Fakulteta za matematiko in fiziko

Računsko podprto geometrijsko oblikovanje

VS postopek za izračun vrednosti polinomov več spremenljivk

Janez Radeščček, Miha Avsec

30. december 2018

1 Decasteljou

Naj bo T trikotnik v ravnini, ter naj bodo (r, s, t) baricentrične koordinate točke P glede na trikotnik T. V tem primeru lahko vsak polinom stopnje d definiran nad trikotnikom T zapišemo v Bernsteinovi bazi kot

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{i} b_{d-i,i-j,j} B^d_{d-i,i-j,j},$$

kjer velja

$$B^d_{i,j,k}(r, s, t) = \frac{d!}{i!j!k!} r s^j t^k.$$

Tako podan polinom lahko evaluiramo s pomočjo deCasteljouvovega algoritma

Algoritem 1.1. *Naj bo p polinom stopnje d podan v Bezierjevi obliki, ter naj bodo r, s, t baricentirčne koordinate točke za katere velja $r \geq s, r \geq t$, tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki* (r, s, t)

$for \quad k = 1{:}d$
$\quad for \quad i = 0{:}d-k$
$\qquad for \quad j = 0{:}i$
$\qquad\quad b^k_{d-i-k,i-j,j} = r{*}b^{k-1}_{d-i-k+1,i-j,j} + s{*}b^{k-1}_{d-i-k,i-j+1,j} + r{*}b^{k-1}_{d-i-k,i-j,j+1}$
$p(r, s, t) = b^d_{0,0,0}$

Ta algoritem potrebuje $d(d + 1)(d + 2)/2$ operacij.

2 Modificirana Bernstein-Bezierjeva reprezentacija

Če imamo podan polinom v Bernsteinovi obliki

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{i} b_{d-i,i-j,j} B^d_{d-i,i-j,j}(r, s, t),$$

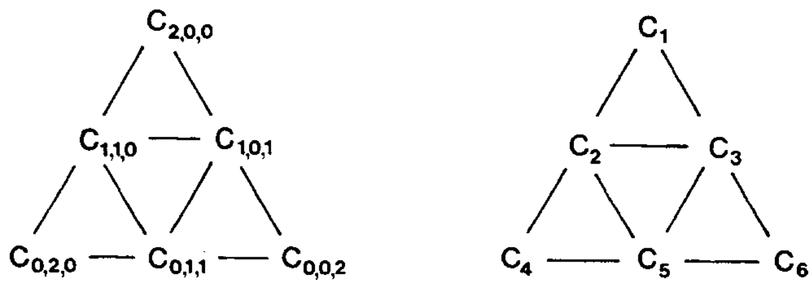
potem lahko tak polinom enostavno prepišemo v obliko

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{i} c_{d-i,i-j,j} r^{d-i} s^{i-j} t^j,$$

tako da za koeficiente $c_{d-i,i-j,j}$ vzamemo

$$c_{d-i,i-j,j} = \frac{d!}{(d-i)!(i-j)!j!} b_{d-i,i-j,j}, \quad j = 0, \ldots, i; i = 0, \ldots, d.$$

Tej obliki polinoma rečemo modificirana Bernstein-Bezierjeva oblika ali krajše MBB. Pokazati želimo, da se polinom v MBB obliki, da evaluirati hitreje kakor v klasični Bezierjevi obliki. Ideja, ki se skriva v ozadju je ta, da lahko p zapišemo v gnezdeni obliki. Poglejmo si na primeru polinomov stopnje 2. Označimo kontrolne točke na sledeči način:



Če razpišemo sedaj polinom glede na spremenljivko r dobimo:

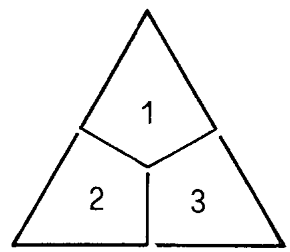
$$
\begin{aligned}
p(r,s,t) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{i} c_{2-i,i-j,j} r^{2-i} s^{i-j} t^{j} \\
&= r^2 \sum_{j=0}^{0} c_{2,-j,j} s^{-j} t^{j} + r \sum_{j=0}^{1} c_{1,1-j,j} s^{1-j} t^{j} + \sum_{j=0}^{2} c_{0,2-j,j} s^{2-j} t^{j} \\
&= r^2(c_1) + r(c_2 s + c_3 t) + (c_4 s^2 + c_5 st + c_6 t^2) \\
&= r^2(c_1 + \frac{s}{r}c_2 + \frac{t}{r}c_3 + \frac{s^2}{r^2}c_4 + \frac{st}{r^2}c_5 + \frac{t^2}{r^2}c_6) \\
&= r^2(\frac{s}{r}(c_2 + \frac{s}{r}c_4 + \frac{t}{r}c_5) + \frac{t}{r}(\frac{t}{r}c_6 + c_3) + c_1)
\end{aligned}
$$

Tu je potrebno biti pozoren na to, da ne delimo z 0. Torej je treba ločiti primere glede na to v katerem odseku trikotnika se naše baricentrične koordinate nahajajo in podobno razvijemo po spremenljivki s ali t. V Primeru ko razvijamo po r dobimo algoritem

Algoritem 2.1. *Naj bo p polinom stopnje n podan v MBB obliki, ter naj bodo r, s, t baricentirčne koordinate točke za katere velja $r \geq s, r \geq t$, tedaj lahko s ledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki (r, s, t)*

```
sr = s/r,          tr= s/r
A = c_{0,n,0};
for i = 1:n
    B = c_{0,n-i,i}
    for j = i:-1:1
        B = B*tr + c_{i-j+1,n-i,j-1};
    end
    A = A *sr +B;
end
p(r,s,t) = Ar^n
```

Zgornji algoritem potrebuje $(n^2 + 5n)/2$ množenj, 2 deljenj, ter $n - 1$ množenj za izračun r^n, kar lahko v splošnem naredimo tudi z manj operacijami (npr. za algoritmom kvadriraj in zmnoži). Potrebno je povedati še, kako se odločimo katero verzijo algoritma bomo vzeli.



Zgornji algoritem deluje za regijo ena, v kateri se nahajamo če $r \geq s, r \geq t$. S spremembami po kateri spremenljivki razvijamo pa pokrijemo tudi regiji 2 in 3. Pri čemer je regija 2 določena z $s > r, s \geq t$ in razvijamo po s, regija 3 pa z $t > r, t > s$ pri čemer razvijamo po t.