Semidefinitno programiranje in kombinatorična optimizacija

Dogovor o formatu grafa za vhodni parameter funkcije. Pri vseh nadaljnih primerih upoštevajte, da bodo grafi $G = (V, E)$ z $n = |V|$ vozlišči in $m = |E|$ povezavami podani v datoteki oblike

$$\begin{array}{lll} n & m & \\ v_i & v_j & w_{ij} \\ & \vdots & \\ v_k & v_l & w_{kl} \end{array}$$

Pri tem i-ta vrstica določa i-to povezavo med vozliščema v_k in v_l. Število w_{ij} določa vrednost uteži na povezavi ij.

Problem neodvisnega števila (stable set problem)

Za dani graf $G = (V, E)$ z $n = |V|$ vozlišči in $m = |E|$ povezavami iščemo stabilno množico z največjo močjo $\alpha(G)$. Problem formuliramo kot celoštevilski optimizacijski program

$$\begin{aligned} \max \quad & e^T x \\ & x_i + x_j \leq 1 \ \text{ za } ij \in E \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

Na predavanjih ste pokazali, da za Lovászevo ϑ funkcijo grafa, ki je rešitev semidefinitnega programa

$$\begin{aligned} \max \quad & J \bullet X \\ & tr(X) = 1 \\ & X_{ij} = 0 \ \text{ za } ij \in E \\ & X \succeq 0, \end{aligned}$$

velja

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G).$$

1. Uporabite Matlabovo funkcijo `intlinprog` in sestavite funkcijo, ki za dani graf izračuna vrednost $\alpha(G)$.

2. Uporabite metodo robnih točk za izračun $\vartheta(G)$.

Problem največjega prereza (max-cut problem)

Za dani graf $G = (V, E)$ z $n = |V|$ vozlišči in $m = |E|$ povezavami, iščemo tako particijo vozlišč $V = V_1 \cup V_2$, da je vsota uteži w_{ij} na povezah $ij \in E$, za katere je $i \in V_1$ in $j \in V_2$, maksimalna. Vsakemu vozlišču priredimo spremenljivko x_i,

$i = 1, 2, \ldots, n$, kjer $x_i = 1$ pomeni $i \in V_1$ in $x_i = -1$ pomeni $i \in V_2$. Tako lahko problem formuliramo kot

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{4}\sum_{i,j} w_{ij}(1 - x_i x_j) \\ & x_i \in \{-1, 1\}. \end{aligned}$$

Označimo z A matriko sosednosti grafa G, tj. $a_{ij} = w_{ij}$. Če definiramo Laplaceovo matriko grafa $L = diag(Ae) - A$, lahko problem zapišemo kot binarni kvadratični optimizacijski program

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{4}x^T L x \\ & x \in \{-1, 1\}^n. \end{aligned}$$

Naj OPT_{mc} označuje vrednost maksimalnega prereza. Na predavanjih ste pokazali, da za optimalno rešitev OPT_{sdpmc} semidefinitnega programa

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{4}L \bullet X \\ & diag(X) = e \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \tag{MCSDP}$$

velja zveza

$$OPT_{mc} \leq OPT_{sdpmc}.$$

3. Sestavite funkcijo, ki za vhodni parameter sprejme graf in izračuna optimalno vrednost programa MCSDP. Za reševanje semidefinitnega programa uporabite SeDuMi.

Goemans–Williamsonov algoritem je 0.878–aproksimacijski algoritem, ki izračuna aproksimativno rešitev za problem največjega prereza. Pričakovana vrednost dobljenega prereza je vsaj $0.878 \cdot OPT_{mc}$.

Goemans–Williamsonov algoritem

1. Izračunaj optimalno rešitev X_{sdpmc} semidefinitnega programa MCSDP.
2. Uporabi razcep Choleskega in poišči take vektorje v_i, da velja $X_{sdpmc} = V^T V$. Pri tem je $V = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$.
3. Izberi naključni vektor r in definiraj

$$V_1 = \{i \mid r^T v_i \geq 0\}.$$

4. Implementirajte Goemans–Williamsonov algoritem.