FUNKCJE DWÓCH I TRZECH ZMIENNYCH

Wykład 8.

ZBIORY NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI

Def. (*płaszczyzna, przestrzeń*)

Przestrzenią dwuwymiarową **(płaszczyzną)** R^2 **jest zbiór par uporządkowanych** (x,y)**, gdzie** $x,y\in R$**, tj.**

$$R^2 \stackrel{def}{=} \{(x,y): x,y\in R\} = R\times R.$$

Podobnie, ***przestrzenią trójwymiarową*** R^3**, jest**

$$R^3 \stackrel{def}{=} \{(x,y,z): x,y,z\in R\} = R\times R\times R.$$

Elementy (x,y) **oraz** (x,y,z) **nazywamy odpowiednio** ***punktami*** **płaszczyzny lub przestrzeni.**

Liczby x, y **oraz** x, y, **to** ***współrzędne kartezjańskie*** **punktów** (x,y) **oraz** (x,y,z)**.**

Def. (*odległość punktów*)

Odległość **punktów** P_1, P_2 **płaszczyzny lub przestrzeni oznaczamy przez** $|P_1P_2|$ **oraz:**

$$|P_1P_2| \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

gdzie $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)\in R^2$ **lub**

$$|P_1P_2| \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

gdzie $P_1=(x_1,y_1,z_1)$, $P_2=(x_2,y_2,z_2)\in R^3$.

Def. (*otoczenie punktu*)

Otoczeniem o promieniu $r > 0$ punktu P_0 na płaszczyźnie lub przestrzeni jest zbiór:

$$O(P_0, r) \stackrel{def}{=} \{P : |P_0P| < r\}.$$

Otoczeniem punktu na płaszczyźnie jest koło o środku w danym punkcie. Otoczeniem punktu w przestrzeni jest kula otwarta o środku w danym punkcie.

Def. (*zbiór ograniczony i nieograniczony*)

Zbiór A jest ograniczony, jeżeli jest zawarty w otoczeniu pewnego punktu, tzn.

$$\underset{P_0}{\exists}\ \underset{r>0}{\exists}\ A \subset O(P_0, r).$$

W przeciwnym przypadku mówimy, że zbiór A jest nieograniczony.

Def. (*punkt wewnętrzny zbioru*)

Punkt P jest punktem wewnętrznym zbioru A, jeżeli istnieje otoczenie tego punktu zawarte w zbiorze A, tzn.

$$\underset{r>0}{\exists}\ O(P, r) \subset A.$$

Def. (*zbiór otwarty*)

Zbiór jest otwarty, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

FUNKCJE DWÓCH I TRZECH ZMIENNYCH

Def. (***funkcja dwóch zmiennych***)

Funkcja f **dwóch zmiennych określona na zbiorze $A \subset R^2$ o wartościach w R przyporządkowuje każdemu punktowi z A dokładnie jedną liczbę rzeczywistą**

$$f : A \to R, \text{ tj. } z = f(x,y),\ (x,y) \in A.$$

Def. (***funkcja trzech zmiennych***)

$A \subset R^3$ $f : A \to R$ **tj.** $w = f(x,y,z)$, **gdzie** $(x,y,z) \in A$.

Def.

Dziedzina, zbiór wartości **– podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej.**

Przykład. Wyznaczyć dziedzinę funkcji

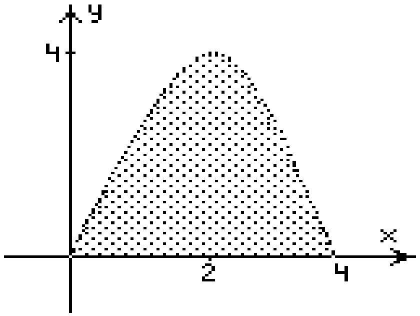
$$f(x,y)=\ln(4x-x^2-y)+x\sqrt{y}\,.$$

Zauważmy, że funkcja ta określona jest w zbiorze punktów $p=(x,y)\in R^2$, których współrzędne muszą spełniać warunek:

$$4x-x^2-y>0 \quad i \quad y\geq 0\,.$$

Zatem

$$D=\{(x,y)\in R^2:\ \ y<4x-x^2 \wedge \ \ y\geq 0\} = \{(x,y)\in R^2:\ \ 0\ \leq y<4x-x^2\}.$$

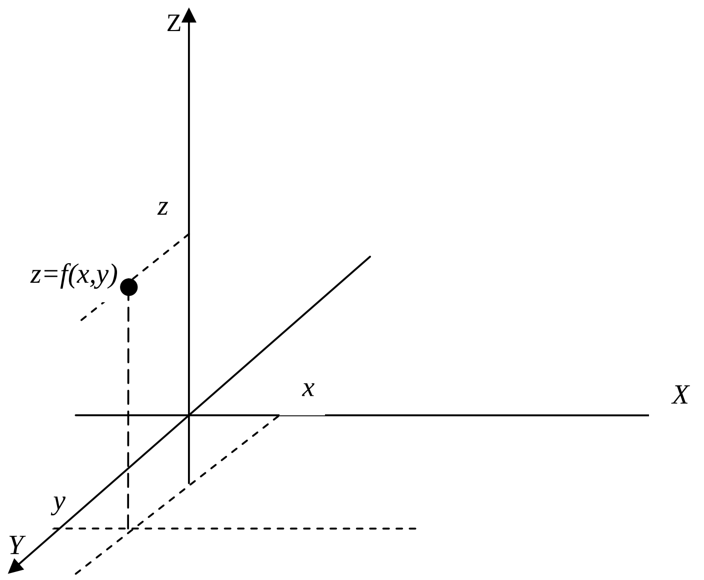


Def. (*wykres funkcji dwóch zmiennych*)

Wykresem funkcji *f* dwóch zmiennych jest zbiór:

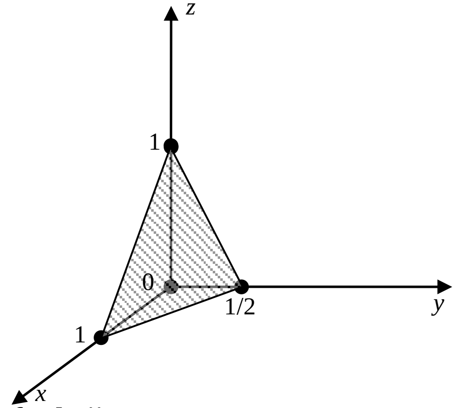
$$\{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D_f, z = f(x, y)\}.$$

Wykres funkcji dwóch zmiennych.



Przykład

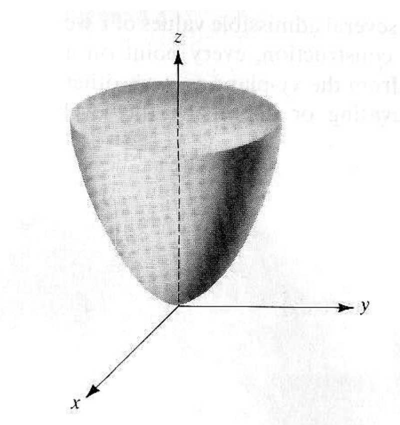
Funkcja *z* = 1 – *x* – 2*y*
Dziedziną jest cała płaszczyzna
Wykresem tej funkcji jest płaszczyzna.



Wykres funkcji $z = 1 - x - 2y$

Przykład

Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$
Dziedziną jest cała płaszczyzna $D = \mathrm{R}^2$
Wykresem jest elipsoida o przekroju kolistym.

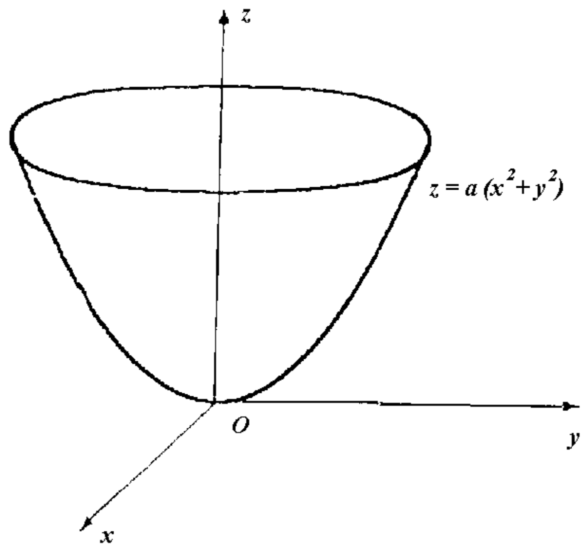


Wykres funkcji
$f(x, y) = x^2 + y^2$

2. Wykresem funkcji

$$z = a\left(x^2 + y^2\right)$$

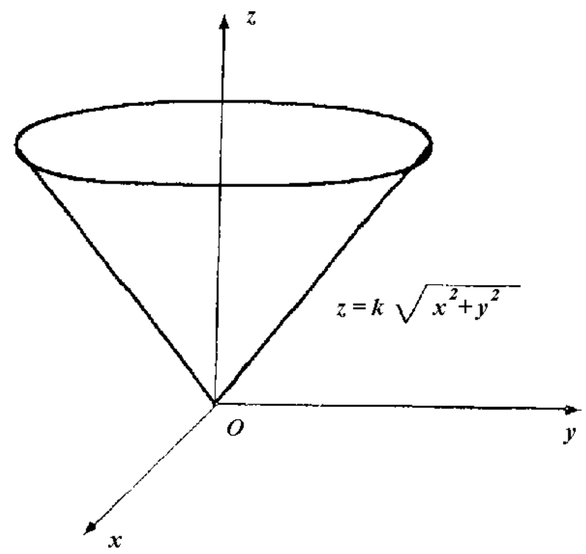
jest paraboloida obrotowa, tj. powierzchnia powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$ wokół osi Oz.



3. Wykresem funkcji

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

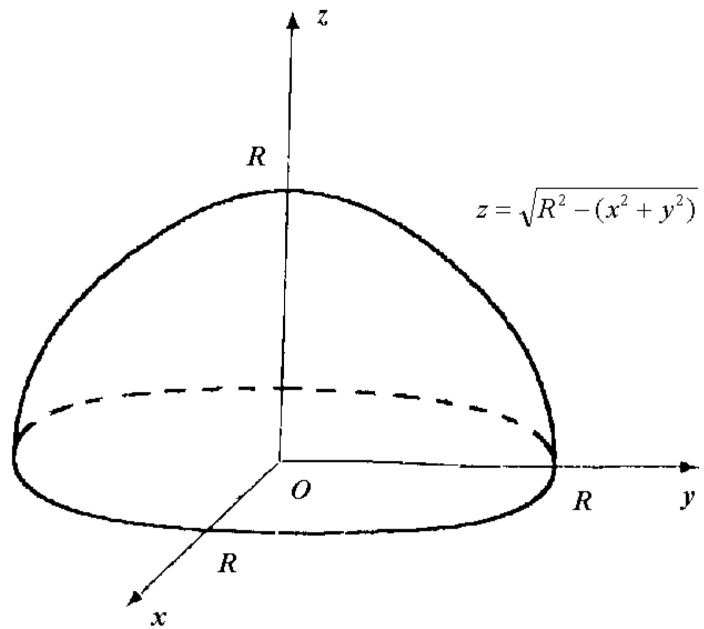
jest stożek, tj. powierzchnia powstała z obrotu półprostej *z* = *kx* dla *x* ≥ 0 wokół osi *Oz*.



4. Wykresem funkcji

$$z = \pm\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$$

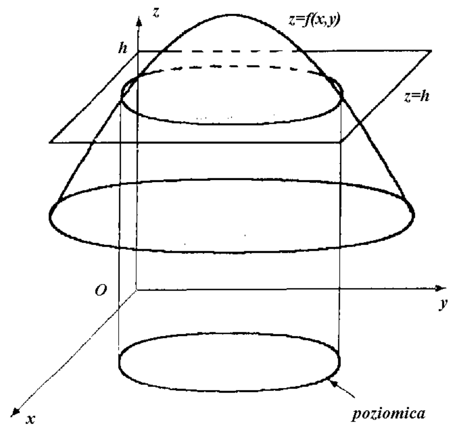
jest górna (+) lub dolna (-) półsfera o środku w początku układu współrzędnych i promieniu *R*.



Def.

Poziomicą **wykresu funkcji *f*, odpowiadającą poziomowi $h \in R$, nazywamy zbiór:**

$$\{(x, y) \in D_f : f(x, y) = h\}.$$



Poziomica wykresu funkcji *f* odpowiadająca poziomowi *h*

Fakt (*przesunięcia i odbicia wykresów funkcji*)

1. Wykres funkcji

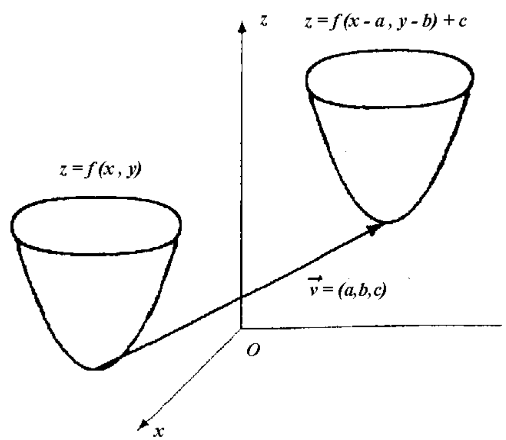
$$z = f(x-a, y-b) + c$$

powstaje z wykresu $z = f(x,y)$ **przez przesunięcie o wektor** $\vec{v} = (a,b,c)$**.**

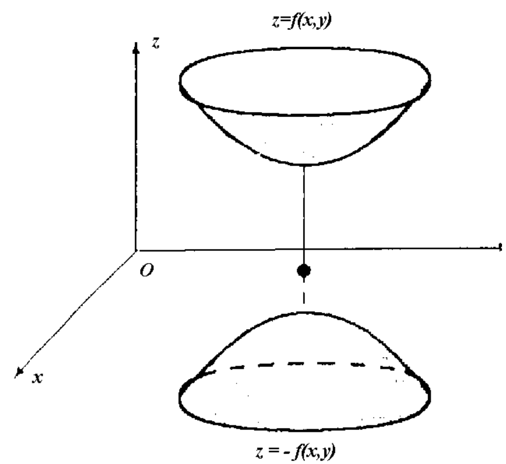
2. Wykres funkcji

$$z = -f(x,y)$$

powstaje z wykresu $z = f(x,y)$ **przez symetrię względem płaszczyzny *xOy*.**



Przesunięcie wykresu funkcji o wektor $\vec{v} = (a,b,c)$



Odbicie wykresu funkcji względem płaszczyzny *xOy*

Def. (*funkcja ograniczona*)

Funkcja *f* dwóch zmiennych jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli zbiór wartości funkcji *f* na zbiorze *A* jest ograniczony, tzn.

$$\underset{M>0}{\exists} \underset{(x,y)\in A}{\forall} |f(x,y)| \le M .$$

***Uwaga*. Definicja funkcji ograniczonej trzech zmiennych jest analogiczna. Definicje funkcji dwóch i trzech zmiennych ograniczonych z dołu lub z góry są podobne do odpowiednich definicji dla funkcji jednej zmiennej.**

GRANICE FUNKCJI W PUNKCIE

Def. (*ciąg na płaszczyźnie*)

Ciągiem punktów na płaszczyźnie ((P_n) lub $((x_n, y_n))$) jest odwzorowanie zbioru liczb naturalnych w zbiór R^2.

Def. (*granica właściwa ciągu*)

Ciąg $(P_n) = ((x_n, y_n))$ jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_0, y_0)$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \text{ lub } \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0),$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ oraz } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

***Uwaga*. Ciąg (P_n) jest zbieżny do punktu P_0, jeżeli w dowolnym otoczeniu punktu P_0 znajdują się prawie wszystkie wyrazy tego ciągu.**

Def. (***Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie***)

Liczba *g* jest granicą właściwą funkcji *f* w punkcie (x_0, y_0), co zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{(x_n,y_n)} \left[\left(\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0) \right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g \right) \right].$$

***Uwaga*. W podobny sposób można określić granicę funkcji trzech zmiennych.**

Granicę funkcji *f* w punkcie (x_0, y_0) oznaczamy przez $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$ **lub**

$f(x,y) \to g$, gdy $(x,y) \to (x_0, y_0)$.

Def. (***Heinego granicy niewłaściwej w punkcie***)

Funkcja *f* ma w punkcie (x_0,y_0) granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{((x_n,y_n))}\left[\left(\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)=(x_0,y_0)\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n)=\infty\right)\right].$$

***Uwaga*. Podobnie definiujemy obie granice niewłaściwe dla funkcji trzech zmiennych.**

<u>Przykład 1</u>. Wykazać, że

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(p) = \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}.$$

Niech (p_k) **będzie dowolnym ciągiem punktów zbieżnym do punktu** $p_0 = (1,1)$**, czyli**

$$p_k = (x_k, y_k), \text{ gdzie } \lim_{k\to\infty} x_k = 1, \quad \lim_{k\to\infty} y_k = 1.$$

Wtedy

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k - y_k}{x_k^2 - y_k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{x_k - y_k}{(x_k - y_k)(x_k + y_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(x_k + y_k)} = \frac{1}{2}.$$

Przykład 2. **Wykazać, że funkcja**

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

nie ma granicy w punkcie $p_0 = (0,0)$ **.**

W tym przypadku wystarczy wskazać dwa różne ciągi (p_k) **i** (q_k) **zbieżne do** $p_0 = (0,0)$ **i takie, że odpowiadające im ciągi wartości funkcji** $(f(p_k))$ **i** $(f(q_k))$ **mają różne granice.**

Dziedziną funkcji *f* jest zbiór

$$\mathrm{D} = \{(x,y) \in R^2 : \ y \neq x\} \textbf{.}$$

Niech $p_k = (\frac{1}{k}, \frac{2}{k})$**,** $q_k = (\frac{3}{k}, \frac{1}{k})$ **dla** $k \in N$ **.**

Widzimy, że $p_k \in \mathrm{D}$ **i** $q_k \in \mathrm{D}$ **oraz**

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p_0 \ \textbf{ i } \ \lim_{k\to\infty} q_k = p_0 \textbf{.}$$

Jednocześnie

$$\lim_{k\to\infty} f(p_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}+\frac{2}{k}}{\frac{1}{k}-\frac{2}{k}} = \lim_{k\to\infty}(-3) = -3 \textbf{,} \qquad \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3}{k}+\frac{1}{k}}{\frac{3}{k}-\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} 2 = 2 \textbf{.}$$

Z powyższego wynika (na podstawie definicji Heinego), że granica funkcji $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ **w punkcie** $p_0 = (0,0)$ **nie istnieje.**

Tw. (*granica sumy*)

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = p \\ 2.\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = q \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) + g(x,y)\right] = p + q$$

Tw. (*granica iloczynu*)

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = p \\ 2.\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = q \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) \cdot g(x,y)\right] = pq$$

Tw. (*granica ilorazu*)

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{1. } \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = p \\ \textbf{2. } g(x,y) \neq 0 \textbf{ dla} \\ \textbf{każdego } (x,y) \neq (x_0,y_0) \\ \textbf{3.} \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = q \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{p}{q}$$

***Uwaga*. Powyższe trzy twierdzenia są prawdziwe także dla funkcji trzech zmiennych. Do znajdowania granic funkcji dwóch i trzech zmiennych można stosować twierdzenia o dwóch i o trzech funkcjach, analogiczne do takich twierdzeń dla funkcji jednej zmiennej.**

FUNKCJE CIĄGŁE

Def. (*funkcja dwóch zmiennych ciągła w punkcie*)

Funkcja *f* jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Def. (*funkcja dwóch zmiennych ciągła na zbiorze otwartym*)

Funkcja jest ciągła na zbiorze otwartym $D \subset R^2$, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

***Uwaga*. Definicje ciągłości w punkcie i na zbiorach dla funkcji trzech zmiennych są analogiczne do podanych powyżej.**

Tw. (*działania na funkcjach ciągłych*)

Suma, iloczyn, iloraz oraz złożenie funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi.

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Pochodną cząstkową funkcji *f* w punkcie (x_0, y_0) względem zmiennej *x* jest granica (jeżeli istnieje):

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Pochodna cząstkową względem zmiennej *x* obliczamy jak zwykłą pochodną zmiennej *x* traktując *y* jako (znany) parametr.

Analogicznie definiujemy pochodną cząstkową względem *y.*

Oznaczenie $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 y_0)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 y_0)$ **lub** $f_x'(x_0, y_0)\quad f_y'(x_0, y_0)$

lub krótko $\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}$**.**

Przykłady: Wyznaczyć pochodne ($\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$)

1. $z = f(x, y) = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1. \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 8y + 2.$$

2. $u = f(x, y) = e^{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}.$$

3. $u = f(x, y, z) = xy^3\cos(xz)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3\cos(xz) - xy^3z\sin(xz); \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3xy^2\cos(xz); \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = -x^2y^3\sin(xz)$$

4. $u = f(r, \varphi) = r^2\sin^3\varphi$.

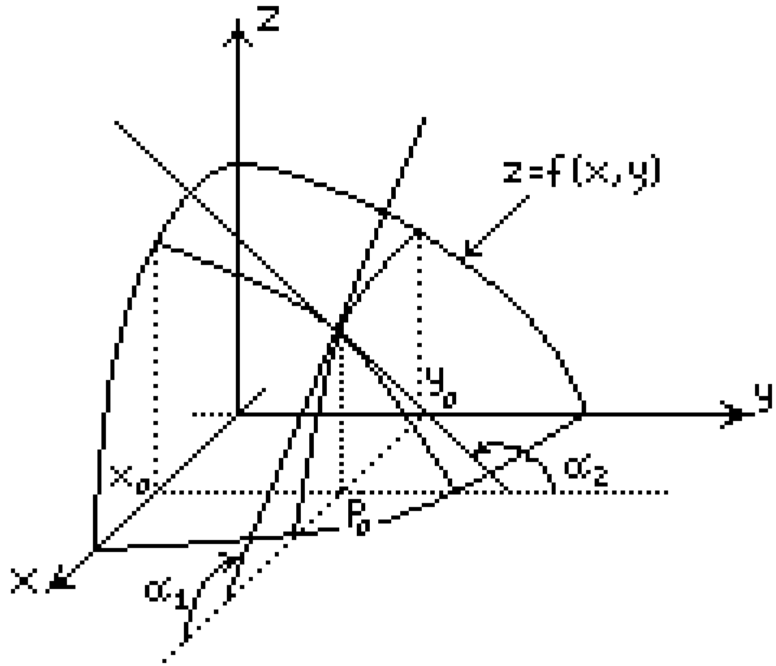
$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\sin^3\varphi, \qquad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 3r^2\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

5. $z = f(x, y) = \frac{2x-3y}{x+4y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x+4y)-(2x-3y)\cdot 1}{(x+4y)^2} = \frac{2x+8y-2x+3y}{(x+4y)^2} = \frac{11y}{(x+4y)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3(x+4y)-(2x-3y)\cdot 4}{(x+4y)^2} = \frac{-3x-12y-8x+12y}{(x+4y)^2} = \frac{-11x}{(x+4y)^2}.$$

Podobnie oblicza się pochodne funkcji trzech zmiennych.



Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych funkcji dwóch zmiennych $\mathrm{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ **w punkcie** $\mathrm{p}_0 = (\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$**:**

$\boldsymbol{f}'_x(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0}) = \mathrm{tg}\alpha_1$; $\quad \boldsymbol{f}'_y(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0}) = \mathrm{tg}\alpha_2$