1. domača naloga

Naloge rešite v programu Matlab ali Octave. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v ZIP datoteki `ime_priimek_vpisnastevilka_dn1.zip` v spletni učilnici dan pred kvizom.

1. Denimo, da so dane točke v ravnini

x_i	10	26	30	34	39	39	42	46	53	43
y_i	52	48	45	45	58	44	45	42	42	38

. iščemo pa premico oblike $y = kx + n$, ki gre skozi dane točke. Vsaka točka bi morala zadoščati enačbi premice. Od tod dobimo sistem enačb $Aw = b$ za neznan vektor $w = (k, n)$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ker imamo več enačb kot neznank, je to predoločen sistem. Sistem v splošnem nima rešitve, zato nalogo preoblikujemo. Določite premico, ki se najbolje prilega podatkom, če je merilo za napako

$$\|Aw - b\|_1 + \|w\|_\infty,$$

kjer je $w = (k, n)$. Problem formulirajte kot linearni program in ga rešite z vgrajeno Matlabovo funkcijo `linprog`. Rešitev primerjajte z rešitvijo dobljeno po regularizirani metodi najmanjših kvadratov, kjer minimiziramo funkcijo

$$\|Aw - b\|_2^2 + \|w\|_2^2.$$

2. Denimo, da so dane bele točke $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$ in črne točke $\{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_m, v_m)\}$ v ravnini. Radi bi preverili, ali obstaja separacijska premica z enačbo $y = ax + b$, ki strogo loči točke obeh barv. Izmed vseh takih premic, poiščite tisto za katero je vertikalna razlika do najbližjih točk maksimalna. Problem formulirajte kot linearni program in ga rešite z vgrajeno Matlabovo funkcijo `linprog`.

3. Za politop P, podan s sistemom linearnih neenačb $Ax \leq b$, poiščite največji krog, ki je vsebovan v politopu P. Problem formulirajte kot linearni program za neznan polmer r in središče (s_1, s_2) in rešitev preverite na podatkih

$$\begin{aligned} y &\leq 3x - 2, & y &\geq 3x - 28, \\ y &\leq x + \frac{3}{2}, & y &\geq \frac{2}{3}x - 6, \\ y &\leq \frac{1}{2}x + 4, & y &\geq \frac{1}{2}x - 5, \\ y &\leq -\frac{3}{2}x + 18, & y &\geq -x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Dan je utežen dvodelni graf $G = (V, E)$ z $n = |V|$ vozlišči in $m = |E|$ povezavami. Utež na povezavi e označimo z w_e. Množica M povezav grafa G je prirejanje v G, če povezave iz M nimajo skupnih krajišč. Prirejanje M je popolno, če je vsako vozlišče grafa G krajišče vsaj ene povezave iz M. Prirejanje je največje, če je vsota uteži na povezavah maksimalna.

   Naj bo $x = \{0, 1\}^n$ incidenčni (karakteristični) vektor povezav grafa G, tj. $x_e = 1$, če povezava e pripada največjemu prirejanju in $x_e = 0$, sicer. Formulirajte problem največjega prirejanja kot celoštevilski linearni program in ga rešite z vgrajeno Matlabovo funkcijo `intlinprog`.

   Celoštevilsko omejitev $x_e \in \{0, 1\}$ zamenjamo s konveksno omejitvijo $x_e \in [0, 1]$. Dobimo *relaksacijo* programa, saj je vsaka dopustna rešitev celoštevilskega programa tudi dopustna rešitev relaksiranega programa. Množico dopustnih rešitev smo namreč povečali in maksimum se kvečjemu poveča. Od tod sledi, da optimalna vrednost z^* dobljenega relaksiranega programa določa zgornjo mejo za optimalno vrednost p^* celoštevilskega programa. V splošnem je vrednost z^* strogo večja od p^*. Izkaže se, da v primeru problema največjega prirejanja velja $p^* = z^*$. Izračunajte optimalno vrednost relaksiranega programa in preverite, da je enaka p^*.

5. *Implementacija simpleksne metode.* Naj bo $m \le n$ in $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrika polnega ranga. Njene stolpce označimo z $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Za dana vektorja $b \in \mathbb{R}^m$ in $c \in \mathbb{R}^n$ rešujemo primarni linearni program v standardni obliki

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

   in pripadajoči dualni program

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \le c. \end{aligned}$$

   (a) Sestavite program, ki izvaja simpleksno metodo:

      i. Naj bo J začetna baza in $K = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash J$.

      ii. Reši sistem $A_J \bar{x}_J = b$.

      iii. Izračunaj vrednost kriterijske funkcije v trenutni dopustni bazni rešitvi $\bar{x}_J$:
$$c_J^T \bar{x}_J$$

      iv. Iz sistema $A_J^T y = c_J$ izračunaj dualni vektor y.

      v. Izračunaj $\bar{c}^T = c_K^T - u^T A_K$. Če je $\bar{c}^T \ge 0$, smo našli optimalno rešitev. Sicer izberemo najmanjši tak indeks $\sigma \in K$, da velja $c_\sigma < 0$. Spremenljivka x_σ vstopi v bazo.

      vi. Reši sistem $A_J \bar{a} = a_\sigma$. Če je $\bar{a} \le 0$, je problem neomejen.

vii. Izračunaj vektor $v = \frac{\bar{x}_J}{\bar{a}}$ in izberi najmanjši indeks $\rho \in J$, da velja $v_\rho > 0$. Spremenljivka x_ρ izstopi iz baze.

viii. Posodobi J in K in se vrni na korak (ii).

Delovanje algoritma preverite na primeru

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

in rešitev primerjajte z rešitvijo dobljeno z Matlabovo funkcijo `linprog`. Za začetno bazo izberite indekse, ki določajo dopolnilne spremenljivke.

(b) *1. faza.* Denimo, da nimamo začetne baze. Najprej enačbe preuredimo tako, da velja $b \geq 0$. Sestavite program, kjer uporabite algoritem iz točke (a) na pomožnem problemu

$$\begin{aligned} \min \quad & e^T w \\ & Ax + w = b \\ & x, w \geq 0. \end{aligned}$$

Pri tem smo z e označili vektor samih enic. Če je optimalna vrednost pozitivna, potem originalni program ni dopusten. Sicer iz rešitve tega programa preberemo bazo in nadaljujemo z drugo fazo, kjer uporabimo algoritem iz točke (a).

Delovanje algoritma preverite na primeru

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ & x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ & x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$