UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Miha Avsec

KUBIČNE KRIVULJE V KRIPTOGRAFIJI

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Anita Buckley
Somentor: pred. mag. Matjaž Praprotnik

Ljubljana, 2019

Kazalo

Program dela **v**

1 Uvod **1**

2 Končna polja **2**

3 Kubične krivulje **4**
3.1 Točke na krivulji 4
3.2 Tonelli-Shanks 6
3.3 Struktura grupe na kubičnih krivuljah 6
3.4 Endomorfizmi 10
3.5 Frobeniusev endomorfizem 12
3.6 Red grupe nad eliptičnimi krivuljami 15

4 Delitelji **18**

5 Torzijske točke **20**

6 Weilovo parjenje **24**
6.1 Učinkovit algoritem za izračun Weilovega parjenja 29
6.2 Implementacija Millerjevega algoritma 32

7 Problem diskretnega logaritma **36**
7.1 Index Calculus 38
7.2 Index Calculus program 39

8 MOV **41**
8.1 Mali korak, Velik korak 44
8.2 MOV napad program 45

9 Anomalne krivulje **47**
9.1 Anonomalne program 51

10 Kriptografija nad Eliptičnimi krivuljami **52**
10.1 ElGamalova enkripcija 52
10.2 Kriptosistemi nad parjenji 53

11 Zaključek **54**

A Program osnovne strukture kubičnih krivulj **55**

Literatura **69**

Program dela

Mentor naj napiše program dela skupaj z osnovno literaturo. Na literaturo se lahko sklicuje kot [?], [?], [?], [?].

Osnovna literatura

[7] L. C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography*, Chapman and Hall/CRC, druga izd., 2008

[3] H. Jeffrey, P. Jill in J. H. Silverman, *An Introduction to Mathematical Cryptography*, Springer, 2008

Podpis mentorja:

Kubične krivulje v kriptografiji

Povzetek

Kubične krivulje nam v kriptografiji dajejo prednosti nad drugimi kriptosistemi, saj veljajo za bolj varne. Skozi delo bomo spoznali, osnovne pojme in definicije, ter si pogledali nekaj načinov uporabe krivulj za namene kriptografije. Videli bomo tudi različne napade na krivulje in na ta način spoznali nekaj o tem, kako pravilno izbrati krivuljo. Predvsem bomo videli česa ne smemo izbrati.

Eliptic curves in cryptography

Abstract

Cubic curves in cryptography have some advantages compared to other cryptosystems. They are considered safer with the same length of the key. During the course of this master thesis we will learn some basic definitions and some basic theorems about cubic curves. We will follow that with some uses of cubic curves in cryptography, where we will look at some cryptosystems and theier weaknesses. An important thing discussed in the thesis will also be safety. The safety will be considered with multiple attacks on curves. That way we will get a basic idea of what curves not to use in cryptography.

Math. Subj. Class. (2010): 11T71, 94A60, 14H52, 11G20

Ključne besede: kubična krivulja , kriptografija , Weilovo parjenje , anomalne krivulje , supersingularne krivulje , MOV napad , index calculus , Millerjev algoritem , torzijske točke , ...

Keywords: cubic curve , cryptography , Weil pairing , anomalous curves , supersingular curves , MOV attack , Index calculus , Miller's algorithm , torsion points

1 Uvod

Kubične krivulje v kriptografiji dobivajo vedno večji pomen, saj zagotavljajo isto varnost, kot drugi klasični kriptosistemi, pri tem pa potrebujejo manjšo velikost ključa. Ocenjuje se, da je 2048 bitni ključ v RSA algoritmu enako varen kot 224 bitni ključ nad kubičnimi krivuljami. Podrobnejšo primerjavo, pa lahko vidimo v spodnji tabeli.

SIM	***ECC***	***RSA***
80	160	1024
112	224	2048
128	256	3072
192	384	7680
256	521	15360

Tabela 1: V tabeli so v posamezni vrstici dolžine ključev v bitih, ki glede na simetrične kriptosisteme, kriptosisteme z uporabo kubičnih krivulj, ter RSA zagotavljajo enako varnost.

Tu je potrebno dodati, da simetrični kriptosistemi ne omogočajo enostavne komunikacije, saj je za njihovo uporabo potreben predhoden dogovor o ključu. Klasično se uporablja npr. RSA ali ECC, za samo izmenjavo ključa, nato pa se komunikacija nadaljuje s pomočjo simetričnih kriptosistemov Krajši ključi predstavljajo veliko prednost v okoljih s slabšo procesorsko močjo in/ali omejenim pomnilnikom. Te naprave pa so v današnjem svetu kljub hitrim tehnološkim napredkom zelo pogoste. Med njih bi lahko umestili razne naprave v t. i. pametni hiši, razne pametne kartice, itd. Zgodovinsko gledano sega uporaba kubičnih krivulj v kriptografske namene v konec 20. stoletja. Uporaba kubičnih krivulj pa ni omejena le na kriptosistem, ki uporabljajo krivulje, ampak lahko služi tudi kot orodje za napade na klasične kriptosisteme. Tako lahko kubične krivulje uporabljamo tudi pri faktorizacijskih algoritmih, saj pri določenih pogojih predstavljajo enega najhitrejših poznanih algoritmov za razcep števil. S pomočjo tega lahko napademo vse kriptosisteme, katerih varnost temelji na problemu faktorizacije. Njihovo uporabo je prvi predlagal Victor S. Miller leta 1985, a so le te v širšo rabo vstopile še le okoli leta 2004.

V tem magistrskem delu, se bomo najprej spoznali osnove definicije in izreke v povezavi z kubičnimi krivuljami nad končnimi polji. Za tem pa se bomo posvetili problemu diskretnega logaritma nad eliptičnimi krivuljami. S pomočjo tega bomo spoznali nekaj napadov na eliptične krivulje, ter izvedeli nekaj o primerni izbiri krivulj za kriptografske namene. Pri tem bomo govorili tudi o parjenju nad eliptičnimi krivuljami in spoznali učinkovit algoritem za izračun le tega. Vse skupaj pa bomo pospremili še s programsko kodo.

2 Končna polja

Skozi celotno delo se bomo ukvarjali s končimi polji in njihovimi razširitvami. Spomnimo se najprej vseh definicij in lastnosti, ki jih bomo kasneje potrebovali.

Končna polja ali *Galoisova polja*, so polja s končnim številom elementov. Najpogostejši primer takih polj so število modulo p, kjer je p praštevilo. Polje z q elementi označimo z $\mathbb{F}_q$, pojavlja pa se tudi oznaka $GF(q)$. Poglejmo si nekaj pomembnih lastnosti takih polj.

Trditev 2.1.
Naj bo p praštevilo, potem veljajo naslednje lastnosti.

- *Končno polje reda q obstaja natanko tedaj, ko velja $q = p^k$, za nek $k \in \mathbb{N}$.*
- *Vsa končna polja reda q so si izomorfna.*
- *Vsak element polja $\mathbb{F}_q$ zadošča enačbi $x^q - x = 0$.*
- *Multiplikativna grupa končnega polja je ciklična.*

Tekom magistrskega dela bomo večkrat delali v poljih katerih število elementov je potenca praštevila. Poglejmo si kako konstruiramo polje z $q = p^n$ elementi.

Najprej si izberemo nerazcepni polinom P v $\mathbb{F}_p[X]$ stopnje n. Potem velja, da je kvocientni prostor

$$\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[X]/(P)$$

polinomov nad $\mathbb{F}_p$ z idealom generiranim z P, polje reda q. Bolj natančno so torej elementi $\mathbb{F}_q$ polinomi nad poljem $\mathbb{F}_p$ stopnje strogo manjše, kot n. Seštevanje in odštevanje poteka na standardni način. Produkt dveh elementov dobimo, kot ostanek pri deljenju z P produkta polinomov v $\mathbb{F}_p[X]$. Inverzne elemente pa lahko poiščemo s pomočjo razširjenega Evklidovega algoritma.

Primer 2.2.
Poglejmo si polje $\mathbb{F}_4$. Vzemimo nerazcepni polinom

$$X^2 + X + 1.$$

Velja torej

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1) = \{0, 1, \alpha, 1 + \alpha\},$$

kjer je α ničla zgornjega polinoma v $\mathbb{F}_4$. Vse operacije na elementih $\mathbb{F}_4$ bi lahko zapisali s tabelami

$+$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	1	α	$1+\alpha$
1	1	0	$1+\alpha$	α
α	α	$1+\alpha$	0	1
$1+\alpha$	$1+\alpha$	α	1	0

$\times$	0	1	α	$1+\alpha$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$1+\alpha$
α	0	α	$1+\alpha$	α
$1+\alpha$	0	α	α	$1+\alpha$

x/y	0	1	α	$1+\alpha$
0	/	0	0	0
1	/	1	$1+\alpha$	α
α	/	α	1	$1+\alpha$
$1+\alpha$	/	$1+\alpha$	α	1

Primer 2.3.

Poglejmo si še en zanimiv primer. Naj bo $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_{p^2}$, kjer je p praštevilo za katero velja $p \equiv 3 \pmod 4$. V tem primeru lahko za nerazcepni polinom izberemo $X^2 + 1$. Elementi polja $\mathbb{F}_q$ so torej oblike

$$a + b\alpha,$$

$a, b \in \mathbb{F}_p$, α pa je število za katero velja $\alpha^2 = 1$. To nas močno spominja na kompleksna števila. Tudi računske operacije se obnašajo enako kot pri kompleksnih številih. V takih poljih lahko torej namesto s polinomi delamo kar s kompleksnimi števili.

Velikokrat se bo v nadaljevanju pojavljal tudi pojem algebraičnega zaprtja polja $\mathbb{F}_q$ z oznako $\overline{\mathbb{F}_q}$. Spomnimo se vseh potrebnih pojmov za razumevanje le tega.

Definicija 2.4.

Naj bo polje $\mathcal{E}$ razširitev polja $\mathcal{F}$. Pravimo, da je $a \in \mathcal{E}$ *algebraičen* nad $\mathcal{F}$, če obstaja tak $0 \neq f(X) \in \mathcal{F}[X]$, da velja f(a) = 0.

Definicija 2.5.

Polje $\mathcal{E}$ je *algebraična razširitev* polja $\mathcal{F}$, če je vsak element iz $\mathcal{E}$ algebraičen nad $\mathcal{F}$.

Definicija 2.6. Polje $\mathcal{F}$ je *algebrično zaprto*, če ima vsak nekonstanten polinom iz $\mathcal{F}[X]$ vsaj eno ničlo v $\mathcal{F}$.

Definicija 2.7.

Polje $\mathcal{A}$ se imenuje *algebraično zaprtje* poja $\mathcal{F}$, če je algebraično zaprto in je algebraična razširitev $\mathcal{F}$.

Primer 2.8.

$\mathbb{C}$ je algebraično zaprtje $\mathbb{R}$, ni pa algebraično zaprtje $\mathbb{Q}$, saj ni algebraična razširitev.

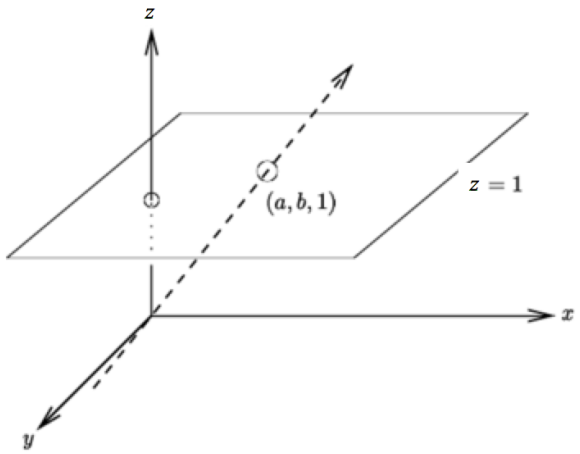
3 Kubične krivulje

3.1 Točke na krivulji

Definicija 3.1.

Projektivna ravnina $\mathbb{P}^2$ nad poljem $\mathbb{F}$ je kvocientni prostor $\mathbb{F}^3 - \{0\}/\sim$, kjer je ekvivalenčna relacija podana z $(a, b, c) \sim (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ za vsak $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Točke v $\mathbb{P}^2$ so torej podane s homogenimi koordinatami $[a, b, c] = [\alpha a, \alpha b, \alpha c]$ za vse $\alpha \neq 0$.

Točko projektivne ravnine si lahko predstavljamo kot premico skozi izhodišče, kot prikazuje slika 1.



Slika 1: Točka [a,b,1] v projektivni ravnini.

Definicija 3.2.

Polinom P je *homogen* stopnje d, če velja $P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d P(x, y, z)$ za vse $\lambda \in \mathbb{F}$.

Definicija 3.3.

Algebraična krivulja, podana s homogenim polinomom P, je množica točk

$$\mathcal{C}_P = \{A \in \mathbb{P}^2, P(A) = 0\}.$$

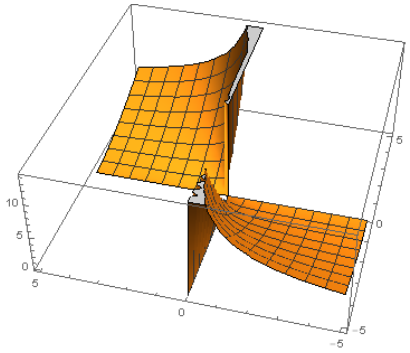
Kubična krivulja je algebraična krivulja, podana s homogenim polinomom stopnje 3. V splošnem je torej oblike

$$\begin{aligned} &a_{300}x^3 + a_{210}x^2y + a_{201}x^2z + a_{120}xy^2 + a_{102}xz^2 + \\ &+ a_{012}yz^2 + a_{030}y^3 + a_{003}z^3 + a_{111}xyz + a_{021}y^2z = 0, \end{aligned}$$

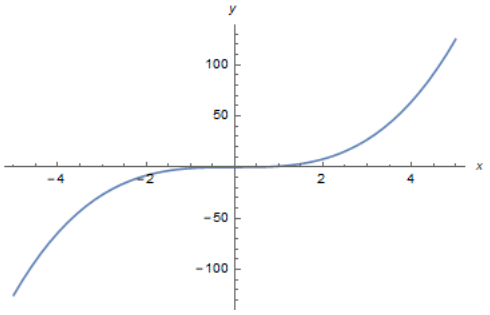
kjer so $a_{ijk} \in \mathbb{F}$. Ta zapis vsebuje 10 koeficientov, vendar se v gladkih primerih lahko polinom poenostavi.

Definicija 3.4.

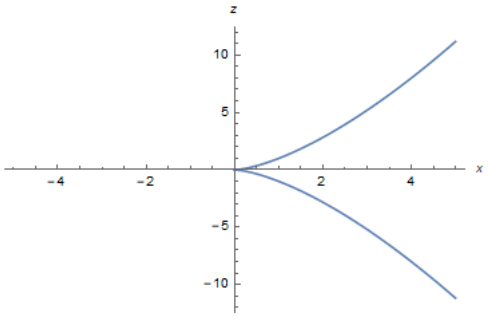
Algebraična krivulja je *gladka*, če nima nobenih samopresečišč ali singularnosti.



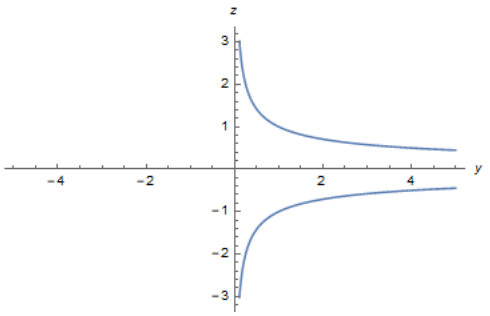
Slika 2: Algebraična krivulja, podana s polinomom $z^2y - x^3$.



Slika 3: Presek algebraične krivulje z ravnino $z = 1$.



Slika 4: Presek algebraične krivulje z ravnino $y = 1$.



Slika 5: Presek algebraične krivulje z ravnino $x = 1$.

Izrek 3.5 ([1], Izrek 15.2)**.**
Gladko kubično krivuljo nad algebraično zaprtim poljem lahko zapišemo v Weierstrassovi obliki

$$y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3.$$

Primer 3.6.
Polinom $P(x, y, z) = z^2y - x^3$ je homogen polinom stopnje 3. Rešitve enačbe $z^2y - x^3 = 0$ pa podajajo točke na kubični krivulji.

Na zgornjih slikah lahko vidimo, kako krivuljo predstavimo v projektivni ravnini, ter njene preseke z različnimi afinimi ravninami.

V nadaljevanju nas bodo zanimale predvsem gladke kubične krivulje v polju $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Definicija 3.7.
Za dani števili $a, b \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ je *kubična krivulja* nad poljem $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ množica točk

$$E_{(a,b)}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3\right\}.$$

Drugače povedano, afina kubična krivulja je množica rešitev enačbe

$$y^2 = x^3 + ax + b.$$

Pri čemer upoštevamo zvezo med afinimi in projektivnimi koordinatami točk:

$$(x, y) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \Leftrightarrow [x, y, 1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Definicija 3.8.
Eliptična krivulja je gladka kubična krivulja.

3.2 Tonelli-Shanks

Pomembno vlogo v kriptografiji igra tudi naključnost. Če privzamemo, da lahko naključno izberemo število $0 \leq x \leq n$, potem nas zanima, kako učinkovito izberemo naključno točko na krivulji oblike $y^2 = x^3 + Ax + B \mod n$. Ideja je preprosta. Naključno generirajmo koordinato x in nato poizkusimo rešiti enačbo $y^2 = X \mod n$, če tak y obstaja. V nasprotnem primeru generiramo novo x koordinato in poizkusimo ponovno. Problem se torej skriva le v reševanju kvadratne enačbe. Tu pa nam pomaga Tonneli-Shankov algoritem, ki učinkovito reši zgornjo enačbo.

Trditev 3.9.
Naj bo $p > 2$ praštevilo. Če se da $n \in \mathbb{Z}_p$ zapisati kot $n = r^2, r \in \mathbb{Z}_p$, potem na algoritem 1 vrne r.

Algoritem 1 Tonelli-Shanks

Najdi tak $z \in Z_p$, da z ni kvadrat
Poišči s, Q, tako da $p - 1 = Q2^s$
$M = s, c = z^Q, t = n^Q, R = n^{\frac{Q+1}{2}}$
while True **do**
  if $t = 0$ **then**
    return $r = 0$
  else if $t = 1$ **then**
    return $r = R$
  else
    Poišči $0 < i < M$, da velja $t^{2^i} = 1$
    $M = i, c = b^2, t = tb^2, R = Rb$
  end if
end while

Opomba 3.10.
V algoritmu 1 lahko prvi korak izvedemo tako, da preiskušamo naključne $g \in \mathbb{Z}_p$, dokler ne velja $g^{(p-1)/2} = -1$.

3.3 Struktura grupe na kubičnih krivuljah

Za definicijo grupe na kubičnih krivuljah uvedimo najprej pomožno operacijo

$$* : \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P \to \mathcal{C}_P,$$

tako da za poljubni točki A, B na krivulji velja:

$$A * B = \begin{cases} A & \text{če je } A = B \text{ prevoj,} \\ C & \text{če je } \overline{AB} \cap \mathcal{C}_P = \{A, B, C\}, \\ A & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } A, \text{ ter } A \neq B, \\ B & \text{če je } \overline{AB} \text{ tangenta v } B, \text{ ter } A \neq B, \\ C & \text{če je } A = B \text{ } \{\text{in tangenta v A}\} \cap \mathcal{C}_P = \{A, C\}. \end{cases}$$

Intuitivno operacija $*$ vrne tretjo točko v preseku premice skozi A in B in $\mathcal{C}_P$. Poglejmo si še nekaj lastnosti operacije $*$. Dokaze sledečih trditev najdemo v [**?**, Poglavje 17.3].

Trditev 3.11.
Operacija $*$ ima naslednje lastnosti:

- *komutativnost:* $A * B = B * A$,
- *absorpcija:* $(A * B) * A = B$,
- $((A * B) * C) * D = A * ((B * D) * C)$.

Izrek 3.12.
Kubična krivulja ($\mathcal{C}_P$,+) je Abelova grupa za operacijo

$$\begin{array}{rccl} + : & \mathcal{C}_P \times \mathcal{C}_P & \to & \mathcal{C}_P \\ & (A, B) & \to & (A * B) * O \ , \end{array}$$

kjer je O poljubna izbrana točka na krivulji $\mathcal{C}_P$.

Dokaz.
S pomočjo trditve 3.11 dokažimo, da je ($\mathcal{C}_P$,+) res Abelova grupa.

- Operacija + je komutativna:

$$A + B = (A * B) * O = (B * A) * O = B + A.$$

- Točka O je nevtralni element:

$$A + O = (A * O) * O = A.$$

- Nasprotni element A definiramo kot $-A = A * (O * O)$ in preverimo:

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (A * (A * (O * O))) * O \\ &= (O * O) * O \\ &= O, \end{aligned}$$

kjer smo uporabili absorbcijo.

- Asociativnost $(A+B)+C = A+(B+C)$ dokažemo z računom:

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= ((A+B)*C)*O \\ &= (((A*B)*O)*C)*O \\ &= (A*((B*C)*O))*O \\ &= (A*(B+C))*O = A+(B+C). \end{aligned}$$ □

Ta definicija operacije nudi eleganten opis strukture grupe, za numerično računanje pa ni primerna. Možno pa je izpeljati formule, s katerimi lahko eksplicitno izračunamo vsoto dveh točk, v kolikor imamo kubično krivuljo v Weierstrassvi obliki.

Lema 3.13 (Seštevanje točk na Weierstrassovi kubični krivulji)**.**
Naj bo $\mathcal{C}_P$ afina krivulja v Weierstrassovi obliki $y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ter O prevoj v neskončnosti. Če sta $A_1 = (a_1, b_1)$ in $A_2 = (a_2, b_2)$ točki na afinem delu $\mathcal{C}_P$, potem za $A_3 = A_1 + A_2 = (a_3, b_3)$ velja

$$\begin{aligned} a_3 &= \lambda^2 - \alpha - a_1 - a_2 \\ b_3 &= -\lambda a_3 - \mu, \end{aligned}$$

kjer sta

$$\lambda = \begin{cases} \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} & \text{če } a_1 \neq a_2, \\ \frac{3a_1^2 + 2\alpha a_1 + \beta}{2b_1} & \text{sicer,} \end{cases}$$

ter $\mu = b_1 - \lambda a_1$.

Opomba 3.14.
Če krivuljo $\mathcal{C}_P$ predstavimo v projektivni ravnini, torej s homogenim polinomom $yz^2 = x^3 + \alpha x^2 z + \beta x z^2 + \gamma y z^2$ je prevoj $O = [0, 1, 0]$.

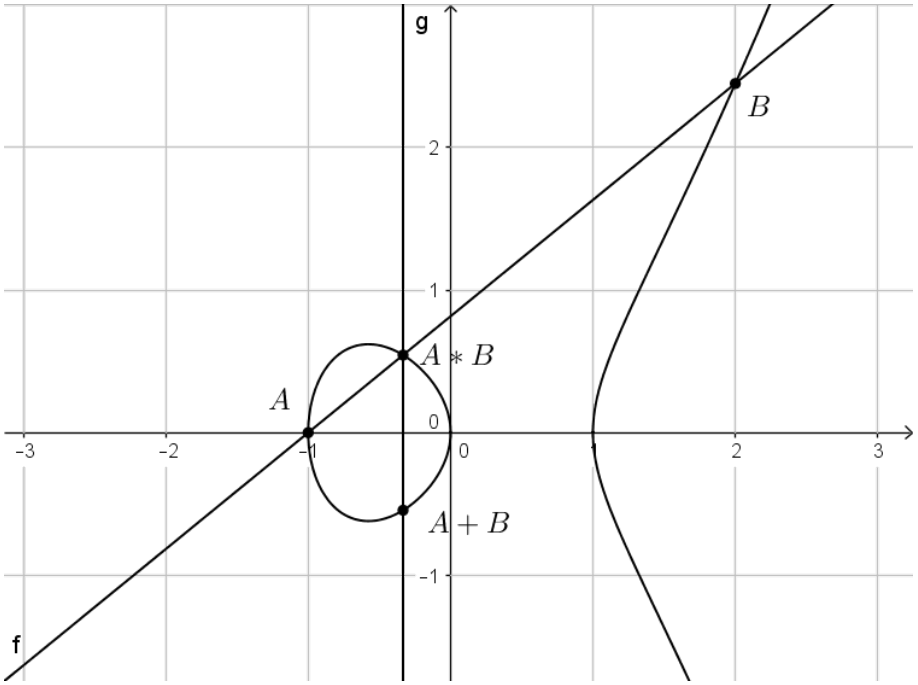
Primer 3.15.
Na spodnji sliki je v afini ravnini $y = 1$ prikazano kako grafično seštevamo točke na Weierstrassovi kubiki $yz^2 - x(x-y)(x+y) = 0$. Sešteti želimo točki $A = (-1, 0)$ in $B = (2, \sqrt{6})$.

Primer 3.16.
Seštejmo točki $A = (-1, 0), B = (2, \sqrt{6})$ na Weierstrassovi kubični krivulji $yz^2 - x(x-y)(x+y) = 0$ v preseku s projektivno ravnino $y = 1$ še računsko z uporabo zgornje leme 3.13. Prepišimo našo krivuljo najprej v afino obliko iz leme 3.13. Ker smo v ravnini $y = 1$, najprej zamenjajmo vlogi y in z.

$$z^2 - x(x-1)(x+1) = 0$$

Dobimo $z^2 = x^3 - x$, torej je $\alpha = 0$, $\beta = -1$ in $\gamma = 0$. Izračunajmo sedaj λ in μ, pri čemer upoštevamo prvi predpis, saj sta x-koordinati točk različni:

$$\lambda = \frac{-\sqrt{6}}{-1-2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$



Slika 6: Grafično seštevanje točk na kubični krivulji.

$$\mu = 0 - \frac{\sqrt{6}}{3}(-1) = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Koordinati vsote $A + B = (x, y)$ sta torej enaki

$$x = \frac{6}{9} - 0 + 1 - 2 = -\frac{1}{3}$$

in

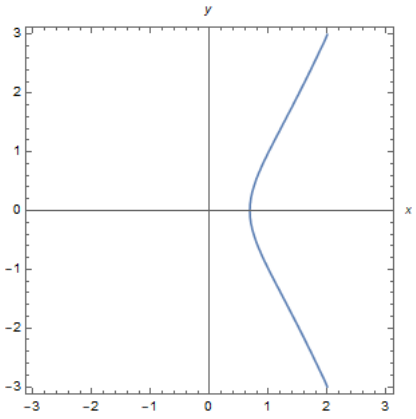
$$z = -\frac{\sqrt{6}}{3}(-\frac{1}{3}) - \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{2\sqrt{6}}{9} \doteq -0.5443.$$

Iskana točka $A + B \in \mathbb{P}^2$ je torej enaka $[-\frac{1}{3}, 1, -\frac{2\sqrt{6}}{9}]$. Dobljeni rezultat se ujema s točko, ki smo jo dobili z grafičnim seštevanjem.

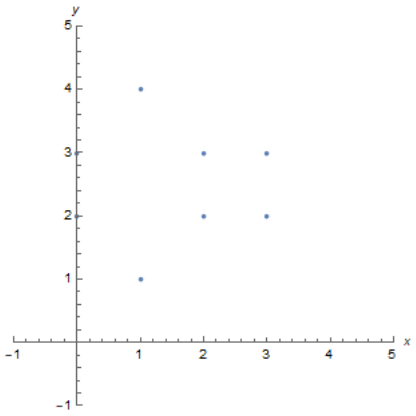
Poglejmo si še primer kubične krivulje v $\mathbb{Z}_n$.

Primer 3.17.
Naj bo E krivulja oblike $y^2 = x^3 + x - 1$ nad poljem $\mathbb{Z}_5$. Poglejmo si kako izgledajo točke na krivulji E.

x	$x^3 + x - 1$	y	Točke
0	-1	± 3	$(0,3), (0,2)$
1	1	± 1	$(1,1), (1,4)$
2	4	± 3	$(2,3), (2,2)$
3	4	± 3	$(3,3), (3,2)$
4	2	/	/
∞	∞	∞	∞



Slika 7: Algebraična krivulja $y^2 = x^3 + x - 1$ v $\mathbb{R}$.



Slika 8: Algebraična krivulja $y^2 = x^3 + x - 1$ v $\mathbb{Z}_5$.

Izračunajmo sedaj še $(2,3) + (1,1)$. Uporabimo formule 3.13, tako dobimo

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2, \\ x_3 &= 4 - 2 - 1 = 1, \\ \mu &= 3 - 2 \cdot 2 = -1 = 4, \\ y_3 &= -2(1) - 4 = 4. \end{aligned}$$

$(2,3) + (1,1)$ je torej enako $(1,4)$ nad E.

3.4 Endomorfizmi

Definicija 3.18.

Endomorfizem na E je homomorfizem $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$, ki je podan z racionalno funkcijo. Torej obstajata racionalni funkciji R_1, R_2 s koeficienti v $\overline{K}$ tako da velja

$$\alpha(x,y) = (R_1(x,y), R_2(x,y)),$$

za vse $(x,y) \in E(\overline{K})$.

Primer 3.19.

Naj bo E krivulja podana z $y^2 = x^3 + Ax + B$, ter naj bo $\alpha(P) = 2P$. α je očitno homomorfizem. Prav tako pa po lemi 3.13 obstajajo racionalne funkcije za seštevanje točk na kubičnih krivuljah, zato je α tudi endomorfizem nad E.

Zaradi vseh možnih oblik racionalnih funkcij bo priročno, če bomo zapis endomorfizmov standardizirali, ter bomo od tod naprej privzeli, da so vsi endomorfizmi zapisani v taki obliki. V racionalni funkciji $R(x,y)$ lahko zaradi tega ker se nahajamo na Weierstrassovi krivulji vse sode potence y zamenjamo z $x^3 + Ax + B$ na primerno potenco. Zaradi tega lahko $R(x,y)$ zapišemo kot

$$R(x,y) = \frac{p_1(x) + p_2(x)y}{p_3(x) + p_4(x)y}.$$

Če sedaj še pomnožimo števec in imenovalec z $p_3 - p_4 y$ ter potem zamenjamo y^2 z $x^3 + Ax + B$, dobimo izraz oblike

$$R(x, y) = \frac{q_1(x) + q_2(x)y}{q_3(x)}.$$

Ker za točke na Weierstrassovi krivulji velja $-(x, y) = (x, -y)$ od tod sledi, da za vsak endomorfizem $\alpha = (R_1, R_2)$ nad E velja

$$R_1(x, -y) = R_1(x, y),\ R_2(x, -y) = -R_2(x, y).$$

To sledi iz dejstva, da je α homomorfizem in velja

$$\alpha(x, -y) = \alpha(-(x, y)) = -\alpha(x, y).$$

To pa pomeni, da se da $\alpha(x, y)$ zapisati kot $\alpha(x, y) = (r_1(x), r_2(x)y)$, kjer sta r_1, r_2 racionalni funkciji.

Če zapišemo sedaj $r_1(x)$ kot

$$r_1(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

potem lahko definiramo še nekaj pojmov.

Definicija 3.20.
Stopnja endomorfizma je definirano kot

$$\deg(\alpha) = \mathrm{Max}\{\deg p(x), \deg q(x)\},$$

če je α ne trivialen V primeru $\alpha \equiv 0$, definiramo $\deg(0) = 0$.

Definicija 3.21.
$\alpha \not\equiv 0$ je *separabilni* endomorfizem če je odvod $r_1'(x) \not\equiv 0$.

Poglejmo si na primeru, kako določimo stopnjo, ter ali je enodmorfizem seperabilen.

Primer 3.22. Če vzamemo enak endomorfizem kot v prejšnjem primeru $\alpha(P) = 2P$ imamo funkcijo

$$R_1(x, y) = \left(\frac{3x^2 + A}{2y}\right)^2 - 2x.$$

To lahko sedaj preoblikujemo kot

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x^2 + A}{2y}\right)^2 - 2x &= \frac{9x^4 + 6Ax^2 + A^2}{4y^2} - 2x \\ &= \frac{9x^4 + 6Ax^2 + A^2 - 2x(4(x^2 + Ax + B))}{4(x^2 + Ax + B)} \\ &= \frac{x^4 - 2Ax^2 - 8Bx + A^2}{4(x^2 + Ax + B)}\end{aligned}$$

Dobimo torej

$$r_1(x) = \frac{x^4 - 2Ax^2 - 8Bx + A^2}{4(x^2 + Ax + B)}.$$

Stopnja $deg(\alpha) = 4$.

Poglejmo si še odvod $r_1'(x)$.

$$\begin{aligned} r_1'(x) &= \frac{(4x^3 - 4Ax - 8B)4(x^3 + Ax + B) - (x^4 - 2Ax^2 - 8Bx + A^2)(12x^2 + 4A)}{16(x^2 + Ax + B)^2} \\ &= \ldots = \\ &= \frac{-A^3 - 8B^2 + 2x^5 - 2A^2x(1 + x) + 4Bx^2(2 + x) + A(-4Bx + 3x^4)}{4(B + x(A + x))^2} \end{aligned}$$

Števec zgornje enačbe pa ni identično enak 0, torej je endomorfizem seperabilen.

Opomba 3.23.

Če bi zgornji endomorfizem gledali v $\mathbb{F}_2$, bi dobili primer endomorfizma, ki ni seperabilen.

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednji izrek, za katerega ne bomo podali dokaza.

Izrek 3.24 ([7], Izrek 2.21)**.**

Naj bo $\alpha \neq 0$ seperabilni endomorfizem nad eliptično krivuljo E. Potem velja

$$deg(\alpha) = \#Ker(\alpha).$$

Če $\alpha \neq 0$ ni seperabilen velja

$$deg(\alpha) > \#Ker(\alpha).$$

3.5 Frobeniusev endomorfizem

Naj bo $\mathbb{F}_q$ končno polje z algebraičnim zaprtjem $\overline{\mathbb{F}_q}$ in naj bo

$$\begin{aligned} \phi_q : \overline{\mathbb{F}_q} &\to \overline{\mathbb{F}_q}, \\ x &\mapsto x^q \end{aligned}$$

Frobeniuseva preslikava na $\mathbb{F}_q$. Če je E eliptična krivulja definirana nad $\mathbb{F}_q$, potem ϕ_q deluje na točkah E kot:

$$\phi_q(x, y) = (x^q, y^q),\ \phi_q(\infty) = \infty.$$

Lema 3.25.

Naj bo E eliptična krivulja definirana nad $\mathbb{F}_q$, in naj bo $(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$. Velja

- $\phi_q(x, y) \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$,
- $(x, y) \in E(\mathbb{F}_q)$ *natanko tedaj ko* $\phi_q(x, y) = (x, y)$.

Dokaz.

Za dokaz leme bomo potrebovali lastnost

$$(a+b)^q = a^q + b^q,$$

kjer je q potenca karakteristike polja v katerem delamo. To sledi iz razvoja v vrsto in dejstva, da pri binomskih koeficientih velja $\binom{q}{i} \equiv 0$, za $1 \leq i \leq q-1$. To je res ker pri zapisu binomskega koeficienta po krajšanju vedno ostane vsaj en q, ki je potenca karakteristike.

Prav tako bomo potrebovali dejstvo, da velja $a^q = a$ za vse $a \in \mathbb{F}_q$. Dokaz tega sledi iz dejstva, da ima grupa vseh obrnljivih elementov $\mathbb{F}_q^\times$ red $q-1$, kar pa ravno pomeni $a^{q-1} = 1$, za vse $a \in \mathbb{F}_q \neq 0$. To pa je ekvivalentno zgornji trditvi.

Lemo lahko brez težav namesto za krivulje v Weierstrassovi obliki dokažemo za krivulje v posplošeni Weierstrassovi obliki. Imamo torej

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6, \tag{3.1}$$

$a_i \in \mathbb{F}_q$. Če to enačbo sedaj potenciramo na q in uporabimo zgornja dejstva dobimo

$$(y^q)^2 + a_1(x^qy^q) + a_3(y^q) = (x^q)^3 + a_2(x^q)^2 + a_4(x^q) + a_6.$$

To pa ravno pomeni, da točke oblike (x^q, y^q) ležijo na krivulji podani z enačbo 3.1.

Za drugi del leme se upremo na dejstvo, da velja $x \in \mathbb{F}_q$ natanko tedaj, ko $\phi_q(x) = x$. V eno smer smo to lastnost že dokazali. Potrebujemo še dokaz v drugi smeri. Ta del pa sledi iz lastnosti, da ima polinom $X^q - X$, q različnih ničel v $\overline{\mathbb{F}_p}$. Ker pa

$$\{\alpha \in \overline{\mathbb{F}_p} | \alpha^q = \alpha\} \text{ in } \mathbb{F}_q$$

vsebujeta q elementov in je ena množica vsebovana v drugi, sledi da sta ti množici enaki.

Od tod sledi

$$\begin{aligned}(x,y) \in E(\mathbb{F}_q) &\Leftrightarrow x, y \in \mathbb{F}_q \\ &\Leftrightarrow \phi_q(x) = x \text{ in } \phi_q(y) = y \\ &\Leftrightarrow \phi_q(x,y) = (x,y).\end{aligned}$$

□

Trditev 3.26.

Naj bosta α, β endomorfizma na E, ter naj bosta $a, b \in \mathbb{Z}$. Definirajmo endomorfizem

$$(a + \alpha + b\beta)(P) = a\alpha(P) + b\beta(P).$$

Potem velja

$$deg(a\alpha + b\beta) = a^2\ deg(\alpha) + b^2\ deg(\beta) + ab(\ deg(\alpha+\beta) -\ deg(\alpha) -\ deg(\beta)).$$

Dokaz.

Naj bo $n \in \mathbb{Z}$, število ki ni deljivo z karakteristiko K. Predstavimo α, β z matrikami α_n, β_n, glede na neko bazo $E[n]$. Velja

$$\det(a\alpha_n + b\beta_n) = a^2\det(\alpha_n) + b^2\det(\beta_n) + ab(\det(\alpha_n + \beta_n) - \det(\alpha_n) - \det(\beta_n))$$

za vse matrike α_n, β_n. Od tod sledi

$$\begin{aligned}\deg(a\alpha + b\beta) \equiv a^2\ \deg(\alpha) + b^2\ \deg(\beta) + ab(\ \deg(\alpha + \beta) \\ -\ \deg(\alpha) -\ \deg(\beta))\ (\text{mod } n).\end{aligned}$$

Ker to drži za neskončno mnogo n v tej enačbi velja enakost.

□

Trditev 3.27 ([7], Trditev 4.7)**.**

Naj bo E definirana nad $\mathbb{F}_q$ in naj bo $n \geq 1$. Velja

- *$Ker(\phi_q^n - 1) = E(\mathbb{F}_{q^n})$.*
- *$\phi_q^n - 1$ je seperabilen endomorfizem. Velja torej $\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = \ deg(\phi_q^n - 1)$.*

Opomba 3.28.

ϕ_q^n predstavlja kompozicijo $\phi_q \circ \phi_q \circ \ldots \circ \phi_q$. Prav tako pa je $\phi_q^n - 1$ endomorfizem, saj je množenje z -1 endomorfizem.

Izrek 3.29 (Hasse)**.**

Naj bo E eliptična krivulja nad končnim poljem $\mathbb{F}_q$. Potem red $E(\mathbb{F}_q)$ zadošča zvezi

$$|q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q)| \leq 2\sqrt{q}.$$

Dokaz.

Po trditvi 3.27 lahko zapišemo

$$a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - deg(\phi_q - 1).$$

Pokazati moramo $|a| \leq 2\sqrt{q}$. Za dokaz tega bomo potrebovali še eno lemo.

Lema 3.30.

Naj bosta $r, s \in \mathbb{Z}$, taka da velja $gcd(s, q) = 1$. Potem velja

$$deg(r\phi_q - s) = r^2q + s^2 - rsa.$$

Dokaz.

Z uporabo trditve 3.26 dobimo

$$\deg(r\phi_q - s) = r^2\ \deg(\phi_q) + s^2\ \deg(-1) + rs(\ \deg(\phi_q - 1) -\ \deg(\phi_q) -\ \deg(-1)).$$

Če sedaj uporabimo dejstvo $\deg(\phi_q) = q,\ \deg(-1) = 1$, ter $\deg(\phi_q - 1) = q+1-a$, željeni rezultat sledi. □

Ker velja $\deg(r\phi_q - s) \geq 0$, nam lema implicira

$$q\left(\frac{r}{s}\right)^2 - a\frac{r}{s} + 1 \geq 0,$$

za vse r, s za katere velja $\gcd(s, q) = 1$. Množica racionalnih števil oblike r/s, ki zadoščajo tej lastnosti je gosta v $\mathbb{R}$. Zato velja

$$qx^2 - ax + 1 \geq 0,$$

za vse $x \in \mathbb{R}$. To pa pomeni, da je diskriminanta polinoma negativna ali nič. Kar povedano z drugimi besedami pomeni

$$a^2 - 4q \leq 0,$$

to pa je ravno pogoj $|a| \leq 2\sqrt{q}$.

□

Izrek 3.31 ([7], Izrek 4.10)**.**
Naj bo E eliptična krivulja definirana nad $\mathbb{F}_q$. Naj bo $a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - deg(\phi_q - 1)$. Potem velja

$$\phi_q^2 - a\phi_q + q = 0,$$

kot endomorfizem nad E. Prav tako pa je a edino število k za katerega velja

$$\phi_{q^n}^2 - k\phi_{q^n} + q^n = 0.$$

Povedano drugače velja naslednja lastnost. Naj bo $(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_q}$, potem velja

$$(x^{q^2}, y^{q^2}) - a(x^q, y^q) + q(x, y) = \infty,$$

a pa je edino število, tako da ta lastnost velja za vse $(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_q}$. Velja še več

$$a \equiv Trace((\phi_q)_m) \ (mod\ m),$$

za vse m, ki zadoščajo $gcd(m, q) = 1$.

3.6 Red grupe nad eliptičnimi krivuljami

Pogosto nas bo zanimalo tudi, koliko točk leži na dani krivulji E. S pomočjo naslednje trditve bomo dobili preprost način kako izračunati $\#E(\mathbb{F}_q^n)$, če poznamo $\#E(\mathbb{F}_q)$. Pojavlja se še vprašanje kako izračunati $\#E(\mathbb{F}_q)$. Eden od možnih načinov se nahaja v opombi 8.6.

Trditev 3.32.
Naj bo $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - a$. Zapišimo $X^2 - aX + q = (X - \alpha)(x - \beta)$. Potem velja

$$\#E(\mathbb{F}_{q^n}) = q^n + 1 - (\alpha^n + \beta^n),$$

za vse $n \geq 1$.

Dokaz.

V dokazu bomo najprej potrebovali lastnost $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{N}$. Pri tem nam bo pomagala naslednja lema.

Lema 3.33.

Naj bo $s_n = \alpha^n + \beta^n$. Potem velja $s_0 = 2, s_1 = a, s_{n+1} = as_n - qs_{n-1}$, za vse $n \geq 1$.

Dokaz.

Če je $n = 0$, potem lema očitno velja. Za $n = 1$ lema sledi iz definicije α, β, ki sta ničli enačbe $X^2 - aX + q$, ter uporabe Vietovih formul. Dokažimo torej še za splošen n. Ker sta α, β ničli, lahko zapišemo $\alpha^2 - a\alpha + q = 0,\ \beta^2 - a\beta + q = 0$. Sedaj enačbi pomnožimo z $\alpha^{n-1},\ \beta^{n-1}$. S tem dobimo

$$\alpha^{n+1} = a\alpha^n + q\alpha^{n-1},\ \beta^{n+1} = a\beta^n + q\beta^{n-1}.$$

Če enačbi seštejemo dobimo rekurzivno zvezo

$$s_{n+1} = as_n - qs_{n-1}.$$

□

Iz lema takoj sledi, da velja $\alpha^n + \beta^n \in \mathbb{N}$. Naj bo f funkcija

$$f(X) = (X^n - \alpha^n)(X^n - \beta^n) = X^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)X^n + q^n.$$

Iz prve enakosti sledi, da funkcija $X^2 - aX + q = (X - \alpha)(X - \beta)$ deli f. Po osnovnem izreku od deljenju lahko f zapišemo kot $f(X) = g(X)Q(x) + r(x)$, kjer je $g(X) = X^2 - aX + q$. Prav tako pa ima kvocient Q celoštevilske koeficiente. Po izreku 3.31 velja

$$(\phi_q^n)^2 - (\alpha^n + \beta^n)\phi_q^n + q^n = f(\phi_q) = Q(\phi_q)(\phi_q^2 - a\phi_q + q) = 0,$$

kjer je ϕ_q endomorfizem na E. Velja tudi $\phi_q^n = \phi_{q^n}$. Ponovno uporabimo izrek 3.31 od koder sledi, da obstaja natanko en $k \in \mathbb{Z}$, tako da $\phi_{q^n}^2 - k\phi_{q^n} + q^n = 0$. Ta k pa je določen z $k = q^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{q^n})$. Od tod torej sledi

$$\alpha^n + \beta^n = q^n + 1 - \#E(\mathbb{F}_{q^n}).$$

□

Primer 3.34.

Naj bo E podana s predpisom $y^2 + xy = x^3 + 1$. S preprostim pregledom vseh možnosti vidimo, da je $\#E(\mathbb{F}_2) = 4$. Izračunajmo sedaj $\#E(\mathbb{F}_4)$. Po trditvi 3.32 moramo $\#E(\mathbb{F}_2)$ zapisati kot $q + 1 - a$. Sledi torej $a = 2 + 1 - 4 = -1$. Polinom je potem oblike

$$X^2 + X + 2 = (X - \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2})(X - \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}).$$

Za število točk na krivulji bomo morali najprej poračunati še $\alpha^2 + \beta^2$, pri čemer si lahko pomagamo z lemo 3.33.

$$s_2 = as_1 - qs_0 = (-1)^2 - 2 \cdot 2 = -3$$

Od tod sledi

$$\#E(\mathbb{F}_{2^2}) = 2^2 + 1 - s_2 = 4 + 1 + 3 = 8.$$

Če naštejemo vse točke na $E(\mathbb{F}_4) = \{\infty, (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (3,0), (0,3), (1,3)\}$, vidimo da se naš rezultat ujema. Moč tega izreka pa se skriva v velikih potencah. Če bi na primer želeli izračunati $E(\mathbb{F}_{2^{200}})$ z naštevanjem točk ne bi prišli prav daleč. S pomočjo tega izreka in lema pa lahko hitro poračunamo

$$(\frac{-1+\sqrt{-7}}{2})^{200} + (\frac{-1-\sqrt{-7}}{2})^{200} = -2534943693362688758337590430751,$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} E(\mathbb{F}_{2^{200}}) &= 2^{200} + 1 + 2534943693362688758337590430751 \\ &= 1606938044258990275541962092343697546215565682541130425732128 \end{aligned}$$

4 Delitelji

Definicija 4.1.
Naj bo K polje in naj bo $P \in E(\overline{K})$. Za vsako točko P definirajmo formalen simbol $[P]$. *Delitelj* D na krivulji E je končna linearna kombinacija takih simbolov s celoštevilskimi koeficienti.

$$D = \sum_j a_j[P_j],\ a_j \in \mathbb{Z}$$

Iz same definicije sledi, da je delitelj element Abelove grupe generirane s simboli $[P]$. Označimo to grupo z $\mathrm{Div}(E)$.

Definicija 4.2.
Definirajmo *vsoto* in *stopnjo* delitelja kot

$$sum(\sum_j a_j[P_j]) = \sum_j a_j P_j \ \in E(\overline{K}),$$

$$deg(\sum_j a_j[P_j]) = \sum_j a_j \ \in \mathbb{Z}.$$

Definicija 4.3.
Naj bo E eliptična krivulja. *Funkcija* na E je racionalna funkcija

$$f(x,y) \in \ \overline{K},$$

ki je definirana za vsaj eno točko na $E(\overline{K})$. Funkcija torej zavzame vrednosti v $\overline{K} \cup \infty$.

Opomba 4.4.
Naj bo E podana z enačbo $y^2 = x^3 + Ax + B$. Racionalna funkcija $\frac{1}{y^2 - x^3 - Ax - B}$ torej ne predstavlja funkcije.

Trditev 4.5.
Obstaja taka funkcija u_P, *imenovana* uniformizer *v točki* P *z lastnostjo* $u_P(P) = 0$, *ter lastnostjo, da se da vsaka funkcija* $f(x,y)$ *zapisati kot*

$$f = u_P^r g,\ r \in \mathbb{Z}, g(P) \neq 0, \infty.$$

Definirajmo red *funkcije* f *v točki* P *kot*

$$ord_P(f) = r.$$

Primer 4.6.
Naj bo $y^2 = x^3 - x$ eliptična krivulja, naj bo $f(x,y) = x$. Izberimo $u(x,y) = y$. Očitno je $u(0,0) = 0$. Nad eliptično krivuljo velja

$$y^2 = x^3 - x = x(x^2 - 1),$$

od tod sledi $x = y^2 \frac{1}{x^2 - 1}$ nad E. Prav tako velja $1/(x^2 - 1) \neq 0$ v točki $(0,0)$. Od tod sledi, da je

$$ord_{(0,0)}(x) = 2, ord_{(0,0)}(x/y) = 1.$$

Definicija 4.7.
Naj bo f funkcija nad E, ki ni identično enaka 0. Definirajmo *delitelja* funkcije f kot,

$$div(f) = \sum_{P \in E(\overline{K})} ord_P(f)[P] \in \text{ Div}(E).$$

Trditev 4.8.
Naj bo E eliptična krivulja in naj bo f funkcija na E, ki ni identično enaka 0. Potem veljajo naslednje trditve:

- *f ima le končno mnogo ničel in polov*
- *$deg(div(f)) = 0$*
- *Če f nima ničel ali polov, potem je f konstantna.*

Izrek 4.9.
Naj bo E eliptična krivulja. Naj bo D delitelj nad E z $deg(D) = 0$. Potem obstaja taka funkcija f na E z lastnostjo

$$div(f) = D$$

natanko tedaj ko

$$sum(D) = \infty.$$

Dokaz.
Pokažimo najprej, da se da $[P_1] + [P_2]$ zapisati kot $[P_1 + P_2] + [\infty]$ plus delitelj neke funkcije. Recimo, da imamo tri točke P_1, P_2, P_3 na neki krivulji E, ki ležijo na premici $ax + by + c = 0$. Naj bo $f(x, y) = ax + by + c$. Potem ima funkcija f ničle v točkah P_1, P_2, P_3. Če b ni enak 0 potem ima funkcija po trditvi 4.8 trojni pol v ∞. Velja torej

$$div(ax + by + c) = [P_1] + [P_2] + [P_3] - 3[\infty].$$

Ker se nahajamo na Weierstrassovi krivulji, kjer točko $-P$ dobimo tako, da samo zamenjamo predznak y-koordinate, lahko za premico skozi točki $P_3 = (x_3, y_3)$, ter $-P_3 = (x_3, -y_3)$ vzamemo $x - x_3 = 0$. Po trditvi 4.8 ponovno velja

$$div(x - x_3) = [P_3] + [-P_3] - 2[\infty].$$

Od tod sledi

$$div\left(\frac{ax + by + c}{x - x_3}\right) = div(ax + by + c) - div(x - x_3) = [P_1] + [P_2] - [-P_3] - [\infty].$$

Ker na krivulji velja $P_1 + P_2 = -P_3$ (to sledi iz načina kako na krivulji seštevamo točke), lahko zgornjo enačbo prepišemo v

$$[P_1] + [P_2] = [P_1 + P_2] + [\infty] + div(g).$$

Hitro se vidi, da velja

$$sum(div(g)) = P_1 + P_2 - (P_1 + P_2) - \infty = \infty.$$

Prav tako, pa se iz zgornje enačbe vidi, da velja $[P_1] + [P_2] = 2[\infty] + div(h)$, če velja $P_1 + P_2 = \infty$. Zaradi tega je vsota vseh členov s pozitivnimi koeficienti v D enaka nekemu simbolu $[P]$, večkratniku $[\infty]$, ter delitelju neke funkcije. Podobno velja tudi za člene z negativnimi koeficienti. Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + n[\infty] + div(g_1).$$

Zaradi tega, ker je g_1 kvocient produkta funkcij, ki sestavljajo g, velja tudi $sum(div(g_1)) = \infty$. Po trditvi 4.8 velja $deg(div(g_1)) = 0$, ker funkcija ni konstantna. Imamo torej

$$0 = deg(D) = 1 - 1 + n + 0 = n.$$

Od tod sledi

$$D = [P] - [Q] + div(g_1).$$

Prav tako velja

$$sum(D) = P - Q + sum(div(g_1)) = P - Q.$$

Predpostavimo sedaj, da velja $sum(D) = \infty$. Potem $P - Q = \infty$, kar pomeni da mora veljati $P = Q$ in $D = div(g_1)$. Če predpostavimo $D = div(f)$ za neko funkcijo f, potem

$$[P] - [Q] = div(f/g_1).$$

Od tod po lemi 4.10 sledi $P = Q$ in torej $sum(D) = \infty$.

□

Lema 4.10.
Naj bosta $P, Q \in E(\overline{K})$, ter naj obstaja funkcija h na E za katero velja

$$div(h) = [P] - [Q].$$

Potem sledi $P = Q$.

5 Torzijske točke

Definicija 5.1.
Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K, ter naj bo $n \in \mathbb{N}$. *Torizjske točke* so množica

$$E[n] = \{P \in E(\overline{K}) | nP = \infty\}.$$

Izrek 5.2.
Naj bo E eliptična krivulja nad poljem K in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Če karakteristika polja K ne deli n, ali je enaka 0 potem

$$E[n] \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n.$$

Zapišimo $n = p^r n'$, kjer $p \nmid n'$. Če je karakteristika K enaka $p > 0$ in $p|n$ potem velja

$$E[n] \cong \mathbb{Z}'_n \oplus \mathbb{Z}'_n \text{ ali } E[n] \cong \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}'_n.$$

Definicija 5.3.
Definirajmo *deliteljski polinom* $\gamma_m \in \mathbb{Z}[x, y, A, B]$ kot,

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= 0 \\
\gamma_1 &= 1 \\
\gamma_2 &= 2y \\
\gamma_3 &= 3x^4 + 6Ax^2 + 12Bx - A^2 \\
\gamma_4 &= 4y(x^6 + 5Ax^4 + 20Bx^3 - 5A^2x^2 - 4ABx - 8B^2 - A^3) \\
\gamma_{2m+1} &= \gamma_{m+2}\gamma_m^3 - \gamma_{m-1}\gamma_{m+1}^3 \text{za } m \geq 2 \\
\gamma_{2m} &= (2y)^{-1}\gamma_m(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2) \text{za } m \geq 3
\end{aligned}$$

Lema 5.4.
γ_n je element $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$, za vse lihe n. Za sode n pa je γ_n element $2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$.

Dokaz.
Dokažimo to s pomočjo indukcije. Za $n \leq 4$ lema očitno velja. Obravnavajmo primera, ko je $n = 2m$ in $n = 2m + 1$ za nek $m \in \mathbb{N}$.

- n=2m Indukcijska predpostavka je v tem primeru, da lema velja za vse $n < 2m$. Predpostavimo lahko, da je $2m > 4$, saj vemo da lema velja za $n \leq 4$, torej velja $m > 2$. Potem velja $2m > m + 2$, kar pomeni, da vsi polinomi v definiciji γ_{2m} zadoščajo indukcijski predpostavki. Če je m sodo število ,potem se $\gamma m, \gamma m + 2, \gamma m - 2$ nahajajo v $2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$. Od tod pa sledi, da je tudi $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$. Če je m lih, potem sta $\gamma m - 1, \gamma m + 1 \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$. To pa pomeni, da je tudi $\gamma_{2m} \in 2y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$.

- n=2m+1 Primer obravnavamo podobno kot $n = 2m$.

□

Definirajmo še polinoma

$$\begin{aligned}
\phi_m &= x\gamma_m^2 - \gamma_{m+1}\gamma_{m-1}, \\
\omega_m &= (4y)^{-1}(\gamma_{m+2}\gamma_{m-1}^2 - \gamma_{m-2}\gamma_{m+1}^2).
\end{aligned}$$

Podobno, kot pri polinomih γ lahko tudi tu formuliramo lemo

Lema 5.5.
ϕ_n je element $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$, za vse n. Če je n lih, potem je ω_n element $y\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$. V primeru, da je n sod pa je ω_n element $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$.

Glejmo sedaj te polinome nad eliptičnimi krivuljami oblike

$$E : y^2 = x^3 + Ax + B.$$

Polinome v $\mathbb{Z}[x, y^2, A, B]$ lahko gledamo kot polinome v $\mathbb{Z}[x, A, B]$, tako da y^2 nadomestimo z $x^3 + Ax + B$.

Opomba 5.6.

Polinom γ_n ni nujno samo polinom spremenljivke x, saj je odvisno od tega ali je n lih ali sod. Vseeno pa velja, da lahko γ_n^2 vedno zapišemo kot polinom spremenljivke x.

Izrek 5.7 ([7], Izrek 3.6)**.**

Naj bo $P = (x, y)$ točka na krivulji $y^2 = x^3 + Ax + B$, katere karakteristika ni 2. Naj bo $n \in \mathbb{N}$, potem velja

$$nP = \left(\frac{\phi_n(x)}{\gamma_n^2(x)}, \frac{\omega_n(x,y)}{\gamma_n^3(x,y)} \right).$$

Posledica 5.8.

Naj bo E eliptična krivulja. Endomorfizem E podan kot množenjem z n ima stopnjo n^2.

Brez dokazov formulirajmo še nekaj trditev, ki jih bomo potrebovali za dokaz izreka 5.2.

Trditev 5.9 ([7], Trditev 2.21)**.**

Naj bo $\alpha \neq 0$ seperabilen avtomorfizem eliptične krivulje E. Potem velja

$$\deg \alpha = \#Ker(\alpha),$$

kjer je $Ker(\alpha)$ jedro homomorfizma $\alpha : E(overlineK) \to E(overlineK)$. Če $\alpha \neq 0$ ni seperabilen, potem

$$\deg \alpha > \#Ker(\alpha).$$

Izrek 5.10 ([7], Izrek 2.22)**.**

Naj bo E eliptična krivulja definirana nad poljem K. Naj bo $\alpha \neq 0$ endomorfizem E. Potem je $\alpha : E(\overline{K}) \to E(\overline{K})$ surjektivna preslikava.

Trditev 5.11 ([7], Trditev 2.28)**.**

Naj bo E eliptična krivulja definirana nad poljem K, ter naj bo $n \in \mathbb{N}$. Naj bo množenje z n na E podano, kot

$$n(x, y) = (R_n(x), yS_n(x))$$

za vse $(x, y) \in E(\overline{K})$. Tu sta R_n, S_n racionalni funkciji. Potem velja

$$\frac{R_n'(x)}{S_n(x)} = n.$$

Od tod pa sledi, da je množenje z n seperabilno natanko tedaj, ko n ni večkratnik karakteristike polja K.

Sedaj imamo vse kar potrebujemo, da dokažemo izrek 5.2.

Dokaz izreka 5.2.

Predpostavimo, da n ni večkratnik karakteristike p polja. Po izreku 5.7 vemo, da ima množenje z n prvo koordinato oblike

$$R(x) = \frac{x^{n^2} + \dots}{n^2 x^{n^2-1} + \dots}.$$

Če poračunamo odvod dobimo v števcu $n^2 x^{2n^2-2} + \dots$, kar ni identično enako 0. To pomeni, da je množenje z n seperabilno. Po posledici 5.8 in trditvi 5.9 ima jedro množenja z n, E[n], red n^2. Iz algebre vemo, da so končne Abelove grupe, torej tudi $E[n]$ izomorfne

$$\mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k},$$

za neka naravna števila $n_1, n_2, \dots, n_k$, za katere velja $n_i | n_{i+1}$ za vse i. Naj bo l praštevilo, ki deli n_1. Potem $l | n_i$ za vse i. To pa pomeni, da ima $E[l] \subseteq E[n]$ red l^k. Ker ima $E[l]$ red l^2 po tem kar smo povedali zgoraj, od tod sledi $k = 2$. Množenje z n ima torej jedro $E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2}$. Veljati pa mora tudi $n_2 | n$. Ker velja $n^2 = \#E[n] = n_1 n_2$ od tod sledi $n_1 = n_2 = n$. Zato velja

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n,$$

ko karakteristika polja ne deli n.

Pokazati moramo trditev še v primeru, ko $p | n$. Po trditvi 5.11 množenje z p ni seperabilno. Po trditvi 5.9 ima jedro $E[p]$ množenja s p red strogo manjši kot je stopnja endomorfizma, ki je p^2 po posledici 5.8. Ker ima vsak element $E[p]$ red 1 ali p, sledi da ima $E[p]$ red potence p. Torej mora biti red 1 ali p. Če je $E[p]$ trivialna, potem je $E[p^k]$ trivialna za vse k. Če ima $E[p]$ red p potem trdimo, da velja $E[p^k] \simeq \mathbb{Z}_{p^k}$ za vse k. Enostavno je videti, da je $E[p^k]$ ciklična. Pokazati moramo, da ima taka grupa red p^k in ne nekaj manjšega. Denimo da obstaja element P reda p^j. Po izreku 5.10 je množenje z p surjektivno. Torej obstaja točka Q tako da velja $pQ = P$. Ker velja

$$p^j Q = p^{j-1} P \neq \infty,\ p^{j+1} Q = p^j P = \infty,$$

torej ima Q red p^{j+1}. Z indukcijo lahko pokažemo, da obstajajo točke reda p^k za vse k. Zato je $E[p^k]$ ciklična reda p^k.

Zapišimo sedaj $n = p^r n'$, $r \geq 0$ in $p \nmid n'$. Potem velja

$$E[n] \simeq E[n'] \oplus E[p^r].$$

Po dokazanem zgoraj lahko zapišemo $E[n'] \simeq Z_{n'} \oplus Z_{n'}$, ker $p \nmid n'$. Vemo da velja zveza

$$\mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{p^r} \simeq \mathbb{Z}_{n'p^r} \simeq Z_n$$

. Od tod pa sledi

$$E[n] \simeq \mathbb{Z}_{n'} \oplus \mathbb{Z}_{n'} \text{ ali } \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_{n'}.$$

□

6 Weilovo parjenje

Parjenja imajo pomembno vlogo pri napadih na problem diskretnega logaritma nad gladkimi kubičnimi krivuljami.

Definicija 6.1.
Naj bo K polje in naj bo $n \in \mathbb{N}$ tak, da karakteristika K ne deli n.

$$\mu_n = \{x \in \overline{K} | x^n = 1\}$$

je *grupa n-tih korenov enote* grupe $\overline{K}$.

Trditev 6.2.
Naj bo E eliptična krivulja definirana nad poljem K, in naj bo $n \in \mathbb{N}$. Predpostavimo, da karakteristika polja K ne deli n. Potem obstaja Weilovo parjenje

$$e_n : E[n] \times E[n] \to \mu_n,$$

za katerega velja:

- *e_n je bilinearna v obeh spremenljivkah*

  $$e_n(S_1 + S_2, T) = e_n(S_1, T)e_n(S_2, T)$$

  in

  $$e_n(S, T_1 + T_2) = e_n(S, T_1)e_n(S, T_2)$$

  za vse $S, S_1, S_2, T, T_1, T_2 \in E[n]$.

- *e_n je ne degenerirana v obeh spremenljivkah. To pomeni če je $e_n(S, T) = 1$ za vse $T \in E[n]$ potem $S = \infty$, ter obratno.*

- *$e_n(T, T) = 1$ za vse $T \in E[n]$*

- *$e_n(T, S) = e_n(S, T)^{-1}$ za vse $S, T \in E[n]$*

- *$e_n(\rho S, \rho T) = \rho(e_n(S, T))$ za vse avtomorfizme ρ iz $\bar{K}$, za katere je ρ identiteta na koeficientih E.*

- *$e_n(\alpha(S), \alpha(T)) = e_n(S, T)^{deg(\alpha)}$ za vse separabilne endomorfizme α polja E.*

Posledica 6.3.
Naj bosta T_1, T_2 baza $E[n]$. Potem je $e_n(T_1, T_2)$ generator grupe μ_N.

Dokaz.
Vemo, da za poljubni točki T_1, T_2 velja $e_n(T_1, T_2)^n = 1$, ker se slika parjenja nahaja v grupi n-tih korenov enote. Pokazati moramo torej, da če za neko število d velja $e_n(T_1, T_2)^d = 1$ potem od tod sledi, da je $d \geq n$. Recimo torej, da je $e_n(T_1, T_2) = \zeta$, kjer velja $\zeta^d = 1$. Po točki ena trditve 6.2 velja

$$e_n(T_1, dT_2) = e_n(T_1, T_2)^d = 1.$$

Prav tako velja $e_n(T_2, dT_2) = e_n(T_2, T_2)^d = 1$. Naj bo $S \in E[n]$, potem se S izraža kot $S = aT_1 + bT_2$ za neka $a, b \in \mathbb{N}$. S ponovno uporabo trditve 6.2 vidimo, da velja

$$e_n(S, dT_2) = e_n(T_1, dT_2)^a e_n(T_2, dT_2)^b = 1.$$

Ker to valja za vsak S po točki dva trditve 6.2 sledi, da je $dT_2 = \infty$. To pa je mogoče le če $n|d$, kar pomeni da je $n \leq d$. □

Posledica 6.4.
Če $E[n] \subseteq E(K)$, potem $\mu_n \subset K$.

Dokaz.
Naj bo ρ tak avtomorfizem $\overline{K}$, da je ρ indentiteta na elementih K. Naj bosta T_1, T_2 baza $E[n]$. Ker imata po predpostavki točki koordinate v K zanju velja $\rho T_1 = T_1,\ \rho T_2 = T_2$. Po trditvi 6.2 velja

$$\zeta = e_n(T_1, T_2) = e_n(\rho T_1, \rho T_2) = \rho(e_n(T_1, T_2)) = \rho(\zeta).$$

Eden od izrekov Galoisove teorije pa pravi, če je $x \in \overline{K}$ fiksen za vse take avtomorfizme ρ potem je $x \in K$. Torej je $\zeta \in K$. Ker pa je ζ primitivni koren enote od tod sledi $\mu_n \subset K$.

□

Dokaz trditve 6.2.
Naj bo $T \in E[n]$. Po izreku 4.9 obstaja funkcija f, tako da velja

$$\operatorname{div}(f) = n[T] - n[\infty]. \tag{6.1}$$

To drži ker je $D = n[T] - n[\infty]$ delitelj za katerega velja $\deg(D) = 0$. Prav tako pa velja $\operatorname{sum}(D) = \infty$, ker se nahajamo v $E[n]$. Izberimo sedaj še točko $T' \in E[n^2]$, za katero velja $nT' = T$. Pokazati želimo, da obstaja funkcija g, tako da velja

$$\operatorname{div}(g) = \sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R]).$$

Preden lahko uporabimo izrek 4.9 moramo preveriti, da vse potrebne lastnosti držijo. Veljati mora torej

$$\operatorname{sum}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \infty$$

in

$$\deg(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = 0.$$

Po izreku 5.2, se da $E[n]$ zapisati kot $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_n$. To pomeni, da $E[n]$ vsebuje n^2 različnih točk R. Velja torej

$$\operatorname{sum}(\sum_{R \in E[n]} ([T' + R] - [R])) = \sum_{R \in E[n]} T' + R - R = \sum_{R \in E[n]} T' = n^2 T' = nT = \infty.$$

Podobno preverimo, še da velja $\deg(\sum_{R \in E[n]}([T' + R] - [R])) = 0$. Torej po izreku 4.9 taka funkcija g obstaja. Označimo z $f \circ n$ funkcijo, ki začne z neko točko jo

pomnoži z n in nato na njej uporabi f. Točke $P = T' + R$, kjer je $R \in E[n]$ so točke za katere velja $nP = T$. Iz 6.1 sledi

$$\operatorname{div}(f \circ n) = n(\sum_{R \in E[n]} [T' + R]) - n(\sum_{R \in E[n]} [R]) = \operatorname{div}(g^n).$$

Iz definicije delitelja funkcije sledi, da je funkcija $f \circ n$ oblike g^n krat neka konstanta. Če za nov f vzamemo ta f pomnožen s primerno konstanto, potem lahko predpostavimo, da velja

$$f \circ n = g^n.$$

Naj bo $S \in E[n]$, ter naj bo $P \in E(\overline{K})$. Potem velja

$$g(P+S)^n = f(n(P+S)) = f(nP) = g(P)^n.$$

Zaradi tega velja $g(P+S)/g(P) \in \mu_n$. Tako lahko sedaj definiramo Weilovo parjenje kot

$$e_n(S,T) = \frac{g(P+S)}{g(P)}.$$

Ta definicija je dobra, ker je g zaradi delitelja določen do skalarja natančno, zaradi tega pa je definicija neodvisna od izbire g. Prav tako pa je definicija neodvisna od izbire P, a je obrazložitev bolj zahtevna in je ne bomo navedli.

Sedaj, ko smo uspeli definirati Weilovo parjenje moramo preveriti, da zanj veljajo lastnosti 1-6.

1. Ker je definicija neodvisna od izbire točke P lahko uporabimo $P, P + S_1$.

$$\begin{aligned} e_n(S_1,T)e_n(S_2,T) &= \frac{g(P+S_1)}{g(P)}\frac{g(P+S_1+S_2)}{g(P+S_1)} \\ &= \frac{g(P+S_1+S_2)}{g(P)} \\ &= e_n(S_1+S_2,T). \end{aligned}$$

   Pokazati moramo še

$$e_n(S,T_1)e_n(S,T_2) = e_n(S,T_1+T_2).$$

   Dokaz linearnosti v drugi spremenljivki pa je malce težji kot dokaz za prvo spremenljivko. Predpostavimo da $T_1, T_2, T_3 \in E[n]$ z lastnostjo $T_1 + T_2 = T_3$. Označimo z f_i, g_i funkcije ki spadajo k definicijam $e_n(S,T_i)$. Po izreku 4.9 obstaja funkcija h, za katero velja

$$\operatorname{div}(h) = [T_3] - [T_1] - [T_2] + [\infty].$$

   Enačba 6.1 nam da

$$\operatorname{div}\left(\frac{f_3}{f_1 f_2}\right) = n \operatorname{div}(h) = \operatorname{div}(h^n).$$

Zato obstaja konstanta $c \in \overline{K}^{\times}$, tako da velja

$$f_3 = cf_1 f_2 h^n.$$

Od tod pa sledi

$$g_3 = c^{1/n}(g_1)(g_2)(h \circ n)$$

.

To pa nas končno pripelje do

$$\begin{aligned} e_n(S, T_1 + T_2) &= \frac{g_3(P+S)}{g_3(P)} = \frac{g_1(P+S)}{g_1(P)} \frac{g_2(P+S)}{g_2(P)} \frac{h(n(P+S))}{h(nP)} \\ &= e_n(S, T_1) e_n(S, T_2). \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali $nS = \infty$, od koder sledi $h(n(P+S)) = h(nP)$.

2. Predpostavimo, da $T \in E[n]$, tak da velja $e_n(S, T) = 1$ za vse $S \in E[n]$. To pomeni, da je $g(P+S) = g(P)$ za vse P in $S \in E[n]$. Po trditvi **??**obstaja funkcija h, tako da velja $g = h \circ n$. Od tod sledi

$$(h \circ n)^n = g^n = f \circ n.$$

Ker je množenje z n surjektivno na $E(\overline{K})$, od tod sledi $h^n = f$. To pa pomeni

$$n \operatorname{div}(h) = \operatorname{div}(f) = n[T] - n[\infty],$$

kar pa pomeni, da je $\operatorname{div}(h) = [T] - [\infty]$. Po izreku 4.9 pa od tod sledi $T = \infty$. S tem smo, dokazali eno polovico točke 2, druga polovica pa avtomatično sledi iz tega ter uporabe točke 4.

3. Označimo z τ_{jT} točko jT. V tem primeru $f \circ \tau_{jT}$ označuje funkcijo $P \mapsto f(P + jT)$. Delitelj te funkcije je torej $n[T - jT] - n[-jT]$. Zaradi tega velja

$$\begin{aligned} &div(\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}) = \sum_{j=0}^{n-1} (n[(1-j)T] - n[-jT]) \\ &= n[T] - n[-T] + n[-T] - n[-2T] + \cdots + n[(-n+2)T] - n[(-n+1)T] \\ &= n[T] - n[(-n+1)T] = n[T] - n[-nT + T] = n[T] - n[\infty + T] \\ &= n[T] - n[T] = 0 \end{aligned}$$

To pomeni, da je funkcija $\prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT}$ konstantna. N-ta potenca funkcije $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$ pa je ravno produkt f komponirane z n.

$$\begin{aligned} (\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'})^n &= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ n \circ \tau_{jT'} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} f \circ \tau_{jT} \end{aligned}$$

To pa tudi pomeni, da je funkcija $\prod_{j=0}^{n-1} g \circ \tau_{jT'}$ konstantna. To pa pomeni, da lahko namesto točke P vanjo vstavimo točko $P+T'$ in dobimo

$$\prod_{j=0}^{n-1} g(P+T'+jT') = \prod_{j=0}^{n-1} g(P+jT').$$

Ko pokrajšamo stvari na levi in desni strani, dobimo

$$g(P+nT') = g(P).$$

Ker pa velja $nT' = T$, to ravno pomeni

$$e_n(T,T) = \frac{g(P+T)}{g(P)} = 1.$$

4. Iz točke 1 in 3 sledi

$$\begin{aligned} 1 &= e_n(S+T,S+T) = e_n(S,S)e_n(S,T)e_n(T,S)e_n(T,T) \\ &= e_n(S,T)e_n(T,S). \end{aligned}$$

To pa pomeni $e_n(T,S) = e_n(S,T)^{-1}$.

5. Naj bo ρ avtomorfizem na $\overline{K}$, za katerega velja, da je ρ identiteta na koeficientih E. Če ρ apliciramo na vsakem koraku konstrukcije Weilovega parjenja dobimo

$$\operatorname{div}(f^\rho) = n[\rho T] - n[\infty],$$

ter podobno za g^ρ. Tu f^ρ, g^ρ označujeta funkciji, ki jih dobimo tako, da ρ apliciramo na koeficiente racionalnih funkcij, ki definirajo f, g. Zato velja

$$\rho(e_n(S,T)) = \rho\left(\frac{g(P+S)}{g(P)}\right) = \frac{g^\rho(\rho P+\rho S)}{g^\rho(\rho P)} = e_n(\rho S, \rho T).$$

6. Naj bo $\{Q_1,\ldots,Q_k\} = Ker(\alpha)$. Ker je α seperabilen, po izreku 3.24 velja $k = \deg(\alpha)$. Naj bo

$$\operatorname{div}(f_T) = n[T] - n[\infty], \quad \operatorname{div}(f_{\alpha(T)}) = n[\alpha(T)] - n[\infty]$$

in

$$g_T^n = f_T \circ n, \; g_{\alpha(T)}^n = f_{\alpha(T)} \circ n.$$

Če uporabimo oznako τ_Q iz točke 3 velja

$$\operatorname{div}(f_t \circ \tau_{-Q_i}) = n[T+Q_i] - n[Q_i].$$

Zato velja

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f_{\alpha(T)} \circ \alpha) &= n \sum_{T'', \alpha(T'')=\alpha(T)} [T''] - n \sum_{Q, \alpha(Q)=\infty} [Q] \\ &= n \sum_i ([T + Q_i] - [Q_i]) \\ &= \operatorname{div}(\prod_i (f_T \circ \tau_{-Q_i}))\end{aligned}$$

Za vsak i sedaj izberemo Q_i', tako da velja $nQ_i' = Q_i$. Potem

$$g_T(P - Q_i')^n = f_T(nP - Q_i).$$

Za to funkcijo velja

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\prod_i (g_T \circ \tau_{-Q_i'})^n) &= \operatorname{div}(\prod_i f_T \circ \tau_{-Q_i} \circ n) \\ &= \operatorname{div}(f_{\alpha(T)} \circ \alpha \circ n) \\ &= \operatorname{div}(f_{\alpha(T)} \circ n \circ \alpha) \\ &= \operatorname{div}(g_{\alpha(T)} \circ \alpha)^n.\end{aligned}$$

Delitelja $\prod_i g_T \circ \tau_{-Q_i'}$ in $g_{\alpha(T)} \circ \alpha$ se torej razlikujeta samo za produkt neke konstante C.

Velja

$$\begin{aligned}e_n(\alpha(S), \alpha(T)) &= \frac{g_{\alpha(T)}(\alpha(P+S))}{g_{\alpha(T)}(\alpha(P))} \\ &= \prod_i \frac{g_T(P + S - Q_i')}{g_T(P - Q_i')} \\ &= \prod_i e_n(S, T) \\ &= e_n(S, T)^k = e_n(S, T)^{deg(\alpha)}.\end{aligned}$$

□

6.1 Učinkovit algoritem za izračun Weilovega parjenja

Leta 1986 je Vicor Miller napisal članek o tem, kako učinkovito izračunati Weilovo parjenje [5] .

Izrek 6.5.

Naj bo E eliptična krivulja in naj bosta $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$ ne ničelni točki na E.

1. *Označimo z λ naklon premice, ki povezuje točki P, Q. V primeru, da sta ti točki enaki, λ predstavlja naklon tangente v točki. Če je premica navpična ($x_P = x_Q$), potem privzamemo, da je $\lambda = \infty$. Definirajmo funkcijo $g_{P,Q}$ na sledeči način:*

$$g_{P,Q} = \begin{cases} \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2} & \text{če } \lambda \neq \infty, \\ x - x_P & \text{sicer.} \end{cases}$$

Potem velja

$$div(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P + Q] - [\infty].$$

2. *(Millerjev algoritem) Naj bo $m \geq 1$. Zapišimo m v binarnem kot*

$$m = m_0 + m_1 \cdot 2 + m_2 \cdot 2^2 + \ldots + m_{n-1} \cdot 2^{n-},$$

kjer so $m_i \in \{0, 1\}$ in $m_{n-1} \neq 0$. Potem algoritem 2 vrne funkcijo f_P, za katero velja

$$div(f_P) = m[P] - [mP] - (m - 1)[\infty].$$

Algoritem 2 Millerjev algoritem

```
T = P, f = 1
for i = n − 2 : 0 do
    f = f^2 · g_{T,T}
    T = 2T
    if m_i = 1 then
        f = f · g_{T,P}
        T = T + P
    end if
end for
```

Dokaz.

1. Predpostavimo najprej, da $\lambda \neq \infty$, ter naj $y = \lambda x + \mu$ predstavlja premico skozi P, Q (ali tangento v primeru, da je $P = Q$). Taka premica seka krivuljo E v treh točkah $P, Q, -P - Q$. To sledi iz sestave grupe nad E. Za to premico torej velja

$$\text{div}(y - \lambda x - \mu) = [P] + [Q] + [-P - Q] - 3[\infty].$$

Navpične premice pa sekajo E neki točki P in $-P$. Torej velja

$$\text{div}(x - x_{P+Q}) = [P + Q] + [-P - Q] - 2[\infty].$$

Od tod sledi, da ima funkcija

$$g_{P,Q} = \frac{y - \lambda x - \mu}{x - x_{P+Q}}$$

željen delitelj

$$\text{div}(g_{P,Q}) = [P] + [Q] - [P + Q] - [\infty].$$

Z uporabo formule za seštevanje točk sedaj lahko to funkcijo preoblikujemo v želeno obliko

$$g_{P,Q} = \frac{y - y_P - \lambda(x - x_P)}{x + x_P + x_Q - \lambda^2}.$$

V primeru da velja $\lambda = \infty$, potem velja $P + Q = \infty$. V tem primeru hočemo imeti delitelj oblike $\mathrm{div}(g_{P,Q}) = [P] + [-P] - 2[\infty]$. Tak delitelj pa ima ravno funkcija $x - x_P$.

2. Dokažemo s pomočjo indukcije, pri čemer upoštevamo $\mathrm{div}(g_{T,T}) = 2[T] - [2T] - [\infty]$, $\mathrm{div}(g_{T,P}) = [T] + [P] - [T + P] - [\infty]$. Preverimo, na primeru $m = 3$. binarni zapis m je torej 11.Sledimo korakom algoritma 2.

$$f = f^2 \cdot g_{T,T} = g_{P,P}$$

Ker je v tem primeru $m_0 = 1$ moramo f popraviti v $f = f \cdot g_{T,P}$. To nam da

$$f = g_{P,P} \cdot g_{2T,P}.$$

Če uporabimo sedaj zgornji zvezi dobimo

$$\mathrm{div}(f) = 2[P] - [2P] - [\infty] + [2P] + [P] - [2P + P] - [\infty] = 3[P] - [3P] - 2[\infty].$$

To pa je ravno to kar želimo.

□

S pomočjo izreka 6.5 lahko sedaj izračunamo Weilovo parjenje $e_m(P, Q)$ kot

$$e_m(P, Q) = \frac{\frac{f_P(Q+S)}{f_P(S)}}{\frac{f_Q(P-S)}{f_Q(-S)}}.$$

Tu moramo za točko S izbrati $S \notin \{\infty, P, -Q, P - Q\}$.

Primer 6.6.

Naj bo $y^2 = x^3 + 30x + 34$ eliptična krivulja nad poljem $\mathbb{F}_{631}$. Izberimo točki $P = (36, 60), Q = (121, 387)$. Izračunati želimo Weilovo parjenje $e_5(P, Q)$

Če želimo uporabiti Millerjev algoritem moramo izbrati točko S. Izberimo $S = (0, 36)$. Hitro lahko preverimo, da S res zadošča kriterijem izbire. Za izračun $e_5(P, Q)$ moramo izračunati f_P, f_Q v dveh različnih točkah. Poglejmo si podrobnejši izračun za $f_P(S)$.

V prvem koraku, moramo izračunati $g_{P,P}(S)$. Po vseh potrebnih izračunih dobimo

$$\text{naklon} = 569,\ \text{stevec} = 268,\ \text{imenovalec} = 14.$$

Od tod torej sledi $g_{P,P}(S) = 560$. Ker velja $m_1 = 0$. Torej po prvem koraku dobimo $f = 560, T = 2P$.

V drugem koraku moramo poračunati $g_{2P,2P}(S)$, kjer kot rezultat dobimo 399. Vrednost f pa moramo popraviti na 362. V tem koraku velja $m_0 = 1$, torej moramo tu poračunati še $g_{4P,P}(S)$. Premica med P, $4P$ je navpična zato uporabimo drugo

vejo funkcije g. Kot rezultat dobimo $g_{4P,P}(S) = 595$. Še zadnjič popravimo f in kot končni rezultat dobimo $f_P(S) = 219$.

Na podoben način sedaj poračunamo še ostale vrednosti, ter dobimo

$$\frac{f_P(Q+S)}{f_P(S)} = \frac{103}{219} = 473,$$
$$\frac{f_Q(P-S)}{f_Q(-S)} = \frac{284}{204} = 88.$$

Kot končni rezultat imamo torej

$$e_5(P,Q) = \frac{473}{88} = 242.$$

6.2 Implementacija Millerjevega algoritma

Tu je podana implementacija Millerjevega algoritma v programskem okolju Python.

```
from base import *


def naklon(P,Q):
    """
    Opis:
        Funkcija naklon izracuna naklon premice med tockama
        P in Q, ki lezita na elipticni krivulji

     Definicija:
        naklon(P,Q)

     Vhodni podatki:
        P... razred Point, ki predstavlja tocko na
             elipticni krivulji
        Q... razred Point, ki predstavlja tocko na
             elipticni krivulji

     Izhodni podatek:
        stevilo po modolu P.mod, ki predstavlja naklon
    """
    mod = P.mod
    if P == Q:
        st = (3*(P.x**2)+P.a) % mod
        im = NumberMod(2*(P.y),mod).inverse().num
        rez = (st*im) % mod
        return rez
    else:
        st = (Q.y-P.y) % mod
        im = NumberMod(Q.x-P.x,P.mod).inverse().num
```

```
        rez = (st*im) % mod
        return rez


def g(P,Q,X):
    """
    Opis:
        Funkcija g del funkcije potrebne za izracun Weilovega
        parjenja, s pomocjo Millerjevega algoritma.
        Funkcija izracuna funkcijo $g_{P,Q}(X)$

     Definicija:
        g(P,Q,X)

     Vhodni podatki:
        P... razred Point, ki predstavlja tocko na
             elipticni krivulji
        Q... razred Point, ki predstavlja tocko na
             elipticni krivulji
        X... razred Point, ki predstavlja tocko na
             elipticni krivulji

     Izhodni podatek:
        stevilo, ki predtavlja vrednost $g_{P,Q}(X)$
    """
    if P.x == Q.x and P.y != Q.y:
        rez = (X.x-P.x) % P.mod
        return rez
    else:
        #lambda je naklon premice
        lam = naklon(P,Q)
        st = (X.y-P.y-lam*(X.x-P.x)) % P.mod
        im = NumberMod(X.x+P.x+Q.x-lam**2,P.mod)
        im = im.inverse().num
        rez = (st*im) % P.mod
        return rez

def Miller(P,X,m):
    """
    Opis:
        Funkcija Miller je implementacija Millerjevega
        algoritma potrebnega za izracun Weilovega
        parjenja. Ce je
        $$e_m(P,Q)=(f_P(Q+S)/f_P(S))/(f_Q(P-S)/f_Q(-S))$$
        potem funkcija Miller predstavlja izracun
```

```
        vrednosti $f_P(X)$.

    Definicija:
        Miller(P,X,m)

    Vhodni podatki:
        P...razred Point, ki predstavlja tocko na
            eliptcni krivulji
        X...razred Point, ki predstavlja tocko na
            eliptcni krivulji
        m...red tocke P

    Izhodni podatek:
        vrednost funkcije $f_P(X)$
    """
    binarno = bin(m)[2:]
    #vrne niz porezemo 0b na zacetku niza
    n = len(binarno)
    T = P
    f = 1
    for i in range(1,n):
        f = (f**2 * g(T,T,X)) % P.mod
        T = 2*T
        if int(binarno[i]) == 1:
            f = (f* g(T,P,X)) % P.mod
            T = T + P
    return f


def WeilPairing(P,Q,S,N):
    """
    Opis:
        Funkcija WeilPairing je implementacija Weilovega
        parjenja $e_N(P,Q)$, kjer je
        $$e_N(P,Q)=(f_P(Q+S)/f_P(S))/(f_Q(P-S)/f_Q(-S))$$

    Definicija:
        WeilPairing(P,Q,S,N)

    Vhodni podatki:
        P...razred Point, ki predstavlja tocko na
            eliptcni krivulji
        Q...razred Point, ki predstavlja tocko na
            eliptcni krivulji
        S...razred Point, ki predstavlja tocko, ki
            ni v podgrupi generirani z P,Q
```

```
    N... red tocke P

  Izhodni podatek:
    int k, ki predstavlja red tocke P (kP = $\infty$)
"""

fpQS = Miller(P,Q+S,N)
fpS = Miller(P,S,N)
fqPS = Miller(Q,P-S,N)
fqS = Miller(Q,-S,N)

fpS = NumberMod(fpS,P.mod).inverse().num
eN1 = (fpQS * fpS) % P.mod

fqS = NumberMod(fqS,P.mod).inverse().num
eN2 = (fqPS * fqS) % P.mod
eN2 = NumberMod(eN2,P.mod).inverse().num

eN  = (eN1*eN2) % P.mod

return eN
```

7 Problem diskretnega logaritma

Diffe-Hellmanova izmenjava ključev je postopek, pri katerem se dve osebi npr. Alenka in Boris dogovorita za skrivni ključ. To naredita tako, da tudi v primeru ko njun pogovor posluša tretji nepovabljeni gost npr. Ciril, le ta iz pogovora ne more rekonstruirati ključa, za katerega sta se tekom pogovora dogovorila Alenka in Boris.

Algoritem 3 Diffie-Hellmanova izmenjava ključev.

1. Alenka in Boris se dogovorita za eliptično krivuljo E nad končnim obsegom $\mathbb{F}q$, ter za točko $P \in E(\mathbb{F}_q)$.
2. Alenka se odloči za skrivno število $a \in \mathbb{N}$, in izračuna $P_a = aP$, ter to pošlje Borisu.
3. Boris se odloči za skrivno število $b \in \mathbb{N}$, in izračuna $P_b = bP$, ter to pošlje Alenki.
4. Alenka izračuna $aP_b = abP$.
5. Boris izračuna $bP_a = baP$.

Kot sam ključ bi lahko na koncu Alenka in Boris uporabila npr. zadnjih 256 bitov x-koordinate točke abP. Tu se zanašamo na to, da je iz $E, \mathbb{F}q, P, P_a, P_b$ težko izračunati baP. Zelo veliko pa je tu odvisno od same izbire krivulje E.

To nas privede do t. i. problema diskretnega logaritma.

Definicija 7.1.

Naj bosta $a, b \in \mathbb{N}$, ter naj bo p praštevilo. Iščemo število k tako, da bo

$$a^k \equiv b \pmod{p}.$$

Trditev 7.2.

Če lahko rešimo problem diskretnega logaritma, potem smo rešili tudi problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev. Povedano drugače velja

$$DL \Rightarrow DH.$$

Dokaz.

Problem Diffie-Hellmanove izmenjave ključev lahko enostavno prevedemo na problem diskretnega logaritma na sledeč način:

- Vzemi aP in izračunaj a tako, da rešiš problem diskretnega logaritma.
- Izračunaj $a(bP)$.

□

Na podoben način lahko definiramo tudi odločitveni Diffie-Hellmanov problem, ki se glasi.

Definicija 7.3.
Naj bodo dani P, aP, bP, Q in $E(F_q)$. Ali velja $Q = abP$?

Povedano drugače, če dobimo namig ki vsebuje abP, ali lahko preverimo če ta informacija drži.

Poglejmo si na primeru, kako lahko s pomočjo Weilovega parjenja, v določenih primerih, pridemo do rešitve tega problema.

Primer 7.4.
Naj bo E podana kot $y^2 = x^3 + 1$ nad $\mathbb{F}_q$, kjer je $q \equiv 2 \pmod 3$. Naj bo $\omega \in \mathbb{F}_{q^2}$ primitivni tretji koren enote. Opazimo, da $\omega \notin \mathbb{F}_q$, saj je red $\mathbb{F}_q^\times$ enak $q - 1$, kar pa ni deljivo s tri. Definirajmo preslikavo

$$\beta : E(\overline{\mathbb{F}_q}) \to E(\overline{\mathbb{F}_q}),\ (x, y) \mapsto (\omega x, y),\ \beta(\infty) = \infty.$$

Preverimo lahko, da je tako podana preslikava izomorfizem. Denimo, da ima $P \in E(\overline{\mathbb{F}_q})$ red n. Potem iz lastnosti izomorfizmov sledi, da ima tudi $\beta(P)$ red n. Definirajmo modificirano Weilovo parjenje

$$e'_n(P_1, P_2) = e_n(P_1, \beta(P_2)),$$

kjer je e_n običajno Weilovo parjenje in $P_1, P_2 \in E[n]$.

Predpostavimo sedaj, da poznamo P, aP, bP, Q in želimo preveriti ali velja $Q = abP$. Najprej preverimo, če je Q večkratnik P. Po trditvi 8.1 bo to res natanko tedaj ko $e_n(P, Q) = 1$. Predpostavimo, da velja $Q = tP$, za nek $t \in \mathbb{N}$.Potem imamo

$$e'_n(aP, bP) = e'_n(P, P)^{ab} = e'_n(P, abP),$$

ter

$$e'_n(Q, P) = e'_n(P, P)^t.$$

Če predpostavimo $3 \nmid n$, potem je $e'_n(P, P)$ n-ti koren enote. To pa pomeni

$$Q = abP \iff t \equiv ab \pmod n \iff e'_n(aP, bP) = e'_n(P, P)^t.$$

V zgornjem primeru je potrebna še dodatna utemeljitev, ki jo lahko zapišemo kot lemo.

Lema 7.5.
Naj $3 \nmid n$. Če ima $P \in E(\mathbb{F}_q)$ red n, potem je $e'_n(P, P)$ n-ti koren enote.

Dokaz.
Naj bo $uP = v\beta(P)$ za neki števili u, v. Potem zaradi lastnosti izomorfizmov velja

$$\beta(vP) = v\beta(P) = uP \in E(\mathbb{F}_q).$$

Obravnavajmo sedaj dva primera.

- Če je $vP = \infty$, potem po definiciji β sledi $uP = \infty$. To pa pomeni, da je $u \equiv 0 \pmod n$.

- Če velja $vP \neq \infty$, potem zapišimo $vP = (x, y)$, kjer sta $x, y \in \mathbb{F}_q$. Velja

$$(\omega x, y) = \beta(vP) \in E(\mathbb{F}_q).$$

  Ker $\omega \notin \mathbb{F}_q$, mora veljati $x = 0$. Torej je točka vP oblike $(0, \pm 1)$. Take točke pa imajo red tri, kar lahko poračunamo z definicijo grupe. To pa ni možno saj smo predpostavili $3 \nmid n$.

V obeh primerih mora torej veljati $u, v \equiv 0 \pmod{n}$. Od tod pa sledi, da sta P in $\beta(P)$ baza $E[n]$. Po posledici 6.3 to pomeni, da je $e'_n(P, P)$ n-ti koren enote.

□

7.1 Index Calculus

Naj bo p praštevilo in naj bo g generator ciklične grupe $\mathbb{F}_p^\times$. Naj $L(h)$ označuje vrednost, za katero velja

$$g^{L(h)} \equiv h \pmod{p}.$$

Iz definicije $L(h)$ sledi, da velja

$$L(h_1 h_2) = L(h_1) + L(h_2) \pmod{p}.$$

Idejo napada na problem diskretnega logaritma v taki grupi najlažje vidimo na primeru.

Primer 7.6.
Naj bo $p = 1217$ in $g = 3$. Rešiti hočemo $3^k \equiv 37 \mod 1217$. Izberimo si bazo praštevil $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Pri tem upoštevamo, da bo večja baza pomenila več računanja a hkrati lažjo pot do odgovora. Iščemo x-e tako, da bo

$$3^x \equiv \pm\text{produktu praštevil iz baze} \mod 1217.$$

Ob iskanju takih x najdemo naslednje enakosti:

$$\begin{aligned}
3^1 &\equiv 3 \pmod{1217} \\
3^{24} &\equiv -2^2 \cdot 7 \cdot 13 \pmod{1217} \\
3^{25} &\equiv 5^3 \pmod{1217} \\
3^{30} &\equiv -2 \cdot 5^2 \pmod{1217} \\
3^{54} &\equiv -5 \cdot 11 \pmod{1217} \\
3^{87} &\equiv 13 \pmod{1217}
\end{aligned}$$

Z večjo bazo bi v tem primeru lažje našli take enačbe, a bi jih hkrati potrebovali več. Z uporabo malega Fermatovega izreka, velja

$$3^{1216} \equiv 1 \equiv (-1)^2 \mod 1217,$$

od koder sledi $L(-1) \equiv 608 \mod 1216$. Če enačbe sedaj zapišemo z uporabo $L(h)$, dobimo

$$\begin{aligned}
1 &\equiv L(3) \pmod{1216} \\
24 &\equiv 608 + 2L(2) + L(7) + L(13) \pmod{1216} \\
25 &\equiv 3L(5) \pmod{1216} \\
30 &\equiv 608 + L(2) + 2L(5) \pmod{1216} \\
54 &\equiv 608 + L(5) + L(11) \pmod{1216} \\
87 &\equiv L(13) \pmod{1216}
\end{aligned}$$

Od tod dobimo $L(2) = 216, L(11) = 1059, L(7) = 113, L(5) = 819, L(13) = 87, L(3) = 1$. Sedaj poračunamo za različne j vrednost $3^j * 37$, dokler ne dobimo $3^j * 37 \equiv$ produktu elementov iz baze. Pri vrednosti $j = 16$ dobimo

$$3^{16} \cdot 37 \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \pmod{1217}.$$

Iščemo $L(37)$, iz definicije L pa velja

$$3^{L(37)} \equiv 37 \pmod{1217} \equiv 2^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 3^{-16} \pmod{1217}.$$

Če sedaj namesto baze vstavimo primerne L dobimo

$$3^{L(37)} \equiv 3^{3L(2)} \cdot 3^{L(7)} \cdot 3^{L(11)} \cdot 3^{-16L(3)} \pmod{1217}.$$

$L(37)$ lahko sedaj zapišemo kot

$$L(37) \equiv 3L(2) + L(7) + L(11) - 16L(3) \pmod{1216} \equiv 588 \pmod{1216}.$$

Torej je naš iskani $k = 588$.

7.2 Index Calculus program

Z uporabo programskega okolja SAGE, lahko napad enostavno tudi sprogramiramo.

```
def IndexCalculus(g,h,q,baza):
    """
    Opis:
        IndexCalculus vrne tak $k$, da velja
        $$g^k \equiv h (mod q)$$, kjer je g generator
        multiplikativne grupe $\Z_q$.

        Zgled:
            g = 3
            q = 1217
            h = 37
            baza = [-1,2,3,5,7,11,13]

    Definicija:
```

```
    IndexCalculus(g,h,q,baza)

  Vhodni podatki:
    g...generator multiplikativne grupe $\Z_q$.
    q...modul s katerim delamo
    h...desna stran problema, ki ga resujemo
    baza...baza prastevil s katerimi delamo more
             vsebovati tudi -1

  Izhodni podatek:
    $k$, da velja $$g^k \equiv h (mod q)$$
"""

seznam_relacij = []
V = VectorSpace(GF(q),len(baza)+1)
Z = GF(q)
k = 1
while True:
    e0 = 0
    st = g^k % q
    if is_prime(st) and st not in baza:
        st = abs(st-q)
        e0 = 1
    tmp = ecm.factor(st)
    if set(tmp).issubset(set(baza)):
        relacija = [0]*(len(baza)+1)
        relacija[0] = e0
        for i in range(1,len(baza)):
            relacija[i] = tmp.count(baza[i])
        relacija[-1] = k

        seznam_relacij.append(relacija)
        M = Matrix(Z,seznam_relacij)
        if len(V.linear_dependence(M)) >0:
            seznam_relacij = seznam_relacij[:-1]

        if len(seznam_relacij) > len(baza):
            break
    k+=1

tmp = seznam_relacij[:]
b = [0]*(len(baza)+1)
for i in range(len(baza)+1):
    if seznam_relacij[i][0] == 1:
        b[i] = seznam_relacij[i][-1] - ((q-1)//2)
    else:
```

```
            b[i] = seznam_relacij[i][-1]
        tmp[i] = tmp[i][1:-1]


M = Matrix(IntegerModRing(q-1),tmp)
B = vector(IntegerModRing(q-1),b)
X = M.solve_right(B)
print(X)

j = 0
while True:
    rez = (power_mod(g,j,q)*h) % q
    tmp = ecm.factor(rez)
    if set(tmp).issubset(set(baza)):
        enacba = [0]*(len(baza)-1)
        for i in range(1,len(baza)):
            enacba[i-1] = tmp.count(baza[i])
        enacba = vector(IntegerModRing(q-1),enacba)

        return( enacba*X - j)
    j+=1
```

8 MOV

MOV napad s pomočjo Weilovega parjenja pretvori problem diskretnega logaritma iz $E(\mathbb{F}q)$ v problem diskretnega logaritma nad $\mathbb{F}_{q^m}^{\times}$. Na ta način se izognemo težji strukturi grupe. Nov problem diskretnega logaritma pa lahko sedaj rešimo z različnimi napadi, med drugim tudi z napadom Index-Calculus 7.1. MOV napad deluje če velikost polja $\mathbb{F}q^m$ ni dosti večja od velikosti polja $\mathbb{F}q$. Postopek napada sledi poteku dokaza naslednje trditve.

Trditev 8.1.
Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}q$. Naj bosta $P, Q \in E(\mathbb{F}q)$, ter naj bo N red točke P. Predpostavimo, da velja $gcd(N, q) = 1$. Potem obstaja tako število k, da velja $Q = kP$ natanko tedaj ko $NQ = \infty$ in $e_N(P, Q) = 1$.

Dokaz.
($\Rightarrow$) Če je $Q = kP$, potem je $NQ = kNP$, ampak ker je red P enak N od tod sledi $kNP = \infty$. Prav tako

$$e_n(P, Q) = e_n(P, P)^k = 1^k = 1.$$

($\Leftarrow$) Naj bo $NQ = \infty$, torej je po definiciji $Q \in E[N]$. Ker je $\gcd(N, q) = 1$ lahko uporabimo izrek 5.2 in zapišemo $E[N] \cong \mathbb{Z}_N \oplus \mathbb{Z}_n$. Sedaj izberemo točko R tako, da je $\{P, R\}$ baza $E[N]$. Ker sta P, R baza lahko Q zapišemo kot

$$Q = aP + bR,$$

za neki števili $a, b \in \mathbb{N}$. Po posledici definicije Weilovega parjenja 6.3 velja $e_N(P,R) = \zeta$ je generator μ_N. Po predpostavki velja $e_N(P,Q) = 1$ dobimo torej

$$1 = e_N(P,Q) = e_N(P,P)^a e_N(P,R)^b = \zeta^b.$$

Od tod sledi, da je b večkratnik števila N, od tod pa po definiciji sledi $bR = \infty$, ter $Q = aP$. □

Ideja dokaza nam sedaj da korake MOV napada.

Algoritem 4 MOV napad

Izberi m tako, da

$$E[N] \subset E(\mathbb{F}q^n).$$

Ker imajo vse točke $E[N]$ koordinate v $\overline{\mathbb{F}q} = \cup_{j \geq 1} \mathbb{F}_{q^j}$ tak m obstaja. Prav tako je μ_N v $\mathbb{F}q^m$. Nato postopaj po naslednjih korakih.

1. Izberi točko $T \in E(\mathbb{F}q^m)$.
2. Izračunaj red M točke T.
3. Naj bo $d = \gcd(M, N)$ in naj bo $T_1 = (M/d)T$. Potem ima T_1 red, ki deli N, torej je $T_1 \in E[N]$.
4. Izračunaj $\zeta_1 = e_N(P, T_1)$ in $\zeta_2 = e_N(Q, T_1)$. Tu sta ζ_1 in ζ_2 v $\mu_d \subset \mathbb{F}_{q^m}^{\times}$.
5. Reši problem diskretnega logaritma $\zeta_2 = \zeta_1^k$ v $\mathbb{F}_{q^m}^{\times}$. To nam da $k \mod d$.
6. Ponovi korake 1-5 za različne točke T dokler ni k določen.

MOV napad deluje hitreje, kot če hočemo rešiti problem diskretnega algoritma direktno nad krivuljo, če velja

$$k > log^2(p),$$

kjer krivuljo $E(\mathbb{F}_p)$ MOV napad pretvori v grupo $\mathbb{F}_{p^k}^{\times}$.

MOV napad deluje na supersingularnih krivuljah, saj lahko za take krivulje ponavadi lahko vzamemo $m = 2$.

Definicija 8.2.

Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}_q$, kjer je q potenca nekega praštevila p. Potem velja $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1 - a$ za neko število a. Krivulja E je *supersingularna* če velja $a \equiv 0 \pmod{p}$.

Opomba 8.3.

Izkaže se, da je pri pogoju $q = p \geq 5$ ta definicija ekvivalentna temu, da je $a = 0$.

Naslednja trditev, nam bo dala utemeljitev izbire m pri supersingularnih krivuljah.

Trditev 8.4.

Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}_q$, ter naj velja $a = q + 1 - \#E(\mathbb{F}_q) = 0$. Naj bo $N \in \mathbb{N}$. Če obstaja točka $P \in E(\mathbb{F}_q)$ reda N, potem velja

$$E[N] \subseteq E(\mathbb{F}_{q^2}).$$

Dokaz.

Frobeniusev endomorfizem ϕ_q po izreku 3.31 zadošča $\phi_q^2 - a\phi_q + q = 0$. Ker velja $a = 0$, to pomeni

$$\phi_q^2 = -q.$$

Naj bo $S \in E[N]$. Ker velja $\#E(\mathbb{F}_q) = q + 1$ in ker obstaja točka reda N, od tod sledi $N|q + 1$. Povedano drugače to pomeni $-q \equiv 1 \pmod{N}$. Od tod sledi

$$\phi_q^2(S) = -qS = 1 \cdot S.$$

Po lemi 3.25 od tot sledi $S \in E(\mathbb{F}_{q^2})$. □

Primer 8.5.

Denimo, da želimo rešiti problem diskretnega logaritma na krivulji $E : y^2 = x^3 + x \pmod{547}$, podanega z točkama $P = (67, 481), Q = (167, 405)$. Iščemo k tako da bo veljalo $P = kQ$.

Najprej moramo prvotno polje razširiti z nekim m. Ker je podana krivulja supersingularna, lahko za m izberemo 2. Krivuljo torej razširimo na polje $\mathbb{F}_{547^2}$. Vzemimo za nerazcepni polinom stopnje 2 polinom $x^2 + 543x + 2$. Elementi tega polja so torej polinomi stopnje 1 s koeficienti v $\mathbb{F}_p$. Sedaj moramo izbrati neko naključno točko T. Denimo, da smo izbrali točko $T = (24x + 219, 273x + 466)$. Z algoritmom 5 sedaj poračunamo red M točke T. Kot odgovor dobimo $M = 274$. Poračunati moramo tudi red N točke P. Ta pa je enak $N = 137$. Največji skupni delitelj teh števil je 137. Zaradi tega dobimo novo točko $T1$ kot

$$T1 = (M/d)T = (274/137)T = 2T = (440x + 318, 363x + 296).$$

Ko izračunamo to točko sedaj s pomočjo Weilovega parjenja poračunamo

$$e_{137}(P, T1) = 50x + 422,\ e_{137}(Q, T1) = 416x + 519.$$

Tu moramo sedaj rešiti problem diskretnega logaritma v polju $\mathbb{F}_{547^2}$. To lahko naredimo s posplošitvijo index calculusa na končna polja [2]. Rešitev tega problema je 83. Rešitev lahko preverimo. Če poračunamo

$$(50x + 422)^{83} \div (x^2 + 543x + 2),$$

bi kot ostanek v $\mathbb{F}_{547^2}$ res dobili polinom $416x+519$. Postopek z naključno izbranimi T, bi sedaj še nekajkrat ponovili. Od tod pa bi potem lahko zaključili, da je iskani $k = 83$. Ta rezultat pa lahko s pomočjo algoritma za seštevanje točk tudi hitro preverimo.

8.1 Mali korak, Velik korak

Kako izračunamo red točke na nek ekonomičen način? Trenutno je najhitrejši algoritem za izračun reda točke Schoof–Elkies–Atkinsonov algoritem (SEA). Tu pa si bomo pogledali malo bolj preprost algoritem, ki pa vseeno predstavlja veliko izboljšanje glede na naiven pristop seštevanja točke same s seboj. Naj bo $P \in E(\mathbb{F}_q)$. Radi bi izračunali red točke P. Iščemo torej tako število k, da bo veljalo $kP = \infty$. Algoritem Mali korak, Velik korak lahko izračuna red točke v približno $4q^{\frac{1}{4}}$ korakih. Koraki algoritma so sledeči:

Algoritem 5 Mali korak, Velik korak

---

1. Izračunaj $Q = (q+1)P$.
2. Izberi število m za katero velja $m > q^{\frac{1}{4}}$. Za $j = 0, 1, \ldots, m$ izračunaj in shrani jP.
3. Za $k = -m, -m+1, \ldots, m-1, m$ izračunaj točke $Q + k(2mP)$. V primeru, da se kakšna od teh točk ujema z $\pm jP$ prekini računanje in si zapomni ustrezna k, j.
4. Izračunaj $(q + 1 + 2mk \mp j)P$ in poglej v katerem primeru je to enako ∞. V tem primeru naj bo $M = (q + 1 + 2mk \mp j)$.
5. Faktoriziraj M. Označimo faktorje števila M z $p_1, \ldots, p_r$.
6. Izračunaj $(M/p_i)P$, za $i = 1, \ldots r$. Če je $(M/p_i)P = \infty$ za nek i, potem zamenjaj M z M/p_i in pojdi nazaj na korak (5). V nasprotnem primeru je M red točke P.

Opomba 8.6.
Algoritem 5 lahko preoblikujemo do te mere, da namesto reda točke izračunamo število točk na krivulji. Vse kar moramo narediti, je ponavljati korake (1)-(6) za naključno izbrane točke $P \in E(\mathbb{F}q)$. Ustavimo se ko najmanjši skupni večkratnik redov točk, deli le eno število N v območju $q + 1 - 2\sqrt{q} \leq N \leq q + q + 2\sqrt{q}$. To število N je potem število točk na dani krivulji. Pri tem postopku se upremo na Hassejev izrek o številu točk na eliptični krivulji.

Tu se sedaj pojavi še vprašanje zakaj ta algoritem deluje. Odgovor na to vprašanje pa nam da naslednja lema.

Lema 8.7.
Naj bo G aditivna grupa in naj bo $g \in G$. Denimo da velja $Mg = 0$ za nek $M \in \mathbb{N}$. Označimo z $p_1, \ldots, p_r$ različna praštevila, ki delijo M. Če velja $(M/p_i)g \neq 0$ za vse i, potem je M red g.

Dokaz.
Naj bo k red $g \in G$. Ker velja $Mg = 0$ vemo, da $k|M$. Denimo, da $k \neq M$. Pokazati moramo, da obstaja praštevilo p_i, tako da $(M/p_i)g = 0$. Naj bo p_i

prašteviło, ki deli M/k. Tako število obstaja, ker $M \neq k$. Potem velja $p_i k|M$, to pa pomeni da $k|(M/p_i)$. Ker pa je k red elementa g, to pomeni $(M/p_i)g = 0$.

□

Primer 8.8.

Vzemimo problem iz prejšnega primera. Zanima nas torej red točke $P = (67, 481)$, ki se nahaja na krivulji $y^2 = x^3 + x \pmod{547}$.

Najprej poračunamo točko $Q = (q + 1)P = 548P = \infty$. Ker je Q točka v neskončnosti lahko izpustimo iskanje pravega k iz algoritma, saj bo pri $k = 0, j = 0$ veljalo

$$Q + k(2mP) = Q = \infty = jP.$$

Za število M prav tako v obeh primerih dobimo isti rezultat in sicer $M = 548$. Velja $548 = 2 \cdot 2 \cdot 137$. Pri izvajanju nadaljnih korakov algoritma število M dvakrat delimo z 2, saj velja $274P = \infty$, $137P = \infty$. Ker pa je 137 praštevilo in $P \neq \infty$ od tod sledi red N točke P je enak 137.

8.2 MOV napad program

Algoritem MOV sprogramiran v programskem okolju SAGE.

```
def MOV(E,q,m,P,Q,st_korakov = 10):
    """
    Opis:
        Funkcija MOV resuje problem diskretnega logaritma
        na krivulji E, podanega s tockama P,Q.
        Iscemo torej $k$, tako da velja $kP = Q$.

     Definicija:
       MOV(E,q,m,P,Q,st_korakov = 10)

     Vhodni podatki:
       E...Elipticna krivulja iz SAGE
       q...modul krivulje
       m...stevilo ki pove razsiritev prvotnega polja
           iz GF(q) gremo v GF(q^m) (GF = Galvajevo polje)
       P...tocka na elipticni krivulji iz SAGE
       Q...tocka na elipticni krivulji iz SAGE
       st_korakov...v algoritmu dobivamo rezultate po nekem
                    modolu in moramo na koncu s pomocjo
                    kitajskega izreka dobit koncni rezultat.
                    Lahko pa se zgodi da vedno dobivamo po
                    istih modulih in bi se lahko zaciklali.
                    st_korakov omeji kolikokrat se ta del
                    zanke izvede.

     Izhodni podatek:
       stevilo k
```

```
"""
N = P.order()
k = GF(q^m, 'x')
E1 = E.base_extend(k)#razsirimo krivuljo na vecje polje
P1 = E1(P)#razsirit moramo tudi tocki
Q1 = E1(Q)

odgovori = [[],[]]
koraki = 0

while True:
    #vsak ta del nam da odgovor po modolu d
    T = E1.random_element()
    M = T.order()
    d = gcd(N,M)
    T1 = int(M/d)*T
    w1 = P1.weil_pairing(T1,N)
    print(w1)
    w2 = Q1.weil_pairing(T1,N)
    print(w2)
    if w1 != w2:
        #k = Naivno(w1,w2)
        k = discrete_log(w2, w1)
        odgovori[0].append(k)
        odgovori[1].append(d)
    if lcm(odgovori[1]) >= q:
        break
    elif koraki > st_korakov:
        break
    koraki+=1
#uporabimo kitajski izrek o ostankih
k = crt(odgovori[0],odgovori[1])
return k
```

9 Anomalne krivulje

Delovanje MOV temelji na uporabi Weilovega parjenja. Pojavi se torej ideja, da bi konstruirali tako krivuljo, ki vedno da trivialno Weilovo parjenje. S tem bi preprečili MOV napad. Krivulje za katere je to res so take, da za njih velja

$$\#E(\mathbb{F}_q) = q.$$

Takim krivuljam rečemo anomalne krivulje. V primeru, ko je p praštevilo, velja da je $E[n]$ ciklična grupa, kar pomeni da bo Weilovo parjenje konstantno enako 1. Vender za tak tip krivulj obstaja napad, ki deluje še hitreje kot MOV. Pokažimo algoritem, ki deluje če je q praštevilo. Za tak napad bomo morali najprej krivuljo E in točki P, Q razširiti iz $\mathbb{F}_p$ na $\mathbb{Z}$. Pri tem bomo potrebovali naslednjo trditev.

Trditev 9.1.
Naj bo E eliptična krivulja nad $\mathbb{F}_p$ in naj bosta $P, Q \in E(\mathbb{F}_p)$. Predpostavimo še, da je krivulja E oblike $y^2 = x^3 + Ax + B$. Potem obstajajo cela števila $A', B', x_1, x_2, y_1, y_2$ in eliptična krivulja E' podana z

$$y^2 = x^3 + A'x + B',$$

ter točke $P' = (x_1, y_1), Q' = (x_2, y_2), \in E'(\mathbb{Q})$. Za ta števila velja

$$A \equiv A',\ B \equiv B',\ P \equiv P',\ Q \equiv Q'\ (mod\ p).$$

Dokaz.
Izberi števili x_1, x_2 tako, da velja $x_1, x_2 \pmod p$ podajata x-koordinati P, Q. Predpostavimo najprej, da $x_1 \not\equiv x_2 \pmod p$. Nato izberi y_1 tako, da velja $P' \equiv P \pmod p$. Tu ekvivalenco gledamo po koordinatah. Pri izbiri y_2 moramo biti bolj previdni. Izberimo y_2 tako, da velja

$$y_2^2 \equiv y_1^2 \pmod{x_2 - x_1} \text{ in } (x_2, y_2) \equiv Q \pmod p.$$

To je mogoče, saj lahko uporabimo Kitajski izrek o ostankih, ker velja $gcd(p, x_2 - x_1) = 1$.

Na ta način dobimo dve enačbi s pomočjo katerih moramo določiti konstanti A', B'. Enačbi se glasita

$$y_1^2 = x_1^3 + A'x_1 + B,$$
$$y_2^2 = x_2^3 + A'x_2 + B.$$

Rešitev se torej glasi

$$A' = \frac{(y_2^2 - y_1^2) - (x_2^3 - x_1^3)}{x_2 - x_1}, B' = y_1^2 - x_1^3 - A'x_1.$$

Ker je $y_2^2 - y_1^2$ po konstrukciji deljivo z $x_2 - x_1$ in ker so vse ostale konstante cela števila, od tod sledi, da sta tudi $A', B' \in \mathbb{Z}$. Točki P', Q' pa ležita na E' po konstrukciji.

Obravnavati moramo še primer če je $x_1 \equiv x_2 \pmod{p}$. V tem primeru velja $P = \pm Q$. Izberimo potem $x_1 = x_2$, ter y_1 tako, da nam $y_1 \pmod{p}$ podaja y-koordinato točke P. Na isti način izberemo še A', ter določimo $B' = y_1^2 - x_1^3 - A'x_1$. Q' pa izberemo kot $\pm P'$.

MANKA TO DA E' RES ELIPTIČNA. TEGA NI KER JE DISKRIMINANTA K JE NISM OMENU. DOKAZ SICER 2 VRSTICI. □

Definicija 9.2.

Naj bosta a, b racionalni števili za kateri velja $a/b \neq 0$ in a, b tuji števili. Zapišimo $a/b = p^r a_1/b_1$, kjer $p \nmid a_1 b_1$. Potem je *p-adična vrednost* definirana kot

$$v_p(a/b) = r.$$

Definirajmo še

$$v_p(0) = \infty.$$

Primer 9.3.

$\frac{7}{40} = 2^{-3}\frac{7}{5}$, zato velja

$$v_2(7/40) = -3.$$

Poglejmo si še kakšen primer

$$v_5(50/3) = 2,\ v_7(1/2) = 0.$$

Naj bo E' eliptična krivulja nad $\mathbb{Z}$ podana z $y^2 = x^3 + A'x + B'$. Naj bo $r \in N$. Potem lahko definiramo

$$E'_r = \{(x, y) \in E'(\mathbb{Q}) | v_p(x) \leq -2r, v_p(y) \leq -3r\} \cup \{\infty\}.$$

Izrek 9.4 ([7], Izrek 5.8)**.**

Naj bo E' podana z $y^2 = x^3 + A'x + B'$, $A', B' \in \mathbb{Z}$. Naj bo p praštevilo in naj bo $r \in \mathbb{N}$. Potem velja

1. *E'_r je podgrupa $E'(\mathbb{Q})$.*

2. *Če je $(x, y) \in E'(\mathbb{Q})$, potem $v_p(x) < 0$ natanko tedaj ko $v_p(y) < 0$. V tem primeru obstaja število $r \geq 1$, za katero velja $v_p(x) = -2r, v_p(y) = -3r$.*

3. *Preslikava*

$$\begin{aligned} \lambda_r : E'_r/E'_{5r} &\to \mathbb{Z}_{p^{4r}} \\ (x, y) &\mapsto p^{-r}x/y \ (mod\ p^{4r}) \\ \infty &\mapsto 0 \end{aligned}$$

   je injektivni homomorfizem.

4. *Če $(x, y) \in E'_r$ ampak $(x, y) \notin E'_{r+1}$, potem $\lambda_r(x, y) \not\equiv 0 \ (mod\ p)$.*

Potrebovali bomo še preslikavo redukcije po modulu p

$$\begin{aligned} \mathrm{red}_p : E'(\mathbb{Q}) &\to E' \pmod p \\ (x, y) &\mapsto (x, y) \pmod p \\ E'_1 &\mapsto \{\infty\} \end{aligned}$$

Ta preslikava je homomorfizem, z jedrom E'_1.

Vrnimo se sedaj k prvotnemu problemu. Imamo torej anomalno krivuljo E nad $\mathbb{F}_p$. Želimo poiskati k, tako da bo veljalo $Q = kP$. Sledeči algoritem nam da rešitev tega problema.

Algoritem 6 Teoretični algoritem nad anomalnimi krivuljami

1. Razširi E, P, Q nad $\mathbb{Z}$, kot v trditvi 9.1.
2. Naj bo $P'_1 = pP', Q'_1 = pQ'$.
3. Če $P'_1 \in E'_2$, izberi nove E', P', Q' in se vrni na korak 2. V nasprotnem primeru je $l_1 = \lambda_1(P'_1), l_2 = \lambda_1(Q'_1)$. Iskani k pa je $k \equiv l_1/l_2 \pmod p$.

Opomba 9.5.

Drugi korak algoritma nam zagotavlja, da so $P'_1, Q'_1 \in E'_1$. To je res, ker smo na anomalni krivulji in velja $\mathrm{red}_p(pP') = p \cdot \mathrm{red}_p(P') = \infty$.

Tu je potrebno podati še utemeljitev, da tak napad res deluje. Označimo $K' = kP' - Q'$. Velja

$$\infty = kP - Q = \mathrm{red}_p(kP' - Q') = red_p(K').$$

To ravno pomeni, da $K' \in E'_1$. Od tod pa sledi, da je $\lambda_1(K')$ definiran in velja

$$\lambda_1(pK') = p\lambda_1(K') \equiv 0 \pmod p.$$

Torej velja

$$kl_1 - l_2 = \lambda_1(kP'_1 - Q'_1) = \lambda_1(kpP' - pQ') = \lambda_1(pK') \equiv 0 \pmod p.$$

To pa je ravno to kar hočemo pokazati. Izkaže se, da je ta algoritem nepraktičen, saj ima x-koordinata točk ponavadi okoli p^2 števk. Vendar pa lahko problem rešimo, če delamo po modolu p^2 namesto da delamo v $\mathbb{Q}$. Tako pridemo, do novega algoritma

Algoritem 7 Napad na anomalne krivulje

1. Razširi E, P, Q nad $\mathbb{Z}$, kot v trditvi 9.1.
2. Izračunaj $P_2' = (p-1)P' \equiv (x', y') \pmod{p^2}$.
3. Izračunaj $Q_2' = (p-1)Q' \equiv (x'', y'') \pmod{p^2}$.
4. Izračunaj
$$m_1 = p\frac{y' - y_1}{x' - x_1},\ m_2 = p\frac{y'' - y2}{x'' - x_2}.$$
5. Če $v_p(m_2) < 0$ ali $v_p(m_1) < 0$ poizkusi na drugi krivulji E'. V nasprotnem primeru je $k \equiv m_1/m_2 \pmod{p}$.

Utemeljitev delovanja algoritma lahko najdemo v [7].

Primer 9.6.
Naj bo krivulja E podana z enačbo $y^2 = x^3 + 154x + 82$ nad poljem $\mathbb{F}_{163}$. Naj bosta $P = (7, 6), Q = (150, 152)$ točki na krivulji. Iščemo tak k, da bo veljalo $kP = Q$. Preden lahko uporabimo algoritem 7 se moramo prepričati, da je E res anomalna krivulja. Za točko P velja $163P = \infty$. Ker je 163 praštevilo od tod sledi, da je red točke P enak 163. To pa pomeni, da $163|\#E(\mathbb{F}_{163})$. Hassejev izrek 3.29 nam pove

$$q + 1 - 2\sqrt{q} \leq \#E(\mathbb{F}_q) \leq q + 1 + 2\sqrt{q},$$
$$139 \leq \#E(\mathbb{F}_{163}) \leq 189.$$

Hkrati pa vemo, da red točke deli red grupe, kar pomeni, da je $\#E(\mathbb{F}_{163}) = 163$. To velja, ker je 163 edino število v tem območju, ki je deljivo z 163.

Sedaj lahko uporabimo zgornji napad. Razširimo krivuljo in točke nad $\mathbb{Q}$ in dobimo

$$E' : y^2 = x^3 - 11908x + 83049,\ P = (7, 6),\ Q = (150, 1293).$$

Od tod potem poračunamo

$$P2 = 162 \cdot P1 = (12884, 24607) \pmod{26569}$$
$$Q2 = 162 \cdot Q1 = (10908, 3108) \pmod{26569}$$

Prav tako imamo

$$m_1 = 163\frac{24607 - 6}{12884 - 7} = \frac{24601}{79}$$
$$m_2 = 163\frac{3108 - 1293}{10908 - 150} = \frac{55}{2} \pmod{26569}$$

Velja torej

$$k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{49202}{4345} \equiv 47 \pmod{163}.$$

9.1 Anonomalne program

```
from base import *
import random
from fractions import Fraction

def Lift(P,Q,meja = 20):
    p = P.mod
    x1 = P.x + random.randint(0,meja)*p
    x2 = Q.x + random.randint(0,meja)*p
    if P.x != Q.x:
        y1 = P.y + random.randint(0,meja)*p
        razl = abs(x2-x1)
        i=0
        while True:
            y2 = Q.y + i*p
            if pow(y2,2,razl) == pow(y1,2,razl):
                break
            i += 1
        A1 = int((y2**2-y1**2)/(x2-x1)-(x2**3-x1**3)/(x2-x1))
        B1 = y1**2-x1**3-A1*x1
    else:
        x2 = x1
        y1 = P.y + random.randint(0,meja)*p
        A1 = A + random.randint(0,meja)*p
        B1 = y1**2-x1**3-A1*x1
        if P.y == Q.y:
            y2 = y1
        else:
            y2 = -y1

    return(Point(A1,B1,p**2,x1,y1),Point(A1,B1,p**2,x2,y2))

def AnomalneAttack(P,Q):
    (P1,Q1) = Lift(P,Q)
    p = P.mod
    P2 = (p-1)*P1
    Q2 = (p-1)*Q1
    m1 = p*Fraction(P2.y-P1.y,P2.x-P1.x)
    m2 = p*Fraction(Q2.y-Q1.y,Q2.x-Q1.x)

    k = m1/m2
    k1 = k.numerator
    k2 = k.denominator
    k2 = NumberMod(k2,p).inverse().num
    k = (k1*k2) % p
```

```
    return k


##P = Point(108,4,853,0,2)
##Q= Point(108,4,853,563,755)
##k = AnomalneAttack(P,Q)

P = Point(154,82,163,7,6)
Q = Point(154,82,163,150,152)
k = AnomalneAttack(P,Q)
```

10 Kriptografija nad Eliptičnimi krivuljami

10.1 ElGamalova enkripcija

ElGamalova enkripcija javnega ključa temelji na problemu diskretnega logaritma. V primeru, da bi rešili problem diskretnega logaritma, bi lahko prebrali tudi vsa poslana sporočila. Denimo, da hoče Alenka komunicirati z Borisom. Vsaj eden od njih mora imeti na nekem javnem mestu objavljene nekatere informacije. Pa recimo, da ima Boris izbrano neko krivuljo E nad nekim končnim poljem $\mathbb{F}_q$. Na tej krivulji ima izbrano točko P. Boris si sedaj izbere še skrivni ključ s, s katerim poračuna $B = sP$. Sedaj podatke E, P, B javno objavi. Če hoče Alenka komunicirati z Borisom ta postopek poteka na sledeč način:

1. Predstavi sporočilo, kot neko točko $M \in E(\mathbb{F}_q)$.
2. Izberi skrivno število k in izračunaj $M_1 = kP$.
3. Izračunaj $M_2 = M + kB$.
4. Pošlji Borisu M_1, M_2.

Boris izračuna M kot

$$M = M_2 - sM_1.$$

Prepričajmo se, da na ta način res dobimo točko M.

$$M_2 - sM_1 = (M + kB) - k(sP) = M + ksBP - ksP = M.$$

Vsak tretji poslušalec, ki bi znal rešiti problem diskretnega logaritma, bi lahko s pomočjo P, B izračunal s, ali pa s pomočjo P, M_1 izračunal k.

Pomembno pri celotni shemi pa je tudi to, da Alenka za različna sporočila ne uporablja enakega števila k. Recimo, da bi za sporočili M, M' Alenka uporabila isti k. Vsak tretji poslušalec bi lahko opazil, da sta v tem primeru točki M_1, M_1' enaki. Tako bi lahko izračunal

$$M_2 - M_2' = M' - M.$$

To na prvi pogled ne deluje resna grožnja, a bi lahko povzročila velika škodo, če delamo z informacijami ki bi kasneje postale javne. Če bi npr. sporočilo, ki je

predstavljeno s točko M kasneje postalo javno bi lahko brez težav sedaj izračunali še

$$M' = M - M_2 + M_2'.$$

Vprašanje, ki ga moramo tu še razrešiti je kako sporočilo predstaviti kot točko na krivulji. Ena izmed možnosti je način, ki ga je predlagal Koblitz. Denimo, da je krivulja podana z enačbo $y^2 = x^3 + Ax + B$ nad $\mathbb{F}_p$. Sporočilo m predstavimo kot število $0 \leq m \leq p/100$. Sedaj določimo $x_j = 100m + j$, za $0 \leq j < 100$. Podobno, kot pri generiranju naključne točke sedaj poizkusimo določiti koordinato y_j če ta obstaja. Če smo uspeli poračunati obe koordinati je naša točka $M = (x_j, y_j)$. Ker velja $0 \leq x_j < p + 100$ je m določen kot $m = \lfloor x_j \rfloor$. Ocenimo lahko, da je verjetnost neobstoja take točke približno 2^{-100}.

10.2 Kriptosistemi nad parjenji

V enem od prejšnjih poglavij smo videli, kako lahko s pomočjo Weilovega parjenja izvedemo napad na supersingularne krivulje. Sedaj pa si bomo ogledali kriptosistem, ki uporablja supersingularne krivulje. Tu se opremo na dejstvo, da kljub napadom kot je MOV problem diskretnega logaritma v $\mathbb{F}_p^\times$ ni enostaven. Če izberemo dovolj velik p je ta problem še vedno zelo zahteven. Take krivulje izbiramo zato, ker lahko izkoristimo določene lastnosti.

Delajmo sedaj nad krivuljo E podano z enačbo $y^2 = x^3 + 1$ nad $\mathbb{F}_p$, kjer je $p \equiv 2 \pmod 3$. Take krivulje so supersingularne. Naj bo $\omega \in \mathbb{F}_{p^2}$ tretji koren enote. Definirajmo preslikavo

$$\beta : E(\mathbb{F}_{p^2}) \to E(\mathbb{F}_{p^2}),\ (x, y) \mapsto (\omega x, y),\ \beta(\infty) = \infty.$$

Predpostavimo, da ima P red n. Potem ima tudi $\beta(P)$ red n. Uporabimo modificirano Weilovo parjenje

$$e_n'(P_1, P_2) = e_n(P_1, \beta(P_2)).$$

Pokazali smo že v lemi 7.5 da v primeru ko velja $3 \nmid n$ in ima $P \in E(\mathbb{F}_p)$ red n, potem sledi , da je $e_n'(P, P)$ primitivni n-ti koren enote.

Ker je E supersingularna ima red $p + 1$. Predpostavimo še, da velja $p = 6l - 1$ za neko praštevilo l. To pomeni, da ima točka $6P$ red l ali 1 za vsako točko P. Za pripravo kriptosistema najprej neka agencija, ki jamči našo identiteto naredi sledeče:

- Izbere veliko praštevilo $p = 6l - 1$.
- Izbere točko P reda l na $E(\mathbb{F}_p)$.
- Izbere zgoščevalni funkciji H_1, H_2. Funkcija H_1 vzame niz bitov poljubne dolžine in vrne točko reda l na krivulji E. Funkcija H_2 pa vzame element reda l iz $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ in vrne binarni niz dolžine n, kjer je n dolžina sporočila, ki bo poslano.
- Izbere skrivno število $s \in \mathbb{F}_l^\times$ in izračuna $P_{\text{javni}} = sP$.
- Javno objavi $p, H_1, H_2, n, P, P_{\text{javni}}$ obdrži pa s.

Če hoče sedaj uporabnik z identiteto I dobiti privatni ključ, agencija naredi sledeče:

- Izračuna $Q_I = H_1(I)$.
- Izračuna $D_I = sQ_I$.
- Ko preveri identiteto uporabnika I pošlje D_I uporabniku.

Če hoče sedaj Alenka Borisu poslati sporočilo M to naredi tako:

- Alenka poišče Borisovo identiteto I, ter izračuna $Q_I = H_1(I)$.
- Izbere naključni element $r \in \mathbb{F}_l^\times$.
- Izračuna $g_I = e_l'(Q_I, P_{\text{javni}})$.
- Sporočilo c zapiše kot
$$c = (rP, M \oplus H_2(g_I^r)).$$
Tu oznaka $\oplus$ predstavlja operacijo XOR na bitih.

Boris sedaj sporočilo $c = (u, v)$ dešifrira na sledeči način.

- S pomočjo privatnega ključa D_I izračunaj $h_I = e_l'(D_I, u)$.
- Izračunaj $m = v \oplus H_2(h_I)$.

Prepričajmo se, da na ta način res dobimo originalno sporočilo.

$$e_l'(D_I, u) = e_l'(sQ_I, rP) = e_l'(Q_I, P)^{sr} = e_l'(Q_I, P_{\text{javni}})^r = g_I^r.$$

Sporočilo pa je sedaj

$$m = v \oplus H_2(e_l'(D_I, u)) = (M \oplus H_2(g_I^r)) \oplus H_2(g_I^r) = M.$$

11 Zaključek

Skozi delo smo spoznali, da izredno pomembno vlogo pri varnosti kriptosistemov nad eliptičnimi krivuljami igra sama izbira krivulje. Tako smo ugotovili, da supersingularne krivulje ne predstavljajo dobre izbire če hočemo delati z zelo majhnimi ključi, saj le te niso odporne na napade kot je MOV. Prav tako smo videli, da lahko probleme nad anomalnimi krivuljami rešimo zelo enostavno. Ker smo si ogledali samo majhen del krivulj in načinov kako lahko izkoristimo njihovo obliko zaključimo delo s primerom krivulje, ki trenutno velja za varno. Krivulja imenovana M-221 je podana z enačbo

$$E: \ y^2 = x^3 + 117050x^2 + x \pmod{2^{221} - 3}.$$

Predstavili pa so jo Aranha, Barreto, Pereira in Ricardini leta 2013.

A Program osnovne strukture kubičnih krivulj

```
import math
import random
import time

def razEvk(a, b,inverz = True):
    """extended quclidian algorithm can compute inverse"""
    if inverz == False:
        s0, s1, t0, t1 = 1, 0, 0, 1
        while b != 0:
            q, a, b = a // b, b, a % b
            s0, s1 = s1, s0 - q * s1
            t0, t1 = t1, t0 - q * t1
        return  a, s0, t0
    else:
        s0, s1 = 1, 0
        while b != 0:
            q, a, b = a // b, b, a % b
            s0, s1 = s1, s0 - q * s1
        return  a, s0

class NumberMod:
    """NumberMod(a,n = None) represents the number a modulo n. If n= N
    then the number behaives as normal otherwise it is represented mod
    in a way such that it is writen either with + or - depending on wh
    is smaller. Example b = NumberMod(15,17) will be represented as -2
    15. To perform any calculations between numbers they must have the
    modulo."""
    def __init__(self,a, n=None):
        self.original = a
        self.modul = n
        if self.modul == None:
            self.num = a
        else:
            self.num = (a%self.modul)
            self.numS = self.num
            self.small(self.modul)

    def __neg__(self):
        return NumberMod(-self.num, self.modul)

    def __add__(self,other):
        """addition returns num()"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
```

```
        else:
            novonum = NumberMod((self.num + other.num) % self.modul, self.m
            return novonum

    def __sub__(self,other):
        """substracting returns num()"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
        elif self.modul == None:
            return NumberMod(self.num-other.num, self.modul)
        else:
            novonum = NumberMod((self.num - other.num) % self.modul, self.m
            return novonum

    def __mul__(self,other):
        """multiplaying returns num()"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
        else:
            novonum = NumberMod((self.num * other.num) % self.modul, self.m
            return novonum

    def __truediv__(self,other):
        """multiplying by inverse of other returns num()"""
        if self.modul != other.modul:
            raise Exception('numbers have different modul')
        else:
            temp = other.inverse()
            novonum = self*temp
            return novonum

    def __lt__(self, other):
        """less then returns True or False in modulo arithemtic"""[redacted]
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num < other.num
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) < other.num
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num < (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num < other.num

    def __le__(self, other):
        """less or equal returns True or False in modulo arithemtic"""[redacted]
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num <= other.num
```

```
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) <= other.num
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num <= (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num <= other.num

    def __eq__(self, other):
        """equal returns True or False in modulo arithemtic"""
        return self.num == other.num

    def __ne__(self, other):
        """not equal returns True or False in modulo arithemtic"""
        return self.num != other.num

    def __gt__(self, other):
        """greater then returns True or False in modulo arithemtic"""
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num > other.num
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) > other.num
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num > (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num > other.num

    def __ge__(self, other):
        """greater or equal then returns True or False in modulo arithe
        if self.num > 0 and other.num > 0:
            return self.num >= other.num
        elif self.num < 0 and other.num > 0:
            return (self.modul + self.num) >= other.num
        elif self.num > 0 and other.num < 0:
            return self.num >= (other.modul + other.num)
        else:
            return self.num >= other.num

    def __pow__(self,b):
        if not isinstance(b,int):
            raise Exception('power must be an integer')
        else:
            if b == 0:
                return NumberMod(1,self.modul)
            elif b == 1:
                return NumberMod(self.num,self.modul)
            else:
```

```
            if b%2 == 0:
                return NumberMod(self.num*self.num,self.modul)**(b//2)
            else:
                return NumberMod(self.num,self.modul)*(NumberMod(self.n


    def __str__(self):
        return str(self.num)

    def __repr__(self):
        return str(self.num)

    def inverse(self):
        #print("num: ",self.original)
        #print("modul: ",self.modul)
        """inverse of self.num by modulo self.modul returns num()"""
        if self.modul == None:
            raise Exception('modul equals None')
        n = self.modul
        if self.num < 0:
            a = self.num + n
        else:
            a = self.num
        if gcd(a,n) != 1:
            raise Exception('inverse does not exist')
        else:
            return NumberMod(razEvk(a,n)[1],n)

    def small(self,n):
        """correts self.num by changing it into the smallest value by modu
        i.e. if n= 31 and self.num = 30 it changes self.num into
        self.num = -1. It does this if (n-1)/2 is lees then self.num"""
        if n == None:
            pass
        else:
            if ((n-1)/2) < self.numS:
                self.numS = self.numS-n
            elif self.numS < 0 and -((n-1)/2) > self.numS:
                self.numS = self.numS+n

    def isPrime(self,eps = 1/100000):
        """Miller-Rabin test for primes with error eps"""
        #Napaka posameznega koraka je manjsa kot 1/4
        k = int(math.log(eps)/math.log(1/4))+1
        r = 0
        n = self.num
```

```
        if n == 3:
            return True
        if n < 0:
            n += self.modul
        if n % 2 == 0:
            return False
        temp = n-1
        d = temp
        while temp % 2 == 0:
            r += 1
            d = int(d/2)
            temp = d
        i = 0
        while i < k:
            a = random.randint(2,n-2)
            xprej = pow(a,d,n)
            j = 1
            while j < r+1:
                xnov = pow(xprej,2,n)
                if xnov % n == 1 and (xprej != n-1 and xprej != 1):
                    #xprej je Millerjeva prica
                    return False
                j += 1
                xprej = xnov
            if xnov % n != 1:
                #xnov Fermatova prica
                return False
            i += 1
        return True

    def gcd(self,other):
        if self.modul == other.modul:
            return NumberMod(gcd(self.num,other.num),self.modul)
        else:
            raise Exception('numbers have different modul')

    def pow(self,exp1):
        """computes NumberMod(a,b)^exp1 by squaring"""
        exp = NumberMod(exp1,self.modul)
        base = self
        ans = NumberMod(1,self.modul)
        while exp > NumberMod(0,self.modul):
            if exp.num % 2 == 0:
                exp = NumberMod(exp.num /2,self.modul)
                base = base*base
            else:
```

```
                exp = NumberMod(exp.num -1,self.modul)
                ans = ans*base

                exp = NumberMod(exp.num /2,self.modul)
                base = base*base

        return ans



def testPrimitiveRoot(g,m,razcepPhi,Phi):
    """
    Opis:
       testPrimitiveRoot  testira ali je element g generator grupe $\Z_{m}$


     Zgled:
         Phi = 1216
         razcepPhi =[2,19]
         m = 1217
         g = 23
         odg = testPrimitiveRoot(g,m,razcepPhi,Phi)

     Definicija:
       testPrimitiveRoot(g,m,razcepPhi,Phi)

     Vhodni podatki:
       g...stevilo ki ga testiramo
       m...modul s katerim delamo
       razcepPhi...razcep stevila podan s seznamom dobljenega z Eulerjevo p
       Phi...vrednost $\phi(m)$

     Izhodni podatek:
       Boolean True/False
    """
    skupni = razEvk(g,m,False)
    if skupni[0] != 1:
        return False
    for el in razcepPhi:
        if NumberMod(g**(Phi//el),m) == NumberMod(1,m):
            return False
    return True

def gcd(a,b):
    if b == 0:
        return a
```

```
    else:
        return gcd(b,a % b)


class ElipticCurve:
    """
    Opis:
       Razred elipticnih krivulj v Weierstrassovi obliki
       modulo p
       y^2 = x^3 + ax+b mod p

     Definicija:
       ElipticCurve(a,b,mod)

     Vhodni podatki:
       a...parameter a v enacbi
       b...parameter b v enacbi
       mod...modul p po katerem delamo

     Izhodni  podatek:
       Razred elipticne krivulje
    """

    def __init__(self, a, b, modulo):
        self.a = a
        self.b = b
        self.mod = modulo
    def __str__(self):
        """Pri izpisu print nam vrne krivuljo v lepi obliki"""
        if self.a > 0 and self.b > 0:
            return "y^2 = x^3 + {0}x + {1} mod {2}".format(self.a,self.
        elif self.a > 0 and self.b <0:
            return "y^2 = x^3 + {0}x - {1} mod {2}".format(self.a,abs(s
        elif self.a > 0 and self.b == 0:
            return "y^2 = x^3 + {0}x mod {1}".format(self.a,self.mod)
        elif self.a == 0 and self.b > 0:
            return "y^2 = x^3 + {0} mod {1}".format(self.b,self.mod)
        elif self.a == 0 and self.b == 0:
            return "y^2 = x^3 mod {0}".format(self.mod)
        elif self.a == 0 and self.b <0:
            return "y^2 = x^3 - {0} mod {1}".format(abs(self.b),self.mo
        elif self.a < 0 and self.b >0:
            return "y^2 = x^3 - {0}x + {1} mod {2}".format(abs(self.a),
        elif self.a < 0 and self.b == 0:
            return "y^2 = x^3 - {0}x mod {1}".format(abs(self.a),self.m
        elif self.a < 0 and self.b <0:
```

```
        return "y^2 = x^3 - {0}x - {1} mod {2}".format(abs(self.a),abs(

def rand(self):
    """
    Opis:
        Funkcija rand generira nakljucno tocko na
        eliptcni krivulji E
        y^2 = x^3 + ax+b mod p

     Definicija:
       E.rand()

     Vhodni podatki:
       ni vhodnih podatkov

     Izhodni  podatek:
       Razred Point, ki predstavlja tocko na
       eliptcni krivulji
    """
    najdl = False
    while not najdl:
        x = random.randint(0,self.mod-1)
        y2 = NumberMod(x,self.mod)**3 + NumberMod(self.a*x,self.mod) +
        y2 = y2.num
        if pow(y2,(self.mod-1)//2,self.mod) == 1:
            y = TonelliShanks(y2,self.mod)
            najdl = True
    return Point(self.a,self.b,self.mod,x,y)

def randComplex(self):
    """
    Opis:
        Funkcija randNotPrime generira nakljucno tocko na
        eliptcni krivulji E kjer modul ni prastevilo
        y^2 = x^3 + ax+b mod q
     Definicija:
       E.rand()
     Vhodni podatki:
       ni vhodnih podatkov
     Izhodni  podatek:
       Razred Point, ki predstavlja tocko na
       eliptcni krivulji
    """
    najdl = False
```

```
        while not najdl:
            x = complex(random.randint(0,self.mod-1),random.randint(0,s
            y2 = CMod(x**3 + self.a*x + self.b,self.mod)

            for i in range(self.mod**2):
                y = complex(random.randint(0,self.mod-1),random.randint
                y22 = CMod(y**2,self.mod)
                if y22 == y2:
                    najdl = True
                    break
        return PointComplex(self.a,self.b,self.mod,x,y)

    def isOn(self,P):
        """
        Opis:
            Funkcija isOn preveri ali tocka P res
            lezi na elipticni krivulji E

         Definicija:
           E.isOn(P)

         Vhodni podatki:
           P... razred Point, ki predstavlja tocko
                na elipticni krivulji

         Izhodni podatek:
           True/False
        """

        if P.a != self.a or P.b != self.b or P.mod != self.mod:
            return False
        else:
            x = NumberMod(P.x,self.mod)**3 + NumberMod(self.a*P.x,self.
            y = (P.y**2) % self.mod
            return x.num==y


INF = "inf"

class Point(ElipticCurve):
    """
    Opis:
        Razred tock na elipticni krivulji, ki je
        podrazred razdreda ElipticCurve.

        Tocka $\infty$ je podana kot
```

```
    INFPoint = Point(None,None,None,INF,INF),
    kjer je spremenljivka INF = "inf"

  Definicija:
    Point(a,b,mod,x,y)

  Vhodni podatki:
    a...parameter a v enacbi
    b...parameter b v enacbi
    mod...modul p po katerem delamo
    x...x-koordinate tocke
    y...y-koordinata tocke

  Izhodni podatek:
    Razred tocke na elipticni krivulji
"""

def __init__(self, a,b, mod, x, y):
    super().__init__(a,b, mod)
    self.x = x
    self.y = y
    if (self.x == INF or self.y == INF) and self.y != self.x:
        #preverimo ali je tocka v neskoncnosti, v tem primeru zahtevamo
        #da sta obe koordianti INF
        raise Exception('Point is not a proper infinity')

def __str__(self):
    """Za lepsi izpis tocke po klicu print"""
    if self.x != INF:
        return "({0},{1}) mod {2}".format(self.x,self.y,self.mod)
    else:
        return u"\u221e"

def __repr__(self):
    """za lepsi izpis tocke po klicu return"""
    if self.x != INF:
        return "({0},{1}) mod {2}".format(self.x,self.y,self.mod)
    else:
        return u"\u221e"

def __add__(self,Q):
    """Algoritem za sestevanje tock nad isto elipticno
    krivuljo."""
    infty = False
    if self.x == INF or Q.x == INF:
        infty = True
```

```
        if not(self.a == Q.a and self.b == Q.b and self.mod == Q.mod) a
            raise Exception('Points don\'t lie on the same curve, or ha

        if self.x == INF:
            return Q
        elif Q.x == INF:
            return self

        elif self.x != Q.x:
            m = NumberMod(Q.x-self.x, self.mod).inverse().num
            #print("stevec: ",Q.y-self.y)
            m = (m*(Q.y-self.y)) % self.mod
            x3 = (m**2-self.x-Q.x) % self.mod
            y3 = (m*(self.x-x3) - self.y) % self.mod
            return Point(self.a, self.b, self.mod,x3,y3)

        elif self.x == Q.x and self.y != Q.y:
            return Point(None,None,None,INF,INF)

        elif self.x == Q.x and self.y == Q.y and self.y != 0:
            m = NumberMod(2*self.y, self.mod).inverse().num
            m = (m*(3*(self.x**2)+self.a)) % self.mod
            x3 = (m**2-2*self.x) % self.mod
            y3 = (m*(self.x-x3) - self.y) % self.mod
            return Point(self.a, self.b, self.mod,x3,y3)

        else:
            return Point(None,None,None,INF,INF)

    def __neg__(self):
        if self == INFPoint:
            return INFPoint
        else:
            return Point(self.a, self.b, self.mod, self.x,-self.y % self.n


    def __sub__(self,Q):
        return self + (-Q)



    def __rmul__(self,num):
        """Funkcija predstavlja mnozenje stevila z tocko
        npr. 5P = P+P+P+P+P"""
        if not isinstance(num,int):
```

```
            raise Exception('Can only multiply with an int')

        if num < 0:
            return -(abs(num)*self)

        elif num == 0:
            return Point(None,None,None,INF,INF)
        elif num == 1:
            return self
        else:
            if num % 2 == 0:
                pol = int(num /2)
                return (pol*self + pol*self)
            else:
                return (self+(num-1)*self)

    def __eq__(self, Q):
        """Dve tocki sta enaki, ce lezita na
        isti krivulji in imata iste koordiante
        ali pa predstavljata tocko v neskoncnosti"""
        if self.x == INF and Q.x == INF:
            return True
        elif self.a == Q.a and self.b == Q.b and self.x == Q.x and self.y =
            return True
        else:
            return False

INFPoint = Point(None,None,None,INF,INF)

def TonelliShanks(n,p1):
    p = p1-1
    s = 0
    while True:
        if p %2 == 0:
            s+=1
            p = p//2
        else:
            break
    Q = p

    while True:
        z = random.randint(0,p1-1)
        if pow(z,(p1-1)//2,p1) == p1-1:
            break
    M = s
    c = pow(z,Q,p1)
```

```
        t = pow(n,Q,p1)
        R = pow(n,(Q+1)//2,p1)

        while True:
            if t == 0:
                return 0
            elif t == 1:
                return R
            else:
                i = 1
                while i < M:
                    if pow(t,pow(2,i),p1) == 1:
                        break
                    i += 1
                b = pow(c,pow(2,M-i-1),p1)
                M = i
                c = pow(b,2,p1)
                t = (t*pow(b,2,p1)) % p1
                R = (R*b) % p1



def Factor(n):
    """
    Opis:
        Factor je enostavna neucinkovita funkcija
        za iskanje fakotrojev stevila

     Definicija:
        Factor(n)

     Vhodni podatki:
        n... stevilo, ki ga hocemo faktorizirati

     Izhodni podatek:
        Seznam faktorjev stevila n
    """
    faktorji = []

    tmp = NumberMod(n,None).isPrime()
    if tmp:
        faktorji.append(n)
        return faktorji
    else:
        tmp = n
        while tmp %2 == 0:
```

```
            faktorji.append(2)
            tmp = tmp//2
        i = 3
        while i*i <= tmp:

            while tmp % i == 0:
                faktorji.append(i)
                tmp = tmp//i

            i+=2

        if tmp != 0:
            faktorji.append(tmp)

    return faktorji


def lema(n,a,q):
    s0 = 2
    s1 = a
    if n == 1:
        return a
    else:
        i=1
        while i < n:
            s2 = a*s1-q*s0
            s0 = s1
            s1 = s2
            i +=1
        return s2

def NumberPoints(steviloOsnovne,potenca,q):
    a = q+1-steviloOsnovne
    sn = lema(potenca,a,q)
    stevilo = pow(q,potenca)+1-sn
    return stevilo



a = Point(0,1,529,253,1)
```

[7] [6] [5] [3] [4] [1]

Literatura

[1] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic Curves*, Cambridge University press, 1999.

[2] C. Henri in dr., *Handbook of Elliptic and Hyperelliptic Curve Cryptography (Discrete Mathematics and Its Applications)*, Chapman and Hall/CRC, 2005.

[3] H. Jeffrey, P. Jill in J. H. Silverman, *An Introduction to Mathematical Cryptography*, Springer, 2008.

[4] B. Lynn, *On the implementation of pairing-based cryptosystems*, doktorska disertacija, Stanford university, 2007.

[5] V. S. Miller, *Short Programs for functions on Curves*, 1986.

[6] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, druga izd., 2009.

[7] L. C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography*, Chapman and Hall/CRC, druga izd., 2008.