

Analiza matematyczna 2

dr Joanna Jureczko

Zestaw 2

Równanie różniczkowe liniowe.

Przykłady równań różniczkowych nieliniowych.

ZADANIA

2.1. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe jednorodne z warunkami początkowymi

a) $y' = \frac{2x-1}{x^2}y$, $y(1) = 1$,

b) $y' = y \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$,

c) $y' = \frac{-1}{x^2}y$, $y(1) = 1$.

2.2. Rozwiązać równania różniczkowe liniowe niejednorodne z warunkami początkowymi, jeżeli są podane

a) $\frac{dy}{dx} - 3y = 2$,

b) $\frac{dy}{dx} - 2xy = x - x^3$,

c) $\frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$,

d) $y' - y = 1$, $y(3) = 3$,

e) $xy' + y = x + 1$, $y(1) = 0$.

2.3. Rozwiązać równania różniczkowe Bernoulliego z warunkami początkowymi, jeżeli są podane

a) $y' + y + y^2 \sin x = 0$,

b) $y' + y + x\sqrt{y} = 0$,

c) $xy' + y = y^2 \ln x$, $y(1) = 1$.

2.4. Sprawdzić, że następujące równania różniczkowe są zupełne, a następnie scałkować je

a) $(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2})dx + (1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2})dy = 0$,

b) $(\cos x + y)dx - (\sin y - x)dy = 0$.

2.5. Rozwiązać równania różniczkowe z warunkami początkowymi

a) $(2x + y)dx + (x - 2y + 1)dy = 0$, $y(0) = 1$,

b) $(2e^{2x}y + y^2)dx + (e^{2x} + 2yx)dy = 0$, $y(0) = \pi$.

2.6 Wyznaczyć czynnik całkujący zależny od jednej zmiennej oraz rozwiązać równania różniczkowe

a) $x^2 + y - x\frac{dy}{dx} = 0$,

b) $x^2 + y^2 + 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$,

c) $e^{2x} - y^2 + y\frac{dy}{dx} = 0$,

d) $y^2 + (yx - 1)\frac{dy}{dx} = 0$,

e) $\sin x + e^y + \cos x\frac{dy}{dx} = 0$.

ODPOWIEDZI

2.1. a) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{-1}$, b) $y = \frac{1}{\cos x}$, c) $y = e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{-1}$.

2.2. a) $y = -\frac{2}{3} + Ce^{3x}$, b) $y = Ce^{x^2} + \frac{1}{2}x^2$, c) $ye^{x^2} - \frac{1}{2}x^2 = 0$, d) $y = 4e^{x-3} - 1$,
e) $y = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{3}{2x}$.

2.3. a) $y = \frac{2}{Ce^x - \sin x - \cos x}$, b) $y = (-x + 2 + Ce^{-\frac{x}{2}})^2$, c) $y = \frac{1}{1 + \ln x}, x > 0, x \neq \frac{1}{e}$.

2.4. a) $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + y = C$, b) $\sin x + \cos y + xy = C$.

2.5. a) $x^2 + xy - y^2 + y = 0$, b) $e^{2x}y + xy^2 = \pi$.

2.6. a) $x^2 - y = Cx$, b) $x^2 + y^2 = \frac{C}{e^x}$, c) $y^2 = (C - 2x)e^{2x}$, d) $xy - \ln |y| = C$,

e) $e^{-y} \cos x = x + C$.