

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

RAČUNSKO PODPRTO GEOMETRIJSKO OBLIKOVANJE

VS postopek za izračun vrednosti polinomov več spremenljivk

Janez Radešček, Miha Avsec

10. januar 2019

1 Decasteljou

Naj bo T trikotnik v ravnini, ter naj bodo (r, s, t) baricentrične koordinate točke P glede na trikotnik T . V tem primeru lahko vsak polinom stopnje d definiran nad trikotnikom T zapišemo v Bernsteinovi bazi kot

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i b_{d-i, i-j, j} B_{d-i, i-j, j}^d,$$

kjer velja

$$B_{i, j, k}^d(r, s, t) = \frac{d!}{i!j!k!} r^i s^j t^k.$$

Tako podan polinom lahko evaluiramo s pomočjo deCasteljouvovega algoritma

Algoritem 1.1. *Naj bo p polinom stopnje d podan v Bezierjevi obliki, ter naj bodo r, s, t baricentrične koordinate točke za katere velja $r \geq s, r \geq t$, tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki (r, s, t)*

```
for k=1:d
  for i=0:d-k
    for j=0:i
       $b_{d-i-k, i-j, j}^k = r * b_{d-i-k+1, i-j, j}^{k-1} + s * b_{d-i-k, i-j+1, j}^{k-1} + r * b_{d-i-k, i-j, j+1}^{k-1}$ 
    end
  end
end
p(r, s, t) =  $b_{0,0,0}^d$ 
```

Ta algoritem potrebuje $d(d+1)(d+2)/2$ operacij.

2 Modificirana Bernstein-Bezierjeva reprezentacija

Če imamo podan polinom v Bernsteinovi obliki

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i b_{d-i, i-j, j} B_{d-i, i-j, j}^d(r, s, t),$$

potem lahko tak polinom enostavno prepišemo v obliko

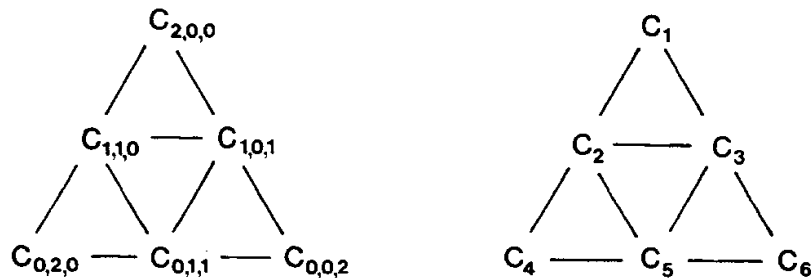
$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i c_{d-i, i-j, j} r^{d-i} s^{i-j} t^j,$$

tako da za koeficiente $c_{d-i, i-j, j}$ vzamemo

$$c_{d-i, i-j, j} = \frac{d!}{(d-i)!(i-j)!j!} b_{d-i, i-j, j}, \quad j = 0, \dots, i; i = 0, \dots, d.$$

Tej obliki polinoma rečemo modificirana Bernstein-Bezierjeva oblika ali krajše MBB. Pokazati želimo, da se polinom v MBB obliki, da evaluirati hitreje kakor v

klasični Bezierjevi obliki. Ideja, ki se skriva v ozadju je ta, da lahko p zapišemo v gnezdeni obliki. Poglejmo si na primeru polinomov stopnje 2. Označimo kontrolne točke na sledeči način:



Če razpišemo sedaj polinom glede na spremenljivko r dobimo:

$$\begin{aligned}
 p(r, s, t) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i c_{2-i, i-j, j} r^{2-i} s^{i-j} t^j \\
 &= r^2 \sum_{j=0}^0 c_{2,-j, j} s^{-j} t^j + r \sum_{j=0}^1 c_{1, 1-j, j} s^{1-j} t^j + \sum_{j=0}^2 c_{0, 2-j, j} s^{2-j} t^j \\
 &= r^2(c_1) + r(c_2s + c_3t) + (c_4s^2 + c_5st + c_6t^2) \\
 &= r^2(c_1 + \frac{s}{r}c_2 + \frac{t}{r}c_3 + \frac{s^2}{r^2}c_4 + \frac{st}{r^2}c_5 + \frac{t^2}{r^2}c_6) \\
 &= r^2(\frac{s}{r}(c_2 + \frac{s}{r}c_4 + \frac{t}{r}c_5) + \frac{t}{r}(\frac{t}{r}c_6 + c_3) + c_1)
 \end{aligned}$$

Tu je potrebno biti pozoren na to, da ne delimo z 0. Torej je treba ločiti primere glede na to v katerem odseku trikotnika se naše baricentrične koordinate nahajajo in podobno razvijemo po spremenljivki s ali t . V Primeru ko razvijamo po r dobimo algoritem

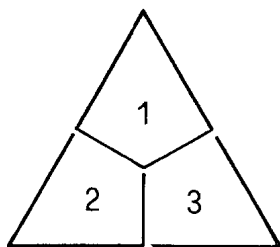
Algoritem 2.1. Naj bo p polinom stopnje n podan v MBB obliki, ter naj bodo r, s, t baricentirčne koordinate točke za katere velja $r \geq s, r \geq t$, tedaj lahko s ledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki (r, s, t)

```

sr = s/r,          tr = s/r
A = c_{0,n,0};
for i = 1:n
    B = c_{0,n-i,i}
    for j = i:-1:1
        B = B*tr + c_{i-j+1,n-i,j-1};
    end
    A = A*sr + B;
end
p(r, s, t) = Ar^n

```

Zgornji algoritem potrebuje $(n^2 + 5n)/2$ množenj, 2 deljenj, ter $n - 1$ množenj za izračun r^n , kar lahko v splošnem naredimo tudi z manj operacijami (npr. za algoritmom kvadriraj in zmnoži). Potrebno je povedati še, kako se odločimo katero verzijo algoritma bomo vzeli.



Zgornji algoritem deluje za regijo ena, v kateri se nahajamo če $r \geq s, r \geq t$. S spremembami po kateri spremenljivki razvijamo pa pokrijemo tudi regiji 2 in 3. Pri čemer je regija 2 določena z $s > r, s \geq t$ in razvijamo po s , regija 3 pa z $t > r, t > s$ pri čemer razvijamo po t .

3 Polinom v Taylorjevi vrsti

Naj bo T trikotnik. Naj bo p polinom stopnje n definiran na T . Polinom p lahko zapišemo v Taylorjevi obliki kot

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j} u^i v^j.$$

To obliko bomo krajše klicali *TAY*. Vrednost polinoma p v točki (u, v) lahko izračunamo s sledečim algoritmom.

Algoritem 3.1.

```

p = a0,n
for i = 1:d
    A = ai,n-i
    for j = 1:i
        A = A * u + ai-j,n-i
    end
    p = p * v + A
end

```

Ta postopek potrebuje $(n^2 + 3n)/2$ množenj.

4 Polinomi na tetraedrih

Naj bo T tetraeder. Za vsako točko U iz T naj bodo (r, s, t, u) pripadajoče Baricentrične koordinate glede na T . Naj bo p polinom stopnje n definiran na T . Polinom p lahko zapišemo v modificirani Bernstein-Bezierjevi obliki kot

$$p(r, s, t, u) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j c_{d-i, i-j, j-k, k} r^{d-i} s^{i-j} t^{j-k} u^k.$$

Vrednost polinoma p v točki (r, s, t, u) lahko izračunamo s sledečim algoritmom.

Algoritem 4.1.

TODO

Ta postopek potrebuje $(n^3 + 6d^2 + 17d)/6$ množenj in 3 deljenja.