0 1 2

ANALIZA MATEMATYCZNA I (Lista 4, 24.10.2022)

Szeregi liczbowe, zbieżność.

Zad. 1. Na podstawie sumy częściowej szeregu wyznaczyć jego wyraz ogólny oraz sumę:

(a) $S_n = \frac{2n-1}{n+1}$, (b) $S_n = \frac{3^n-1}{3^n}$, (c) $S_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, (d) $S_n = \sqrt{n+1}$.

Zad. 2. Czy następujące szeregi spełniają warunek konieczny zbieżności:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$,

(e) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$, (f) $\sum_{i=1}^{\infty} 1004 \left(\frac{1}{2}\right)^n$, (g) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n)}$.

Zad. 3. Korzystając z **warunku koniecznego** zbieżności szeregu pokazać, że następujące szeregi są rozbieżne:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2004}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} 11 \cdot 2^n$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{100}(-1)^n$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Zad. 4. Stosując **kryterium porównawcze** zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+3}$. (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{2n^3-n}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n+(-2)^n}}{\sqrt[3]{5^n+(-1)^n}}$

Zad. 5. Stosując **kryterium porównawcze/ilorazowe** zbadać zbieżność następujących szeregów:

(a) $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-1}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{1}{n}$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{sin^2 n}{n^2}$. (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{2n^3-n}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3^n+(-2)^n}}{\sqrt[3]{5^n+(-1)^n}}$

Zad.6. Stosując **kryterium d'Alamberta** rozstrzygnąć, które poniższe szeregi są zbieżne:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Zad. 7. Stosując **kryterium Cauchy'ego** rozstrzygnąć, które poniższe szeregi są zbieżne:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^7}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^6}{6^n}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{5}{2^n+3^n}$, (d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n}$, (e) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$. (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{4n+1}\right)^{(3n+2)^2}$

Zad. 8. Które z podanych niżej szeregów są zbieżne warunkowo, a które bezwzględnie:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$,
(d) $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$, (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2-3n}{2+3n}\right)^{n^2}$

Zadania pochodzą, między innymi, z podręczników:

1. Gewert M., Skoczylas Z., Analiza matematyczna 1, przykłady i zadania.
2. Krysicki L. , Włodarski L., Analiza matematyczna w zadaniach, cz. 1.

Zad. 9. Zbadać zbieżność następujących szeregów naprzemiennych:

(a) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, (b) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$, (c) $\sum_{i=1}^{\infty}(-2)^{n}\frac{1}{2^n+3^n}$, (g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n-3}{n^2+1}$

(d) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n} sin\frac{3^n}{2^n}$, (e) $\sum_{i=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$, (f) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$.

Zad. 10. Zbadać, dla jakich liczb rzeczywistych *x* szereg jest zbieżny (skorzystać z Kryterium Dirichleta):

(a) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,.. (b) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n}$.