AM) Warunek konieczny

$\sum a_n$ zb. $\Rightarrow a_n \to 0$

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum a_n$ rozb.

6, 7 na kolosie
2. Ałem, Cauchy'ego

1) 4.5e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{2n^3-n}$

Kryterium porównawcze

$\forall_{n \geq n_0} \; 0 \leq a_n \leq b_n$

(1) $\sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty$

(2) $\sum a_n = \infty \Rightarrow \sum b_n = \infty$

sz. geom.

$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ zb. $\Leftrightarrow |q| < 1$

sz. p-harmoniczny

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$

$p > 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{2n^3-n} < \infty$ na mocy kryterium porównawczego

bo $0 \leq \frac{3n+4}{2n^3-n} \leq \frac{3n+n}{2n^3-n^3} = \frac{4}{n^2}$

$\underset{n \to \infty}{\approx} \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

K. ilorazowe $a_n, b_n > 0$

$k = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0, +\infty)$

$\sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum b_n < \infty$

k. ilor. : $\dfrac{3n+4}{2n^3-n} : \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{3n^3+4n^2}{2n^3-n} \to \dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}_+$

: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ bo $p=2>1$

AM

~~za~~ 4.1 a) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ / $S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1-q^n}{1-q} & q \neq 1 \\ a_1 n & q = 1 \end{cases}$

$S_n = \frac{2n-1}{n+1}$

$S_1 = a_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{4-1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{6-1}{3+1} = \frac{5}{4}$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{8-1}{4+1} = \frac{7}{5}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$, $a_4 = \frac{3}{20}$

4.1 a) $S_{\infty} = \lim_{n \to \infty} S_n =$

$\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2+n}$

$S = \lim_{n \to \infty} \frac{2n-1}{n+1} = \frac{n(2 - \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{1}{n})} = \frac{2}{1} = 2$

$\frac{2n-1}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1}$

$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 = \frac{2n-1}{n+1}$

$a_n = \frac{3}{n^2+n}$ dla $n - 1 \geq 1$ $\begin{cases} n \geq 2 \\ n_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$

$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n-1}{n+1} - \frac{2n-2-1}{n-1-1} = \frac{(2n-1)}{n+1} - \frac{2n-3}{n-2}$

$a_n = \frac{(2n-1)(n-2) - (2n-3)(n+1)}{(n+1)(n-2)} = \frac{\cancel{2n^2} - 4n - n + 2 - (\cancel{2n^2} + 2n - 3n - 3)}{n^2 - 2n + n - 2} = \frac{-4n+5}{n^2-n-2}$ ??

d) $S_n = \sqrt{n+1}$

$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = ?$

$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt{n+1} = \infty$

c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ zbieżny

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ rozbieżny

$$\frac{1}{n^3+1} = \frac{1}{(n+1)(n^2-n+1)} \le \frac{1}{n^3}$$

$3>1$ szereg $\frac{1}{n^3}$ jest zbieżny

więc $\frac{1}{n^3+1}$ jest zbieżny

d) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3+3}$

$$\frac{3n+1}{n^3+3} = \frac{3n}{n^3+3} + \frac{1}{n^3+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^3+3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3}$$

$\frac{3n}{n^3+3} \le \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}$ $\quad 2>1$ szereg zbieżny

$\frac{1}{n^3+3} \le \frac{1}{n^3}$ $\quad 3>1$ szereg zbieżny

szeregi $\frac{3n}{n^3+3}$ oraz $\frac{1}{n^3+3}$ są zbieżne więc szereg $\frac{3n+1}{n^3+3}$ również będzie zbieżny

4.5) a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-1}$

ilorazowe $\frac{a}{b}$ jeśli $a/b$ dąży do liczby to oba są zbieżne lub rozbieżne

$\sum_{n=2}^{\infty} 1$ jest rozbieżny

$\sum_{n=2}^{\infty} n^3-1$ jest rozbieżny więc $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-1}$ jest zbieżny

4.5 d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$

$\frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ $\quad 2>1$ szereg zbieżny

więc $\frac{\sin^2 n}{n^2}$ jest szeregiem zbieżnym

4.6) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$ $\quad a_n = \frac{5^n}{n!}$ $\quad a_{n+1} = \frac{5 \cdot 5^n}{(n+1)n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5\cdot 5^n}{(n+1)n!}}{\frac{5^n}{n!}} = \frac{5}{n+1} \Rightarrow 0 < 1 \quad \text{ciąg zbieżny}$$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ $\quad \frac{((n+1)n!)^2}{(2\cdot(n+1))!} = \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2\cancel{(n!)^2}}{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}}{\frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{2}{n})(2+\frac{1}{n})} \Rightarrow \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4} < 1$ więc $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ jest zbieżny

4.7) c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n+3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{5}{2^n+3^n}} = \frac{\sqrt[n]{5}}{\sqrt[n]{2^n+3^n}} \to \frac{1}{3} < 1$$

szereg jest zbieżny

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n} \to 3$$

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n} < \sqrt[n]{3^n+3^n}$$

$$3 < \sqrt[n]{\dots} < \sqrt[n]{2\cdot 3^n} = 3\cdot 1$$

48.b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

szereg ~~bezwzględnie~~ [warunkowo] ~~rozbieżny~~ zbieżny bezwzględnie

49a)

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow \lim \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \Rightarrow 0$$

bezwzględnie zbieżny

b) bez ~~względnie~~ zbieżny

warunkowo