

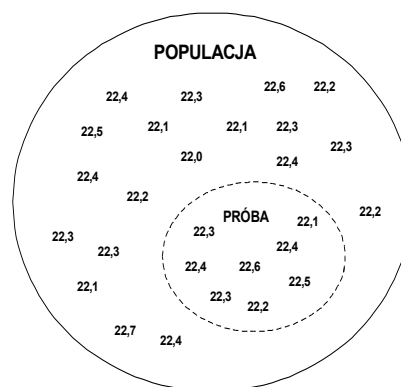
## OCENA BŁĘDÓW PRZYPADKOWYCH

### I. POJĘCIA PODSTAWOWE:

**Zdarzenie losowe** – pojęcie nie definiowane ściśle; służy do opisu zjawisk przypadkowych, czyli takich, w których zajście konkretnego zdarzenia leży całkowicie lub częściowo poza zasięgiem kontroli ludzkiej. Zdarzenie losowe ma właściwość występowania lub nie występowania. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna, badając modele matematyczne zjawisk przypadkowych, przypisuje zdarzeniu losowemu prawdopodobieństwo, tj. liczbę wyrażającą możliwość jego zajścia.

**Populacja** – są to wszystkie elementy (zdarzenia losowe) zbioru; np. zbiór wartości rezystancji serii oporników o jednakowych wartościach nominalnych (jest populacją skończoną), lub zbiór wartości napięcia sieci (teoretycznie jest populacją nieskończoną).

**Próba** – wybrane do badań elementy populacji; od liczności próby zależy jej reprezentatywność dla całej populacji.



*Rys.1. Populacja i próba*

**Zmienna losowa** – jeżeli każdemu ze zdarzeń losowych populacji bądź próby przyporządkuje się pewną liczbę rzeczywistą, to zbiór tych liczb stanowi funkcję rzeczywistą zwaną zmienną losową. Zmienna losowa może być funkcją ciągłą lub dyskretną.

**Rozkład zmiennej losowej** - obrazuje współzależność między wartościami zmiennej losowej a prawdopodobieństwami ich wystąpienia.

W przyrodzie i technice szczególne znaczenie odgrywa rozkład normalny. Służy do opisu takich zjawisk przypadkowych, w których występuje znaczna liczba zdarzeń losowych, na które wpływa w znikomym stopniu wiele niezależnie działających czynników. Takie warunki występują też w pomiarach. Mianowicie, mierząc tą samą wielkość w niezmiennych warunkach wystąpi przypadkowy rozrzut wyników przy wielokrotnym powtarzaniu odczytów, to ocena niepewności tych pomiarów może być oparta o rozkład normalny.

**Histogram** – wykres słupkowy obrazujący częstość występowania wartości zmiennej losowej w badanej próbie. Na podstawie empirycznie uzyskanego histogramu wnioskuje się o rozkładzie zmiennej losowej badanej próby.

**Wartość średnia** z  $n$  pomiarów tej samej wielkości, wykonanych z jednakową starannością i tym samym przyrządem pomiarowym (lub układem pomiarowym), przy spełnieniu też warunku pomijalnie małych błędów systematycznych, wyznacza najbardziej prawdziwą (wiarygodną) wartość wielkości mierzonej:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \text{ gdzie } X_i \text{ jest wynikiem pojedynczego pomiaru.}$$

**Odchylenie pojedynczego wyniku pomiaru od średniej** (tzw. błąd pozorny)  $(X_i - \bar{X})$

**Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru**  $s(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

**Odchylenie standardowe średniej**  $s(\bar{X}) = \frac{s(X)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

## II. NIEPEWNOŚĆ TYPU A

W pomiarach odchylenie standardowe przyjęto nazywać niepewnością standardową pomiaru. **Niepewność standardową** oznacza się symbolem  $u(x)$  (ang. **uncertainty**), czyli dla wartości średniej:

$$u(\bar{X}) = s(\bar{X})$$

**Uwaga.** Poniżej przedstawiono cztery sposoby zapisu niepewności:

1.  $R = 455,4 \, \Omega$ ,  $u(R) = 0,5 \, \Omega$
2.  $R = 455,4(5) \, \Omega$
3.  $R = 455,4(0,5) \, \Omega$
4.  $R = (455,4 \pm 0,5) \, \Omega$

Niepewność standardowa  $u(\bar{X})$  jest przedziałem wartości skupionych wokół wartości średniej i wyznacza przedział, w którym prawdopodobnie znajduje się wartość rzeczywista (prawdziwa) mierzonej wielkości. Zaś niepewność standardowa pojedynczego pomiaru  $u(X)$  wyznacza przedział, w którym prawdopodobnie znajdzie się kolejny wynik pomiaru.

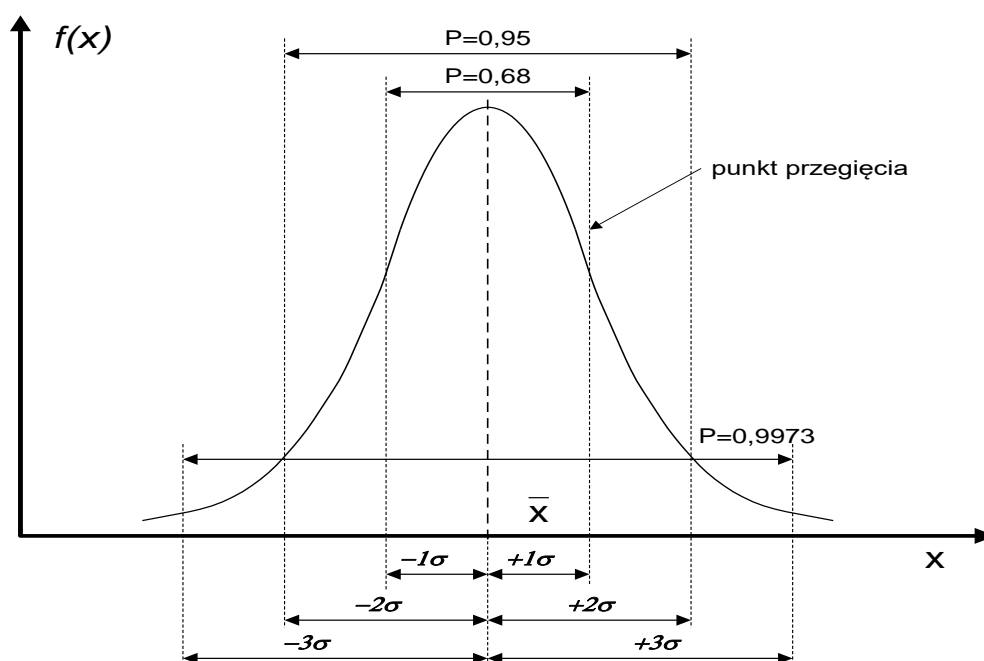
Określenie „prawdopodobnie” oznacza, że szerokość przedziału wokół wartości średniej zależy od pożądanego zaufania do końcowego wyniku pomiaru. Im prawdopodobieństwo ma być większe, tym przedział będzie szerszy. Dla przyjętego prawdopodobieństwa szerokość przedziału określa niepewność rozszerzona, obliczana ze wzoru:

$$U(\bar{X}) = k \cdot u(\bar{X}),$$

w którym  $k$  – jest współczynnikiem rozszerzenia, tzw. poziomem ufności, zależnym od typu rozkładu i przyjętego prawdopodobieństwa,.

Jeśli rozkład gęstości prawdopodobieństwa wyników pomiaru jest rozkładem normalnym, zw. też rozkładem Gaussa (rys.2), to  $k$  przyjmuje wartości z poniższej tabeli:

Poziom ufności - p	k	Oznaczenie na rys.	Niepewność
0,68	1	$1\sigma$	standardowa - $u(x)$
0,95	2	$2\sigma$	rozszerzona - $U(x)$
0,997	3	$3\sigma$	rozszerzona - $U(x)$



Rys. 2. Rozkład normalny

( $\sigma$  - podstawowy symbol dla odchylenia standardowego)

Względne niepewności oblicza się z zależności:

- względna niepewność standardowa 
$$u_r(\bar{X}) = \frac{u(\bar{X})}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

- względna niepewność rozszerzona 
$$U_r(\bar{X}) = \frac{U(\bar{X})}{\bar{X}} \cdot 100\%$$

### III. OBLICZANIE NIEPEWNOŚĆ ŁĄCZNEJ (TYPU AB) POMIARÓW BEZPOŚREDNICH

Zapis wyniku pomiaru ma trzy składniki. Są to: wartość wielkości mierzonej, niepewność pomiaru oraz poziom ufności wyniku.

Na łączną niepewność standardową składają się:

- niepewność standardowa typu A,
- niepewność standardowa typu B.

Na ogół producenci podają niedokładność przyrządów za pomocą błędu granicznego dopuszczalnego. Wtedy przyjmuje się, że funkcja rozkładu prawdopodobieństwa błędów przyrządu jest równomierna, a składowa niepewność standardowej typu B wynika z zależności

$$u_B(X) = \frac{\Delta_g X}{\sqrt{3}}, \text{ w której } \Delta_g X \text{ jest błędem granicznym przyrządu.}$$

#### Przykład

W pomiarach stosowano woltomierz, dla którego niedokładność graniczna dla  $\bar{U}$  wynosi:

$$(0,06\% U_x + 0,04\% U_z),$$

Odczytano wynik 220,89 V na zakresie pomiarowym 750 V- więc

$$\Delta_g U = \frac{0,06}{100} 220,89 + \frac{0,04}{100} 750 = 0,432 \text{ V}$$

$$\text{Niepewność standardowa przyrządu: } u_B(U) = \frac{0,432 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,250 \text{ V}$$

**Łączną niepewność standardową** oblicza się na podstawie prawa propagacji niepewności.

Zgodnie z nim, niepewność łączna jest pierwiastkiem sumy kwadratów niepewności typu A i typu B:

$$\Delta U = \sqrt{u_A^2(\bar{U}) + u_B^2(U)} = \sqrt{0,0621^2 + 0,250^2} = \sqrt{0,0662} = 0,257 \text{ V}$$

Wynik pomiaru z poziomem ufności  $p = 0,68$ :  $U = (220,89 \pm 0,26) \text{ V}$

Wynik pomiaru z poziomem ufności  $p = 0,95$  ( $k=2$ ):  $U = (220,89 \pm 0,51) \text{ V}$

#### Przykład

Zmierzono oscyloskopem napięcie międzyszczytowe. Dla nastawy współczynnika wzmocnienia  $c_u = 0,5 \text{ V/dz}$ , długość odcinka odpowiadającego wartości międzyszczytowej (czyli podwójnej amplitudzie sygnału) na ekranie oscyloskopu wynosiła:  $l_u = 2,5 \text{ dz}$ . Podać wynik pomiaru -  $U_{p-p} \pm U(U_{p-p})$ , jeżeli błąd graniczny kalibracji oscyloskopu wynosił 3%, a błąd odczytu długości  $\Delta l_u = \pm 0,2 \text{ dz}$ .

Obliczenia

- wartość mierzonego napięcia:  $U_{p-p} = c_u I_u = 0,5V/dz \cdot 2,5dz = 1,25V$
- niepewność standardowa (łączna) pomiaru wynika z prawa propagacji niepewności:

$$u_r(U_{p-p}) = \sqrt{[u_r(c_u)]^2 + [u_r(I_u)]^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\delta c_u)^2 + (\delta I_u)^2}.$$

Podstawiając wartości: kalibracja  $\delta c_u = 3\%$ , odczyt  $\delta I_u = \frac{\Delta I_u}{I_u} 100\% = \frac{0,2dz}{2,5dz} 100\% = 8,0\%$ ,

uzyskuje się

$$u_r(U_{p-p}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3^2 + 8^2} = 4,9\%$$

- niepewność rozszerzona dla poziomu ufności  $p=0,95$  (współczynnik rozszerzenia  $k=2$ )

$$U_r(U_{p-p}) = 2 \cdot 4,9\% = 9,8\%$$

- niepewność rozszerzona bezwzględna

$$U(U_{p-p}) = \frac{U_r(U_{p-p}) U_{p-p}}{100\%} = \frac{9,8\% \cdot 1,25V}{100\%} = 0,1225 = 0,13V$$

- wynik pomiaru:  $U_{p-p} = (1,25 \pm 0,13)V$ ,  $p=0,95$ .

**Przykład**

Okres i częstotliwość napięcia wyznaczono oscyloskopem mierząc długość odcinka odpowiadającego okresowi sygnału. Dla nastawy współczynnika czasu  $c_t = 0,2ms/dz$  -  $l_t = 7,1dz$ . Tor odchylania poziomego oscyloskopu skalibrowano z błędem granicznym  $\delta c_t = 5\%$ , a odczytów dokonano z maksymalnym błędem  $\Delta l_t = 0,1dz$ . Podać wyniki pomiarów.

Obliczenia

- wartości mierzone:  $T = c_t l_t = 0,2 \frac{ms}{dz} \cdot 7,1dz = 1,42ms$

$$f = 1/T = 1/(1,42 \cdot 10^{-3}) = 704,2Hz$$

- niepewność standardowa (łączna) pomiaru okresu:

$$u_r(T) = \sqrt{[u_r(c_t)]^2 + [u_r(l_t)]^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\delta c_t)^2 + (\delta l_t)^2}.$$

Podstawiając wartości:  $\delta c_t = 5\%$ ,  $\delta l_t = \frac{\Delta l_t}{l_t} 100\% = \frac{0,1dz}{7,1dz} 100\% = 1,4\%$ , uzyskuje się

$$u_r(T) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{5^2 + 1,4^2} = 3,0\%$$

- niepewność rozszerzona dla poziomu ufności  $p=0,95$  (współczynnik rozszerzenia  $k=2$ )

$$U_r(T) = 2 \cdot 3,0\% = 6,0\%$$

- niepewności rozszerzone bezwzględne pomiarów  $T$  i  $f$  - jeżeli  $f=1/T$ , to  $U_r(f) = U_r(T)$ :

$$U(T) = \frac{U_r(T)T}{100\%} = \frac{6,0\% \cdot 1,42ms}{100\%} = 0,0852 = 0,086ms$$

$$U(f) = \frac{U_r(f)f}{100\%} = \frac{6,0\% \cdot 704,2Hz}{100\%} = 42,252 = 43Hz$$

- wynik pomiaru okresu:  $T = (1,420 \pm 0,086)\text{ms}$ ,  $p=0,95$ .
- wynik pomiaru częstotliwości:  $f = (704 \pm 43)\text{Hz}$ ,  $p=0,95$ .

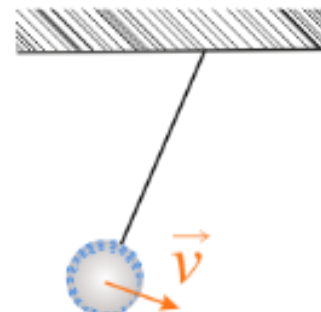
### Przykład - wahadło

Pomiar drgań wahadła dwoma różnymi stoperami. Obserwator sam wykrywa przejście wahadła przez stan równowagi i w danym momencie dokonuje odczytu czasu.

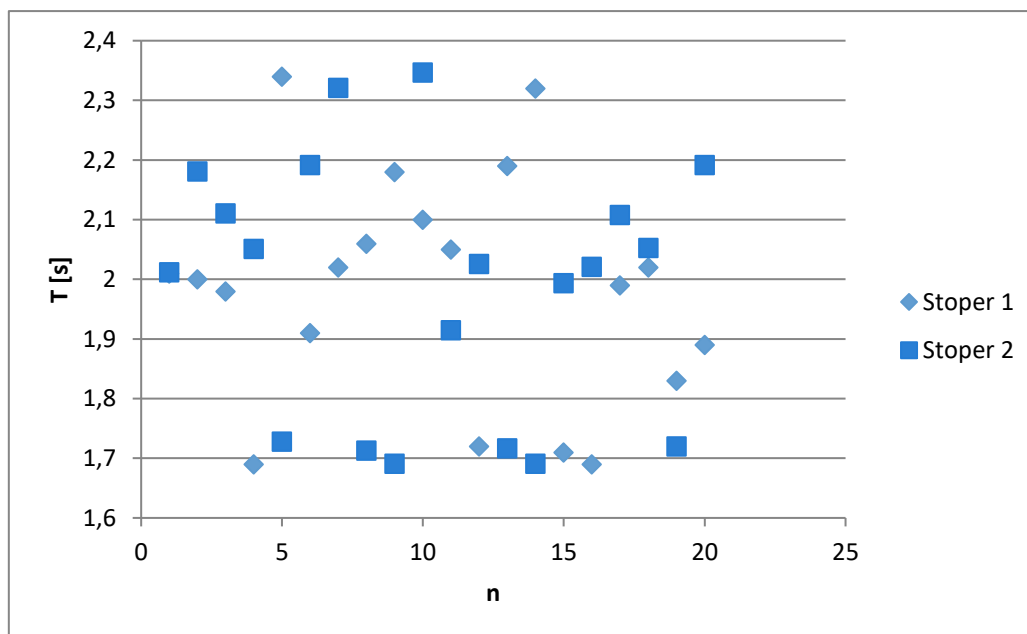
Przykładowe wyniki w tabeli oraz ich rozrzut na wykresie. (jak widać po wynikach pomiaru stopery różniły się dokładnością i rozdzielczością).

Stoper 1:  $\Delta T_1 = 0,02 \text{ s}$

Stoper 2:  $\Delta T_2 = 0,001 \text{ s}$



	Stoper 1	Stoper 2
Nr	T [s]	T [s]
<b>pomiaru <math>n</math></b>		
1	2,01	2,012
2	2,00	2,181
3	1,98	2,111
4	1,69	2,051
5	2,34	1,728
6	1,91	2,192
7	2,02	2,321
8	2,06	1,713
9	2,18	1,691
10	2,10	2,347
11	2,05	1,915
12	1,72	2,026
13	2,19	1,717
14	2,32	1,691
15	1,71	1,994
16	1,69	2,021
17	1,99	2,108
18	2,02	2,053
19	1,83	1,720
20	1,89	2,192

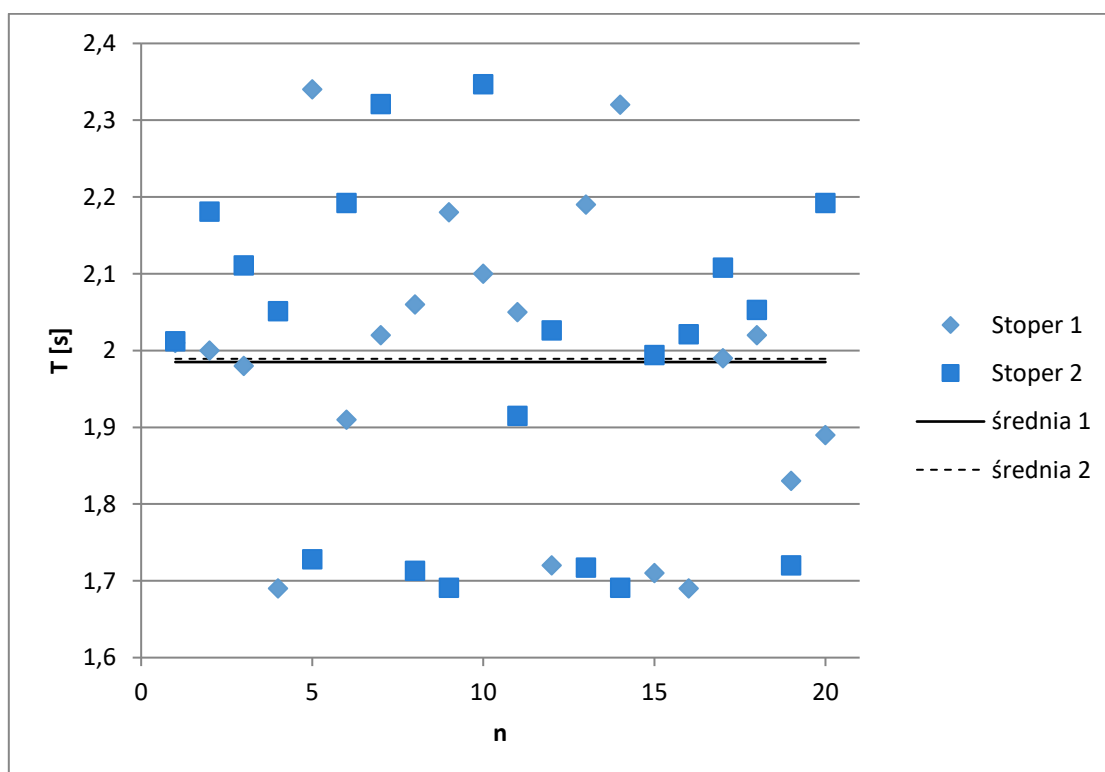


Z danych przedstawionych poniżej możemy policzyć wartość średnią.

Dla serii I mamy:  $T1_{\text{śr}} = 1,9850$  s

Dla serii II mamy:  $T2_{\text{śr}} = 1,9892$  s

Na poniższym wykresie przedstawiono rozrzut wyników wraz z wartością średnią.



Odchylenia standardowe wynoszą odpowiednio (dla wszystkich 20 pomiarów):

Dla serii I:  $s(T1) = 0,20$  [s] oraz  $s(\overline{T1}) = 0,043$  [s]

Dla serii II:  $s(T2) = 0,22$  [s] oraz  $s(\overline{T2}) = 0,048$  [s]

Po zaokrągleniu mamy

Dla serii I:  $T_1 = 1,985 \pm 0,043$  [s]

Dla serii II:  $T_2 = 1,989 \pm 0,048$  [s]

Jak zmieniają się odchylenia standardowe dla małej serii pomiarów?

Weźmy do obliczeń 6 pierwszych wyników pomiarów, czyli  $n=6$

	Stoper 1	Stoper 2
Nr	T [s]	T [s]
pomiaru $n$		
1	2,01	2,012
2	2,00	2,181
3	1,98	2,111
4	1,69	2,051
5	2,34	1,728
6	1,91	2,192
Średnia	1,9883	2,0458
$s(T)$	0,21	0,17
$s(\bar{T})$	0,085	0,071

Po zaokrągleniu mamy

Dla serii I:  $T_1 = 1,988 \pm 0,085$  [s]

Dla serii II:  $T_2 = 2,046 \pm 0,071$  [s]

### Mała liczba pomiarów (rozkład $t$ – Studenta).

Niepewność standardowa  $u(x)$  pomiaru wielkości fizycznej wymodelowany rozkładem Gaussa oznacza, że jej wartość rzeczywista  $x_0$  znajduje się z prawdopodobieństwem 68,3% w przedziale  $x - u(x) \leq x_0 \leq x + u(x)$ . Informację tę możemy zapisać w postaci:

$$P(x - u(x) \leq x_0 \leq x + u(x)) = 0,683$$

a dla niepewności rozszerzonej w postaci

$$P(x - U(x) \leq x_0 \leq x + U(x)) = \alpha$$

Przy czym prawdopodobieństwo  $\alpha$  nosi nazwę poziomu istotności, a przedział  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  - przedziału ufności. Powyższe wyrażenie oznacza, że z prawdopodobieństwem  $\alpha$  wartość rzeczywista znajduje się w granicach podanego przedziału. Im większego prawdopodobieństwa żądamy, tym większy otrzymujemy przedział ufności i odwrotnie. Przypomnijmy raz jeszcze, że dla przedziału ufności  $x - 2 u(x) \leq x_0 \leq x + 2 u(x)$  poziom istotności  $\alpha$  wynosi 0.95 (współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ ), a dla przedziału  $x - 3u(x) \leq x_0 \leq x + 3u(x)$   $\alpha = 0,997$  ( $k = 3$ ).



Podane powyżej wartości przedziałów ufności i poziomów istotności są jednak poprawne tylko w przypadku dostatecznie dużej liczby pomiarów, gdy wartość średnią z serii pomiarów i odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru możemy uznać za bardzo dobre przybliżenie wartości rzeczywistej  $x_0$  i parametru  $\sigma$  rozkładu wyników pomiarów. Dzieje się tak dlatego, że wartości prawdopodobieństwa  $\alpha$  wyznaczone są jako wartości całek z funkcji Gaussa o parametrach  $x_0$  i  $\sigma$ , obliczanych w granicach określonych przedziałem ufności. Dla małej liczby pomiarów wartość średnia i odchylenie standardowe mogą bardzo odbiegać od wartości  $x_0$  i  $\sigma$ . Gdybyśmy, na przykład, z 20 pomiarów losowo po 6 pomiarów, to za każdym razem moglibyśmy otrzymać różne wartości średnie i różne odchylenia standardowe. Dlatego chcąc zachować poziomy ufności takie, jak dla nieskończenie dużej liczby pomiarów, musimy, w przypadku niewielkiej liczby pomiarów  $n$ , zwiększyć przedziały ufności, mnożąc oszacowaną niepewność ( $u(x) = \bar{s}_x$ ) przez odpowiednie współczynniki  $t_\alpha$ ,  $n$  noszące nazwę współczynników  $t$  – Studenta. A więc:

$$U(x) = t_{\alpha,n} s_{\bar{x}}$$

$$P\{x - U(x) \leq x_0 \leq x + U(x)\} = \alpha$$

Rozkład ten dla bardzo dużych  $n$  ( $n \geq 30$ ) przechodzi w rozkład Gaussa.

Tabela dla rozkładu  $t$  – Studenta (dla 3 poziomów ufności)

n	p=0,6827	p=0,95	p=0,9973
2	1,837	12,706	235,777
3	1,321	4,303	19,206
4	1,197	3,182	9,219
5	1,145	2,776	6,620
6	1,111	<b>2,571</b>	5,507
7	1,091	2,447	4,904
8	1,077	2,365	4,530
9	1,067	2,306	4,277
10	1,059	2,262	4,094
11	1,053	2,228	3,957
12	1,048	2,201	3,850
13	1,043	2,179	3,764
14	1,040	2,160	3,694
15	1,037	2,145	3,636
16	1,034	2,131	3,586
17	1,032	2,120	3,544
18	1,030	2,110	3,507
19	1,029	2,101	3,475
20	1,027	2,093	3,447

W omawianym przypadku mamy dla 6 pomiarów otrzymaliśmy wyniki:

Dla serii I:  $T_1 = 1,988 \pm 0,085$  [s]

po zastosowaniu t-Studenta dla  $p=0,95$  (czyli  $0,085 \cdot 2,571 = 0,22$ )  
 $T1 = 1,99 \pm 0,22$  [s]

Dla serii II:  $T2 = 2,046 \pm 0,071$  [s]  
 po zastosowaniu t-Studenta dla  $p=0,95$  (czyli  $0,071 \cdot 2,571 = 0,18$ )  
 $T2 = 2,05 \pm 0,18$  [s]

### Analiza statystyczna a niepewność graniczna miernika (metoda B)

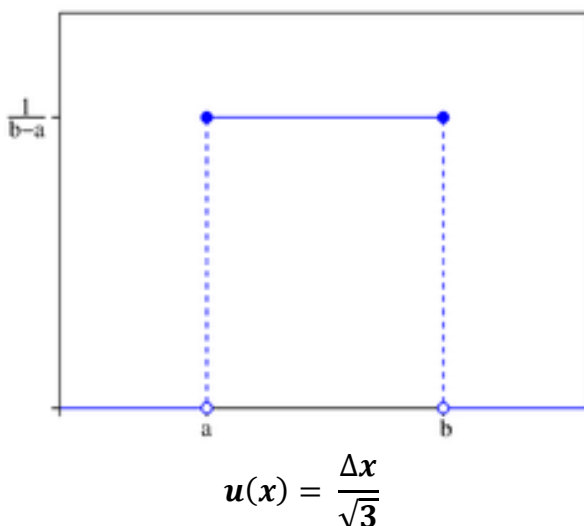
Opis metody B rozpoczniemy od analizy pewnego konkretnego przypadku. Na niepewności pomiarowe w takim przypadku składają się dwa przyczynki, jeden pochodzący od użytego przyrządu pomiarowego ( $\Delta x$ ), drugi związany z wykonywaniem czynności pomiarowej przez operatora ( $\Delta x_e$ ). Niepewność związana z użytym przyrządem zależy od klasy dokładności tego przyrządu wskazującej na jego odstępstwa od wzorca. W dobrych przyrządach pomiarowych podziałka skali zgadza się zwykle z klasą danego przyrządu, która oznacza maksymalną niepewność wnoszoną przez sam przyrząd, np. dla miarki milimetrowej  $\Delta l = 1\text{mm}$ . Niepewność odczytu ustala sam operator, uwzględniając różne czynniki wpływające na wynik pomiaru.

Tak więc, jeśli wykonujemy pomiar czasu stoperem  $1 \Delta x$  będzie wynosić  $\Delta T1 = 0,02$  s, błąd obserwatora może wynikać z czasu reakcji, np.  $0,1\text{s}$ .

Tak określoną niepewność pomiarową nazywamy często maksymalną, przyjmując że rzeczywista wartość mierzonej przez nas wielkości mieści się z prawdopodobieństwem 100% w określonym przez nas przedziale. Taką sytuację zwykle opisuje się rozkładem prostokątnym

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin (x - \Delta x; x + \Delta x) \\ \frac{1}{2\Delta x} & \text{dla } x \in (x - \Delta x; x + \Delta x) \end{cases}$$

Ponieważ niepewności pomiarowe tzw. standardowe przedstawione są na poziomie jednego odchylenia standardowego to musimy z niepewności maksymalnej oszacować niepewność standardową, czyli wyliczyć odchylenie średnie standardowe rozkładu prostokątnego. Parametr ten można policzyć wprost z definicji (wprowadzone oznaczenia  $a=x-\Delta x$ ,  $b=x+\Delta x$ ):



## Niepewności pomiarów bezpośrednich

Jeżeli pomiar obarczony jest różnymi niepewnościami, musimy uwzględnić w końcowym wyniku każdą z nich. Ponieważ jednak niepewności są wyrażone jako odchylenia standardowe do ich sumowania musimy posłużyć się metodami odpowiednimi dla dodawania odchyłeń standardowych (Wynika on z faktu że rozkład sumy zmiennych losowych jest splotem rozkładów tych zmiennych. Formalne uzasadnienie można znaleźć w każdym podręczniku do statystyki.).

$$u_c(x) = \sqrt{u_s^2(x) + \frac{(\Delta x)^2}{3} + \frac{(\Delta x_e)^2}{3}}$$

Pomiary w tym przykładzie zostały wykonane dwoma miernikami o błędzie granicznym:

Stoper 1:  $\Delta T1 = 0,02 \text{ s}$

Stoper 2:  $\Delta T2 = 0,001 \text{ s}$

Odchylenia standardowe wynosiły (dla  $n = 20$ ):

Dla serii I:  $u_s(T1) = 0,043 \text{ [s]}$

Dla serii II:  $u_s(T2) = 0,048 \text{ [s]}$

Błąd obserwatora przyjmijmy  $0,1\text{s}$

$$u_c(T1) = \sqrt{0,043^2 + \frac{(0,02)^2}{3} + \frac{(0,1)^2}{3}} = 0,073 \text{ s}$$

$$u_c(T2) = \sqrt{0,048^2 + \frac{(0,001)^2}{3} + \frac{(0,1)^2}{3}} = 0,075 \text{ s}$$

Uzyskaliśmy:

Dla serii I:  $T1 = 1,985 \pm 0,073 \text{ [s]}$

Dla serii II:  $T2 = 1,989 \pm 0,075 \text{ [s]}$

W sytuacjach, gdy niepewność przypadkowa pomiaru jest znacznie większa (przynajmniej o rząd wielkości) od niepewności wynikającej z użytego przyrządu i działalności eksperymentatora – uwzględnianie tych dwóch ostatnich niepewności nie wpływa praktycznie na niepewność całkowitą.

## Pomiary o niejednakowej dokładności.

Czasami zdarza się że mamy kilka pomiarów pewnej wielkości wykonanych z różną dokładnością. Przyczyną mogą być różne metody pomiarowe, istotne różnice w warunkach wykonywania pomiaru lub znacząco różna liczba pomiarów. Szacowanie wartości wielkości rzeczywistej poprzez średnią arytmetyczną prowadzi wówczas do nieusprawiedliwionego równouprawnienia pomiarów o różnej dokładności. Najbardziej wiarygodną (wyprowadzoną z tzw. metody największej wiarygodności) oceną wartości rzeczywistej jest wówczas tzw. średnia ważona, zdefiniowana wzorem:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

gdzie:  $x_i$  – wynik i-tego pomiaru,  $w_i$  – waga i-tego pomiaru,  $n$  – liczba pomiarów. Wagę  $w_i$  definiujemy jako odwrotność kwadratu niepewności.

$$w_i = \frac{1}{u^2(x_i)}$$

Przy tak zdefiniowanej średniej ważonej, największy wpływ na wynik końcowy mają pomiary o największej wadze, a więc obciążone najmniejszą niepewnością pomiarową.

Niepewność pomiarową średniej ważonej

$$u(x_w) = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i}} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n u^2(x_i)}}$$

Wracamy do naszego przykładu (dla  $n = 20$ ).

	T [s]	$\Delta T$ [s]	$w_i$ [1/s <sup>2</sup> ]	$T_i w_i$ [1/s]
Stoper 1	1,985	0,073	187,6525	372,49
Stoper 2	1,989	0,075	177,7778	353,60
		<i>Suma</i>	365,4302	726,09

$$w_1 = \frac{1}{0,073^2} = 187,6525$$

$$T = \frac{726,09}{365,4302} = 1,98695 \text{ [s]}$$

$$u(T) = \frac{1}{\sqrt{365,4302}} = 0,053 \text{ [s]}$$

Mając obliczone wartości można już zapisać wynik końcowy:

$$T = 1,987 \pm 0,053 \text{ [s]}$$

## Histogram

Wykonajmy histogram dla pomiarów uzyskanych przy pomocy stopera 1. W tym celu posortujemy dane od najmniejszej do największej wartości.

1,69; 1,69; 1,71; 1,72; 1,83; 1,89; 1,91; 1,98; 1,99; 2,00; 2,01; 2,02; 2,02; 2,05; 2,06; 2,10; 2,18; 2,19; 2,32; 2,34

Różnica pomiędzy największą wartością a najmniejszą wynosi

$$2,34 - 1,69 = 0,65$$

Podzielmy tę wartość na 5 – będzie to liczba przedziałów (słupków) w histogramie, stąd szerokość jednego przedziału:

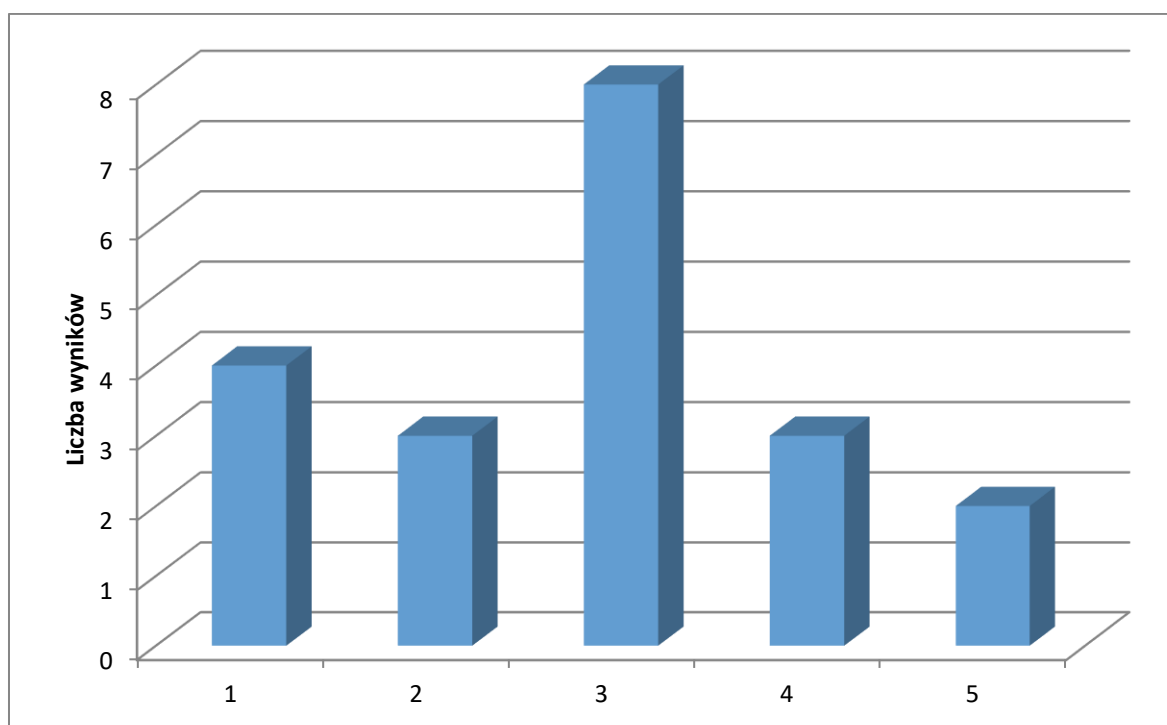
$$0,65 / 5 = 0,13$$

Dostajemy pięć przedziałów lewostronnie domkniętych:

$<1,69 : 1,82)$   $<1,82 : 1,95)$   $<1,95 : 2,08)$   $<2,08 : 2,21)$   $<2,21 : 2,35)$

Teraz należy policzyć ile wartości mierzonych należy do każdego z tych przedziałów:

Nr	1	2	3	4	5
Przedział	$<1,69 : 1,82)$	$<1,82 : 1,95)$	$<1,95 : 2,08)$	$<2,08 : 2,21)$	$<2,21 : 2,35)$
Liczba wyników	4	3	8	3	2



Wykonany histogram wskazuje na rozkład symetryczny wielkości mierzonych, to znaczy, że najwięcej wyników pomiarów znajduje się w środkowym przedziale wartości.

Opracowała: Ewa Frączek