**مهدی فیروزبخت - 400131027**

**تمرین 1**

**شناسایی آماری الگو**

1)

الف) مسئله کلاس بندی

ب)به چند دوربین نیاز دارد تا بتواند قد کودکان را شناسایی کند. یک ترازو برای وزن کردن افراد. یک دوربین برای اندازه گیری سایز پای افراد. یک دوربین برای اندازه گیری سایز دست.

پ)لیست افراد 5 تا 18 ساله که در مدارس تحصیل میکنند یا کودکانی که در کودکستان هستند.

ت)میتوان این لیست را از بخش بهداشت و سلامت آموزش و پرورش که هر ساله دانش آموزان را مورد بررسی جسمی قرار میدهند دریافت کرد.

ث)قد ، وزن ، سایز پا ، سایز دست

ج)چون قد و وزن ممکن است نسبت به سایز دست و پا بازه بزرگی باشد میتوان با فرمولی داده ها را به بازه های نزدیک تری تبدیل کرد و به این صورت داده ها را نرمال سازی کنیم.

چ)از مشکلات این سیستم میتوان به افرادی اشاره کرد که دارای مشکلات جسمی هستند برای مثال قد افراد از حالت طبیعی کوتاه تر باشد یا فردی دچار سوءتغذیه باشد و وزن کمی نسبت به قد و سن خود داشته باشد.

ح)طراحی چنین سیستمی شاید از نظر اقتصادی برای این طرح هزینه بالایی داشته باشد و نتیجه آن اگر با خطای زیادی هم باشد برای سیستم ضرر هنگفتی نداشته باشد پس میتوانیم از همان سیستم قبلی استفاده کرد. اما اگر هزینه ی خطا بسیار مهم باشد بهتر است از این سیستم که سیستم دقیقتری نسبت به سیستم ساده است استفاده شود.

مزایای این سیستم نسبت به حالت قبلی میتوان به دقت بالاتر آن اشاره کرد و از معایب آن میتواند به هزینه بالای این طرح اشاره کرد زیرا به جای چند دوربین ساده برای محاسبه قد افراد نیاز به سنسور های زیادی دارد. همچنین برای پیاده سازی این طرح چون از ویژگی های زیادتری استفاده شده است پیاده سازی سخت تری داشته و به سیستم قوی تری نیاز دارد همچنین چون محاسبات سنگینتری دارد مدت زمان پاسخگویی ممکن است کمتر شود.

2)

Fingerprint Recognition : تعداد خطوط جدا از هم ، تعداد خطوط دو شاخه

Emotion Recognition : زاویه لب ها ( یعنی حالت ۸ یا ۷ بودن) ، فاصله 2 لب از یکدیگر ، زاویه ابرو ، فاصله 2 پلک چشم از هم(میزان باز بودن چشم)

Gait Recognition : فاصله هر گام (طول باز شدن هر قدم) ، فاصله دست ها از بدن ، زاویه گردن در هنگام راه رفتن، زاویه گردش بدن در هر گام

Activity Recognition : زاویه کمر نسبت به پا و زاویه زانو (برای تشخیص نشستن یا ایستادن ) ، زاویه گردن نسبت به بدن ، فاصله دست نسبت به بدن ، زاویه دست نسبت به بدن ، فاصله دست تا صورت ، فاصله جابه جایی دست ، فاصله هر گام

e) تعداد خطوط صاف

f) تعداد خطوط صاف ، زاویه بین خطوط

g) تعداد خطوط صاف ، زاویه بین خطوط

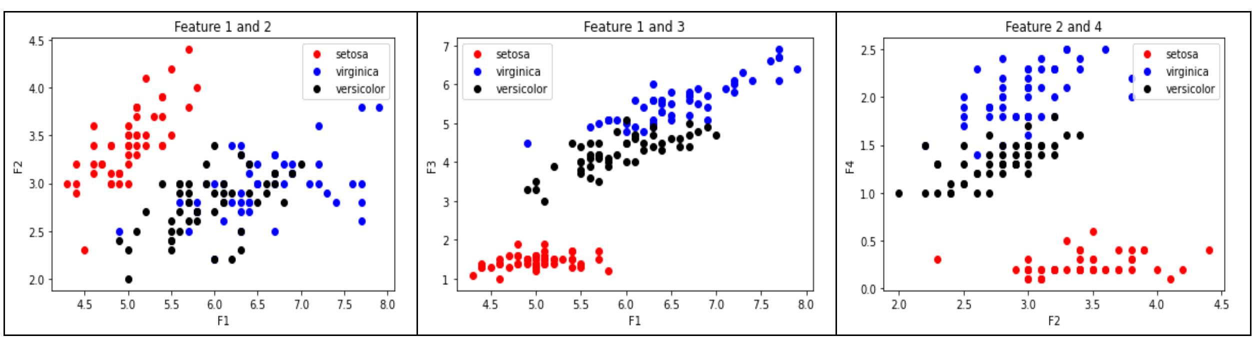
h) تعداد خطوط صاف

i) تعداد خطوط صاف ، زاویه بین خطوط

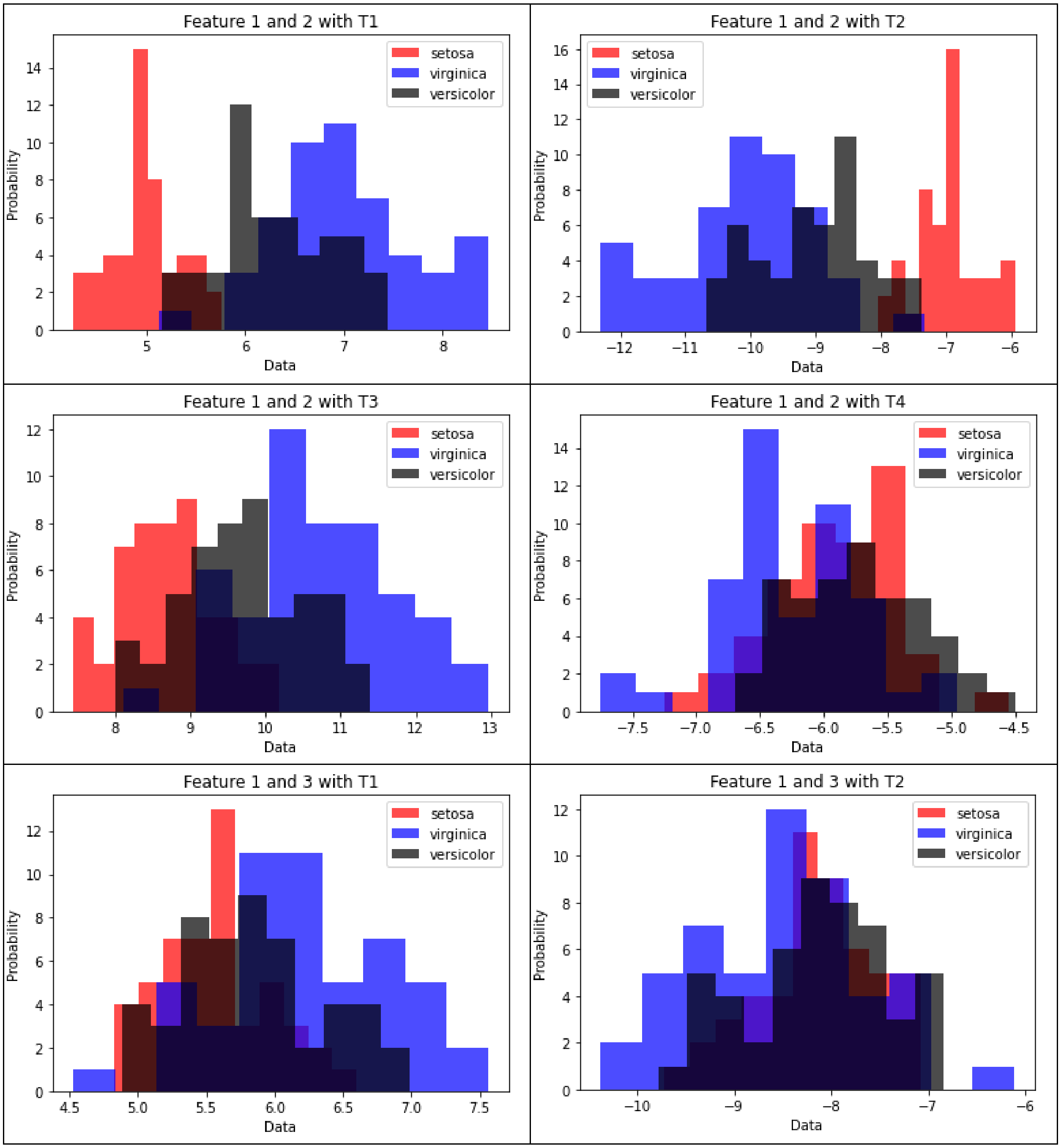
j) تعداد خطوط صاف ، زاویه بین خطوط

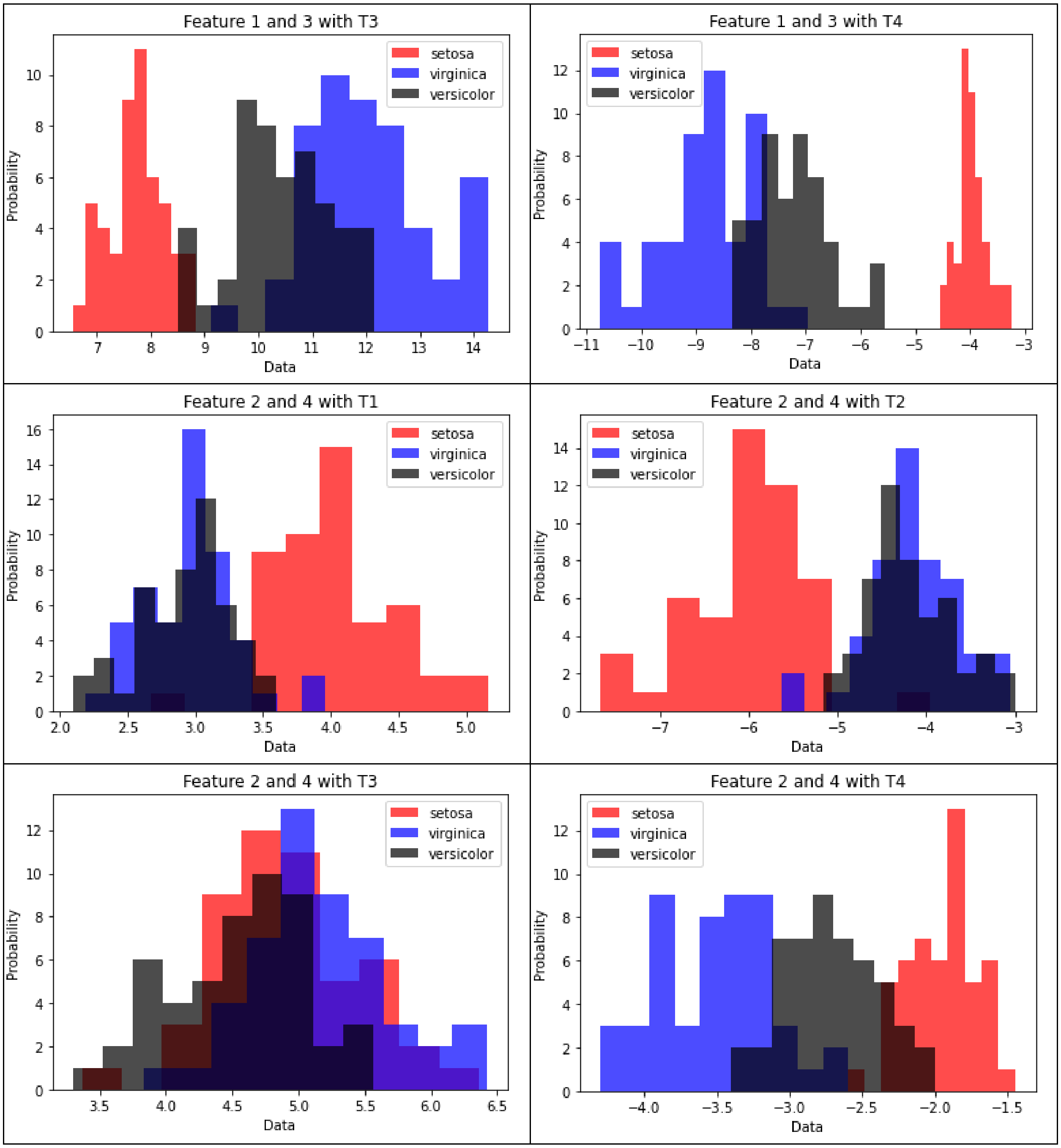
3)

الف)



ب)

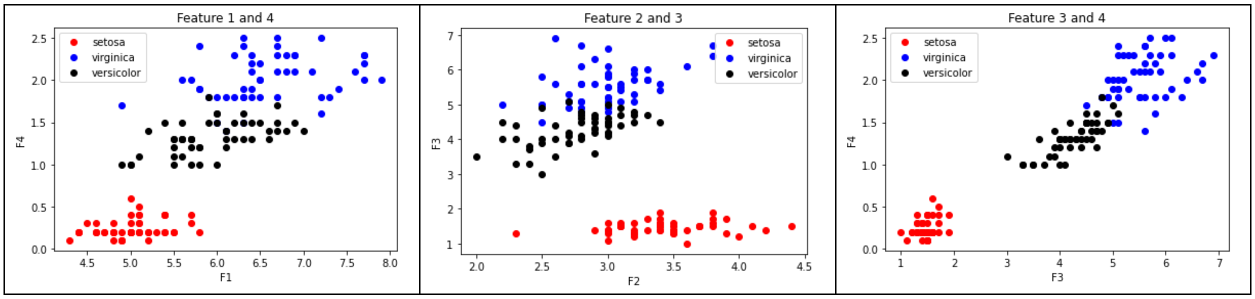

Feature 1 and 2 with T1
setosa
virginica
versicolor
Probability
Data
Feature 1 and 2 with T2
setosa
virginica
versicolor
Probability
Data
Feature 1 and 2 with T3
setosa
virginica
versicolor
Probability
Data
Feature 1 and 2 with T4
setosa
virginica
versicolor
Probability
Data
Feature 1 and 3 with T1
setosa
virginica
versicolor
Probability
Data
Feature 1 and 3 with T2
setosa
virginica
versicolor
Probability
Data



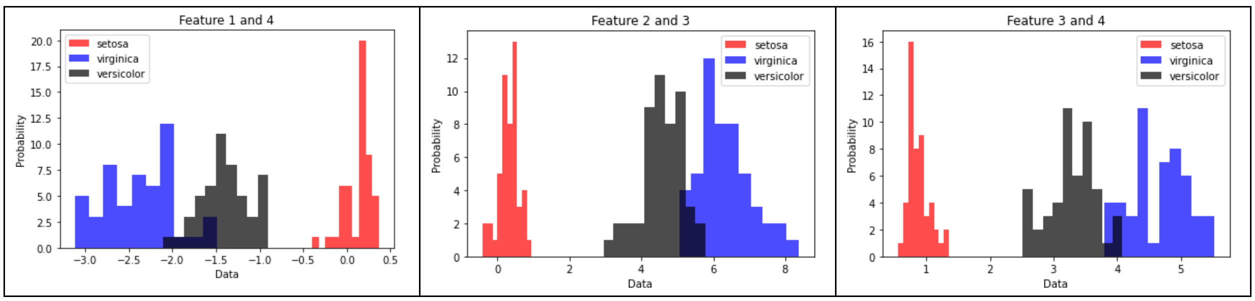

پ)

با بررسی هیستوگرام های کشیده شده ، تبدیل T1 برای دیتای اول ( ساخته شده با ویژگی 1 و 2 ) ، تبدیل T4 برای دیتای دوم (ساخته شده با ویژگی 1 و 3 ) ، تبدیل T4 برای دیتای سوم ( ساخته شده با ویژگی 2 و 4) بهترین تبدیل ها برای هر دیتا هستند.

ت)




د)




در این سوال با آزمون خطا کردن تبدیلات به نتیجه بالا رسیدیم. برای داده اول (ویژگی 1 و 4 ) تبدیل برابر

(-1.5 , 0.1) ، برای داده دوم (ویژگی 2 و 3 ) تبدیل برابر (1.4 , -0.5) و برای داده سوم (ویژگی 3 و 4 ) تبدیل برابر (1.2 , 0.4) است.

4)

الف)

$a1: \mu(X) = n.p = 1400 \times \frac{1}{3}$

$a2: \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1400 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = 17{,}638$

ب)

$b1: \binom{6}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \left(\frac{6}{3}\right)^3 = \frac{27}{100}$

$b2: \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{144}{1000}$

پ)

C1 : Poisson distribution : $\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ $\Rightarrow$ $\lambda$ = mean and var

$P(X=3)=\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$ $\quad$ $P(X=0)=\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}=e^{-\lambda}$

$P(X=1)=\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$ $\Longrightarrow$ $\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{6}=e^{-\lambda}+\lambda e^{-\lambda}$

$\Rightarrow \lambda^3 = 6+6\lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2.847 \longrightarrow \text{جواب درست} \\ \lambda_2 = -1.424 + 0.284 i \\ \lambda_3 = -1.424 - 0.284 i \end{cases}$

---

$C_2 : P(2 \leq X \leq 4) \Rightarrow P(X) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$\Rightarrow \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2} + \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{6} + \frac{\lambda^4 e^{-\lambda}}{24} = \frac{12 e^{-\lambda}\lambda^2 + 4 e^{-\lambda}\lambda^3 + e^{-\lambda}\lambda^4}{24}$

$e^{-\lambda} = 0.058$ $\quad$ $\lambda^2 = 8.105$ $\quad$ $\lambda^3 = 23.076$ $\quad$ $\lambda^4 = 65.697$

$\frac{5.641 + 5.353 + 3.810}{24} = 0.616$

ت)

ت_1)

$$d_1: \; E[X] = \sum x \, P(X=x) \qquad \Rightarrow E[X+Y] = \sum\sum (x+y) \, P(x,y)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (ax+by) \, P(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (ax \, P(x,y)) + (by \, P(x,y))$$

$$\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{m} ax \, P(x,y) + \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{m} by \, P(x,y)$$

$$\Rightarrow a \sum_{1}^{n} x \boxed{\sum_{1}^{m} P(x,y)} \rightarrow P(x) \Rightarrow a \sum_{1}^{n} x \, P(x) = aE(X)$$

$$\Rightarrow b \sum_{1}^{m} y \boxed{\sum_{1}^{n} P(x,y)} \rightarrow P(y) \Rightarrow b \sum_{1}^{m} y \, P(y) = bE(X)$$

$$\Rightarrow aE(X) + bE(Y)$$

ت_2)

$$d_2: \; \mu = E(X) \qquad Var = E[(X-\mu)^2] = E[(X-E(X))^2]$$

$$\Rightarrow E[(X-E(X))(X-E(X))] = E[X^2 - XE(X) - XE(X) + E(X)^2]$$

$$= E[X^2 - 2XE(X) + E(X)^2] \xrightarrow{\text{طبق سوال قبل}} E[X^2] - 2E[XE(X)] + E(E(X)^2)$$

$$E[X^2] - 2E(X)^2 + E(X)^2 = \boxed{E(X^2) - E(x)^2}$$

ت_3)

$d_3$: if ind $\Rightarrow P(x,y) = P(x)\cdot P(y) \Rightarrow E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)$

if uncorrelated $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big) = E\big(XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)\big)$

$E(X\cdot Y) - E(XE(Y)) - E(YE(X)) + E(E(X).E(Y))$

$\xrightarrow[\text{فرض}]{\text{بر اساس}} E(X)E(Y) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X).E(Y) = 0 \Rightarrow$ uncorrelated

ت_4)

$d_4$: with an Example: uncorr $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

$X$ can take $[-1, 0, 1]$ and Probability of those is $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

same with $Y$ $\Rightarrow$ if $P(X,Y) = P(X)P(Y)$

$\Rightarrow P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(X)P(Y) = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{1}{4} \neq \frac{1}{16}$

(5

الف و ب)

5.a: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=\lambda \\ c+d=\lambda \end{matrix} \Rightarrow a+b=c+d$ ✓

b: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda b \\ -\lambda c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a-c=\lambda \\ d-b=\lambda \end{matrix} \Rightarrow a+b=c+d$ ✓

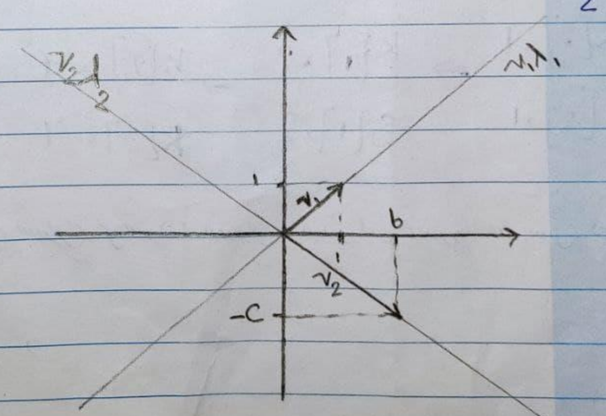
پ)

5.C:

$\det|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda)+(-bc)=0$

$\Rightarrow \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\pm(a+c)+\sqrt{(a+c)^2-4(ad-bc)}}{2}$



ت)

5.d: $\lambda = \dfrac{1.5 - \sqrt{0.25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0.5 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0.75a + 0.25b = a \\ 0.25a + 0.75b = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = b} \quad \lambda_1 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0.75a + 0.25b = 0.5a \\ 0.25a + 0.75b = 0.5b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -b} \quad \lambda_2 = 0.5$$

ث و ج)

5.e: $K_{n+1} = K_n \Rightarrow 0.75\,K[n] + 0.25\,S[n] = K[n] \Rightarrow S[n] = K[n]$

$S_{n+1} = S_n \Rightarrow 0.25\,K[n] + 0.75\,S[n] = S[n] \Rightarrow S[n] = K[n]$

if $S[n] = K[n] \Rightarrow d[n+1] = d[n]$ → All the vectors that $K[n] = S[n]$

5.f: $d[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K[1] = 0.75 - 0.25 = 0.5 \\ S[1] = 0.25 - 0.75 = -0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K[2] = 0.25 \\ S[2] = -0.25 \end{cases}$

و با ادامه دادن علامه آنها به طور ... به صفر میل می‌کند.

چ)

5.g: $d[0] = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} K[1] = .75 \times 3 + .25 \times 5 = 3.5 \\ S[1] = .25 \times 3 + .75 \times 5 = 4.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K[2] = .75 \times 3.5 + .25 \times 4.5 = 3.75 \\ S[2] = .25 \times 3.5 + .75 \times 4.5 = 4.325 \end{cases}$

با ادامه دادن به سمت n ، هرچه علاقه خسرو بیشتر شد ، علاقه شیرین یا درست تر نفرت شیرین کمتر می‌شود

ح)

5.h

$$\lambda^2 - 2\lambda + 0 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm 2}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a + b = 2a \\ a + b = 2b \end{matrix} \Rightarrow \boxed{a = b \quad , \lambda_1 = 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a + b = 0 \\ a + b = 0 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{a = -b \quad , \lambda_2 = 0}$$

خ و د)

$5.i:\quad K[0]=1,\ S[0]=-1 \Rightarrow K[1]=0,\ S[1]=0 \quad \dots \quad K[n]=0,\ S[n]=0$

علاقه ای به یکدیگر ندارند یا بهتر حسی به یکدیگر ندارند

$5.j:\quad K[0]=1,\ S[0]=1 \Rightarrow K[1]=2,\ S[1]=2 \Rightarrow K[2]=4,\ S[2]=4 \quad \dots$

هرچقدر خسرو بیشتر عاشق شیرین می‌شود، شیرین بیشتر از خسرو خوشش می‌آید

ذ)

$5.l:\quad d[0]=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \Rightarrow K[0]=1,\ S[0]=-1 \Rightarrow K[1]=1+2=3,\ S[1]=-2-1=-3 \Rightarrow K[2]=3+6=9,\ S[2]=-6-3=-9$

اگر $S[0]$ مقدار علاقه نداشتن شیرین باشد، اگر مقدار $S$ به منفی برود یعنی شیرین به خسرو علاقه‌مند است و با گذشت زمان علاقه‌مندتر می‌شود و خسرو نیز به شیرین علاقه‌مند است.

اما اگر $S$ مقدار علاقه شیرین و $K$ مقدار تنفر خسرو باشد، هردو از دیگری متنفر خواهد بود.

$d[0]=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \Rightarrow K[0]=-1,\ S[0]=1 \Rightarrow K[1]=-1-2=-3,\ S[1]=2+1=3 \quad \dots$

در این حالت دقیقاً برعکس بالا خواهد بود.

ر)

$$5.\ K:\ \lambda^2 - 2\lambda + (1-(+4)) = \lambda^2 - 2\lambda + (-3)$$

$$\lambda = \frac{2+\sqrt{4-(-12)}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix} = \begin{matrix} a-2b=3a \\ -2a+b=3b \end{matrix} \Rightarrow \boxed{a=-b}\ \lambda_1 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = \begin{matrix} a-2b=-a \\ -2a+b=-b \end{matrix} \Rightarrow \boxed{a=b\ \ \lambda_2=-1}$$

ز)

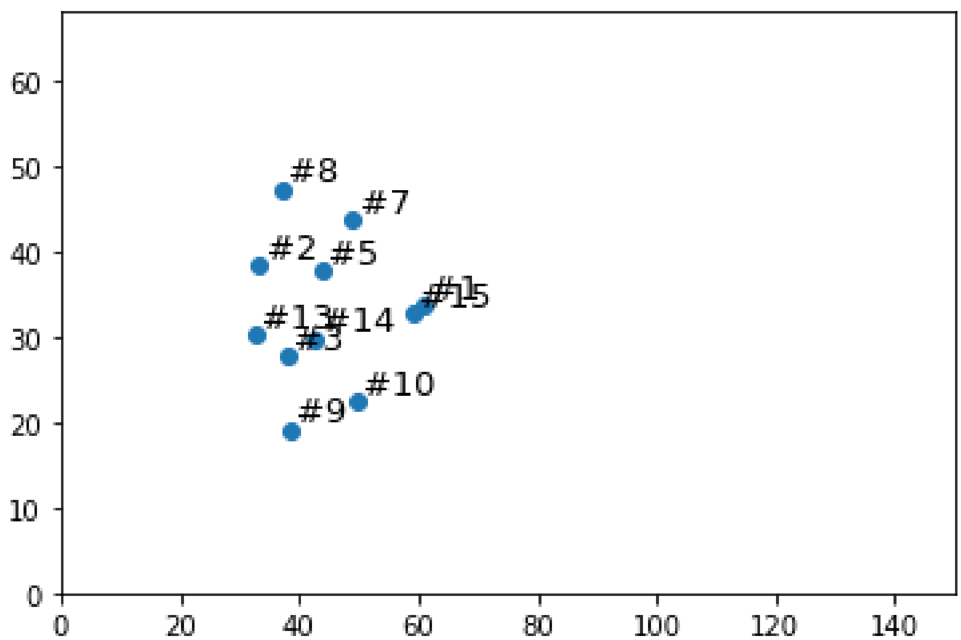
$$5.m:\ d[0] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} K[0]=1 \\ S[0]=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} K[1]=1-2=-1 \\ S[1]=-2+1=-1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} K[2]=-1+2=1 \\ S[2]=2-1=1 \end{matrix}$$

در این حالت به صورت متناوب است و در کل یا شیرین عاشق خسرو است و خسرو علاقه‌ای ندارد یا برعکس

6)

الف)

```
[[ 1.         60.99902381 33.55849533]
 [ 2.         33.29703602 38.40279404]
 [ 5.         43.98551857 37.71468843]
 [ 7.         49.07791408 43.71642116]
 [ 8.         37.26917829 47.26113391]
 [ 9.         38.39837064 19.16483717]
 [10.         49.77859827 22.46277549]
 [ 3.         37.95296352 27.62576714]
 [13.         32.7400862  30.16125197]
 [14.         42.74584054 29.77146472]
 [15.         59.11018939 32.75361944]]
```

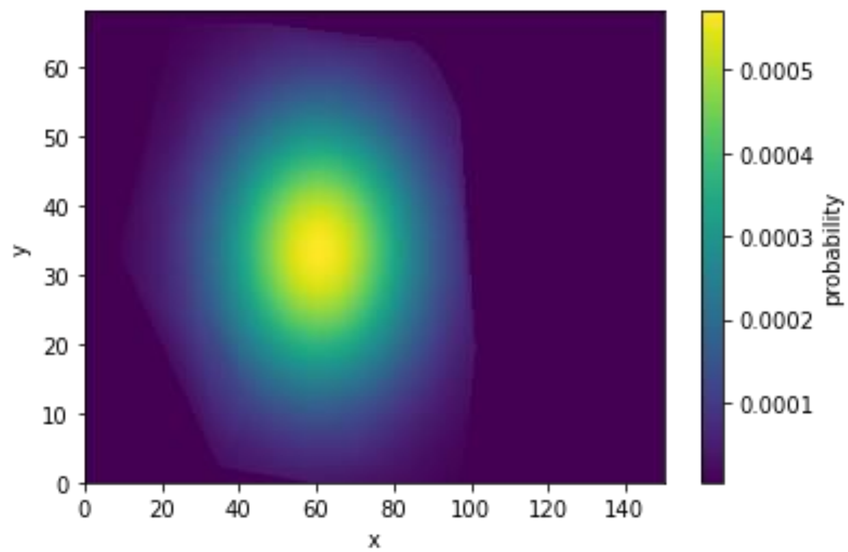



ب)

مقدار میانگین و کوواریانس برای هر بازیکن و همچنین هیت مپ بازیکن :

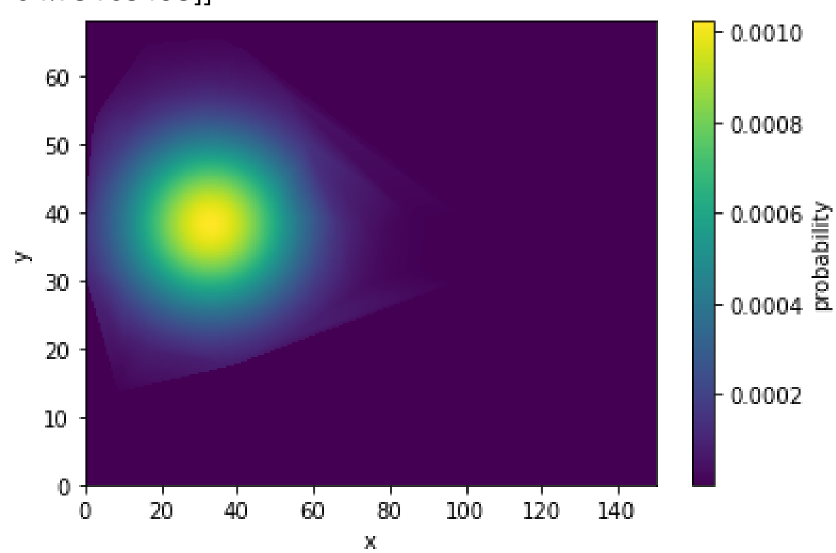
:1

x_pos     60.999024
y_pos     33.558495
[[366.52637547 -36.05664157]
 [-36.05664157 212.62099602]]



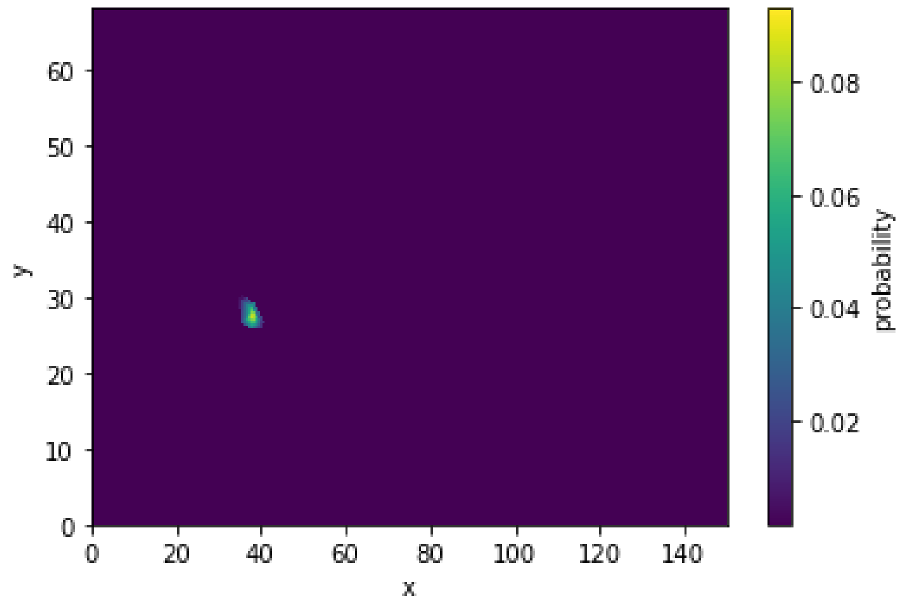

:2

x_pos     33.297036
y_pos     38.402794
[[285.16056591   1.85667032]
 [  1.85667032  84.73183193]]



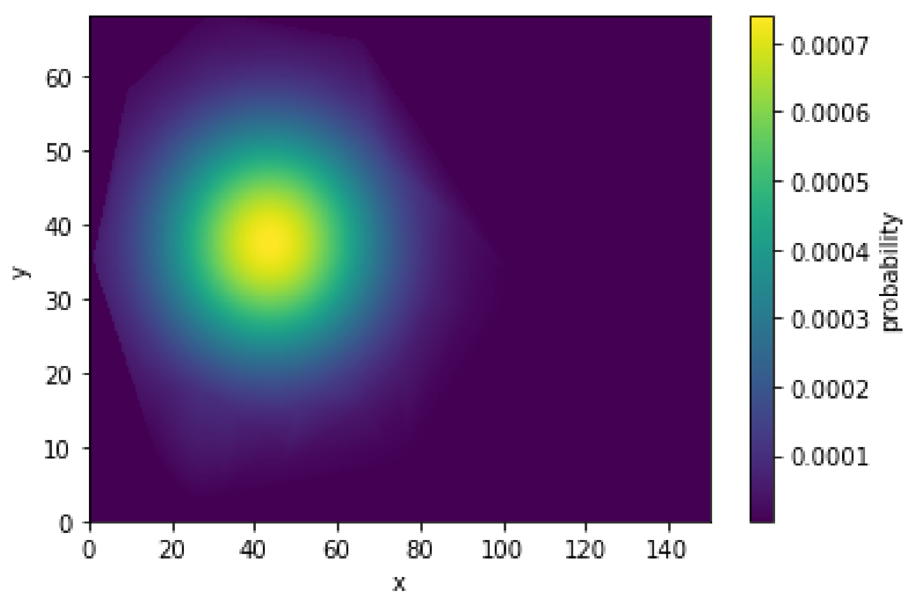
:3

x_pos     37.952964
y_pos     27.625767
[[ 1.97367266 -0.96462448]
 [-0.96462448  1.41628328]]



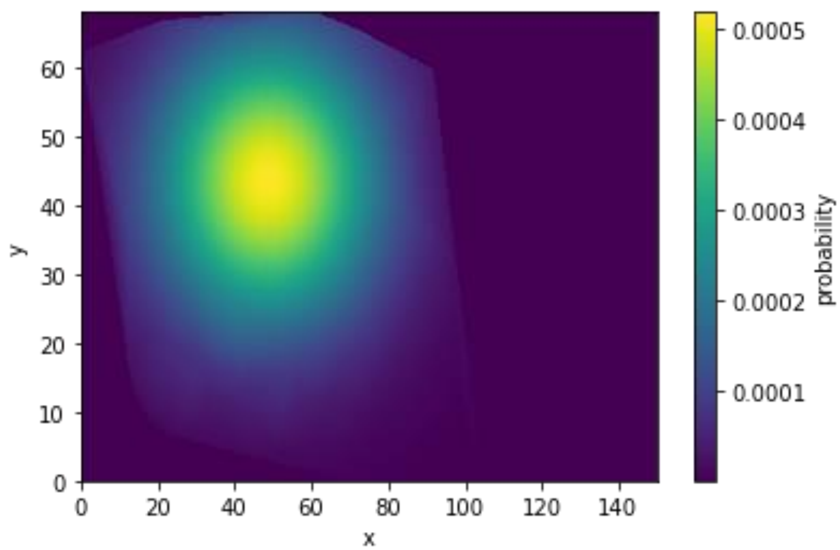

:5

x_pos     43.985519
y_pos     37.714688
[[359.22222054  -4.46705971]
 [ -4.46705971 129.14886405]]



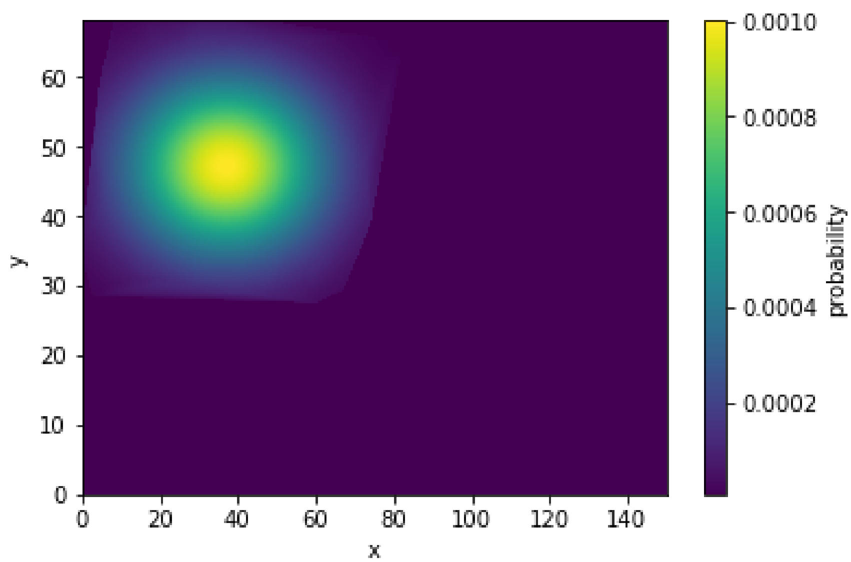
:7

x_pos     49.077914
y_pos     43.716421
[[427.95228857 -80.9937581 ]
 [-80.9937581  220.42509892]]



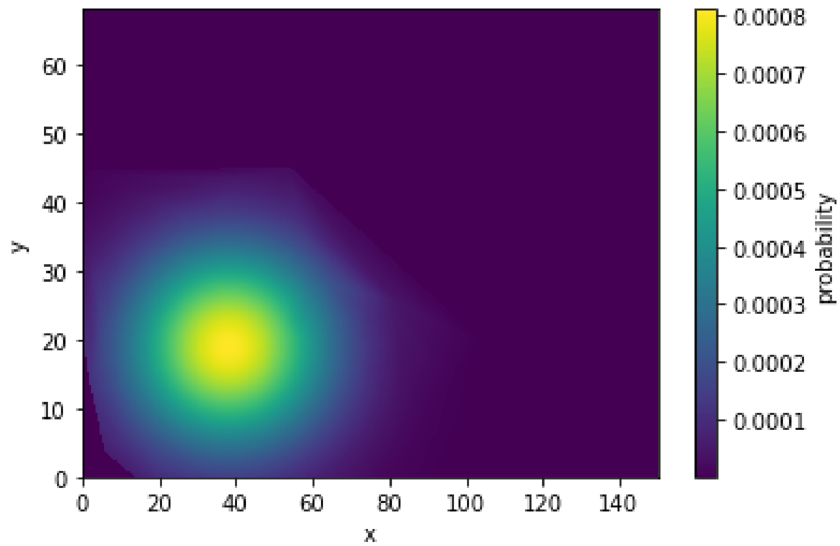

:8

x_pos     37.269178
y_pos     47.261134
[[312.69489226  25.81248779]
 [ 25.81248779  80.83107851]]



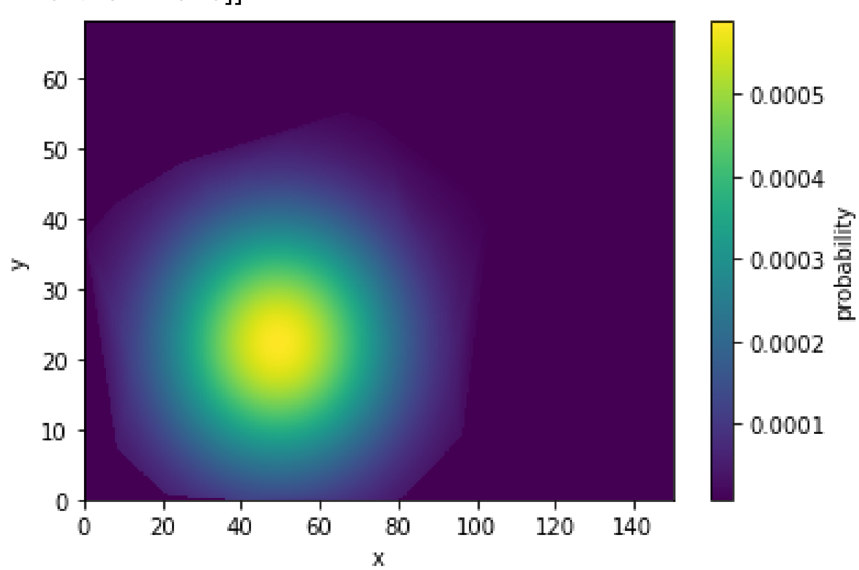
:9

x_pos     38.398371
y_pos     19.164837
[[355.1330666  -84.40749922]
 [-84.40749922 108.43894044]]




:10

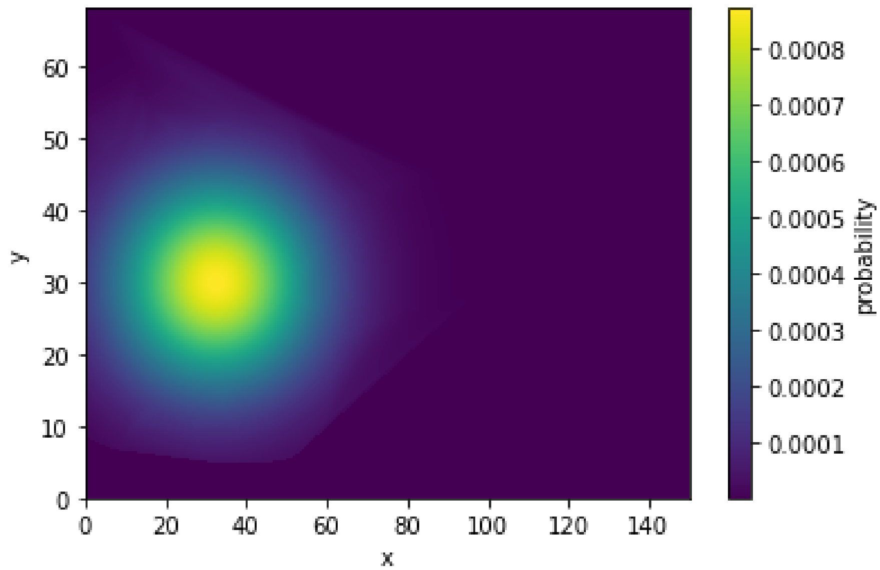
x_pos     49.778598
y_pos     22.462775
[[446.7099114  -33.35315941]
 [-33.35315941 164.40441028]]




:13

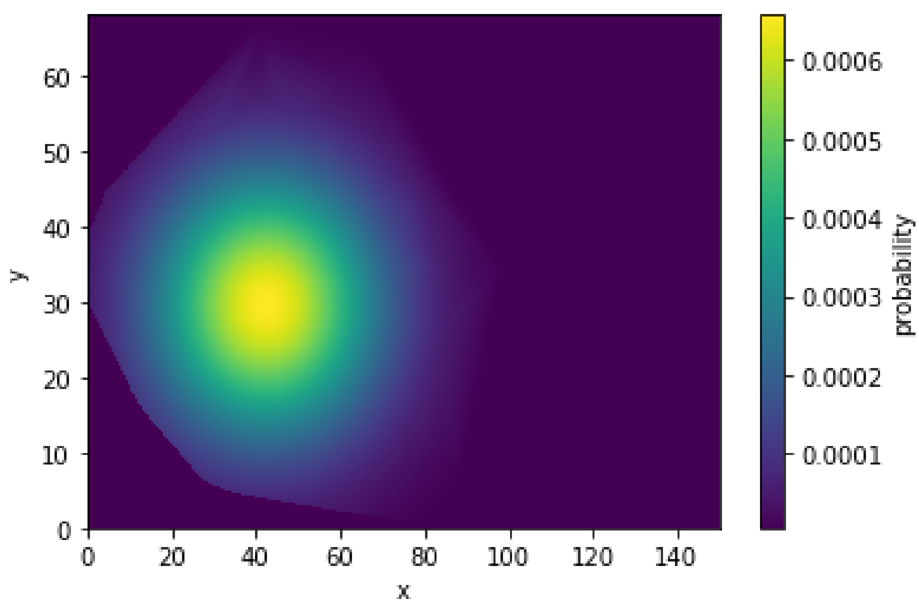
x_pos     32.740086

y_pos     30.161252
[[313.24058073 -15.92533343]
 [-15.92533343 106.29465933]]




:14

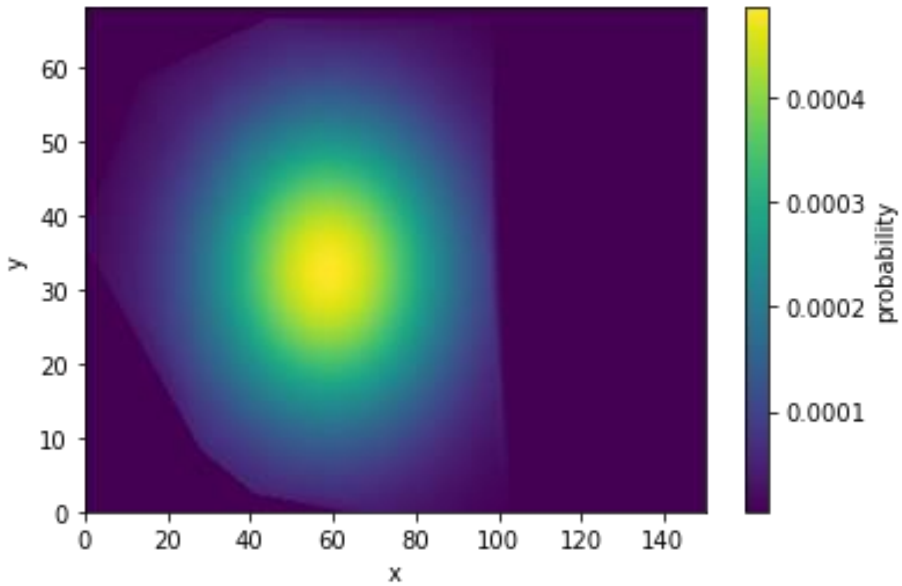
x_pos     42.745841
y_pos     29.771465
[[371.03625754 -49.1358891 ]
 [-49.1358891  158.04268805]]




:15

x_pos     59.110189

y_pos     32.753619
[[471.29399862 -21.73061822]
 [-21.73061822 228.20383144]]




پ) کد مربوط به این سوال در فایل probability of locations موجود میباشد. نمونه ای از پاسخ ها در زیر بیان شده است:

player: 10 x_pos: 18.090820062201452 y_pos: 23.06566289708123
probability: 0.19066265457353807

player: 10 x_pos: 110.99390298932018 y_pos: 39.74440621465897
probability: 0.0035708398434731864

player: 10 x_pos: 2.7964333013998424 y_pos: 17.186578093731573
probability: 0.04561228247511023

player: 15 x_pos: 91.59426022800433 y_pos: 4.462915118886215
probability: 0.027429972183230306

player: 15 x_pos: 63.12833725011668 y_pos: 26.83510302117664
probability: 0.4418237376504485

player: 15 x_pos: 141.98578294519936 y_pos: 2.4041801871872996
probability: 4.414789231775702e-05

player: 9 x_pos: 41.71839497283386 y_pos: 24.815017639053515
probability: 0.6892397703004559

player: 9 x_pos: 26.964822272526057 y_pos: 16.293920900406494
probability: 0.6495317503103867

player: 9 x_pos: 4.507873695024594 y_pos: 36.638960688245405
probability: 0.03937979621995994

ت)

با بررسی جا به جایی بازیکنان و مقدار میانگین جابه جایی آنها میتوان موقعیت بازیکنان را حدس زد:

بازیکن شماره 13: به عنوان دروازه بان یا Sweeper

بازکین شماره 2 : LCB

بازکین شماره 3 : RCB

بازکین شماره 8 : LB

بازکین شماره 9 : RB

بازکین شماره 7 : LM

بازکین شماره 10 : RM

بازکین شماره 5 : LCM

بازکین شماره 14 : RDM

بازکین شماره 1 : LS

بازکین شماره 2 : RS

7)

الف)

هنگامی که ویژگی ها همبستگی دارند ما از whitening transformation استفاده میکنیم تا این همبستگی تا حد مطلوبی از بین برود. هر چه همبستگی کمتر باشد برای یادگیری ماشین بهتر خواهد بود. در این تبدیل یک بردار از متغیرات تصادفی با یک ماتریس کوواریانس معین است به یک بردار با

متغیرات تصادفی جدید با ماتریس کواریانسی که همانی است تبدیل میشود که یعنی همبستگی ندارند و واریانس آن ها 1 است.

ب)

میتوانیم این سوال را با یک مثال توضیح دهیم.

برای مثال تصور کنید ما یک dataset از خانه های مختلف در دسترس داریم. در یک مسئله کلاس بندی کردن ما میتوانیم فقط برای قیمت پیشنهادی بگوییم که قیمت اصلی خانه بیشتر از این مقدار پیشنهادی هست یا خیر.

اما در مسئله رگرسیون ما میتوانیم قیمت اصلی خانه را بدست آوریم. با توجه به این مثال میتوانیم بفهمیم که مسئله رگرسیون یک حالت تعمیم یافته از مسئله کلاس بندی هست که میتواند در هر مرحله از کار خود یک حالت کلاس بندی برای قیمت پیشنهادی و قیمت اصلی ایجاد کند تا بعد از چندین مسئله کلاس بندی پشت سر هم به قیمت اصلی برسد.

ث)

برای یک ماتریس n*n مقدار ویژه و بردار ویژه از طریق فرمول زیر قابل به دست آمدن هستند:

$MX = \lambda X$

که در این معادله X برابر بردار ویژه و $\lambda$ برابر مقدار ویژه ماتریس M است که X یک بردار غیر صفر است که با یک ضریب اسکالر به نام مقدار ویژه تبدیل خطی رو آن اعمال میشود.

که با جابه جایی به یک طرف و فاکتور گرفتن از X به صورت زیر در خواهد آمد:

$(M - \lambda I) X = 0$

با دترمینان گرفتن به معادله زیر در خواهد آمد و میتوان مقدار ویژه را به دست آورد :

$\det(M - \lambda I) = 0$

د)

مقدار $\lambda$ یک مقدار اسکالر است یعنی به صورت عددی است و به حالت برداری نیست و نمیتوان آن را رسم کرد.

برای تعیین تاثیر این پارامتر میتوانیم بردار ویژه را رسم کرد و این مقدار عددی را در آن بردار ضرب کرد و در دستگاه مختصات نمایش داد.

ج)

گوگل از الگوریتم های زیادی برای سرچ کردن استفاده میکند. یکی از این الگوریتم ها که از پایه های اصلی موتور جستوجوی گوگل است الگوریتم pageRank میباشد.

فرض کنید G یک گراف جهت دار با n رأس باشد، که در آن n تعداد صفحات وب یافت شده است، با یک فلش از u به v زمانی که صفحه وب u به صفحه وب v پیوند دارد.

فرض کنید A ماتریس مجاورت G باشد که اگر پیوندی از i به j وجود داشته باشد ورودی ij برابر با 1 است و در غیر این صورت 0 است.

فرض کنید D ورودی‌های قطری درجه‌های بیرونی G باشد - به عبارت دیگر، D ماتریس قطری است که ورودی‌های قطری آن ورودی‌های بردار ستون Aj هستند، که در آن j بردار n×1 همه آن‌ها است. به این ترتیب، ماتریس $D^{-1}A$ دارای مجموع ردیف برابر با 1 است (همچنین به عنوان ماتریس تصادفی شناخته می شود)، بنابراین $D^{-1}Aj = j$.

$$M = \frac{1-\alpha}{n} jj^T + \alpha D^{-1}A$$

واضح است که M فقط ورودی های مثبت دارد، بنابراین باید یک بردار ویژه سمت چپ x مرتبط با بزرگترین مقدار ویژه خود داشته باشد که همه ورودی های آن مثبت هستند. این قضیه پرون–فروبنیوس است. این x را طوری انتخاب کنید که مجموع ورودی آن برابر با 1 باشد.

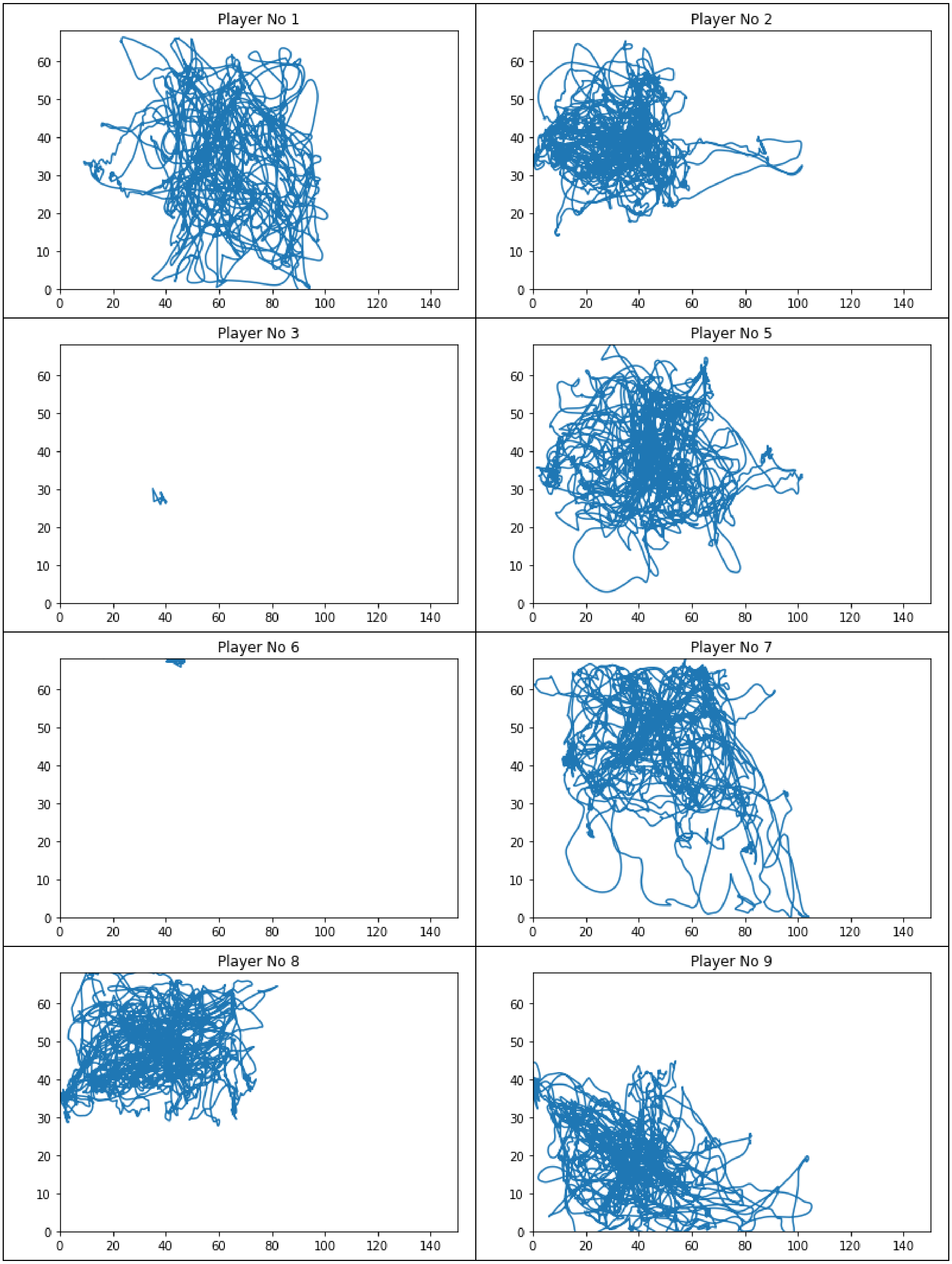
$$Mj = \frac{1-\alpha}{n} jj^T j + \alpha D^{-1}Aj = \frac{1-\alpha}{n}(nj) + \alpha j = j$$

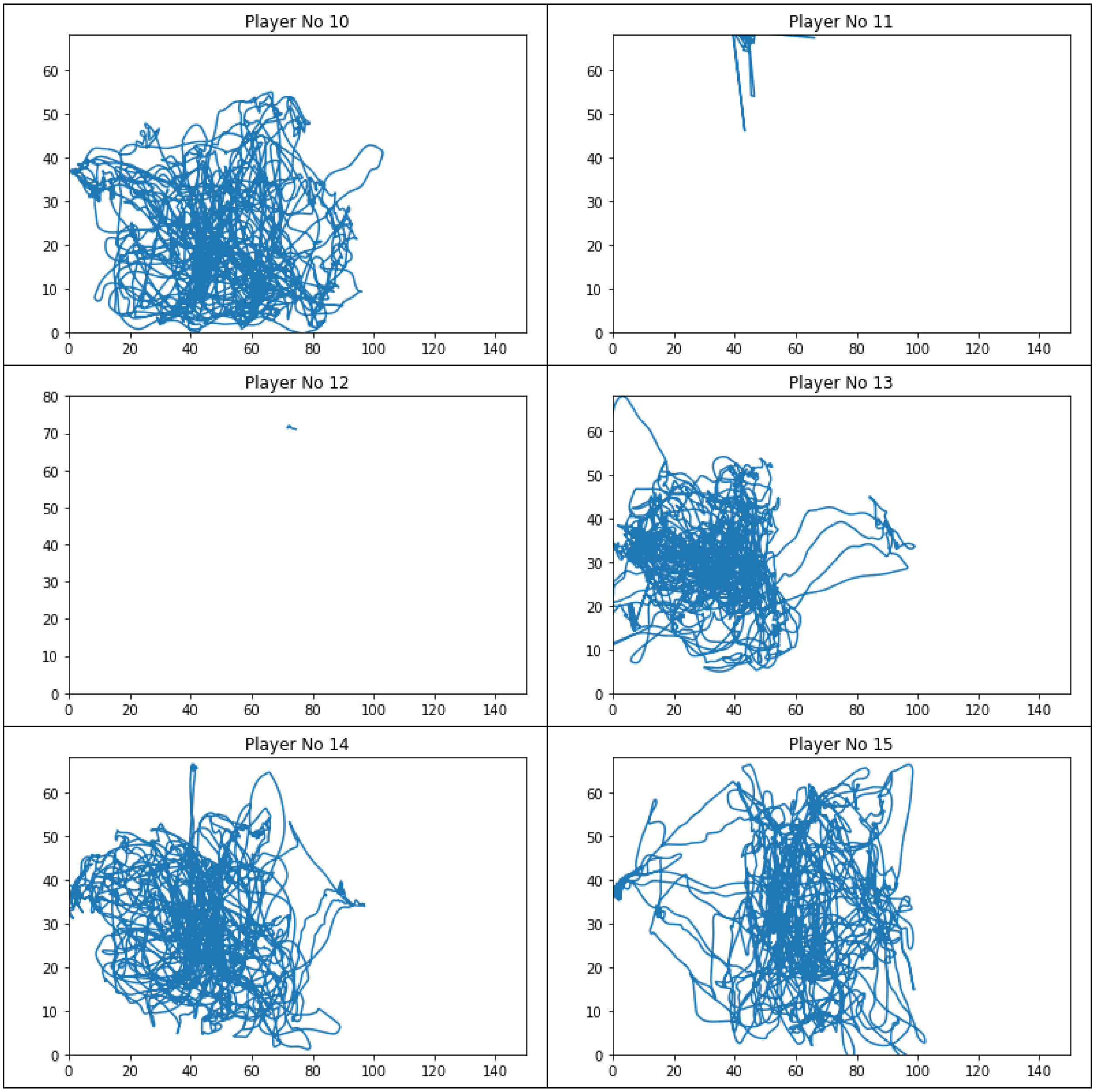
بنابراین 1 یک مقدار ویژه از M با بردار ویژه مرتبط (راست) j است. از آنجایی که این بردار ویژه دارای ورودی های مثبت است، 1 بزرگترین مقدار ویژه M توسط قضیه پرون-فروبنیوس است. (به طور متناوب، می توانیم از نتیجه معروف استفاده کنیم که بزرگترین مقدار ویژه یک ماتریس تصادفی 1 است.) بنابراین xT باید بردار ویژه سمت چپ مقدار ویژه 1 باشد، زیرا مقادیر ویژه چپ و راست یک ماتریس برابر هستند.

$$x^T M = x^T.$$

PageRank صفحه وب k امین ورودی این بردار ویژه سمت چپ xT است.

مسیر جا به جایی تمام بازیکنان در زیر آورده شده است:




Player No 10
Player No 11
Player No 12
Player No 13
Player No 14
Player No 15
0
10
20
30
40
50
60
70
80
100
120
140