**Vaje 10** [9. maj 2018]: *Metoda končnih elementov.*

1. *Robni problem v dveh dimenzijah.* Pri metodi končnih elementov približek za rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial u}{\partial y}\right)+ru=f$$

na območju $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ z robnim pogojem $u|_{\partial\Omega} = g$ predstavimo v obliki

$$u \approx \varphi_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varphi_i,$$

kjer so $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, $m \in \mathbb{N}$, zvezne odsekoma linearne funkcije nad triangulacijo $\triangle$ območja $\Omega$. Te funkcije določimo na podlagi baznih funkcij $h_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, prostora zveznih odsekoma linearnih funkcij nad triangulacijo $\triangle$, ki so enolično določene z zahtevami

$$h_j(x_j, y_j) = 1, \qquad h_j(x_k, y_k) = 0, \quad j \neq k,$$

v točkah $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^{n}$ triangulacije $\triangle$. Za funkcije $\varphi_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, vzamemo bazne funkcije $h_j$, ki pripadajo točkam v notranjosti območja $\Omega$ ($m$ torej označuje število notranjih točk triangulacije $\triangle$). Funkcijo $\varphi_0$, ki predstavlja aproksimacijo za robni pogoj, pa definiramo kot linearno kombinacijo

$$\varphi_0 = \sum_{(x_j, y_j)\in\partial\Omega} g(x_j, y_j) h_j$$

preostalih baznih funkcij $h_j$. Koeficiente $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, ki določajo približek za $u$, dobimo z reševanjem sistema $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{b}$, kjer je $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i=1}^{m}$ vektor spremenljivk, $\boldsymbol{A} = (a_{i,j})_{i,j=1}^{m}$ matrika z elementi

$$a_{i,j} = \iint_\Omega \left(p\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + q\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + r\varphi_i\varphi_j\right) \mathrm{d}\Omega$$

in $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^{m}$ vektor z elementi

$$b_i = \iint_\Omega \left(f\varphi_i - \left(p\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + q\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + r\varphi_0\varphi_i\right)\right) \mathrm{d}\Omega.$$

V Matlabu sestavite metodo, ki za dane funkcije $p$, $q$, $r$, $f$ in $g$ ter triangulacijo $\triangle$ izračuna približek po metodi končnih elementov. Pri implementaciji sledite naslednjim navodilom.

   (a) Sestavite metodo za izračun vrednosti linearne funkcije ter njenih parcialnih odvodov v poljubnih točkah. Funkcija naj bo opisana z vhodnimi parametri, ki določajo njene vrednosti v ogliščih trikotnika. Ta metoda bo uporabna pri konstrukciji integrandov v izrazih za $a_{i,j}$ in $b_i$.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

(b) Sestavite metodo za izračun približka za integral poljubne funkcije $k$ na trikotniku $T$, določenem z oglišči $(X_i, Y_i)$, $i = 1, 2, 3$. S preslikavo

$$\Psi(u, v) = (uX_1 + vX_2 + (1 - u - v)X_3,\, uY_1 + vY_2 + (1 - u - v)Y_3)\,,$$

ki baricentrične koordinate $(u, v, 1 - u - v)$ glede na $T$ pretvori v kartezične koordinate točke v domeni, lahko integral opišemo z

$$\iint_T k\,\mathrm{d}T = \int_0^1 \int_0^{1-u} k(\Psi(u, v))\,|\det(\boldsymbol{J}_\Psi(u, v))|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u,$$

kjer $\boldsymbol{J}_\Psi$ označuje Jacobijevo matriko preslikave $\Psi$. Približek za tako predstavljen integral lahko v Matlabu izračunamo z vgrajeno metodo `integral2`. Pripravljena metoda bo služila za izračun prispevkov integralov na posameznih trikotnikih triangulacije $\triangle$ v izrazih za $a_{i,j}$ in $b_i$.

(c) Sestavite glavno metodo, ki na podlagi vhodnih podatkov konstruira matriko $\boldsymbol{A}$ in vektor $\boldsymbol{b}$ ter določi rešitev robnega problema po metodi končnih elementov z reševanjem sistema $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{b}$. Konstrukcija $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{b}$ naj poteka s pregledom vseh trikotnikov triangulacije $\triangle$ in prištevanjem prispevkov integralov na posameznem trikotniku k izrazom za $a_{i,j}$ in $b_i$. V tem postopku je pomembno ločiti med notranjimi in robnimi točkami triangulacije, za kar lahko uporabite vgrajeni ukaz `freeBoundary`. Končni rezultat metode naj bo tridimenzionalna triangulacija: vhodno triangulacijo razširite tako, da pri vsaki točki na podlagi robnega pogoja $g$ in izračunanih koeficientov $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, določite vrednost tretje komponente v prostoru.

(d) Metodo testirajte na naslednjih primerih. Narišite grafe rešitev.

i. Rešite Poissonovo enačbo $-\Delta u = 1$ na $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ pri robnem pogoju $u|_{\partial\Omega} = 0$. Triangulacija $\triangle$ je določena s premicami

$$y = \frac{1}{2}, \quad y = 2x, \quad y = 2 - 2x, \quad y = 2x - 1, \quad y = -2x + 1.$$

ii. Rešite Poissonovo enačbo $-\Delta u = 1$ na $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ pri robnem pogoju

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x^3, && x \in [0, 1],\\ u(x, 1) &= x^2, && x \in [0, 1],\\ u(0, y) &= \sin(2\pi y), && y \in [0, 1],\\ u(1, y) &= \cos(2\pi y), && y \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Triangulacijo $\triangle$ konstruirajte z ukazi

```
[X, Y] = meshgrid(linspace(0, 1, 11));
X = X(:); Y = Y(:);
TRI = delaunay(X, Y);
t = TriRep(TRI, X, Y);
```

Rešitev na mreži točk $(i/10, j/10)$, $i, j = 0, 1, \ldots, 10$, primerjajte z rešitvijo, dobljeno z diferenčno metodo nad to mrežo.

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si

iii. Rešite enačbo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial u}{\partial y}\right)+4\pi^2(x+y)u=2\pi\cos\left(2\pi(x+y)\right)$$

na območju Slovenije $\Omega$ pri robnem pogoju $u|_{\partial\Omega}(x,y)=\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Triangulacijo območja vsebuje datoteka `slo.mat`. Naložite jo z ukazi

```
L = load('slo.mat');
t = TriRep(L.TRI, L.X, L.Y);
```

Primerjajte dobljeni približek s točno rešitvijo $u(x,y)=\cos(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Kakšna je maksimalna absolutna napaka v točkah triangulacije?

✉ jan.groselj@fmf.uni-lj.si