Matematyka Dyskretna – Lista 10 – 18-31.05.2023r.

1. Wykazać, że każde drzewo jest grafem dwudzielnym. Które drzewa są grafami dwudzielnymi pełnymi?

2. Wykazać, że jeśli maksymalny stopień wierzchołka w drzewie wynosi k, to drzewo ma co najmniej k liści. Uzasadnić, że każde drzewo z co najmniej jedną krawędzią ma przynajmniej dwa liście.

3. Wyznaczyć wszystkie nieizomorficzne drzewa spinające grafu $K_{3,3}$.

4. Dla grafu prostego G i jego krawędzi e oznaczmy przez G/e, graf powstały przez ściągnięcie krawędzi e, tj. usunięcie z G krawędzi e i identyfikację jej końców. Pokazać, że:

   (a) $|V(G/e)| = |V(G)| - 1$ i $|E(G/e)| = |E(G)| - 1$;

   (b) jeśli G jest drzewem, to także G/e jest drzewem;

   (c) $t(G) = t(G/e) + t(G - e)$, gdzie $t(H)$ będzie liczbą drzew spinających grafu H;

   (d) stosując metodę z punktu c) wyznaczyć liczbę drzew spinających grafu G

      i. gdzie $V(G) = \mathbb{Z}_8$ i $E(G) = \{\{m, n\} : (|m - n| = 1) \vee (|m - n| = 3 \wedge 2 \mid \min\{m, n\})\}$.

      ii. z zad. 9.

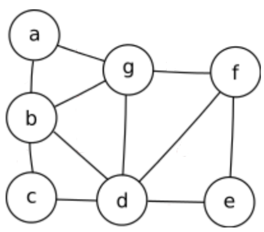
5. Wykazać, że $t(K_n) = n^{n-2}$ (zob. zad. 4c). Ile wynosi $t(K_{2,n})$?

6. Wykazać, że dowolna krawędź grafu spójnego jest krawędzią pewnego jego drzewa spinającego.

7. Czy można zbudować graf, mając wszystkie jego drzewa spinające? Odpowiedź uzasadnić.

8. Niech e będzie krawędzią o najmniejszej wadze w sieci G_e z obciążonymi krawędziami. Pokazać, że każde minimalne drzewo spinające w G_e zawiera krawędź e.

9. Wyznaczyć drzewa spinające poniższego grafu metodą DFS oraz BFS. Za punkt startowy przyjąć wierzchołek a (wierzchołki są pamiętane w porządku alfabetycznym).



10. Startując z wierzchołka 5, wyznaczyć drzewa spinające DFS i BFS (wierzchołki są pamiętane w rosnącej kolejności). Graf jest pamiętany w postaci: a) list sąsiadów, b) macierzy sąsiedztwa.