

FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

RAČUNSKO PODPRTO GEOMETRIJSKO OBLIKOVANJE

VS postopek za izračun vrednosti polinomov več spremenljivk

Janez Radešček, Miha Avsec

19. januar 2019

1 De Casteljau

Naj bo T trikotnik v ravnini, ter naj bodo (r, s, t) baricentrične koordinate točke P glede na trikotnik T . V tem primeru lahko vsak polinom stopnje d , definiran nad trikotnikom T , zapišemo v Bernsteinovi bazi kot

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i b_{d-i, i-j, j} B_{d-i, i-j, j}^d,$$

kjer velja

$$B_{i,j,k}^d(r, s, t) = \frac{d!}{i!j!k!} r^i s^j t^k.$$

Tako podan polinom lahko evaluiramo s pomočjo De Casteljaujevega algoritma

Algoritem 1.1 (De Casteljau). *Naj bo p polinom stopnje d podan v Bezierjevi obliki, ter naj bodo r, s, t baricentrične koordinate točke P , tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki P .*

```

for k = 1:d
  for i = 0:d-k
    for j = 0:i
       $b_{d-i-k, i-j, j}^k = r * b_{d-i-k+1, i-j, j}^{k-1} + s * b_{d-i-k, i-j+1, j}^{k-1} + r * b_{d-i-k, i-j, j+1}^{k-1}$ 
    end
  end
end
p(r, s, t) =  $b_{0,0,0}^d$ 

```

Trditev 1.1. *De Casteljaujev algoritem potrebuje $d(d+1)(d+2)/2$ množenj.*

Dokaz. V notranji zanki na vsakem koraku naredimo 3 množenja. Notranja zanka se izvede $i+1$ krat. To pomeni da v drugi zanki naredimo $3(i+1)$ množenj. Vsota $\sum_{i=0}^{d-k} 3(i+1) = \frac{3}{2}(d-k+1) * (d-k+2)$. Za celotno število korakov je potrebno sešteti še $\sum_{k=1}^d \frac{3}{2}(d-k+1) * (d-k+2) = d(d+1)(d+2)/2$. \square

2 Modificirana Bernstein-Bezierjeva reprezentacija

Če imamo podan polinom v Bernsteinovi obliki

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i b_{d-i, i-j, j} B_{d-i, i-j, j}^d(r, s, t),$$

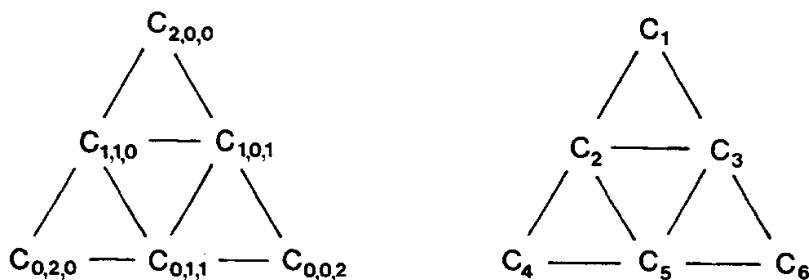
potem lahko tak polinom enostavno prepišemo v obliko

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i c_{d-i, i-j, j} r^{d-i} s^{i-j} t^j,$$

tako da za koeficiente $c_{d-i,i-j,j}$ vzamemo

$$c_{d-i,i-j,j} = \frac{d!}{(d-i)!(i-j)!j!} b_{d-i,i-j,j}, \quad j = 0, \dots, i; i = 0, \dots, d.$$

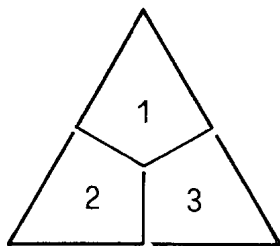
Tej obliki polinoma rečemo modificirana Bernstein-Bezierjeva oblika ali krajše MBB. Pokazati želimo, da se polinom v MBB obliki, da evaluirati hitreje kakor v klasični Bezierjevi obliki. Ideja, ki se skriva v ozadju je ta, da lahko p zapišemo v gnezdeni obliki. Poglejmo si na primeru polinomov stopnje 2. Označimo kontrolne točke na sledeči način:



Če razpišemo sedaj polinom glede na spremenljivko r dobimo:

$$\begin{aligned} p(r, s, t) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i c_{2-i,i-j,j} r^{2-i} s^{i-j} t^j \\ &= r^2 \sum_{j=0}^0 c_{2,-j,j} s^{-j} t^j + r \sum_{j=0}^1 c_{1,1-j,j} s^{1-j} t^j + \sum_{j=0}^2 c_{0,2-j,j} s^{2-j} t^j \\ &= r^2(c_1) + r(c_2s + c_3t) + (c_4s^2 + c_5st + c_6t^2) \\ &= r^2(c_1 + \frac{s}{r}c_2 + \frac{t}{r}c_3 + \frac{s^2}{r^2}c_4 + \frac{st}{r^2}c_5 + \frac{t^2}{r^2}c_6) \\ &= r^2(\frac{s}{r}(c_2 + \frac{s}{r}c_4 + \frac{t}{r}c_5) + \frac{t}{r}(\frac{t}{r}c_6 + c_3) + c_1) \end{aligned}$$

Tu je potrebno biti pozoren na to, da ne delimo z 0. Temu se lahko izognemo tako, da ločimo primere glede na to kje v kontrolnem trikotniku se nahajamo. Ločimo 3 primere kot je prikazano na sliki.



Posamezne regije so določene na sledeč način

1. $r \geq s, r \geq t$
2. $s > r, s \geq t$
3. $t > r, t > s$

S pravilno izbiro regije poskrbimo, da ne delimo z 0, hkrati pa se izognemo še deljenju z zelo majhnimi števili, ki bi jih dobili pri baricentričnih koordinatah blizu roba.

Zgornji primer lahko posplošimo na polinome poljubnih dimenzij.

Algoritem 2.1. *Naj bo p polinom stopnje d podan v MBB obliki, ter naj bodo r, s, t baricentrične koordinate točke za katere velja $r \geq s, r \geq t$, tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrednost polinoma p v točki (r, s, t)*

```

 $sr = s/r,$   $tr = t/r$ 
 $A = c_{0,d,0};$ 
for  $i = 1:d$ 
     $B = c_{0,d-i,i}$ 
    for  $j = i:-1:1$ 
         $B = B * tr + c_{i-j+1,d-i,j-1};$ 
    end
     $A = A * sr + B;$ 
end
 $p(r, s, t) = Ar^d$ 

```

Trditev 2.1. *Algoritem za izračun vrednosti polinoma v MBB obliki potrebuje $(d^2 + 5d)/2$ množenj.*

Dokaz. Sledimo postopku iz dokaza trditve 1.1. □

Tu je potrebno povedati, da se lahko r^d izračuna hitreje, kot z $d - 1$ množenji, torej je samo število operacij v algoritmu še nekoliko manjše. Podobno lahko izpeljemo tudi algoritme za ostala območja.

Pojavlja se še vprašanje zahtevnosti pretvorbe polinoma v MBB obliko. Če se lotimo naivno in na novo poračunamo vse koeficiente potem nas ta postopek stane $O(d^3)$ operacij. Kar lahko povzroči to, da je časovna zahtevnost, ki jo potrebujemo za izračun ene točke večja, kot če bi uporabili navadni De Casteljaujev algoritem. Še vedno pa bo veljalo, da v primeru če želimo izračunati veliko točk na istem polinomu MBB algoritem deluje veliko hitreje.

Druga možnost, ki jo imamo pa je ta, da si v naprej poračunamo vrednosti s katerimi moramo množiti koeficiente polinoma. To je potrebno za vsako dimenzijo storiti le enkrat, nato pa za izračun novih koeficientov potrebujemo le še $(d^2 + 3d - 4)/2$ množenj. Temu postopku rečemo VSC algoritem. VSC algoritem je tako vedno bolj učinkovit kot De Casteljaujev algoritem.

3 Polinom v Taylorjevi vrsti

Naj bo T trikotnik in naj bo p polinom stopnje d definiran na T . Naj bosta $u = x - x_1$ in $v = y - y_1$ določena na tak način. Tu sta (x_1, y_1) koordinati poljubnega oglišča trikotnika. Polinom p lahko potem zapišemo v Taylorjevi obliki kot

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d-i} a_{i,j} u^i v^j.$$

To obliko bomo krajše klicali *TAY*. Vrednost polinoma p v točki (u, v) lahko izračunamo s sledečim algoritmom.

Algoritem 3.1.

```

p = a0,d
for i = 1:d
    A = ai,d-i
    for j = 1:i
        A = A * u + ai-j,d-i
    end
    p = p * v + A
end

```

Trditev 3.1. *Taylorjev algoritem za izračun vrednosti polinoma potrebuje $(d^2 + 3d)/2$ množenj.*

Dokaz. Sledimo postopku iz dokaza trditve 1.1. □

4 Primerjava algoritmov

Algoritmu 2.1, ki ne potrebuje pretvorbe iz Bernsteinove v MBB obliko nakratko rečemo VS algoritem. V spodnji tabeli lahko vidimo primerjavo števila množenj, ki jih posamezen algoritem izvede odvisno od stopnje polinoma.

d	2	3	4	5	6	7	8	9
dCas	12	30	60	105	168	256	360	495
VSC	12	21	32	45	60	77	96	117
VS	9	14	20	27	35	44	54	65
Tay	5	9	14	20	27	35	44	54

Če povzamemo imamo na tem mestu sledeče časovne zahtevnosti, pri kateri smo poleg množenj dodali še deljenja, ki pa ne vplivajo bistveno na število operacij, ki jih moramo izvesti.

$$\begin{aligned}
(d^3 + 3d^2 + 2d)/2 & \text{ de Casteljou} \\
(2d^2 + 8d)/2 & \text{ VSC} \\
(d^2 + 5d + 4)/2 & \text{ VS} \\
(d^2 + 3d)/2 & \text{ Taylor}
\end{aligned}$$

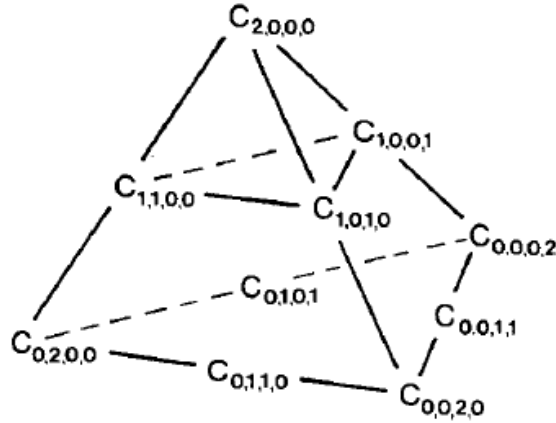
Tu je jasno vidno, da ima edino de Casteljoujev algoritem kubično zahtevnost, ostali algoritmi pa le kvadratično. Velikost razlike v številu množenj lahko jasno vidimo v zgornji tabeli. Opazimo tudi, da je Taylorjev algoritem najhitrejši. Vendar nas sama pretvorba iz Bernsteinove ali MBB oblike v Taylorjevo stane preveč, da bi se nam splačalo izvajati Taylorjev algoritem. Zaključimo lahko torej, da je v primeru, ko delamo z polinomi v Bernsteinovi obliki najboljši VSC algoritem.

5 Polinomi na tetraedrih

Naj bo T tetraeder. Za vsako točko U iz T naj bodo (r, s, t, u) pripadajoče Baricentrične koordinate glede na T . Naj bo p polinom stopnje d definiran na T . Polinom p lahko zapišemo v modificirani Bernstein-Bezierjevi obliki kot

$$p(r, s, t, u) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j c_{d-i, i-j, j-k, k} r^{d-i} s^{i-j} t^{j-k} u^k.$$

Tako podan polinom ima $(d+1)(d+2)(d+3)/6$ koeficientov. Na sliki lahko vidimo te koeficiente v primeru $d = 2$.



Kot v dvodimenzionalnem primeru, uporabimo nekoliko drugačen algoritem glede na to kje točka (r, s, t, u) leži v tetraedru. Definiramo štiri regije tetraedra.

1. $r \geq s, r \geq t, r \geq u$
2. $s \geq r, s \geq t, s \geq u$
3. $t \geq r, t \geq s, t \geq u$
4. $u \geq r, u \geq s, u \geq t$

Vrednost polinoma p v točki (r, s, t, u) , ki se nahaja v četrti regiji, lahko izračunamo s sledečim algoritmom.

Algoritem 5.1. *Naj bo p polinom stopnje d podan v MBB obliki, ter naj bodo r, s, t, u baricentirčne koordinate točke za katere velja $u > r, u > s, u > t$, tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrednost polinoma p v točki (r, s, t, u)*

```

 $ru = r/u, \quad su = s/u \quad tu = t/u$ 
 $A = c_{d,0,0,0};$ 
for  $i = 1:d$ 
     $B = c_{d-i,i,0,0}$ 
    for  $j = 1:i$ 
         $C = c_{d-i,i-j,j,0}$ 
        for  $k = 1:j$ 
             $C = C * tu + c_{d-i,i-j,j-k,k}$ 
        end
         $B = B * ru + C$ 
    end
     $A = A * ru + B;$ 
end
 $p(r, s, t, u) = Au^d$ 

```

Trditev 5.1. *Zgornji algoritem za izračun vrednosti polinoma potrebuje $(d^3 + 6d^2 + 17d)/6$ množenj.*

Dokaz. Sledimo postopku iz dokaza trditve 1.1. □

Na podoben način lahko izpeljemo tudi algoritme za polinome več spremenljivk.

Literatura

- [1] Larry L. Schumaker, Wolfgang Volk, *Efficient evaluation of multivariate polynomials*, Computer Aided Geometric Design 3, North-Holland (1986) 149–154.