

### 3. domača naloga

Naloge rešite v programu Matlab ali Octave.

Pri vseh nadaljnjih primerih upoštevajte, da bodo grafi  $G = (V, E)$  z  $n = |V|$  vozlišči in  $m = |E|$  povezavami podani v datoteki oblike

$$\begin{array}{ccc} n & m & \\ v_i & v_j & w_{ij} \\ & \vdots & \\ v_k & v_l & w_{kl} \end{array}$$

Pri tem  $(i + 1)$ -ta vrstica določa  $i$ -to povezavo med vozliščema  $v_k$  in  $v_l$ . Število  $w_{ij}$  določa vrednost uteži na povezavi  $ij$ .

Pri vseh funkcijah predpostavite, da je vhodni parameter graf, ki je podan v omenjenem formatu.

#### Problem neodvisnega števila (stable set problem)

Za dani graf  $G = (V, E)$  z  $n = |V|$  vozlišči in  $m = |E|$  povezavami, iščemo stabilno množico z največjo močjo  $\alpha(G)$ . Problem formuliramo kot celoštevilski optimizacijski program

$$\begin{array}{ll} \max & e^T x \\ & x_i x_j = 0 \text{ za } ij \in E \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{array}$$

Na predavanjih ste pokazali, da za Lovászovo  $\vartheta$  funkcijo grafa, definirano kot

$$\begin{array}{ll} \max & J \bullet X \\ & \text{tr}(X) = 1 \\ & X_{ij} = 0 \text{ za } ij \in E \\ & X \succeq 0 \end{array}$$

velja

$$\alpha(G) \leq \vartheta(G).$$

1. (a) Implementirajte verzijo metode robnih točk prilagojeno za reševanje Lovászove theta funkcije. Pri tem upoštevajte pogoje semidefinitnega programa in jih izkoristite pri reševanju sistema linearnih enačb z matriko  $AA^T$ . Za vrednosti  $\sigma$  uporabite  $0.05/n$ , pri čemer je  $n$  število vozlišč grafa. Delovanje vaše kode preverite na večjem grafu (testni graf), ki je naložen na spletni učilnici. *Rešitev:* 10.388.

- (b) *Izboljšanje  $\vartheta$  funkcije.* Za dani graf  $G$  je  $\vartheta^+(G)$  definirana kot rešitev semi-definitnega programa

$$\begin{aligned} \max \quad & J \bullet X \\ & \text{tr}(X) = 1 \\ & X_{ij} = 0 \text{ za } ij \in E \\ & X \succeq 0 \end{aligned}$$

To je semidefinitni program za theta funkcijo, pri čemer še dodatno zahtevamo nenegativnost elementov iskane matrike  $X$ . Na predavanjih ste pokazali, da velja zveza

$$\alpha(G) \leq \vartheta^+(G) \leq \vartheta(G).$$

Izpeljite dualni program in na njem uporabite okrepljeno Lagrangeevo metodo. Implementirajte dobljen algoritem. Delovanje vaše kode preverite na večjem grafu (`keller4_clq.dat`), ki je naložen na spletni učilnici. *Rešitev:*  $\vartheta^+(G) = 13.4659$ . Preverite še, da velja  $\vartheta(G) = 14.012$ .

2. Implementirajte naslednjo hevristiko za računanje neodvisne množice:

Vhod: enostaven graf  $G = (V, E)$ .

Izračunaj optimalno rešitev  $X^*$  Lovaszeve theta funkcije.

$S = \emptyset, U = V$ .

Dokler  $U \neq \emptyset$

Najdi  $i \in U$ , pri katerem je  $X_{ii} = \max\{X_{jj} : j \in U\}$ .

$S = S \cup i$ .

Odstrani  $i$  in vse sosedbe od  $i$  iz  $U$ .

Vrni  $S$ .

Delovanje vaše kode preverite na grafu (`keller4_clq.dat`), ki je naložen na spletni učilnici. *Rešitev:* stabilna množica je  $\{48 \ 145 \ 126 \ 164 \ 132 \ 54 \ 19\}$ . Njena moč je 7.

3. Sestavite funkcijo, ki izvaja dologokoračno metodo notranjih točk prilagojeno za semidefinitno relaksacijo problema največjega prereza (max-cut problem)

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{4} L \bullet X \\ & \text{diag}(X) = e \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \quad (\text{MCSDP})$$

Upoštevajte strukturo pogojev optimizacijskega programa in to izkoristite za hitrejši izračun  $\Delta X$ ,  $\Delta y$  in  $\Delta Z$ . Kot vhodni parameter algoritma uporabite Laplaceovo matriko  $L$  grafa  $G$ . Delovanje vaše kode preverite na večjem grafu (test\_graph\_max\_cut), ki je naložen na spletni učilnici. *Rešitev: Optimalna vrednost: 164924.304.*

4. Implementirajte Goemans–Williamsonov algoritem.

- (a) Izračunaj optimalno rešitev  $X_{sdpmc}$  semidefinitnega programa MCSDP.
- (b) Izračunaj take vektorje  $v_i$ , da velja  $X_{sdpmc} = V^T V$ . Pri tem je  $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ . Želen razcep dobite iz spektralnega razcepa  $X = SDS^T$ , če vzamete  $V = \sqrt{D}S^T$ .
- (c) Izberi naključni vektor  $r$  in definiraj

$$V_1 = \{i \mid r^T v_i > 0\}$$

$$V_2 = \{i \mid r^T v_i < 0\}$$

Če izberete  $r = e/\|e\|$ , kjer je  $e$  vektor samih enic, in uporabite G-W algoritem na grafu iz prejšnje naloge, dobite vrednost 155920.