Matematyka Dyskretna   Lista 3   14-20.03.2023r.

1. Rozważmy dowolny podzbiór A zbioru liczb rzeczywistych. Określić, które z własności z wykładu (Wykład 2, str. 1) mają następujące relacje binarne określone na zbiorze A:

   (a) $xRy \Leftrightarrow x < y$;   (b) $xRy \Leftrightarrow x \leqslant y$;   (c) $xRy \Leftrightarrow x = y$;   (d) $xRy \Leftrightarrow x \neq y$.

2. Określić, jakie własności mają następujące relacje binarne określone na zbiorze $\mathbb{Z}$ (liczb całkowitych):

   (a) $xRy \Leftrightarrow x$ i y są tej samej parzystości;   (b) $xRy \Leftrightarrow x$ i y są względnie pierwsze;

   (c) $xRy \Leftrightarrow x|y$;   (d) $xRy \Leftrightarrow x|y \wedge y|x$;   (e) $xRy \Leftrightarrow x = y + 1$.

3. Jakie własności mają następujące relacje binarne określone na zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$:

   (a) $xRy \Leftrightarrow |x| < |y|$;   (b) $xRy \Leftrightarrow |x| \leqslant |y|$;   (c) $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$;

   (d) $xRy \Leftrightarrow xy > 0$;   (e) $xRy \Leftrightarrow xy \geqslant 0$;   (f) $xRy \Leftrightarrow xy = 0$.

4. Uzasadnić, że poniższe relacje są relacjami równoważności. Opisać ich zbiory ilorazowe*.

   (a) $(\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $x(\text{mod } n)y \Leftrightarrow n|(x-y)$, gdzie $x, y \in \mathbb{Z}$;

   (b) $R \subset \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$, $(k,l)R(m,n) \Leftrightarrow k+n = l+m$, gdzie $(k,l),(m,n) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$;

   (c) $R \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$, $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc$, gdzie $(a,b),(c,d) \in (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))$.

5. Niech będzie dana funkcja $f : X \to Y$. Na zbiorze X określamy relację binarną $(\mathsf{ker}\ \mathsf{f})$ w ten sposób, że $x_1 (\mathsf{ker}\ \mathsf{f})\, x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Sprawdzić, że relacja $(\mathsf{ker}\ \mathsf{f})$ jest relacją równoważności. Zbadać sens geometryczny zarówno relacji $(\mathsf{ker}\ \mathsf{f})$, jak i jej klas abstrakcji, dla następujących funkcji:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$;   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = x^2 + y^2$;   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = |x| + |y|$.

6. Rzucamy dwiema kostkami. Dwa takie rzuty uznajemy za równoważne, gdy suma oczek jest taka sama. Uzasadnić, że jest to relacja typu $(\mathsf{ker}\ \mathsf{f})$. Ile klas abstrakcji wyznacza ta relacja oraz ile wynosi moc (liczność) najliczniejszej klasy abstrakcji, jeśli kostki są

   (a) zwykłymi sześciennymi kostkami?;   (b) kostkami RPG o 8 i 12 ścianach?

7. Zastosować algorytm Euklidesa do liczb 55 i 34.

8. Wyznaczyć NWD i NWW liczb 448 i 721 z użyciem i bez użycia algorytmu Euklidesa.

9. Stosując rozszerzony algorytm Euklidesa, rozwiązać poniższe równania w liczbach całkowitych

   (a) $1119x - 6778y = 1$;   (b) $98x + 35y = 21$;   (c) $966x - 686y = 70$;   (d)* $\dfrac{53}{143}x - \dfrac{61}{195}y = \dfrac{1}{165}$.

10. Przedstawić liczbę 29529 w postaci iloczynu liczb pierwszych, dzieląc ją przez kolejne liczby pierwsze. Zapisać tę metodę w postaci algorytmu, który mógłby być użyty do rozkładu dowolnej liczby n.

11. Udowodnić, że aby sprawdzić, czy liczba n jest pierwsza (lub złożona), wystarczy sprawdzić, czy n ma dzielnik nie większy niż $\sqrt{n}$.

---

*Zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji R na zbiorze A nazywamy zbiorem ilorazowym i oznaczamy go symbolem A/R.