Okrepljena Lagrangeeva metoda

Optimizacijskemu problemu

$$\min\{f(x) \mid Ax = b\},$$

kjer f je konveksna, lahko priredimo *okrepljeno Lagrangeovo funkcijo*

$$L_\sigma(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T(Ax - b) + \frac{\sigma}{2}\|Ax - b\|_2^2.$$

Algoritem: Okrepljena Lagrangeeva metoda

> $k = 0$. Izberi λ_0, σ_0.
>
> Dokler ni konvergence
>
> > Izračunaj $x_{k+1} = argmin_x\ L_{\sigma_k}(x, \lambda_k)$.
> >
> > Posodobi $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \sigma_k(Ax_{k+1} - b)$.
> >
> > $k = k + 1$
> >
> > Posodobi σ_k v σ_{k+1}.

1. Dan je konveksen kvadratičen optimizacijski problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T P x + q^T x \\ & Ax \leq b. \end{aligned}$$

Pri tem je $P \succ 0$. Izpeljite okrepljeno Lagrangeevo metodo za reševanje zgornjena razreda optimizacijskih problemov, implementirajte dobljen algoritem in ga preizkusite na dveh primerih. Kaj vzeti za zaustavitveni kriterij?

(a)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ q = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rešitev: optimalna vrednost je -8.222, dosežena pri vektorju $(0.666, 1.333)$.

(b) Podatki so dosegljivi v skripti `test_qp` na spletni učilnici.
Rešitev: optimalna vrednost je -74.86492.

Metoda robnih točk (Boundary Point Method)

Rešujemo primarni in dualni semidefinitni program

$$\begin{array}{ll} \max & C \bullet X \\ & A(X) = b \\ & X \succeq 0 \end{array}$$

in

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ & A^T(y) - C = Z \\ & Z \succeq 0 \end{array}$$

Metoda robnih točk izvaja okrepljeno Lagrangeevo metodo na dualnem programu.

Algoritem: Metoda robnih točk

Vhodni podatki: operator A, $C \in \mathcal{S}^n, b, y^0 \in \mathbb{R}^m$.

1. Izberi $\sigma > 0$ in toleranco tol.
2. $k = 0$, $X^k = 0$

Dokler $\max(\|A(X^k) - b\|, \|Z^k - A^T(y) + C\|) > tol$

Reši za y^k: $A(A^T(y)) = A(Z^k + C) + \frac{1}{\sigma}(A(X^k) - b)$;

$W = A^T(y) - C - \frac{1}{\sigma}X^k$;

$Z^k = W_+$;

$X^k = -\sigma W_-$;

$k = k + 1$;

2. Implementirajte metodo robnih točk. Naložite si podatke `podatki_theta_sdp` in `podatki_max_cut_sdp` iz spletne učilnice in preverite delovanje metode. Optimalni rešitiv sta enaki 2.2361 in -294.8725.