

VS postopek za izračun vrednosti polinomov več spremenljivk

Janez Radešček, Miha Avsec

Fakulteta za matematiko in fiziko

2019

Polinom v Bezierjevi obliki

Naj bo T trikotnik, potem polinom v baricentričnih koordinatah (r, s, t) lahko zapišemo kot

$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i b_{d-i, i-j, j} B_{d-i, i-j, j}^d,$$

kjer je

$$B_{i,j,k}^d(r, s, t) = \frac{d!}{i!j!k!} r^i s^j t^k$$

Bernsteinov polinom stopnje d .

De Casteljau

De Casteljaujev algoritem

```
for k=1:d
  for i=0:d-k
    for j=0:i
      
$$b_{d-i-k,i-j,j}^k = r * b_{d-i-k+1,i-j,j}^{k-1} + s * b_{d-i-k,i-j+1,j}^{k-1} \\ + r * b_{d-i-k,i-j,j+1}^{k-1}$$

    end
  end
end


$p(r, s, t) = b_{0,0,0}^d$


```

Algoritem potrebuje $d(d+1)(d+2)/2$ množenj.

Modificirana Bernstein-Bezierjeva oblika polinoma

Polinom v Bernsteinovi obliki lahko zapišemo kot

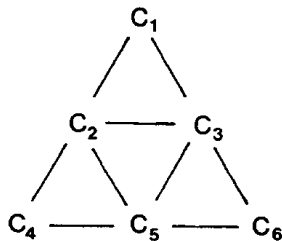
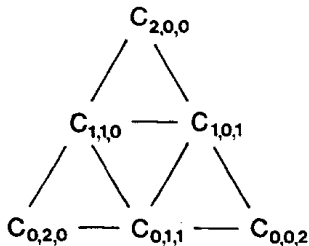
$$p(r, s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i c_{d-i, i-j, j} r^{d-i} s^{i-j} t^j,$$

kjer za $c_{d-i, i-j, j}$ vzamemo

$$c_{d-i, i-j, j} = \frac{d!}{(d-i)!(i-j)!j!} b_{d-i, i-j, j}, \quad j = 0, \dots, i; i = 0, \dots, d.$$

Modificirana Bernstein-Bezierjeva oblika polinoma

Razdelitev domenskega trikotnika v primeru, ko je $d = 2$



Modificirana Bernstein-Bezierjeva oblika polinoma

Razvoj po spremenljivki r :

$$\begin{aligned} p(r, s, t) &= \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i c_{2-i, i-j, j} r^{2-i} s^{i-j} t^j \\ &= r^2 \sum_{j=0}^0 c_{2, -j, j} s^{-j} t^j + r \sum_{j=0}^1 c_{1, 1-j, j} s^{1-j} t^j + \sum_{j=0}^2 c_{0, 2-j, j} s^{2-j} t^j \\ &= r^2(c_1) + r(c_2 s + c_3 t) + (c_4 s^2 + c_5 s t + c_6 t^2) \\ &= r^2\left(c_1 + \frac{s}{r} c_2 + \frac{t}{r} c_3 + \frac{s^2}{r^2} c_4 + \frac{st}{r^2} c_5 + \frac{t^2}{r^2} c_6\right) \\ &= r^2\left(\frac{s}{r}\left(c_2 + \frac{s}{r} c_4 + \frac{t}{r} c_5\right) + \frac{t}{r}\left(\frac{t}{r} c_6 + c_3\right) + c_1\right) \end{aligned}$$

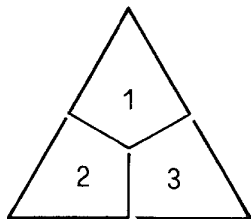
Modificiran Bernstein-Bezierjev algoritem

VS algoritem

```
sr = s/r,          tr= s/r
A = c0,d,0;
for i = 1:d
    B = c0,d-i,i
    for j = i:-1:1
        B = B*tr + ci-j+1,d-i,j-1;
    A = A *sr +B;
p(r, s, t) = Ard
```

Algoritem potrebuje $(d^2 + 5d)/2$ množenj

Izbira spremenljivke



Posamezne regije so določena na sledeč način

1 $r \geq s, r \geq t$

2 $s > r, s \geq t$

3 $t > r, t > s$

Taylor

Zapis polinoma v Taylorjevi obliki

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^{d-i} a_{i,j} u^i v^j$$

Taylorjev algoritem

Taylorjev algoritem

```
p = a0,d
for i = 1:d
    A = ai,d-i
    for j = 1:i
        A = A * u + ai-j,d-i
    end
    p = p * v + A
end
```

Algoritem potrebuje $(d^2 + 3d)/2$ množenj.

Primerjava metod

d	2	3	4	5	6	7	8	9
dCas	12	30	60	105	168	256	360	495
VSC	12	21	32	45	60	77	96	117
VS	9	14	20	27	35	44	54	65
Tay	5	9	14	20	27	35	44	54

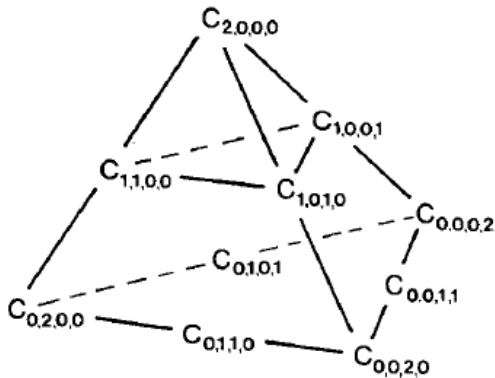
- dCas: De Casteljoujev algoritem
- VS: algoritem za polinom v MBB obliki
- VSC: VS + pretvorba baz
- Tay: Taylorjev algoritem

Polinom v treh spremenljivkah

Naj bo T tetraeder v \mathbb{R}^3 in naj bodo (r, s, t, u) pripadajoče baricentrične koordinate točke P . Potem lahko polinom v točki P zapišemo kot

$$p(r, s, t, u) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^j c_{d-i, i-j, j-k, k} r^{d-i} s^{i-j} t^{j-k} u^k.$$

Polinom v treh spremenljivkah



Algoritem za polinom v treh spremenljivkah

```
ru = r/u,           su= s/u           tu= t/u
A = cd,0,0,0;
for i = 1:d
    B = cd-i,i,0,0
    for j = 1:i
        C = cd-i,i-j,j,0
        for k = 1:j
            C = C * tu + cd-i,i-j,j-k,k
        B = B * ru + C
    A = A * ru + B;
p(r, s, t, u) = Aud
```