Zmienne losowe i ich rozkłady

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych. Dowolną funkcję

$$X: \Omega \rightarrow R,$$

gdzie R - zbiorem liczb rzeczywistych, nazywamy *zmienną losową*.

Cd Przykład 1(Wykładu 2).

$X(e_i) = i, \quad i=1,2,\ldots,6,$ **zmienna losowa** +

Przykład 4

Ω - zbiór mieszkańców Wrocławia.
X: $\Omega \alpha$ R, $\forall e \in \Omega, X(e)$ = **wzrost człowieka.** +

Przykład 5.

Badamy liczbę usterek w 20 wyprodukowanych samochodach. Sprawdzanych jest 15 mechanizmów.

$$\Omega=\{e_1, e_2, e_3,\ldots,e_{20}\}$$

$X(e_i)$ oznacza, że w i–ty samochód ma e_i usterek. Zmienna losowa X przyjmuje więc wartości od 0 do 15. . +

Jeżeli zbiór wartości zmiennej losowej jest skończony (przeliczalny) to mówimy, że zmienna jest *dyskretna* lub *skokowa*.

Niech $\Omega=\{e_1, e_2, e_3,\ldots,e_n\}$,

P(X=x)=p_i

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

P - prawdopodobieństwo określone na Ω,

$$X: \Omega \rightarrow R \text{ - zmienna losowa.}$$

Oznaczmy przez:

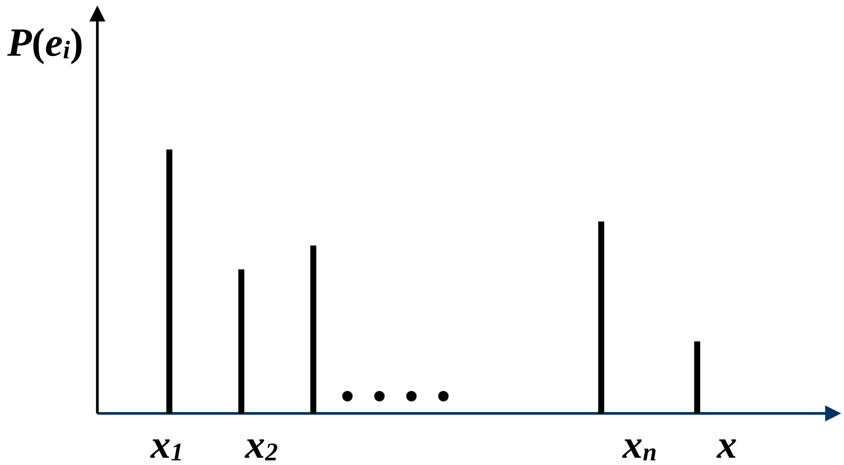
$X(e_i) = x_i$ **wartości zmiennej losowej,**
$P(e_i) = p_i$ **prawdopodobieństwo zdarzenia e_i.**

Jeżeli wartościom x_i **przyporządkujemy prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia elementarnego** e_i**, to otrzymamy** ***rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej*.**

Rozkład prawdopodobieństwa przedstawia się w postaci tabeli lub wykresu

Tabela rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

Wartości z.l.	x_1	x_2	. . . .	x_n
Prawdopodo-bieństwo	p_1	p_2	. . . .	p_n



Wykres rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej.

***Dystrybuanta* zmiennej losowej** X**, to funkcja**

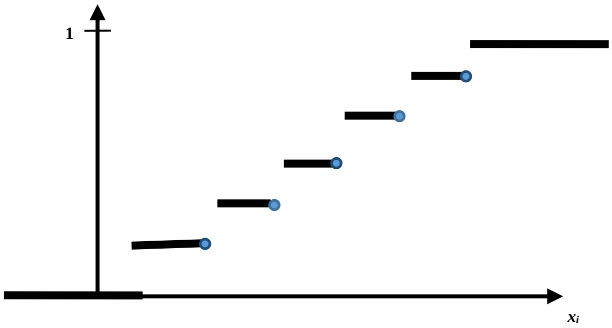
$$F(x) = P(X<x) = P(-\infty < X < x)$$

Własności:

1. $F: \mathrm{R} \to [0, 1]$,
2. $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$**, dla z.l. dyskretnej,**

   gdzie $X(e_i)=x_i$, $P(e_i)=p_i$,
3. **Funkcja** F **jest niemalejąca,**
4. $F(-\infty) = 0$, $\quad F(+\infty) = 1$.

Dystrybuantę zmiennej losowej można przedstawić w postaci tabelki lub wykresu.



Dystrybuanta *F*(*x*) zmiennej losowej *X*.

Zmienne losowe mogą być charakteryzowane za pomocą pewnych parametrów:

1. ***Wartość oczekiwana* (*średnia*)**

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i, \quad (m, \mu),$$

2. ***Wariancja*** $D^2(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - E(X))^2 p_i, \quad (\sigma^2)$**.**

3. ***Odchylenie standardowe*** $D(X)$**. *(pierwiastek z wariancji)***

Cd <u>Przykład</u> 1.

Rzucamy kostką.

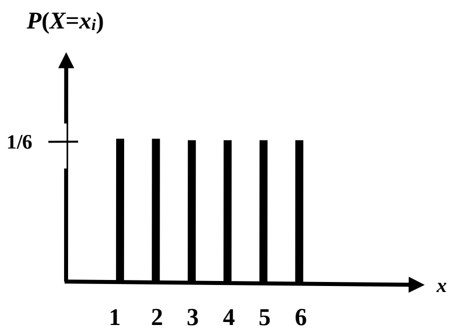
$$\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}, P(e_i)=1/6, \quad i=1,2, \ldots ,6.$$

Zmienna losowa $X(e_i) = i, \quad i=1,2, \ldots ,6.$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X**.**

Rozkład liczby wyrzuconych oczek

Wartość zmiennej x_i	1	2	3	4	5	6
Prawdopodobieństwo p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



Rozkład zmiennej skokowej X

Dystrybuanta zmiennej losowej *X*: X=i z pr. 1/6 F(x)=P(X<x)

P(X<x) dla x w przedziale (1,2] jest równe 1/6 bo P(X=1)
P(X<x) dla x w przedziale (2,3] jest równe 1/6+1/6 bo P(X=1)+P(X=2)
P(X<2.5)=P(X=1)+P(X=2)

$$F(x)=\begin{cases}0 & dla\ x\le 1\\ 1/6 & dla\ 1<x\le 2\\ 2/6 & dla\ 2<x\le 3\\ 3/6 & dla\ 3<x\le 4\\ 4/6 & dla\ 4<x\le 5\\ 5/6 & dla\ 5<x\le 6\\ 1 & dla\ x>6\end{cases}$$

Dystrybuanta może być także przedstawiona w postaci tabeli:

Dystrybuanta zmiennej losowej *X*

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	***x*>6**
***F*(*x*)**	**1/6**	**2/6**	**3/6**	**4/6**	**5/6**	**1**

(Wykres dystrybuanty jest na poprzedniej stronie)

Wartość oczekiwana

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = 1\frac{1}{6}+2\frac{1}{6}+3\frac{1}{6}+4\frac{1}{6}+5\frac{1}{6}+6\frac{1}{6}=3.5,$$

Wariancja

$$D^2(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2 p_i =$$

$$(1-3.5)^2\frac{1}{6}+(2-3.5)^2\frac{1}{6}+(3-3.5)^2\frac{1}{6}+(4-3.5)^2\frac{1}{6}+(5-3.5)^2\frac{1}{6}+(6-3.5)^2\frac{1}{6}=2,92.$$

Odchylenie standardowe $D(X)$**=1.71.** **(pierwiastek z wariancji)**

<u>Przykład</u> 6.

Statystyki policyjne odnotowały w ciągu 300 dni następujące dane dotyczące wypadków.

Liczba wypadków drogowych	**Liczba dni**
0	**45**
1	**75**
2	**120**
3	**45**
4	**15**

a) Zmienną losową jest liczba dni z ustaloną liczbą wypadków. Przyjmuje ona wartości: 0,1,2,3,4.

b) Przedstawić rozkład prawdopodobieństwa oraz dystrybuantę zmiennej losowej.

e_0– zdarzenie elementarne polegające na tym, że w danym dniu nie był wypadku.

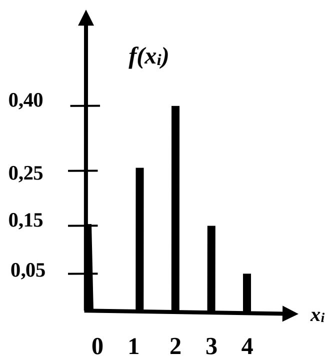
Podobnie określamy zdarzenia: e_1, e_2, e_3, e_4.

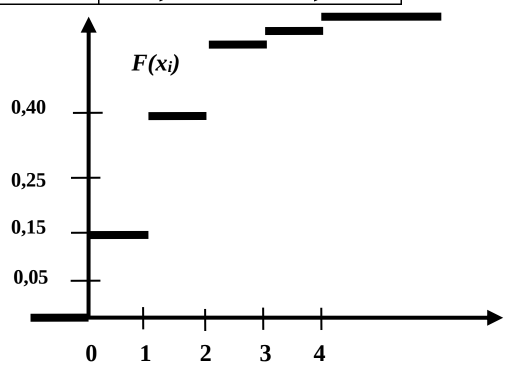
$$P(e_0) = \frac{45}{300} = 0.15,\ P(e_1) = \frac{75}{300} = 0.25,\ P(e_2) = \frac{120}{300} = 0.40,$$

$$P(e_3) = \frac{45}{300} = 0.15,\ P(e_4) = \frac{15}{300} = 0.05$$

Rozkład prawdopodobieństwa wypadków drogowych

x_i	$P(x_i)=p_i$	$F(x_i)$
0	**0,15**	**0**
1	**0,25**	**0,15**
2	**0,40**	**0,40=0,15+0,25**
3	**0,15**	**0,80=0,4+0,4**
4	**0,05**	**0,95=0.8+0,15**





Rozkład prawdopodobieństwa wypadków Dystrybuanta wypadków

c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wybranym dniu zdarzą się mniej niż 3 wypadki?

$$\mathbf{P(X < 3) = P(X \leq 2) = F(3) = 0.8}$$

d) Jakie jest prawdopodobieństwo, że w wybranym dniu zdarzy się co mniej 1 wypadek?

$$\mathbf{P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0.15 = 0.85}$$

e) Wartość oczekiwana zmiennej losowej

$$E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i p_i = 1.70.$$

$$= \mathbf{0.15 * 0 + 0.25 * 1 + 0.4*2+0.15*3+0.05*4}$$

f) Wariancja

$$D^2(X) = \sum_{i=0}^{4} (x_i - E(X))^2 p_i = 1.11.$$

$$= \mathbf{0.15 * (0 - 1.7)^2 + 0.25 * (1 - 1.7)^2 + 0.4*(2 - 1.7)^2 + 0.15*(3 - 1.7)^2 + 0.05*(4 - 1.7)^2}$$