

Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 3

Postać trygonometryczna i wykładnicza liczb zespolonych
Interpretacja geometryczna liczby zespolonej

3.1. Obliczyć moduły liczb zespolonych

- a) $(1 + 2i)(3 - 4i)$, b) $\frac{4+i}{3+2i}$,
c) $(1 + \sqrt{2}i)^4$, d) $\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}+2i)^3}$.

3.2. Znaleźć argumenty główne liczb zespolonych

- a) $z = 2$, b) $z = i$, c) $z = 3 - 3i$, d) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3.3. Przedstawić poniższe liczby w postaci trygonometrycznej i wykładniczej

- a) $1 + \sqrt{3}i$, b) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$, c) $2i(1 - i)$,
d) -4 , e) $2i$, f) i^2 ,
g) $\frac{1-i}{1+i}$, h) $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$, i) $(1 + i\sqrt{3})2i$.

3.4. Korzystając z postaci trygonometrycznej liczb zespolonych obliczyć

- a) $(4 + 4i)(-3 + 3i)$, b) $\frac{2+2i}{1-i}$,
c) $\frac{1-\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$, d) $\frac{3i}{1+i}$.

3.5. Obliczyć wartości podanych wyrażeń i zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej

- a) $\exp(i\pi/2)$, b) $\exp(\pi i)$, c) $\exp(-4\pi i/3)$, d) $\exp(-i)$.

3.6. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniających warunki

- a) $\arg z = \frac{5\pi}{4}$, b) $\frac{\pi}{6} < \arg(z + 3i) < \frac{\pi}{3}$,
c) $\pi \leq \arg(iz) < 2\pi$, d) $\frac{\pi}{3} \leq \arg(-z) \leq \frac{\pi}{2}$.

3.7. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniających warunki

- a) $|z| < 2$ oraz $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$, b) $1 < |z + 2i| < 2$ oraz $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$,
c) $|z - (4 + 3i)| < 2$ oraz $2 < \operatorname{Im} z < 4$, d) $|z + 3i| \leq 3$ oraz $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$.

3.8. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory punktów spełniających warunki

- a) $|z - 3 + 4i| = 1$, b) $|\frac{z-2i}{z+1}| = 1$,
c) $|z + 5| = |3i - z|$, d) $2 \leq |iz - 5| < 3$,
e) $|z + 1 - 2i| \geq 3$ oraz $|z - 3| < 4$, f) $|\frac{z+i}{z^2+1}| \geq 1$,
g) $|\bar{z} + 2 - i| \leq |z|$, h) $3|z - 1| \leq |z^2 - 1| < 6|z + 1|$.

ODPOWIEDZI

3.1. a) $5\sqrt{5}$, b) $\sqrt{17/13}$, c) 9, d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3.2. a) 0, b) $\frac{\pi}{2}$, c) $\frac{7\pi}{4}$, d) $\frac{4\pi}{3}$.

3.3. a) $2\exp(i\pi/3)$, b) $\exp(i\frac{7}{4}\pi)$, c) $2\sqrt{2}\exp(i\pi/4)$, d) $4\exp(i\pi)$, e) $2\exp(i\pi/2)$,
f) $\exp(i\pi)$, g) $\exp(i\frac{3}{2}\pi)$, h) $\exp(i\frac{4}{3}\pi)$, i) $4\exp(i\frac{5}{6}\pi)$.

3.4. a) -24 , b) $2i = 2(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2))$, c) $-i = 1(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$,
d) $(3/2)(1+i) = (3\sqrt{2}/2)(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$.

3.5. a) i , b) -1 , c) $-1/2 + i\sqrt{3}/2$, d) $\cos 1 - i\sin 1$.