ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Informatyki i Telekomunikacji
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń, przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 15

Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych
Odległość punktu od prostej i od płaszczyzny
Rzut punktu na prostą i na płaszczyznę

WZAJEMNE POŁOŻENIE PŁASZCZYZN

Niech dane będa dwie płaszczyzny

$$Q_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$Q_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

i niech $\overline{n_1} = [A_1, B_1, C_1], \overline{n_2} = [A_2, B_2, C_2]$ będą odpowiadającymi im wektorami normalnymi. Wtedy:
a) **płaszczyzny są równoległe**

$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$$

b) **płaszczyzny pokrywają się**

$$Q_1 \equiv Q_2 \Leftrightarrow \exists_{k\in\mathbb{R}}\ k \cdot Q_1 = Q_2.$$

c) **płaszczyzny przecinają się** pod kątem, którego cosinus wyrażony jest wzorem

$$\cos \angle(Q_1, Q_2) = \cos \angle(\overline{n_1}, \overline{n_2})$$

d) **płaszczyzny są prostopadłe**

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2}.$$

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH

Niech dane będą dwie proste

$$l_1 : \frac{x - a_1}{x_1} = \frac{y - b_1}{y_1} = \frac{z - c_1}{z_1}$$

$$l_1 : \frac{x - a_2}{x_2} = \frac{y - b_2}{y_2} = \frac{z - c_2}{z_2}$$

oraz odpowiadające im punkty $M_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $M_2 = (a_2, b_2, c_2)$ oraz wektory kierunkowe $v_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $v_2 = [x_2, y_2, z_2]$. Wtedy

a) **proste są równoległe**

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$

b) **proste pokrywają się**

$$l_1 \equiv l_2 \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{R}} \; k \cdot l_1 = l_2$$

c) **proste przecinają się**, tzn. nie są równoległe i leżą w tej samej płaszczyźnie, oznacza to, że wektory $v_1, v_2, \overline{M_1M_2}$, gdzie $M_1 \in l_1, M_2 \in l_2$ są współpłaszczyznowe. Wtedy iloczyn mieszany $(v_1, v_2, \overline{M_1M_2}) = 0$, a kąt między tymi prostymi jest równy $\cos\angle(l_1, l_2) = \cos\angle(v_1, v_2)$.
d) **proste są prostopadłe**

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$$

e) **proste są skośne**, tzn. nie wyznaczają płaszczyzny. Wtedy

$$(v_1, v_2, \overline{M_1M_2}) \neq 0.$$

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I PŁASZCZYZNY

Niech dana będzie prosta l i płaszczyzna Q

$$l: \frac{x-x_0}{x_1} = \frac{y-y_0}{y_1} = \frac{z-z_0}{z_1}$$

$$Q: Ax+By+Cz+D=0$$

i odpowiadające im wektory $v=[x_1,y_1,z_1], \overline{n}=[A,B,C]$ oraz $M_0=(x_0,y_0,z_0)\in l$. Wtedy
a) **prosta l jest równoległa do płaszczyzny** Q

$$l \parallel Q \Leftrightarrow v \perp \overline{n}.$$

b) **prosta l leży w płaszczyźnie** Q

$$l \subset Q \Leftarrow \begin{cases} x_1A+y_1B+z_1C=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

c) **prosta l przecina płaszczyznę** Q pod kątem, którego sinus jest równy

$$\sin\angle(l,Q) = |\cos\angle(v,\overline{n})|$$

d) **prosta l jest prostopadła do płaszczyzny** Q

$$l \perp Q \Leftrightarrow v \parallel \overline{n}$$

Jeżeli równanie prostej l dane jest w postaci krawędziowej

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{gdzie } \overline{n_1} \times \overline{n_2} \neq 0,$$

$$Q : Ax + By + Cz + D = 0,$$

to w celu określenia **wzajemnego położenia prostej i płaszczyzny** można zbadać zbiór rozwiązań układu

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Jeżeli układ jest oznaczony, to prosta z płaszczyzną ma jeden punkt wspólny i rozwiązaniem są współrzędne tego punktu.
Jeżeli układ jest nieoznaczony, to prosta leży w płaszczyźnie
Jeżeli układ jest sprzeczny, to prosta jest równoległa do płaszczyzny, ale się w niej nie zawiera.

ODLEGŁOŚĆ DWÓCH PUNKTÓW

Niech dane będą punkty $A_1 = (a_1, b_1, c_1), A_2 = (a_2, b_2, c_2)$.
Odległość punktów A_1, A_2 jest równa długości wektora $\overline{A_1 A_2}$:

$$d(A,B) := |\overline{A_1 A_2}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PŁASZCZYZNY

Niech dana będzie płaszczyzna $Q: Ax + By + Cz + D = 0$ oraz punkt $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin Q$. **Odległość punktu M_0 od płaszczyzny Q** jest równa

$$d(M_0, Q) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

Niech dana będzie prosta

$$l: \frac{x-x_0}{x_1} = \frac{y-y_0}{y_1} = \frac{z-z_0}{z_1}$$

oraz punkt $M = (a, b, c) \notin l$. Jeżeli $N = (a_0, b_0, c_0)$ jest dowolnym punktem należącym do l, natomiast $v = (x_1, y_1, z_1)$ wektorem kierunkowym, to **odległość punktu** M **od prostej** l wynosi

$$d(M, l) = \frac{|\overline{MN} \times v|}{|v|}.$$

ODLEGŁOŚĆ PŁASZCZYZN RÓWNOLEGŁYCH

Niech dane będą płaszczyzny

$$Q_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$Q_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0.$$

Odległość płaszczyzn Q_1, Q_2 jest równa

$$d(Q_1, Q_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ODLEGŁOŚĆ PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH

ODLEGŁOŚĆ PROSTYCH SKOŚNYCH

Budujemy płaszczyznę Q prostopadłą do kierunku prostych l_1, l_2. Rozwiązując układ równań prostej l_1 i płaszczyzny Q otrzymujemy współrzędne punktu M_1. Analogicznie wyznaczamy współrzędne punktu M_2 będącego punktem wspólnym prostej l_2 oraz płaszczyzny Q. **Odległość prostych równoległych** jest równa

$$d(l_1, l_2) = \overline{M_1 M_2}.$$

Niech dane będą proste skośne

$$l_1 : \frac{x - a_1}{x_1} = \frac{y - b_1}{y_1} = \frac{z - c_1}{z_1}$$

$$l_2 : \frac{x - a_2}{x_2} = \frac{y - b_2}{y_2} = \frac{z - c_2}{z_2}$$

gdzie $M_1 = (a_1, b_1, c_1) \in l_1, M_2 = (a_2, b_2, c_2) \in l_2$ są dowolnymi punktami oraz $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ są odpowiadającymi prostym wektorami kierunkowymi. Wtedy

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(v_1, v_2, \overline{M_1 M_2})|}{|v_1 \times v_2|}.$$

RZUT PUNKTU NA PŁASZCZYZNĘ

RZUT PUNKTU NA PROSTĄ

Rzutem prostokątnym punktu M ***na płaszczyznę*** Q nazywamy punkt M' tej płaszczyzny taki, że $\overline{MM'} \perp Q$.

Rzutem prostokątnym punktu M ***na prostą*** l nazywamy punkt M' tej płaszczyzny taki, że $\overline{MM'} \perp l$.