

Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 2

Działania na liczbach zespolonych

2.1 Wykonać działania w zbiorze liczb zespolonych

a) $(1 + 3i)(4 - 5i) + (2 - 3i)(4 + 5i)$, b) $(1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^3$,
c) $\sum_{k=1}^6 i^k$, d) $\frac{1+5i}{2-i} + \frac{-i}{2+3i} - 4i$, e) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$ f) $\left(\frac{2+i}{3+i}\right)^2 + 7 - 11i$.

2.2. Obliczyć a) $z \cdot \bar{w}$, b) $\frac{z^2}{w}$, c) $\frac{z-w}{\bar{z}+\bar{w}}$, d) $\frac{Re z + i Im w}{z+w}$ dla $z = 5 - 2i, w = 3 + 4i$.

2.3. Znaleźć liczby rzeczywiste x, y spełniające równania

a) $x(2 + 3i) + y(5 - 2i) = -8 + 7i$, b) $(2 + yi)(x - 3i) = 7 - i$,
c) $\frac{1+yi}{x-2i} = -1 + 3i$, d) $\frac{x+yi}{x-yi} = \frac{9-2i}{9+2i}$.

2.4.* Pokazać, że jeżeli liczby zespolone z, w spełniają warunek $z \cdot w = 0$, to $z = 0$ lub $w = 0$.

2.5.* Pokazać, że dla wszelkich liczb zespolonych z_1, z_2, z_3 zachodzą równości

a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,
c) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, d) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$,
e) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$.

2.6.* Znaleźć element przeciwny i element odwrotny do liczby zespolonej $z = (a, b)$.

2.7.* Pokazać, że

a) $z + \bar{z} = 2Re z$, b) $z - \bar{z} = 2i Im z$, c) $\overline{(\bar{z})} = z$.

2.8.* Wyznaczyć wszystkie liczby sprzężone do swojego

a) kwadratu, b) sześciangu.

ODPOWIEDZI

- 2.1.** a) $42 + 5i$, b) $8 + 2i$, c) $-1 + i$, d) $-\frac{54}{65} - \frac{127}{65}i$, e) $-\frac{1}{25} - \frac{32}{25}i$, f) $\frac{187}{25} - \frac{543}{50}i$.
2.2. a) $7 - 26i$, b) $-\frac{17+144i}{25}$, c) $\frac{7-11i}{17}$, d) $\frac{24+11i}{34}$.
2.3. a) $x = 1, y = -2$, b) nie istnieją takie liczby, c) $x = 5, y = 17$,
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, y = -\frac{2}{9}x$.