih. Koraki algoritma so sledeči:

---

**Algoritem 5** Mali korak, Velik korak

---

1. Izračunaj  $Q = (q + 1)P$ .
  2. Izberi število  $m$  za katero velja  $m > q^{\frac{1}{4}}$ . Za  $j = 0, 1, \dots, m$  izračunaj in shrani  $jP$ .
  3. Za  $k = -m, -m + 1, \dots, m - 1, m$  izračunaj točke  $Q + k(2mP)$ . V primeru, da se kakšna od teh točk ujema z  $\pm jP$  prekini računanje in si zapomni ustrezna  $k, j$ .
  4. Izračunaj  $(q + 1 + 2mk \mp j)P$  in poglej v katerem primeru je to enako  $\infty$ . V tem primeru naj bo  $M = (q + 1 + 2mk \mp j)$ .
  5. Faktoriziraj  $M$ . Označimo faktorje števila  $M$  z  $p_1, \dots, p_r$ .
  6. Izračunaj  $(M/p_i)P$ , za  $i = 1, \dots, r$ . Če je  $(M/p_i)P = \infty$  za nek  $i$ , potem zamenjaj  $M$  z  $M/p_i$  in pojdi nazaj na korak (5). V nasprotnem primeru je  $M$  red točke  $P$ .
- 

**Opomba 6.5.** Algoritem 5 lahko preoblikujemo do te mere, da namesto reda točke izračunamo število točk na krivulji. Vse kar moramo narediti, je ponavljati korake (1)-(6) za naključno izbrane točke  $P \in E(\mathbb{F}_q)$ . Ustavimo se ko najmanjši skupni večkratnik redov točk, deli le eno število  $N$  v območju  $q + 1 - 2\sqrt{q} \leq N \leq q + 1 + 2\sqrt{q}$ . To število  $N$  je potem število točk na dani krivulji. Pri tem postopku se upremo na Hassejev izrek o številu točk na eliptični krivulji.

Tu se sedaj pojavi še vprašanje zakaj ta algoritem deluje. Odgovor na to vprašanje pa nam da naslednja lema.

**Lema 6.6.** *Naj bo  $G$  aditivna grupa in naj bo  $g \in G$ . Denimo da velja  $Mg = 0$  za nek  $M \in \mathbb{N}$ . Označimo z  $p_1, \dots, p_r$  različna preštevila, ki delijo  $M$ . Če velja  $(M/p_i)g \neq 0$  za vse  $i$ , potem je  $M$  red  $g$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $k$  red  $g \in G$ . Ker velja  $Mg = 0$  vemo, da  $k|M$ . Denimo, da  $k \neq M$ . Pokazati moramo, da obstaja praštevilo  $p_i$ , tako da  $(M/p_i)g = 0$ . Naj bo  $p_i$  praštevilo, ki deli  $M/k$ . Tako število obstaja, ker  $M \neq k$ . Potem velja  $p_i k|M$ , to pa pomeni da  $k|(M/p_i)$ . Ker pa je  $k$  red elementa  $g$ , to pomeni  $(M/p_i)g = 0$ . □

## 7 Anomalne krivulje

Delovanje MOV temelji na uporabi Weilovega parjenja. Pojavi se torej ideja, da bi konstruirali tako krivuljo, ki vedno da trivialno Weilovo parjenje. S tem bi preprečili MOV napad. Krivulje za katere je to res so take, da za njih velja

$$\#E(\mathbb{F}_q).$$

Takim krivuljam rečemo anomalne krivulje. Če je  $p$  praštevilo, je potem  $E[n]$  ciklična grupa, kar pomeni da bo Weilovo parjenje konstantno enako 1. Vender za tak tip krivulj obstaja napad, ki deluje še hitreje kot MOV. Pokažimo algoritem, ki deluje če je  $q$  praštevilo. Za tak napad bomo najprej morali krivuljo  $E$  in točki  $P, Q$  razširiti iz  $\mathbb{F}_p$  na  $\mathbb{Z}$ . Pri tem bomo potrebovali naslednjo trditev.

**Trditev 7.1.** *Naj bo  $E$  eliptična krivulja nad  $\mathbb{F}_p$  in naj bosta  $P, Q \in E(\mathbb{F}_p)$ . Predpostavimo še, da je krivulja  $E$  oblike  $y^2 = x^3 + Ax + B$ . Potem obstajajo cela števila  $A', B', x_1, x_2, y_1, y_2$  in eliptična krivulja  $E'$  podana z*

$$y^2 = x^3 + A'x + B',$$

oblike  $P' = (x_1, y_1), Q' = (x_2, y_2), \in E'(\mathbb{Q})$ . Za ta števila velja

$$A \equiv A', B \equiv B', P \equiv P', Q \equiv Q' \pmod{p}.$$

*Dokaz.* Izberi števili  $x_1, x_2$  tako, da velja  $x_1, x_2 \pmod{p}$  podajata x-koordinati  $P, Q$ . Predpostavimo najprej, da  $x_1 \not\equiv x_2 \pmod{p}$ . Nato izberi  $y_1$  tako, da velja  $P' \equiv P \pmod{p}$ . Tu ekvivalenco gledamo po koordinatah. Pri izbiri  $y_2$  moramo biti bolj previdni. Izberimo  $y_2$  tako, da velja

$$y_2^2 \equiv y_1^2 \pmod{x_2 - x_1} \text{ in } (x_2, y_2) \equiv Q \pmod{p}.$$

To je mogoče, saj lahko uporabimo Kitajski izrek o ostankih, ker velja  $\gcd(p, x_2 - x_1) = 1$ .

Na ta način dobimo dve enačbi s pomočjo katerih moramo določiti konstanti  $A', B'$ . Enačbi se glasita

$$\begin{aligned} y_1^2 &= x_1^3 + A'x_1 + B, \\ y_2^2 &= x_2^3 + A'x_2 + B. \end{aligned}$$

Rešitev se torej glasi

$$A' = \frac{(y_2^2 - y_1^2) - (x_2^3 - x_1^3)}{x_2 - x_1}, B' = y_1^2 - x_1^3 - A'x_1.$$

Ker je  $y_2^2 - y_1^2$  po konstrukciji deljivo z  $x_2 - x_1$  in ker so vse ostale konstante cela števila, od tod sledi, da sta tudi  $A', B' \in \mathbb{Z}$ . Točki  $P', Q'$  pa ležita na  $E'$  po konstrukciji.

Obravnavati moramo še primer če je  $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$ . V tem primeru velja  $P = \pm Q$ . Izberimo potem  $x_1 = x_2$ , ter  $y_1$  tako, da nam  $y_1 \pmod{p}$  podaja y-koordinato točke  $P$ . Na isti način izberemo še  $A'$ , ter določimo  $B' = y_1^2 - x_1^3 - A'x_1$ .  $Q'$  pa izberemo kot  $\pm P'$ .

MANKA TO DA E' RES ELIPTIČNA. TEGA NI KER JE DISKRIMINANTA K JE NISM OMENU. DOKAZ SICER 2 VRSTICI.  $\square$

**Definicija 7.2.** Naj bosta  $a, b$  rationali števili za kateri velja  $a/b \neq 0$  in  $a, b$  tuji števili. Zapišimo  $a/b = p^r a_1/b_1$ , kjer  $p \nmid a_1 b_1$ . Potem je  $p$ -adična vrednost definirana kot

$$v_p(a/b) = r.$$

Definirajmo še

$$v_p(0) = \infty.$$

**Primer 7.3.**  $\frac{7}{40} = 2^{-3}\frac{7}{5}$ , zato velja

$$v_2(7/40) = -3.$$

Poglejmo si še kakšen priemr

$$v_5(50/3) = 2, \quad v_7(1/2) = 0.$$

Naj bo  $E'$  eliptična krivulja nad  $\mathbb{Z}$  podana z  $y^2 = x^3 + A'x + B'$ . Naj bo  $r \in \mathbb{N}$ . Potem lahko definiramo

$$E'_r = \{(x, y) \in E'(\mathbb{Q}) \mid v_p(x) \leq -2r, v_p(y) \leq -3r\} \cup \{\infty\}.$$

**Izrek 7.4.** Naj bo  $E'$  podana z  $y^2 = x^3 + A'x + B'$ ,  $A', B' \in \mathbb{Z}$ . Naj bo  $p$  praštevilo in naj bo  $r \in \mathbb{N}$ . Potem velja

1.  $E'_r$  je podgrupa  $E'(\mathbb{Q})$ .
2. Če je  $(x, y) \in E'(\mathbb{Q})$ , potem  $v_p(x) < 0$  natanko tedaj ko  $v_p(y) < 0$ . V tem primeru obstaja število  $r \geq 1$ , za katero velja  $v_p(x) = -2r, v_p(y) = -3r$ .
3. Preslikava

$$\begin{aligned} \lambda_r : E'_r/E'_{5r} &\rightarrow \mathbb{Z}_{p^{4r}} \\ (x, y) &\mapsto p^{-r}x/y \pmod{p^{4r}} \\ \infty &\mapsto 0 \end{aligned}$$

je injektivni homomorfizem.

4. Če  $(x, y) \in E'_r$  ampak  $(x, y) \notin E'_{r+1}$ , potem  $\lambda_r(x, y) \not\equiv 0 \pmod{p}$ .

Potrebovali bomo še preslikavo redukcije po modulu  $p$

$$\begin{aligned} \text{red}_p : E'(\mathbb{Q}) &\rightarrow E' \pmod{p} \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \pmod{p} \\ E'_1 &\mapsto \{\infty\} \end{aligned}$$

Ta preslikava je homomorfizem, z jedrom  $E'_1$ .

Vrnimo se sedaj k prvotnemu problemu. Imamo torej anomalno krivuljo  $E$  nad  $\mathbb{F}_p$ . Želimo poiskati  $k$ , tako da bo veljalo  $Q = kP$ . Sledeči algoritem nam da rešitev tega problema.

---

**Algoritem 6** Teoretični algoritem nad anomalnimi krivuljami

---

1. Razširi  $E, P, Q$  nad  $\mathbb{Z}$ , kot v trditvi 7.1.
  2. Naj bo  $P'_1 = pP', Q'_1 = pQ'$ .
  3. Če  $P'_1 \in E'_2$ , izberi nove  $E', P', Q'$  in se vrni na korak 2. V nasprotnem primeru je  $l_1 = \lambda_1(P'_1), l_2 = \lambda_1(Q'_1)$ . Iskani  $k$  pa je  $k \equiv l_1/l_2 \pmod{p}$ .
-

**Opomba 7.5.** Drugi korak algoritma nam zagotavlja, da so  $P'_1, Q'_1 \in E'_1$ . To je res, ker smo na anomalni krivulji in velja  $\text{red}_p(pP') = p \cdot \text{red}_p(P') = \infty$ .

Tu je potrebno podati še utemeljitev, da tak napad res deluje. Označimo  $K' = kP' - Q'$ . Velja

$$\infty = kP - Q = \text{red}_p(kP' - Q') = \text{red}_p(K').$$

To ravno pomeni, da  $K' \in E'_1$ . Od tod pa sledi, da je  $\lambda_1(K')$  definiran in velja

$$\lambda_1(pK') = p\lambda_1(K') \equiv 0 \pmod{p}.$$

Torej velja

$$kl_1 - l_2 = \lambda_1(kP'_1 - Q'_1) = \lambda_1(kpP' - pQ') = \lambda_1(pK') \equiv 0 \pmod{p}.$$

To pa je ravno to kar hočemo pokazati. Izkaže se, da je ta algoritem nepraktičen, saj ima x-koordinata točk ponavadi okoli  $p^2$  števk. Izkaže se, da lahko problem rešimo, če delamo po modulu  $p^2$  namesto da delamo v  $\mathbb{Q}$ . Tako pridemo, do novega algoritma

---

**Algoritem 7** Napad na anomalne krivulje

---

1. Razširi  $E, P, Q$  nad  $\mathbb{Z}$ , kot v trditvi 7.1.
2. Izračunaj  $P'_2 = (p-1)P' \equiv (x', y') \pmod{p^2}$ .
3. Izračunaj  $Q'_2 = (p-1)Q' \equiv (x'', y'') \pmod{p^2}$ .
4. Izračunaj

$$m_1 = p \frac{y' - y_1}{x' - x_1}, \quad m_2 = p \frac{y'' - y_2}{x'' - x_2}.$$

5. Če  $v_p(m_2) < 0$  ali  $v_p(m_1) < 0$  poiskusi na drugi krivulji  $E'$ . V nasprotnem primeru je  $k \equiv m_1/m_2 \pmod{p}$ .
- 

**Primer 7.6.** Naj bo krivulja  $E$  podana z enačbo  $y^2 = x^3 + 154x + 82$  nad poljem  $\mathbb{F}_{163}$ . Naj bosta  $P = (7, 6), Q = (150, 152)$  točki na krivulji. Iščemo tak  $k$ , da bo veljalo  $kP = Q$ . Preden lahko uporabimo algoritem 7 se moramo prepričati, da je  $E$  res anomalna krivulja. Za točko  $P$  velja  $163P = \infty$ . Ker je 163 preštevilo od tod sledi, da je red točke  $P$  enak 163. To pa pomeni, da  $163 \mid \#E(\mathbb{F}_{163})$ . Hassejev izrek 3.19 nam pove

$$q + 1 - 2\sqrt{q} \leq \#E(\mathbb{F}_q) \leq q + 1 + 2\sqrt{q},$$

$$139 \leq \#E(\mathbb{F}_{163}) \leq 189.$$

Hkrati pa vemo, da red točke deli red grupe, kar pomeni, da je  $\#E(\mathbb{F}_{163}) = 163$ . To velja, ker je 163 edino število v tem območju, ki je deljivo z 163.



Sedaj lahko uporabimo zgornji napad. Razširimo krivuljo in točke nad  $\mathbb{Q}$  in dobimo

$$E' : y^2 = x^3 - 11908x + 83049, \quad P = (7, 6), \quad Q = (150, 1293).$$

Od tod potem poračunamo

$$P2 = 162 \cdot P1 = (12884, 24607) \pmod{26569}$$

$$Q2 = 162 \cdot Q1 = (10908, 3108) \pmod{26569}$$

Prav tako imamo

$$m_1 = 163 \frac{24607 - 6}{12884 - 7} = \frac{24601}{79}$$

$$m_2 = 163 \frac{3108 - 1293}{10908 - 150} = \frac{55}{2} \pmod{26569}$$

Velja torej

$$k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{49202}{4345} \equiv 47 \pmod{163}.$$

## 8 Delitelji

**Definicija 8.1.** Naj bo  $K$  polje in naj bo  $P \in E(\overline{K})$ . Za vsako točko  $P$  definirajmo formalen simbol  $[P]$ . *Delitelj*  $D$  na krivulji  $E$  je končna linearna kombinacija takih simbolov z celoštevilskimi koeficienti.

$$D = \sum_j a_j [P_j], \quad a_j \in \mathbb{Z}$$

Iz same definicije sledi, da je delitelj element Abelove grupe generirane s simboli  $[P]$ . Označimo to grupo z  $\text{Div}(E)$ .

**Definicija 8.2.** Definirajmo *vsoto* in *stopnjo* delitelja kot

$$\text{sum}(\sum_j a_j [P_j]) = \sum_j a_j P_j \in E(\overline{K}),$$

$$\text{deg}(\sum_j a_j [P_j]) = \sum_j a_j \in \mathbb{Z}.$$

**Definicija 8.3.** Naj bo  $E$  eliptična krivulja. *Funkcija* na  $E$  je racionalna funkcija

$$f(x, y) \in \overline{K},$$

ki je definirana za vsaj eno točko na  $E(\overline{K})$ . Funkcija torej zavzame vrednosti v  $\overline{K} \cup \infty$ .

**Opomba 8.4.** Naj bo  $E$  podana z enačbo  $y^2 = x^3 + Ax + B$ . Racionalna funkcija  $\frac{1}{y^2 - x^3 - Ax - B}$  torej ne predstavlja funkcije.

**Trditev 8.5.** *Obstaja taka funkcija  $u_P$ , imenovana uniformizer v točki  $P$  z lastnostjo  $u_P(P) = 0$ , ter lastnostjo, da se da vsaka funkcija  $f(x, y)$  zapisati kot*

$$f = u_P^r g, \quad r \in \mathbb{Z}, g(P) \neq 0, \infty.$$

*Definirajmo red funkcije  $f$  v točki  $P$  kot*

$$\text{ord}_P(f) = r.$$

**Primer 8.6.** Naj bo  $y^2 = x^3 - x$  eliptična krivulja, naj bo  $f(x, y) = x$ . Izberimo  $u(x, y) = y$ . Očitno je  $u(0, 0) = 0$ . Nad eliptično krivuljo velja

$$y^2 = x^3 - x = x(x^2 - 1),$$

od tod sledi  $x = y^2 \frac{1}{x^2 - 1}$  nad  $E$ . Prav tako velja  $1/(x^2 - 1) \neq 0$  v točki  $(0, 0)$ . Od tod sledi, da je

$$\text{ord}_{(0,0)}(x) = 2, \text{ord}_{(0,0)}(x/y) = 1.$$

**Definicija 8.7.** Naj bo  $f$  funkcija nad  $E$ , ki ni identično enaka 0. Definirajmo *delitelja* funkcije  $f$  kot,

$$\text{div}(f) = \sum_{P \in E(\bar{K})} \text{ord}_P(f)[P] \in \text{Div}(E).$$

**Trditev 8.8.** *Naj bo  $E$  eliptična krivulja in naj bo  $f$  funkcija na  $E$ , ki ni identično enaka 0. Potem veljajo naslednje trditve:*

- $f$  ima le končno mnogo ničel in polov
- $\deg(\text{div}(f)) = 0$
- Če  $f$  nima ničel ali polov, potem je  $f$  konstantna.

**Izrek 8.9.** *Naj bo  $E$  eliptična krivulja. Naj bo  $D$  delitelj nad  $E$  z  $\deg(D) = 0$ . Potem obstaja taka funkcija  $f$  na  $E$  z lastnostjo*

$$\text{div}(f) = D$$

*natanko tedaj ko*

$$\text{sum}(D) = \infty.$$

*Dokaz.* Pokažimo najprej, da se da  $[P_1] + [P_2]$  zapisati kot  $[P_1 + P_2] + [\infty]$  plus delitelj neke funkcije. Recimo, da imamo tri točke  $P_1, P_2, P_3$  na neki krivulji  $E$ , ki ležijo na premici  $ax + by + c = 0$ . Naj bo  $f(x, y) = ax + by + c$ . Potem ima funkcija  $f$  ničle v točkah  $P_1, P_2, P_3$ . Če  $b$  ni enak 0 potem ima funkcija po trditvi 8.8 trojni pol v  $\infty$ . Velja torej

$$\text{div}(ax + by + c) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[\infty].$$

Ker se nahajamo na Weierstrassovi krivulji, kjer točko  $-P$  dobimo tako, da samo zamenjamo predznak  $y$ -koordinate, lahko za premico skozi točki  $P_3 = (x_3, y_3)$ , ter  $-P_3 = (x_3, -y_3)$  vzamemo  $x - x_3 = 0$ . Po trditvi 8.8 ponovno velja

$$\text{div}(x - x_3) = [P_3] + [-P_3] - 2[\infty].$$

Od tod sledi

$$\operatorname{div} \left( \frac{ax + by + c}{x - x_3} \right) = \operatorname{div}(ax + by + c) - \operatorname{div}(x - x_3) = [P_1] + [P_2] - [-P_3] - [\infty].$$

Ker na krivulji velja  $P_1 + P_2 = -P_3$  (to sledi iz načina kako na krivulji seštevamo točke), lahko zgornjo enačbo prepišemo v

$$[P_1] + [P_2] = [P_1 + P_2] + [\infty] + \operatorname{div}(g).$$

Hitro se vidi, da velja

$$\operatorname{sum}(\operatorname{div}(g)) = P_1 + P_2 - (P_1 + P_2) - \infty = \infty.$$

Prav tako, pa se iz zgornje enačbe vidi, da velja  $[P_1] + [P_2] = 2[\infty] + \operatorname{div}(h)$ , če velja  $P_1 + P_2 = \infty$ . Zaradi tega je vsota vseh členov s pozitivnimi koeficienti v  $D$  enaka nekemu simbolu  $[P]$ , večkratniku  $[\infty]$ , ter delitelju neke funkcije. Podobno velja tudi za člene z negativnimi koeficienti. Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + n[\infty] + \operatorname{div}(g_1).$$

Zaradi tega, ker je  $g_1$  kvocient produkta funkcij, ki sestavljajo  $g$ , velja tudi  $\operatorname{sum}(\operatorname{div}(g_1)) = \infty$ . Po trditvi 8.8 velja  $\deg(\operatorname{div}(g_1)) = 0$ , ker funkcija ni konstantna. Imamo torej

$$0 = \deg(D) = 1 - 1 + n + 0 = n.$$

Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + \operatorname{div}(g_1).$$

Prav tako velja

$$\operatorname{sum}(D) = P - Q + \operatorname{sum}(\operatorname{div}(g_1)) = P - Q.$$

Predpostavimo sedaj, da velja  $\operatorname{sum}(D) = \infty$ . Potem  $P - Q = \infty$ , kar pomeni da mora veljati  $P = Q$  in  $D = \operatorname{div}(g_1)$ . Če predpostavimo  $D = \operatorname{div}(f)$  za neko funkcijo  $f$ , potem

$$[P] - [Q] = \operatorname{div}(f/g_1).$$

Od tod po lemi 8.10 sledi  $P = Q$  in torej  $\operatorname{sum}(D) = \infty$ . □

**Lema 8.10.** *Naj bosta  $P, Q \in E(\overline{K})$ , ter naj obstaja funkcija  $h$  na  $E$  za katero velja*

$$\operatorname{div}(h) = [P] - [Q].$$

*Potem sledi  $P = Q$ .*

## 9 Kriptografija nad Eliptičnimi krivuljami

### 9.1 ElGamalova enkripcija

ElGamalova enkripcija javnega ključa temelji na problemu diskretnega logaritma. V primeru, da bi rešili problem diskretnega logaritma, bi lahko prebrali tudi vsa poslana sporočila. Denimo, da hoče Alenka komunicirati z Borisom. Vsaj eden od njih mora imeti na nekem javnem mestu objavljene nekatere informacije. Pa recimo, da ima Boris izbrano neko krivuljo  $E$  nad nekim končnim poljem  $\mathbb{F}_q$ . Na tej krivulji ima izbrano točko  $P$ . Boris si sedaj izbere še skrivni ključ  $s$ , s katerim poračuna  $B = sP$ . Sedaj podatke  $E, P, B$  javno objavi. Če hoče Alenka komunicirati z Borisom ta postopek poteka na sledeč način:

1. Predstavi sporočilo, kot neko točko  $M \in E(\mathbb{F}_q)$ .
2. Izberi skrivno število  $k$  in izračunaj  $M_1 = kP$ .
3. Izračunaj  $M_2 = M + kB$ .
4. Pošlji Borisu  $M_1, M_2$ .

Boris izračuna  $M$  kot

$$M = M_2 - sM_1.$$

Prepričajmo se, da na ta način res dobimo točko  $M$ .

$$M_2 - sM_1 = (M + kB) - k(sP) = M + ksBP - ksP = M.$$

Vsak tretji poslušalec, ki bi znal rešiti problem diskretnega logaritma, bi lahko s pomočjo  $P, B$  izračunal  $s$ , ali pa s pomočjo  $P, M_1$  izračunal  $k$ .

Pomembno pri celotni shemi pa je tudi to, da Alenka za različna sporočila ne uporablja enakega števila  $k$ . Recimo, da bi za sporočili  $M, M'$  Alenka uporabila isti  $k$ . Vsak tretji poslušalec bi lahko opazil, da sta v tem primeru točki  $M_1, M'_1$  enaki. Tako bi lahko izračunal

$$M_2 - M'_2 = M' - M.$$

To na prvi pogled ne deluje resna grožnja, a bi lahko povzročila velika škodo, če delamo z informacijami ki bi kasneje postale javne. Če bi npr. sporočilo, ki je predstavljeno s točko  $M$  kasneje postalo javno bi lahko brez težav sedaj izračunali še

$$M' = M - M_2 + M'_2.$$

Vprašanje, ki ga moramo tu še razrešiti je kako sporočilo predstaviti kot točko na krivulji. Ena izmed možnosti je način, ki ga je predlagal Koblitz. Denimo, da jekrivulaj podana z enačbo  $y^2 = x^3 + Ax + B$  nad  $\mathbb{F}_p$ . Sporočilo  $m$  predstavimo kot število  $0 \leq m \leq p/100$ . Sedaj določimo  $x_j = 100m + j$ , za  $0 \leq j < 100$ . Podobno, kot pri generiranju naključne točke sedaj poskusimo določiti koordinato  $y_j$  če ta obstaja. Če smo uspeli poračunati obe koordinanti je naša točka  $M = (x_j, y_j)$ . Ker velja  $0 \leq x_j < p + 100$  je  $m$  določen kot  $m = \lfloor x_j \rfloor$ . Ocenimo lahko, da je verjetnost neobstoja take točke približno  $2^{-100}$ .

## 9.2 Kriptosistemi nad parjenji

V enem od prejšnjih poglavij smo videli, kako lahko s pomočjo Weilovega parjenja izvedemo napad na supersingularne krivulje. Sedaj pa si bomo ogledali kriptosistem, ki uporablja supersingularne krivulje. Tu se opremo na dejstvo, da kljub napadom kot je MOV problem diskretnega logaritma v  $\mathbb{F}_p^\times$  ni enostaven. Če izberemo dovolj velik  $p$  je ta problem še vedno zelo zahteven. Take krivulje izbiramo zato, ker lahko izkoristimo določene lastnosti.

Delajmo sedaj nad krivuljo  $E$  podano z enačbo  $y^2 = x^3 + 1$  nad  $\mathbb{F}_p$ , kjer je  $p \equiv 2 \pmod{3}$ . Take krivulje so supersingularne. Naj bo  $\omega \in \mathbb{F}_{p^2}$  tretji koren enote. Definirajmo preslikavo

$$\beta : E(\mathbb{F}_{p^2}) \rightarrow E(\mathbb{F}_{p^2}), (x, y) \mapsto (\omega x, y), \beta(\infty) = \infty.$$

Predpostavimo, da ima  $P$  red  $n$ . Potem ima tudi  $\beta(P)$  red  $n$ . Uporabimo modificirano Weilovo parjenje

$$e'_n(P_1, P_2) = e_n(P_1, \beta(P_2)).$$

Pokazali smo že v lemi 4.5 da v primeru ko velja  $3 \nmid n$  in ima  $P \in E(\mathbb{F}_p)$  red  $n$ , potem sledi, da je  $e'_n(P, P)$  primitivni  $n$ -ti koren enote.

Ker je  $E$  supersingularna ima red  $p + 1$ . Predpostavimo še, da velja  $p = 6l - 1$  za neko praštevilo  $l$ . To pomeni, da ima točka  $6P$  red  $l$  ali 1 za vsako točko  $P$ . Za pripravo kriptosistema najprej neka agencija, ki jamči našo identiteto naredi sledeče:

- Izbere veliko praštevilo  $p = 6l - 1$ .
- Izbere točko  $P$  reda  $l$  na  $E(\mathbb{F}_p)$ .
- Izbere zgoščevalni funkciji  $H_1, H_2$ . Funkcija  $H_1$  vzame niz bitov poljubne dolžine in vrne točko reda  $l$  na krivulji  $E$ . Funkcija  $H_2$  pa vzame element reda  $l$  iz  $\mathbb{F}_{p^2}^\times$  in vrne binarni niz dolžine  $n$ , kjer je  $n$  dolžina sporočila, ki bo poslano.
- Izbere skrivno število  $s \in \mathbb{F}_l^\times$  in izračuna  $P_{\text{javni}} = sP$ .
- Javno objavi  $p, H_1, H_2, n, P, P_{\text{javni}}$  obdrži pa  $s$ .

Če hoče sedaj uporabnik z identiteto  $I$  dobiti privatni ključ, agencija naredi sledeče:

- Izračuna  $Q_I = H_1(I)$ .
- Izračuna  $D_I = sQ_I$ .
- Ko preveri ideniteto uporabnika  $I$  pošlje  $D_I$  uporabniku.

Če hoče sedaj Alenka Borisu poslati sporočilo  $M$  to naredi tako:

- Alenka poišče Borisovo identiteto  $I$ , ter izračuna  $Q_I = H_1(I)$ .
- Izbere naključni element  $r \in \mathbb{F}_l^\times$ .

- Izračuna  $g_I = e'_l(Q_I, P_{\text{javni}})$ .

- Sporočilo  $c$  zapiše kot

$$c = (rP, M \oplus H_2(g_I^r)).$$

Tu oznaka  $\oplus$  predstavlja operacijo XOR na bitih.

[5] [4] [3] [1] [2]

## Literatura

- [1] H. Jeffrey, P. Jill in J. H. Silverman, *An Introduction to Mathematical Cryptography*, Springer, 2008.
- [2] B. Lynn, *On the implementation of pairing-based cryptosystems*, doktorska disertacija, Stanford university, 2007.
- [3] V. S. Miller, *Short Programs for functions on Curves*.
- [4] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, druga izd., 2009.
- [5] L. C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography*, Chapman and Hall/CRC, druga izd., 2008.

