KOMBINATORYKA

Dział matematyki, zajmujących się badaniem struktur skończonych.

Niech m oznacza liczbę przedmiotów oraz n liczbę pudełek. Jeżeli $n < m$, to przynajmniej dwa przedmioty trafią do jakiegoś jednego pudełka.

ZASADA SZUFLADKOWA (Dirichlet'a, gołębnika)

Jeżeli skończony zbiór S jest podzielony na k podzbiorów, to co najmniej jeden z tych zbiorów ma $|S|/k$ lub więcej elementów.

PRZYKŁAD 13.

W każdej grupie n osób są przynajmniej 2 osoby, które znają tę samą liczbę osób. „Znajomość" jest relacją symetryczna i antyzwrotną (nikt tak naprawdę nie zna siebie).

PRZYKŁAD 14.

Dany jest zbiór $A = \{a_1, a_2, ..., a_9\}$ taki, że suma jego elementów wynosi 90. Elementy tego zbioru są liczbami rzeczywistymi nieujemnymi. Pokażemy, że wśród tych elementów:

a) istnieją trzy takie elementy zbioru A, że ich suma $\geqslant 30$.

b) istnieją cztery takie elementy zbioru A, że ich suma $\geqslant 40$.

a) $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) = 90$ Niech $\alpha = a_1 + a_2 + a_3,\ \beta = a_4 + a_5 + a_6,\ \gamma = a_7 + a_8 + a_9$.

Rozpatrzmy następujące przypadki:

$$\begin{array}{ccc}
\alpha < 30 & \beta < 30 & \gamma > 30 \\
\alpha < 30 & \beta = 30 & \gamma > 30 \\
\alpha = 30 & \beta < 30 & \gamma > 30 \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

b)

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1
a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1	a_2
a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_1	a_2	a_3

Suma wszystkich liczb występujących w tej tabelce wynosi $4 \cdot 90 = 360$. Z zasady szufladkowej jedna z dziewięciu kolumn musi mieć sumę równą co najmniej $360/9 = 40$.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ lub $a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ lub $\cdots \geqslant 40$.

ZASADA WŁĄCZANIA I WYŁĄCZANIA

(zliczanie elementów dużych zbiorów skończonych)

Aby wyznaczyć liczbę elementów zbioru $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ należy znaleźć liczby elementów wszystkich możliwych przecięć zbiorów spośród $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ dodać do siebie wyniki uzyskane dla przecięć nieparzystej liczby zbiorów, a następnie odjąć wyniki uzyskane dla przecięć parzystej liczby zbiorów.

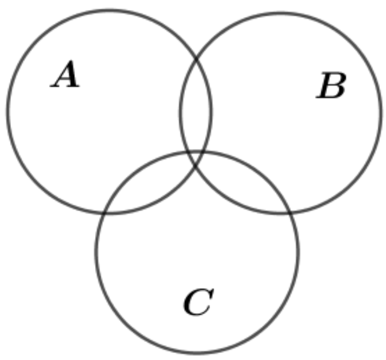
Używając słów „*włączyć*” i „*wyłączyć*” powiemy:

należy „włączyć” (dodać do siebie liczności poszczególnych zbiorów), następnie „wyłączyć” (odjąć liczność przecięć po dwa zbiory), potem „włączyć” (dodać liczności wszystkich przecięć po trzy zbiory), itd.

PRZYKŁAD 15.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

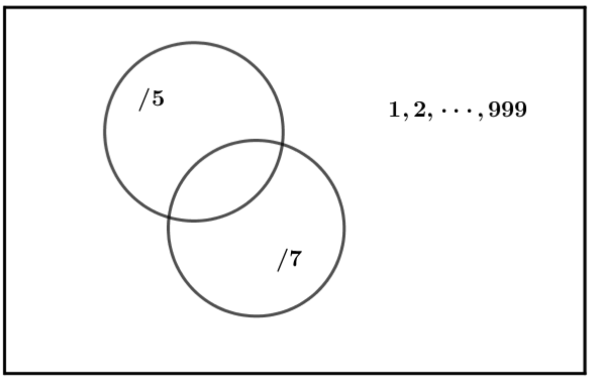


$A = \{a, b\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{x, y\}$;

$|A \cup B \cup C| = 2 + 2 + 2 - 0 - 0 - 0 + 0 = 6$

PRZYKŁAD 16.

Ile jest liczb między 1 a 999 niepodzielnych, ani przez 5, ani przez 7?



Ilustracja podzbiorów zbioru $\{1, 2, \cdots, 999\}$

$999 - "/5" - "/7" + "/5 \cap 7" = 999 - \lfloor 999/5 \rfloor - \lfloor 999/7 \rfloor + \lfloor 999/35 \rfloor = 999 - 199 - 142 + 28 = 686.$

PRZYKŁAD 17.

Ile liczb naturalnych ze zbioru $S = \{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$ dzieli się przez 3 lub 5, lub przez obie te liczby jednocześnie?

Niech

$D_3 = \{n \in S : n \text{ dzieli się przez } 3\}$; $\quad D_5 = \{n \in S : n \text{ dzieli się przez } 5\}$;
$D_3 \cap D_5 = \{n \in S : n \text{ dzieli się przez } 15\}$;

$D_3 = \{3m \in S : 1 \leqslant m \leqslant 333\} \quad |D_3| = \left\lfloor \dfrac{1000}{3} \right\rfloor = 333$

$D_5 = \{5m \in S : 1 \leqslant m \leqslant 200\} \quad |D_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{5} \right\rfloor = 200$

$|D_3 \cap D_5| = \left\lfloor \dfrac{1000}{15} \right\rfloor = 66$

Zatem

$|D_3 \cup D_5| = |D_3| + |D_5| - |D_3 \cap D_5| = 333 + 200 - 66 = 467.$

WYBORY ELEMENTÓW ZBIORU

Rozważana klasa problemów dotyczy szacowania liczby wyborów ustalonej ilości elementów danego zbioru. Wybory mogą spełniać ograniczenia powtarzalności oraz uporządkowania wyboru.

Mając zbiór $S = \{x, y, z, w\}$ możemy dokonywać wyborów bez powtórzeń, np. zxw lub z powtórzeniami zzx, możemy dokonywać wyborów rozróżniających lub nie kolejność elementów, np. xzw, zwx mogą być traktowane jako różne lub jako takie same. Rozważane wybory mogą wreszcie obejmować wybory różnej liczności, w rozważanym przypadku zawierających od jednego do czterech elementów, $1 \leqslant k \leqslant |S|$. Możliwości te ilustruje poniższa tabela.

	PORZĄDEK	
	ISTOTNY	NIEISTOTNY
ELEMENTY POWTARZAJĄCE SIĘ	WARIACJE	NABORY
ELEMENTY NIEPOWTARZAJĄCE SIĘ	PERMUTACJE	KOMBINACJE

Wybory elementów zbioru

PERMUTACJE

Permutacja zbioru n-elementowego, to ciąg utworzony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Dwie permutacje uważamy za różne, gdy przynajmniej dwa elementy występują w nich na różnych pozycjach.

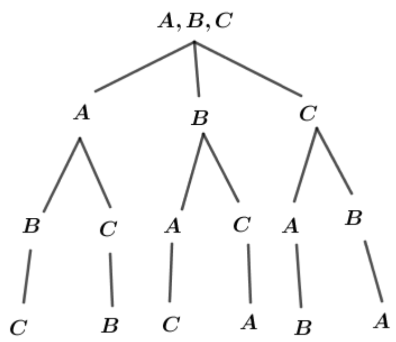
Liczbę permutacji zbioru n-elementowego oznaczmy P_n.

$P_n = n!$ czytamy „n silnia”

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n, \quad 0! = 1, \quad 1! = 1$$

PRZYKŁAD 18.

Wypisać wszystkie permutacje zbioru 3-elementowego $Z = \{A, B, C\}$



Permutacje zbioru $\{A, B, C\}$

Permutacje: (A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), (C, B, A)

PRZYKŁAD 19.

Pewien biznesmen zapomniał hasła do zamka swojej aktówki. Hasło jest liczbą siedmiocyfrową z $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Cyfry w haśle nie powtarzają się i ostatnie trzy są wybrane z cyfr $\{5, 6, 7\}$. Ile możliwości trzeba sprawdzić (w najgorszym przypadku) aby otworzyć aktówkę?

$$4! \cdot 3!$$

PRZYKŁAD 20.

W biegu bierze udział 8 zawodników w ilu różnych kolejnościach mogą oni przybyć na metę?

$$8! = 40320$$

WARIACJE

Wariacje bez powtórzeń

Dany jest zbiór $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$, $k \leqslant n$.

Każdy k-elementowy ciąg różnych elementów zbioru A nazywamy k-elementową wariacją bez powtórzeń elementów zbioru A.

Liczba wariacji wyraża się wzorem:

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+1)) \quad V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

PRZYKŁAD 21.

Wypisać wszystkie 2-wyrazowe wariacje bez powtórzeń zbioru $A = \{a, b, c\}$.

Wariacje bez powtórzeń: $(a, b), (a, c), (b, c), (b, a), (c, a), (c, b)$.

PRZYKŁAD 22.

W urnie jest 10 kul ponumerowanych od 1 do 10. Losujemy kolejno i bez zwrotu 5 kul. Po każdym losowaniu zapisujemy jej numer. Ile jest wszystkich możliwych wyników losowania?

$$V_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

PRZYKŁAD 23.

Losowanie bez zwracania (raz wyjęta karta nie wraca do tali). Na ile sposobów można wybrać 4 karty z tali 52 kart?

$$V_{52}^{4} = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49$$

PRZYKŁAD 24.

Rzucamy 3 razy kostką. Po każdym rzucie zapisujemy wynik (liczbę oczek). Ile jest wyników w których oczka się nie powtarzają?

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Wariacje k-elementowe bez powtórzeń są stosowane w zagadnieniach zliczania, w których istotny jest porządek

Wariacje z powtórzeniami

Każdy k-wyrazowy ciąg elementów zbioru n-elementowego nazywamy k-elementową wariacją z powtórzeniami.

Liczba k może być większa od n, gdyż wyrazy ciągu mogą się powtarzać.

$W_n^k = n^k$ jest liczbą k-elementowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n elementowego.

PRZYKŁAD 25.

Na ile sposobów można rozmieścić 2 kule (czarną i białą) w 3 szufladach?

I	II	III
0	b	c
0	c	b
0	c, b	0
0	0	c, b
b	c	0
c	b	0
c, b	0	0
b	0	c
c	0	b

$$3 \cdot 3 = 9$$

PRZYKŁAD 24.

Losowanie ze zwracaniem. Na ile sposobów można wybrać ze zwracaniem 4 karty z tali 52 kart.

$W_{52}^4 = 52 \cdot 52 \cdot 52 \cdot 52 = 52^4$

PRZYKŁAD 27.

Na ile sposobów możesz wypełnić test złożony ze 100 pytań, jeżeli na każde pytanie trzeba odpowiedzieć TAK lub NIE?

2^{100} (ponieważ na każde pytanie można odpowiedzieć na 2 sposoby)

PRZYKŁAD 28.

Ile dzielników ma liczba 1000000?

Ponieważ każdą liczbę można rozłożyć na czynniki pierwsze stąd $1000000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$. Każdy dzielnik ma postać $2^a \cdot 5^b$, gdzie $a = 0, 1, ..., 6, \quad b = 0, 1, ..., 6$. Czyli 1000000 ma $7 \cdot 7 = 49$ dzielników.

KOMBINACJE

Niech $k, n \in N$ oraz $k \leqslant n$. Kombinacją k-elementową spośród n elementów pewnego zbiór nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru.

Kolejność, w jakiej występują elementy, nie jest istotna.

Liczbę kombinacji k-elementowych spośród zbioru n-elementowego oznaczamy symbolem $\binom{n}{k}$. Symbol ten nazywamy symbolem Newtona lub współczynnikiem Newtona

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Łatwo zauważyć, że:

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = k! C_n^k.$$

Własności symbolu Newtona

Symetria

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, n \geqslant k$$

Wartości skrajne

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, n \geqslant 1$$

Dla każdego $n, k \in N$ prawdziwa jest równość

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

PRZYKŁAD 29.

Na ile sposobów można 52 karty rozdać pomiędzy 4 graczy tak aby każdy z nich dostał 13 kart.

Na $\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13}$ sposobów.

PRZYKŁAD 30.

Ile słów można utworzyć ze słowa MATEMATYKA przestawiając litery? Słowo oznacza dowolny skończony ciąg liter.

$\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3! = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 3! = \frac{10!}{2!3!2!}$ słów.

WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \quad a, b \in R, \ n \in N$$

PRZYKŁAD 31.

Udowodnić, że

1) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdot + (-1)^k \binom{n}{k} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

Korzystając ze wzoru Newtona dla $a = 1$ i $b = -1$, mamy $(1 + (-1))^n = 0$.

2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

Korzystając ze wzoru Newtona dla $a = 1$ i $b = 1$ otrzymamy

$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n1^0 + \cdots + \binom{n}{k}1^{n-k}1^k + \cdots + \binom{n}{n}1^01^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n}$

Ponieważ $\binom{n}{k}$ jest liczbą k- elementowych podzbiorów (kombinacji) zbioru n-elementowego, a każdy podzbiór zbioru ma $0, 1, ..., n-1$ albo n elementów, więc

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

jest liczbą wszystkich podzbiorów zbioru n- elementowego.

Trójkąt Pascala

W przypadku wyższych potęg we wzorze Newtona obliczanie wartości symbolu $\binom{n}{k}$ bywa kłopotliwe. Korzystamy więc z trójkąta Pascala

$$\begin{array}{lccccccccccccccccc}
n=0: & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
n=1: & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
n=2: & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
n=3: & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
n=4: & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
n=5: & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
n=6: & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
n=7: & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
n=8: & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
\cdots & & & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Trójkąt Pascala zbudowany jest w ten sposób, że na pozycjach skrajnych ma jedynki, a każdy inny wyraz powstaje przez dodanie dwóch wyrazów znajdujących się nad nim.