Matematyka Dyskretna

(P)Odpowiedzi do zadań z list podstawowych

1.2. 184, 12887, 83, 2568, 3842, 65445.

1.3. $204 = (1100\,1100)_2 = (21120)_3 = (411)_7$,
$511 = (111\,111\,111)_2 = (200221)_3 = (1330)_7$,
$1024 = (100\,0000\,0000)_2 = (1101221)_3 = (2662)_7$,
$3303 = (1100\,1110\,0111)_2 = (11112100)_3 = (12426)_7$.

1.4. $(1111\,1010\,0010)_2$, $(1110\,1010\,0100\,0011)_2$, $(1000\,0011\,0000\,0010)_2$.

1.5. $(8A)_{16}$, $(99)_{16}$, $(F2A)_{16}$, $(13A)_{16}$, $(7753)_{16}$.

1.6. (a) 11101, (b) 11111, (c) 110 1010, (d) 10011, (e) 11101.

1.7. (a) 111, (b) 100, (c) 100011, (d) 101.

1.8. (a) 100011, (b) 110 1001, (c) 1110 0100, (d) 1 1000 1000.

1.9. Wsk. $\mathrm{BIN}(2^{16} - |x|) = \mathrm{NOT}\,(\mathrm{BIN}(|x| - 1))$

(a) $(0000\,0000\,1000\,0011)_{\text{int}}$ i $(1111\,1111\,0111\,1101)_{\text{int}}$,
(b) $(0000\,0000\,0100\,1111)_{\text{int}}$ i $(1111\,1111\,1011\,0001)_{\text{int}}$,
(c) $(0000\,0000\,1101\,0011)_{\text{int}}$ i $(1111\,1111\,0010\,1101)_{\text{int}}$.

1.10. Wsk. $\mathrm{BIN}(|x|) = \mathrm{NOT}\,(\mathrm{BIN}(2^{16} - |x|)) + 1$

(a) 243 oraz -244; (b) 102 oraz -103; (c) 273 oraz -274.

2.2. Wsk. użyć ZIM do wykazania, że $(\forall n \geqslant 4)\,(\exists x, y \in \mathbb{N}_0)\,(n = 2x + 5y)$.

2.3. Wsk. dla $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ rozważyć przypadki $x \in [k, k + \frac{1}{2})$ i $x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$;
dla $\lceil x - \frac{1}{2} \rceil$ rozważyć przypadki $x \in (k, k + \frac{1}{2}]$ i $x \in (k + \frac{1}{2}, k + 1]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2.4. Wsk. skorzystać z nierówności $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ oraz $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

2.5. 65536 $\longrightarrow$ 17 bitów, 65356 $\longrightarrow$ 16 bitów,

2.6. Wsk. skorzystać z zad. 2.4, by np. w (a) najpierw pokazać, że $\mathbb{Z} \cap [a, b] = \mathbb{Z} \cap [\lceil a \rceil, \lfloor b \rfloor]$.

2.8. Wsk. $\lfloor nx \rfloor = \lfloor n\lfloor x \rfloor + n\{x\} \rfloor$.

2.10. Prawdziwe są (b), (c), (f), (h).

2.11. Wsk. $k_{\min}(f) =$ jedyny (jeśli istnieje) $k \in \mathbb{R}$, dla którego $f(n) = \Theta(n^k)$.

(a) $k_{\min}(f) = 6$; (b) $k_{\min}(f) = 12$; (c) $k_{\min}(f) = 3/2$; (d) $k_{\min}(f) = 8/3$;
(e) $k_{\min}(f) = 5/6$; (f) $k_{\min}(f) = 11/24$.

2.12. $(0,99)^n \preccurlyeq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \preccurlyeq \ln n \preccurlyeq n \preccurlyeq \ln(n^n) \preccurlyeq 3^{\ln n} \preccurlyeq n^2 \preccurlyeq n^{\ln n} \preccurlyeq 2^{\sqrt{n}} \preccurlyeq (1,01)^n \preccurlyeq (\ln n)^n$

3.1. Jeśli $A \neq \emptyset$, to relacja jest

(a) przeciwsymetryczna, przechodnia i słabo antysymetryczna, a jeśli dodatkowo $|A| = 1$, to jest też symetryczna;

(b) zwrotna, słabo antysymetryczna, przechodnia, a jeśli dodatkowo $|A| = 1$, to jest też symetryczna;

(c) zwrotna, symetryczna, słabo antysymetryczna, przechodnia;

(d) symetryczna, a jeśli dodatkowo $|A| \leqslant 2$, to jest też przechodnia, a gdy $|A| = 1$, to jest także przeciwsymetryczna oraz słabo antysymetryczna.

3.2. (a) zwrotna, symetryczna, przechodnia;

(b) symetryczna;

(c) przechodnia, a dodatkowo zwrotna w przypadku definicji "|" dopuszczającej "0|0";

(d) przechodnia, a dodatkowo zwrotna i symetryczna, gdy definicja "|" dopuszcza "0|0";

(e) przeciwsymetryczna, słabo antysymetryczna.

3.3. (a) przeciwsymetryczna, słabo antysymetryczna, przechodnia;

(b) zwrotna, przechodnia;

(c) zwrotna, symetryczna, przechodnia;

(d) symetryczna, przechodnia;

(e) zwrotna, symetryczna;

(f) symetryczna.

3.4. (a) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/R = \{[k]_{\mathrm{mod\,n}} : k = 0, \ldots, n-1\} \approx \mathbb{Z}_n$ (zob. Wykład 2);

(b) $(\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2)/R = \{[(n,0)]_R, [(0,n)]_R : n \in \mathbb{N}\} \approx \mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych;

(c) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\})^2/R = \{[(m,n)] : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+, \mathrm{NWD}(m,n) = 1\} \approx \mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych;

3.5. (a) $x_1\,(\ker f)\,x_2 \;\Leftrightarrow\; x_1$ i x_2 są w tej samej odległości (euklidesowej) od 0;
$\mathbb{R}/R = \{\{-x, x\} : x \in \mathbb{R}\}$ - zbiór dubletonów liczb rzeczywistych o przeciwnych znakach;

(b) $(x_1, y_1)\,(\ker f)\,(x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1$ i x_2 są w tej samej odległości euklidesowej od punktu $(0,0)$;
$\mathbb{R}^2/R = \{O(r) : r \geqslant 0\}$ - zbiór koncentrycznych okręgów o środku w punkcie $(0,0)$ plus okrąg zdegenerowany $O(0) = \{(0,0)\}$; tutaj $O(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$;

(c) $(x_1, y_1)\,(\ker f)\,(x_2, y_2) \;\Leftrightarrow\; x_1$ i x_2 są w tej samej odległości taksówkowej od punktu $(0,0)$.
$\mathbb{R}^2/R = \{K(r) : r \geqslant 0\}$ - rodzina kwadratów o wierzchołkach na osiach współrzędnych i kwadrat zdegenerowany $K(0) = \{(0,0)\}$; tutaj $K(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = r\}$ (okręgi/sfery w odległości taksówkowej).

3.6. (a) 11 klas abstrakcji; najliczniejsza ma 6 elemetów;

(b) 19 klas abstrakcji; najliczniejsza ma 8 elemetów;

3.8. $\mathrm{NWD}(721, 448) = 7$ i $\mathrm{NWW}(721, 448) = 46144$.

3.9. (a) rozwiązanie szczególne $\begin{cases} x = 3283 \\ y = \;\;542 \end{cases}$, rozwiązanie ogólne $\begin{cases} x = 3283 + 6778k \\ y = \;\;542 \;+ 1119k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) rozwiązanie szczególne $\begin{cases} x = -3 \\ y = \;\;9 \end{cases}$, rozwiązanie ogólne $\begin{cases} x = 5k - \;\;3 \\ y = \;\;9 \;\;- 14k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) rozwiązanie szczególne $\begin{cases} x = -110 \\ y = -155 \end{cases}$, rozwiązanie ogólne $\begin{cases} x = 49k - 110 \\ y = 69k - 155 \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$,

lub ładniej $\begin{cases} x = 37 + 49k \\ y = 52 + 69k \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.10. $n = 3^2 \cdot 17 \cdot 193$.

3.11. Wsk.: uzasadnić najpierw, że jeśli n jest złożona i d jest jej nietrywialnym dzielnikiem, to także $\frac{n}{d}$ jest nietrywialnym dzielnikiem n.

4.1. np. w (d) mamy

$+_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	0
2	2	3	4	5	6	7	0	1
3	3	4	5	6	7	0	1	2
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	6	7	0	1	2	3	4
6	6	7	0	1	2	3	4	5
7	7	0	1	2	3	4	5	6

$\cdot_8$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

4.3. (a) $1, 5$; (b) wszystkie elementy w $\mathbb{Z}_{11}$ poza 0; (c) $1, 5, 7, 11$; (d) $1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$; (e) 32; (f) 32; (g) 108; (h) 288.

4.4. (a) $-4 = 9$ i $4^{-1} = 10$; (b) $-7 = 8$ i $7^{-1} = 13$; (c) $-16 = 19$ i $16^{-1} = 11$; (d) $-15 = 113$ i $15^{-1} = 111$; (e) $-32 = 301$ i $32^{-1} = 281$; (f) $-111 = 401$ i $111^{-1} = 143$.

4.5. (a) $x = 4$; (b) brak rozwiązań; (c) $x \in \{2, 6\}$; (d) $x = 9$; (e) $x = 267$; (f) $x = 51$; (g) $x = 118$; (h) $x \in \{28, 139, 250, 361, 472, 583, 694\}$.

4.6. (a) $(x, y) = (4, 5)$; (b) $(x, y) = (3, 5)$; (c) $(x, y) = (9, 5)$.

4.7. Prawdziwe są (a), (b), (c), (e).

4.9. (b) Wsk. w dowodzie nie wprost rozważyć najmniejsze n_0, dla którego $a_{n_0} < n_0$.

4.10. (a) standardowy dowód nie wprost, (b) rozważyć $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

5.1. Wsk.: wykorzystać zależność rekurencyjną ciągu Fibonacciego oraz ZIM.

5.2. (a) $a_n = 4^{n+1} - 1$; (b) $b_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

5.3. (a) $s_n = 2 \cdot 5^n$; (b) $s_{2n} = 3^n$, $s_{2n+1} = 2 \cdot 3^n$, inaczej: $s_n = (1 + 2\{\frac{n}{2}\}) \cdot 3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$; (c) $s_n = \frac{1}{4}(5 - (-3)^n)$; (d) $s_n = \frac{1}{5}(2^{n+3} - 3^{n+1})$; (e) $s_n = (3n+1)2^n$; (f) $f_n = \frac{1-2n}{3^{n-1}}$.

5.4. (a) Wsk. rozważyć przypadki: (1) moneta 2 występuje w wypłacie kwoty n złotych i (2) moneta 2 się nie pojawia w wypłacie. Odp. $\begin{cases} a_1 = 1, \ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-2} + 1, \ n \geqslant 3 \end{cases}$;

(b) Wsk. rozważyć przypadki: (1) moneta 5 pojawia się w wypłacie n złotych, (2) moneta 2 pojawia się w wypłacie n złotych, (2) ani 5, ani 2 nie pojawiają się w wypłacie.
Odp. $\begin{cases} b_1 = 1, \ b_2 = 2, \ b_3 = 2, \ b_4 = 3, \ b_5 = 4, \ b_6 = 5, \ b_7 = 6 \\ b_n = b_{n-2} + b_{n-5} - b_{n-7} + 1, \ n \geqslant 8 \end{cases}$.

6.2. Wsk. jakie ściany może mieć n-ścian?

6.3. Wsk. rozważyć 3 najkrótsze i 3 najdłuższe krawędzie obu prostopadłościanów.

6.4. Wsk. zastosować uogólnioną zasadę Dirichleta do odpowiedniego parkietażu.
(a) $\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} < \frac{3}{7}$; (b) $\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{3}{5}$.

6.5. Wsk. (a) $\binom{9}{4} > 105$; (b) $2^{10} > 956$.

6.7. (a) 12; (b) 20.

6.8. 28 i 244.

6.9. 30.

6.10. 30.

6.11. 29 (?)

6.12. 2.

6.13. (a) 24; (b) 18.

6.14. 100.

6.15. 193.

7.1. 10 i 20.

7.2. 2401.

7.3. 260^3 (?).

7.4. 625 i 4536.

7.5. (a) $2 \cdot 9!$; (b) $12 \cdot 8!$; (c) $42 \cdot 8!$; (d) $15 \cdot 8!$.
Wsk. do (b). (c), (d): kombinacje z powtórzeniami

7.6. (a) 24; (b) 12; (c) 12; (d) 216.

7.7. 58060 i 69760.

7.8. (a) 4; (b) 180; (c) 664.

7.9. (a) 9; (b) 18; (c) 2450 (wsk. kombinacje z powtórzeniami).

8.1. Wsk.: *Lemat o uściskach dłoni* i *algorytm Havla-Hakimiego*

8.2. Wsk.: zasada szufladkowa Dirichleta + fakt (który trzeba uzasadnić), że w n-wierzchołkowym grafie prostym nie może jednocześnie istnieć wierzchołek izolowany i wierzchołek stopnia $n-1$.

8.3. Wsk.: *Lemat o uściskach dłoni*

8.4. Wsk.: rozważyć najdłuższą drogę prostą w grafie G.

8.5. Wsk.: dla jakich n graf C_n jest dwudzielny (i dlaczego)?

8.6. Wsk.: każdy n-wierzchołkowy graf dwudzielny jest podgrafem (formalnie, jest izomorficzny z podgrafem) pewnego grafu dwudzielnego pełnego o n wierzchołkach.

8.7. Wsk.: zob. długości cykli.

8.8. Wsk.: generować grafy w następujący sposób: pierwszy wierzchołek można połączyć z trzeba innymi w sposób dowolny; rozważyć dwa przypadki: (1) jeszcze nie połączone wierzchołki nie będą sąsiadować w końcowym grafie, (2) istnieje krawędź między jeszcze nie połączonymi wierzchołkami.

8.10. Wsk.: generować nieizomorficzne grafy wg jakiejś reguły, np. sukcesywnie zwiększając liczbę krawędzi.

9.1. Wsk.: generować grafy zaczynając o tych z pętlami wielokrotnymi, potem z krawędziami (niepętlami) wielokrotnymi; w (a) jest 14 takich grafów, zaś w (b) jest ich 49.

9.2. Wsk.: dowodzić, że jeśli G jest niespójny, to G' jest spójny; rozważyć przypadki, gdy dane dowolne $u, v \in V(G)$ należą do różnych/tej samej składowych/ej grafu G.

9.3. Wsk.: dowód nie wprost.

9.5. Wsk.: (a) użyć schematu dowodzenia $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\neg p \Rightarrow \neg q) \wedge \neg (p \wedge \neg q)]$; (b) uzasadnić, że $|E(G)| \leqslant \max\limits_{n_1+\cdots+n_p=n} (|E(K_{n_1})| + \cdots + |E(K_{n_p})|) = |E(K_1)| + \cdots + |E(K_1)| + |E(K_{n-(p-1)})|$.

9.6. Wsk.: $E(G) \cup E(G') = E(K_{V(G)})$.

9.7. Wsk.: do wyznaczenia $|E(Q_k)|$ wykorzystać *Lemat o uściskach dłoni.*

10.1. Wsk.: wykorzystać fakt, że w drzewie każda para wierzchołków jest połączona <u>dokładnie</u> jedną drogą; wyznaczyć liczbę krawędzi na dwa sposoby.

10.2. Wsk.: rozważyć najdłuższe drogi o początku w wierzchołku stopnia k.

10.3. Wsk.: $\Delta(T) \leqslant 3$ i generować drzewa w zależności od ciągu stopni ich wierzchołków.

10.4. Wsk.: (c) e należy lub nie należy do danego drzewa spinającego; (d) i. 56 ii. 141.

10.5. Wsk.: można wykorzystać *wzór/twierdzenie Cayleya.*

10.6. Wsk.: dla dowolnego drzewa spinającego T rozważyć $T + e$.

10.8. Wsk.: zob. dowód z zad.6.
