ANALIZA MATEMATYCZNA 2.3A

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 8

Transformata Fouriera.
Transformata odwrotna Fouriera.
Szereg Fouriera. Kryterium Diniego.
Funkcje o wahaniu skończonym.
Kryterium Jordana.

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania transformacji Fouriera

- w analizie harmonicznej,
- w teorii analizy i przetwarzania sygnału;
- kompresja MP3
- kompresja JPEG
- filtracja obrazów
- w fizyce

TRANSFORMATA FOURIERA

Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia ***warunki Dirichleta***, gdy
1. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$,
2. dziedzinę funkcji f można rozłożyć na skończoną sumę przedziałów, w których f jest monotoniczna i ciągła,
3. w każdym punkcie nieciągłości x_0 funkcji f granice jednostronne są skończone, tzn. granice $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ oraz $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ są skończone.

Jeżeli każdy skończony przedział $[a, b]$ można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów, w których funkcja f jest monotoniczna oraz w każdym punkcie przedziału (a, b) są spełnione warunki Dirichleta i funkcja f jest całkowalna w przedziale $(-\infty, \infty)$, to funkcję

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}dx$$

nazywamy zespoloną ***transformatą Fouriera*** funkcji f.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) francuski matematyk i fizyk. Twórca **teorii szeregów Fouriera i transformacji Fouriera**. Fourier używał tych szeregów w swej fundamentalnej pracy z teorii przewodzenia ciepła, opublikowanej w swej pracy Théorie analytique de la chaleur, Paris, 1822. Na jego cześć uniwersytet w Grenoble, w którym w 1811 r. założył on Faculté des Sciences, nazwano L'université Joseph-Fourier (UJF). Jego nazwisko pojawiło się na liście 72 nazwisk na wieży Eiffla

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) niemiecki matematyk francuskiego pochodzenia. Był wykładowcą uniwersytetów we Wrocławiu, Berlinie i Getyndze. Jego prace dotyczą **teorii liczb**, **szeregów liczbowych**, **analizy matematycznej**, **rachunku wariacyjnego i fizyki teoretycznej**. Udowodnił **zbieżność szeregu Fouriera (warunki Dirichleta)**, jest autorem **zasady szufladkowej Dirichleta**. Jego nazwiskiem została nazwana funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych (funkcja Dirichleta), podawana jako standardowy przykład funkcji niecałkowalnej w sensie Riemanna.

Transformacja Fouriera jest operacją odwracalną, zatem mając transformatę $F(u)$ możemy wyznaczyć jej ***oryginał***

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}du.$$

Na funkcję $f(x)$ jak i jej transformatę $F(u)$ należy patrzeć jak na różne reprezentacje tej samej funkcji w różnych dziedzinach, (np. czas/częstotliwość, czy położenie/wektor falowy).

Podstawowe własności transformaty Fouriera

Załóżmy, że $f(x), g(x)$ są określone na $\mathbb{R}$ i spełniają warunki Dirichleta i niech $F(u), G(u)$ będą odpowiadającymi im transformatami Fouriera. Wtedy

- $F(u)$ jest ograniczona
- $F(u)$ jest ciągła
- Jeśli $h(x) = af(x) + bg(x)$ dla $a, b \in \mathbb{R}$, to $H(u) = aF(u) + bG(u)$.
- Jeśli $h(x) = f(x+a)$ dla $a \in \mathbb{R}$, to $H(u) = e^{iau}F(u)$.
- Jeśli $h(x) = e^{-iax}f(x)$ dla $a \in \mathbb{R}$, to $H(u) = F(u+a)$.
- Jeśli $h(x) = f(ax)$ dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, to $H(u) = \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a})$.
- Jeśli $h(x) = (f * g)(x)$, to $H(u) = F(u) \cdot G(u)$.

DELTA DIRACA
TRANSFORMATA DELTY DIRACA

Delta Diraca zdefiniowana jest następująco

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq 0 \\ \infty & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Intuicyjnie delta Diraca reprezentuje nieskończenie wielki impuls pojawiający się w chwili $x = 0$ i trwający nieskończenie krótko, przy czym efekt działania tego impulsu (mierzony całką po całej prostej) jest jednostkowy, tzn $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$.

Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984)
brytyjski fizyk teoretyk, zajmujący się m.in. fizyką cząstek elementarnych, noblista. Dirac to jeden z twórców **mechaniki kwantowej**, jeden z pionierów **kwantowej teorii pola**, a konkretniej **elektrodynamiki kwantowej**. Do fizyki kwantowej Dirac wprowadził też m.in. uogólnioną funkcję zwaną dziś **deltą Diraca**, która jest przydatnym narzędziem w fizyce kwantowej, elektronice, mechanice i analizie matematycznej, gdzie w szczególności jest ona oryginałem dla transformaty Laplace'a $F(s) = 1$ i pochodną (w sensie dystrybucji) funkcji skokowej Heaviside'a.

Własności delty Diraca

- Jeśli $f(x)$ jest ciągła w punkcie $x = a$, to $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$.
- $f(x) * \delta(x-a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(x-a-t)dt = f(x-a)$.
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = \mathbb{I}(x-a)$, ($\mathbb{I}$ to funkcja Heaviside'a).
- $\delta(ax+b) = \frac{1}{|a|}\delta(x+\frac{b}{a})$ dla $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$.

Z pierwszej własności delty Diraca, transformata delty Diraca wynosi

$$D(u) = e^{-iu\cdot 0} = 1.$$

Ponadto z transformaty odwrotnej jeśli $f(x) \equiv 1$, to $F(u) = 2\pi\delta(u)$.

Transformaty Fouriera podstawowych funkcji

$f(x)$	$F(u)$
$\begin{cases} e^{-x} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{1+iu}$
$e^{-\|x\|}$	$\frac{2}{1+u^2}$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}e^{-\frac{u^2}{4}}$
$\begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{-i(1-e^{-iu})}{u} & \text{dla } u \neq 0 \\ 1 & \text{dla } u = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} 1 & \text{dla } \|x\| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla } \|x\| > 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{2\sin u}{u} & \text{dla } u \neq 0 \\ 2 & \text{dla } u = 0 \end{cases}$
1	$2\pi\delta(u)$
$\delta(x)$	1

SZEREG FOURIERA
KRYTERIUM DINIEGO

W zastosowaniach mierzenie różnych wielkości ma charakter okresowy. Zazwyczaj wtedy taką funkcję można przedstawić w postaci nieskończonego szeregu trygonometrycznego, czyli szeregu postaci

$$\Sigma_{n=0}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

w którym współczynniki a_n, b_n są stałe.

Zauważmy, że funkcję $f(x)$ możemy przedstawić w postaci

$$f(x) = E(x) + O(x),$$

gdzie $E(x)$ jest pewną funkcją parzystą zmiennej x, a $O(x)$ jest pewną funkcją nieparzystą.
Wtedy transformata Fouriera f redukuje się do postaci

$$F(u) = 2\int_0^\infty E(x)\cos(2\pi xu)dx - 2i\int_0^\infty O(x)\sin(2\pi xu)dx.$$

Przyjmując
$a_0 = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)dx$
$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}dx,$
$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}dx,$
otrzymujemy ***szereg Fouriera***

$$f(x) = a_0 + \Sigma_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{n\pi x}{T}).$$

Na mocy wzorów Eulera

$$\cos\frac{2\pi nx}{T} = \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}} + e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2} \quad \sin\frac{2\pi nx}{T} = \frac{e^{i\frac{2\pi nx}{T}} - e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}}{2i}$$

mamy następującą postać szeregu Fouriera

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{T}},$$

gdzie $c_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)e^{-i\frac{2\pi nx}{T}}dx$ dla $n = 1, 2, ...$

Zbieżne szeregi Fouriera wybranych funkcji

$$x = 2\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \text{ dla } x \in (-\pi, \pi)$$

$$\frac{\pi - x}{2} = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nx) \text{ dla } x \in (0, 2\pi)$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x \text{ dla } x \in (-\pi, \pi)$$

$$\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx) \text{ dla } x \in (-\pi, \pi)$$

$$sgn(x) = \frac{4}{\pi} \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x \text{ dla } x \in (-\pi, \pi).$$

Szereg Fouriera nie zawsze jest zbieżny, a jeśli jest zbieżny, to nie koniecznie do funkcji $f(x)$. Szereg Fouriera jest zbieżny, gdy spełnia tzw. kryterium Diniego.

Twierdzenie 8.1 (Kryterium Diniego). Jeżeli funkcja f jest funkcją okresową o okresie T całkowalną na przedziale $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, a x_0 jest punktem takim, że

$$\frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - 2f(x_0)}{t}$$

jest funkcją całkowalną w przedziale $[0, \frac{T}{2}]$, to szereg Fouriera funkcji f jest dla $x = x_0$ zbieżny do sumy $f(x_0) = \Sigma_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x_0}$.

Ulisse Dini (1845–1918) włoski matematyk znany za wkład w rozwój analizy, głównie teorii funkcji rzeczywistych. Autor **kryterium badania zbieżności jednostajnej ciągów funkcyjnych funkcji rzeczywistych**, dziś znane jako **Kryterium Diniego.**

FUNKCJE O WAHANIU SKOŃCZONYM
KRYTERIUM JORDANA

Mówimy, że $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ***o wahaniu skończonym***, jeżli ograniczony jest zbiór wszystkich sum

$$\Sigma_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{x-j})|,$$

gdzie $x_0, x_1, ..., x_n$ są dowolnymi punktami przedziału $[a,b]$ takimi, że $a = x_0 < x_1 < ... < x_{j-1} < x_j < ...x_n = b$.

Twierdzenie 8.2. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją o wahaniu skończonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją funkcje niemalejące $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f = f_1 - f_2.$$

Twierdzenie 8.3 (Kryterium Jordana). Jeżeli funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją okresową o okresie T całkowalną na przedziale $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ mającą wahanie skończone na pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktu x_0 i spełniającą warunek

$$f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2},$$

to szereg Fouriera funkcji f jest dla $x = x_0$ zbieżny do sumy $f(x_0)$.

Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) francuski matematyk. Jordan był jednym ze współtwórców francuskiej szkoły teorii funkcji, od jego nazwiska pochodzą: **miara Jordana, twierdzenie Jordana, postać Jordana i krzywa Jordana.** Zajmował się też **algebrą (m.in. wyjaśnił ideę Évariste'a Galois)**, teorią grup, której był również aktywnym propagatorem. Jego prace dotyczyły ponadto topologii, analizy matematycznej, równań różniczkowych i krystalografii.