Fakulteta za matematiko in fiziko

Računsko podprto geometrijsko oblikovanje

VS postopek za izračun vrednosti polinomov več spremenljivk

Janez Radeščček, Miha Avsec

14. januar 2019

1 De Casteljau

Naj bo T trikotnik v ravnini, ter naj bodo (r, s, t) baricentrične koordinate točke P glede na trikotnik T. V tem primeru lahko vsak polinom stopnje d, definiran nad trikotnikom T, zapišemo v Bernsteinovi bazi kot

$$p(r,s,t) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{i} b_{d-i,i-j,j} B^d_{d-i,i-j,j},$$

kjer velja

$$B^d_{i,j,k}(r,s,t) = \frac{d!}{i!j!k!} r^i s^j t^k.$$

Tako podan polinom lahko evaluiramo s pomočjo De Casteljaujevega algoritma

Algoritem 1.1 (De Casteljau)**.** *Naj bo p polinom stopnje d podan v Bezierjevi obliki, ter naj bodo r, s, t baricentirčne koordinate točke P, tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki P.*

```
for k=1:d
   for i=0:d-k
        for j=0:i
```

$$b^k_{d-i-k,i-j,j} = r*b^{k-1}_{d-i-k+1,i-j,j} + s*b^{k-1}_{d-i-k,i-j+1,j} + r*b^{k-1}_{d-i-k,i-j,j+1}$$

$p(r,s,t) = b^d_{0,0,0}$

Trditev 1.1. *De Casteljaujev algoritem potrebuje $d(d+1)(d+2)/2$ množenj.*

Dokaz. V notranji zanki na vsakem koraku naredimo 3 množenja. Notranja zanka se izvede $i+1$ krat. To pomeni da v drugi zanki naredimo $3(i+1)$ množenj. Vsota $\sum_{i=0}^{d-k} 3(i+1) = \frac{3}{2}(d-k+1)*(d-k+2)$. Za celotno število korakov je potrebno sešteti še $\sum_{k=1}^{d} \frac{3}{2}(d-k+1)*(d-k+2) = d(d+1)(d+2)/2$. □

2 Modificirana Bernstein-Bezierjeva reprezentacija

Če imamo podan polinom v Bernsteinovi obliki

$$p(r,s,t) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{i} b_{d-i,i-j,j} B^d_{d-i,i-j,j}(r,s,t),$$

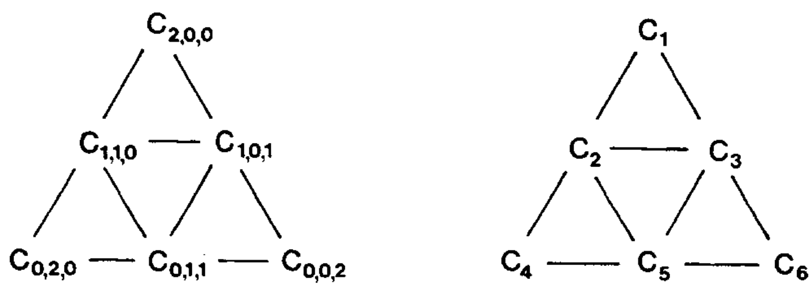
potem lahko tak polinom enostavno prepišemo v obliko

$$p(r,s,t) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{i} c_{d-i,i-j,j} r^{d-i} s^{i-j} t^j,$$

tako da za koeficiente $c_{d-i,i-j,j}$ vzamemo

$$c_{d-i,i-j,j} = \frac{d!}{(d-i)!(i-j)!j!} b_{d-i,i-j,j}, \quad j = 0, \ldots, i; i = 0, \ldots, d.$$

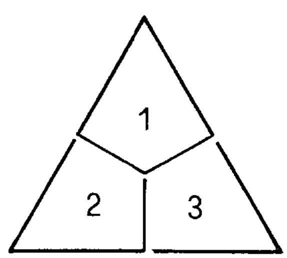
Tej obliki polinoma rečemo modificirana Bernstein-Bezierjeva oblika ali krajše MBB. Pokazati želimo, da se polinom v MBB obliki, da evaluirati hitreje kakor v klasični Bezierjevi obliki. Ideja, ki se skriva v ozadju je ta, da lahko p zapišemo v gnezdeni obliki. Poglejmo si na primeru polinomov stopnje 2. Označimo kontrolne točke na sledeči način:



Če razpišemo sedaj polinom glede na spremenljivko r dobimo:

$$\begin{aligned}
p(r,s,t) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{i} c_{2-i,i-j,j} r^{2-i} s^{i-j} t^{j} \\
&= r^2 \sum_{j=0}^{0} c_{2,-j,j} s^{-j} t^{j} + r \sum_{j=0}^{1} c_{1,1-j,j} s^{1-j} t^{j} + \sum_{j=0}^{2} c_{0,2-j,j} s^{2-j} t^{j} \\
&= r^2 (c_1) + r(c_2 s + c_3 t) + (c_4 s^2 + c_5 st + c_6 t^2) \\
&= r^2 (c_1 + \frac{s}{r} c_2 + \frac{t}{r} c_3 + \frac{s^2}{r^2} c_4 + \frac{st}{r^2} c_5 + \frac{t^2}{r^2} c_6) \\
&= r^2 (\frac{s}{r}(c_2 + \frac{s}{r} c_4 + \frac{t}{r} c_5) + \frac{t}{r}(\frac{t}{r} c_6 + c_3) + c_1)
\end{aligned}$$

Tu je potrebno biti pozoren na to, da ne delimo z 0. Temu se lahko izognemo tako, da ločimo primere glede na to kje v kontrolnem trikotniku se nahajamo. Ločimo 3 primere kot je prikazano na sliki.



Posamezne regije so določena na sledeč način

1. $r \geq s, r \geq t$
2. $s > r, s \geq t$
3. $t > r, t > s$

S pravilno izbiro regije poskrbimo, da ne delimo z 0, hkrati pa se izognemo še deljenju z zelo majhnimi števili, ki bi jih dobili pri baricentričnih koordinatah blizu roba.
Zgornji primer lahko posplošimo na polinome poljubnih dimenzij.

Algoritem 2.1. *Naj bo p polinom stopnje n podan v MBB obliki, ter naj bodo r, s, t baricentirčne koordinate točke za katere velja $r \geq s, r \geq t$, tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki (r, s, t)*

```
sr = s/r,            tr= s/r
A = c_{0,n,0};
for i = 1:n
    B = c_{0,n-i,i}
    for j = i:-1:1
        B = B*tr + c_{i-j+1,n-i,j-1};
    end
    A = A *sr +B;
end
p(r,s,t) = Ar^n
```

Trditev 2.1. *Algoritem za izračun vrednosti polinoma v MBB obliki potrebuje $(n^2 + 5n)/2$ množenj.*

Dokaz. Sledimo postopku iz dokaza trditve 1.1. □

Tu je potrebno povedati, da se lahko r^n izračuna hitreje, kot z $n - 1$ množenji, torej je samo število operacij v algoritmu še nekoliko manjše. Podobno lahko izpeljemo tudi algoritme za ostala območja.

Pojavlja se še vprašanje zahtevnosti pretvorbe polinoma v MBB obliko. Če se lotimo naivno in na novo poračunamo vse koeficiente potem nas ta postopek stane $O(n^3)$ operacij. Kar lahko povzroči to, da je časovna zahtevnost, ki jo potrebujemo za izračun ene točke večja, kot če bi uporabili navadni De Casteljaujev algoritem. Še vedno pa bo veljalo, da v primeru če želimo izračunati veliko točk na istem polinomu MBB algoritem deluje veliko hitreje.
Druga možnost, ki jo imamo pa je ta, da si v naprej poračunamo vrednosti s katerimi moramo množiti koeficiente polinoma. To je potrebno za vsako dimenzijo storiti le enkrat, nato pa za izračun novih koeficientov potrebujemo le še $(d^2+3d-4)/2$ množenj. Temu postopku rečemo VSC algoritem. VSC algoritem je tako vedno bolj učinkovit kot De Casteljaujev algoritem.

3 Polinom v Taylorjevi vrsti

Naj bo T trikotnik in naj bo p polinom stopnje n definiran na T. Naj bosta $u = x - x_1$ in $v = y - y_1$ določena na tak način. Tu sta (x_1, y_1) koordinati poljubnega ogljišča trikotnika. Polinom p lahko potem zapišemo v Taylorjevi obliki kot

$$p(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j} u^i v^j.$$

To obliko bomo krajše klicali TAY. Vrednost polinoma p v točki (u, v) lahko izračunamo s sledečim algoritmom.

Algoritem 3.1.

$$
\begin{aligned}
&p = a_{0,n} \\
&for\ \ i = 1:d \\
&\qquad A = a_{i,n-i} \\
&\qquad for\ \ j = 1:i \\
&\qquad\qquad A = A * u + a_{i-j,n-i} \\
&\qquad end \\
&\qquad p = p * v + A \\
&end
\end{aligned}
$$

Trditev 3.1. *Taylorjev algoritem za izračun vrednosti polinoma potrebuje* $(n^2 + 3n)/2$ *množenj.*

Dokaz. Sledimo postopku iz dokaza trditve 1.1. □

4 Primerjava algoritmov

Algoritmu 2.1, ki ne potrebuje pretvorbe iz Bernsteinove v MBB obliko nakratko rečemu VS algoritem. V spodnji tabeli lahko vidimo primerjavo števla množenj, ki jih posamezen algoritem izvede odvisno od stopnje polinoma.

d	2	3	4	5	6	7	8	9
dCas	12	30	60	105	168	256	360	495
VSC	12	21	32	45	60	77	96	117
VS	9	14	20	27	35	44	54	65
Tay	5	9	14	20	27	35	44	54

Če povzamemo imamo na tem mestu sledeče časovne zahtevnosti, pri kateri smo poleg množenj dodali še deljenja, ki pa ne vplivajo bistevno na število operacij, ki jih moramo izvesti.

$(d^3+3d^2+2d)/2$	de Casteljou
$(2d^2+8d)/2$	VSC
$(d^2+5d+4)/2$	VS
$(d^2+3d)/2$	Taylor

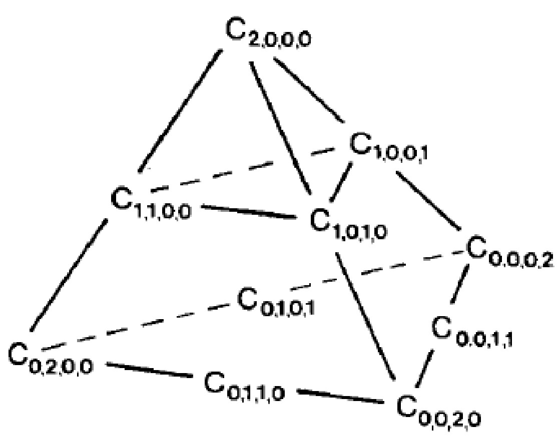
Tu je jasno vidno, da ima edino de Casteljoujev algoritem kubično zahtevnost, ostali algoritmi pa le kvadratično. Velikost razlike v številu množenj lahko jasno vidimo v zgornji tabeli. Opazimo tudi, da je Taylorjev algoritem najhitrejši. Vendar nas sama pretvorba iz Bernsteinove ali MBB oblike v Taylorjevo stane preveč, da bi se nam splačalo izvajati Taylorjev algoritem. Zaključimo lahko torej, da je v primeru, ko delamo z polinomi v Bernsteinovi obliki najboljši VSC algoritem.

5 Polinomi na tetraedrih

Naj bo T tetraeder. Za vsako točko U iz T naj bodo (r,s,t,u) pripadajoče Baricentrične koordinate glede na T. Naj bo p polinom stopnje n definiran na T. Polinom p lahko zapišemo v modificirani Bernstein-Bezierjevi obliki kot

$$p(r,s,t,u)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}c_{d-i,i-j,j-k,k}r^{d-i}s^{i-j}t^{j-k}u^{k}.$$

Tako podan polinom ima $(d+1)(d+2)(d+3)/6$ koeficientov. Na sliki lahko vidimo te koeficiente v primeru $d=2$.



Kot v dvodimenzionalnem primeru, uporabimo nekoliko drugačen algoritem glede na to kje točka (r,s,t,u) leži v tetraedru. Definiramo štiri regije tetraedra.

1. $r \geq s, r \geq t, r \geq u$
2. $s \geq r, s \geq t, s \geq u$
3. $t \geq r, t \geq s, t \geq u$
4. $u \geq r, u \geq s, u \geq t$

Vrednost polinoma p v točki (r, s, t, u), ki se nahaja v četrti regiji, lahko izračunamo s sledečim algoritmom.

Algoritem 5.1. *Naj bo p polinom stopnje d podan v MBB obliki, ter naj bodo r, s, t, u baricentirčne koordinate točke za katere velja $u > r, u > s, u > t$, tedaj lahko s sledečim algoritmom izračunamo vrenost polinoma p v točki* (r, s, t, u)

```
ru = r/u,          su= s/u          tu= t/u
A = c_{n,0,0,0};
for i = 1:n
    B = c_{n-i,i,0,0}
    for j = 1:i
        C =  c_{n-i,i-j,j,0}
            for k = 1:j
                C = C * tu + c_{n-i,i-j,j-k,k}
            end
        B = B * ru + C
    end
    A = A * ru + B;
end
p(r,s,t,u) = Au^n
```

Trditev 5.1. *Zgornji algoritem za izračun vrednosti polinoma potrebuje* $(d^3 + 6d^2 + 17d)/6$ *množenj.*

Dokaz. Sledimo postopku iz dokaza trditve 1.1. □

Na podoben način lahko izepeljemo tudi algoritme za polinome več spremenljivk.

Literatura

[1] Larry L. Schumaker, Wolfgang Volk, *Efficient evaluation of multivariate polynomials*, Computer Aided Geometric Design 3, North-Holland (1986) 149–154.