ANALIZA MATEMATYCZNA 2.3A

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 4

Ciągi liczbowe o wyrazach zespolonych.
Pochodna i całka funkcji zespolonej.

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania ciągów o wyrazach zespolonych oraz pochodnych i całek funkcji zespolonych

- w fizyce: w mechanice kwantowej, w kwantowej teorii pola, w hydrodynamice, w termodynamice;
- w teorii fraktali;
- w mechanice;
- w elektronice;
- w lotnictwie.

CIĄGI LICZBOWE O WYRAZACH ZESPOLONYCH

Ciągiem o wyrazach zespolonych nazywamy ciąg $\{z_n\}$, gdzie $z_n = x_n + y_n i$.

Mówimy, że liczba $z_0 = x_0 + y_0 i$ jest ***granicą ciągu*** $\{z_n\}$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0,$$

jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba n_0, że nierówność $n \geqslant n_0$ pociąga za sobą nierówność $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Ciąg mający granicę skończoną nazywamy ***ciągiem zbieżnym***.

Twierdzenie 4.1. *Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby ciąg* $\{z_n\}$ *o wyrazach zespolonych* $z_n = x_n + y_n i$ *był zbieżny do granicy* $z_0 = x_0 + y_0 i$ *jest by ciągi rzeczywiste* $\{x_n\}$ *oraz* $\{y_n\}$ *były jednocześnie zbieżne odpowiednio do granic* x_0 *oraz* y_0.

FUNKCJE ZESPOLONE ZMIENNEJ RZECZYWISTEJ

Jeżeli każdej liczbie rzeczywistej t należącej do pewnego przedziału $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ przyporządkowujemy liczbę zespoloną

$$z = z(t) = x(t) + y(t)i,$$

to mówimy, że w przedziale $[\alpha, \beta]$ została określona ***funkcja zespolona*** $z = z(t)$ ***zmiennej rzeczywistej.***

Granicę i ciągłość funkcji $z = z(t)$ określamy podobnie jak dla funkcji rzeczywistych.

Pochodną funkcji $z = z(t)$ określamy wzorem

$$z'(t) = x'(t) + y'(t)i.$$

Twierdzenie 4.1. *Funkcja zespolona $z = z(t)$ zmiennej rzeczywistej t*

(1) ma w punkcie t_0 granicę $z(t_0) = x(t_0) + y(t_0)i$,

(2) jest ciągła w punkcie t_0,

(3) ma w punkcie t_0 pochodną $z'(t) = x'(t) + y'(t)i$,

(4) jest całkowalna w przedziale $[\alpha, \beta]$, przy czym

$$\int_\alpha^\beta z(t)dt = \int_\alpha^\beta x(t)dt + i\int_\alpha^\beta y(t)dt$$

wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje rzeczywiste $x(t)$oraz $y(t)$ spełniają warunki

(1') mają w punkcie t_0 odpowiednie granice $x(t_0)$ oraz $y(t_0)$

(2') są ciągłe w punkcie t_0

(3') mają w punkcie t_0 odpowiednie pochodne $x'(t_0)$ oraz $y'(t_0)$

(4') są całkowalne w przedziale $[\alpha, \beta]$.

Wniosek 4.1. *Jeżeli funkcja* $z(t) = x(t) + y(t)i$ *jesy ciągła w przedziale* $[\alpha, \beta]$*, to funkcja* $G(\tau)$ *określona wzorem*

$$G(\tau) = \int_{\alpha}^{\tau} z(t)dt \; dla \; \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$$

jest funkcją pierwotną funkcji $z(t)$ *w rozważanym przedziale.*

Wniosek 4.2. *Jeżeli* $G(t)$ *jest dowolną funkcją pierwotną funkcji* $z(t) = x(t) + y(t)i$ *w przedziale* $[\alpha, \beta]$*, czyli* $G'(t) = z(t)$*, to*

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(t)dt = G(\beta) - G(\alpha).$$

Ponadto $|\int_{\alpha}^{\beta} z(t)dt| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} |z(t)|dt$*.*

FUNKCJE ZESPOLONE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Otoczeniem punktu $z_0 = x_0 + y_0 i$ nazywamy zbiór wszystkich liczb zespolonych z spełniających nierówność

$$|z - z_0| < r \text{ gdzie } r > 0.$$

Jeżeli każdej liczbie zespolonej z z pewnego zbioru (obszaru) E przyporządkujemy pewną liczbę zespoloną $w = f(z)$, to mówimy, że w zbiorze E została określona ***funkcja zespolona*** $f(z)$ ***zmiennej zespolonej*** z. Zbiór E nazywamy wtedy ***dziedziną (polem) funkcji,*** zaś zbiór E_1 składający się ze wszystkich wartości funkcji f nazywamy ***przeciwdziedziną (zakresem) funkcji***.

Niech z_0 będzie punktem skupienia zbioru E, w którym określona jest funkcja $f(z)$. Mówimy, że funkcja $f(z)$ ma ***w punkcie*** z_0 ***granicę*** g, jeżeli dla każdego ciągu punktow $\{z_n\}$ zbioru E różnych od z_0 relacja $z_n \to z_0$ pociąga za sobą relację $f(z) \to g$.
Zapisujemy to w następujący sposób

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = g.$$

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli funkcja* $w = f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ *ma granicę* $g = g_1 + g_2 i$ *w punkcie* $z_0 = x_0 + y_0 i$*, to* $u(x,y)$ *oraz* $v(x,y)$ *mają odpowiednio w punkcie* (x_0, y_0) *granicę* g_1 *oraz* g_2 *i odwrotnie.*

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli funkcja* $w = f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ *jest ciągła w punkcie* $z_0 = x_0 + y_0 i$*, to* $u(x,y)$ *oraz* $v(x,y)$ *są ciągłe odpowiednio w punkcie* (x_0, y_0) *i odwrotnie.*

POCHODNA FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Pochodną funkcji $w = f(z)$ ***w punkcie*** z_0 nazywamy granicę skończoną

$$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \delta z) - f(z_0)}{\delta z}$$

i oznaczamy $f'(z_0)$.

Twierdzenie 4.4 (warunek konieczny). *Jeśli funkcja* $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ *ma w punkcie* $z = x + yi$ *pochodną, to*
(1.) istnieją w tym punkcie pochodne cząstkowe funkcji $u(x,y)$ *oraz* $v(x,y)$*,*
(2.) pochodne te spełniają w tym punkcie równania

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Równania powyższe nazywamy ***równaniami Cauchy'ego - Riemanna***.

Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) francuski matematyk, sprecyzował podstawy analizy matematycznej, opierając je na **pojęciach granicy i ciągłości**, jako pierwszy podał precyzyjny dowód twierdzenia Taylora. Prowadził też badania nad **teorią liczb i liczb zespolonych**, **teorią grup**, **teorią funkcji**, **zagadnieniami równań różniczkowych i wyznaczników**. Zawdzięczamy mu również kilka ważnych twierdzeń z analizy zespolonej oraz zapoczątkowanie studiów nad grupami permutacji. Zajmował się też badaniami w dziedzinie mechaniki i optyki.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) niemiecki matematyk, zajmujący się również fizyką teoretyczną i eksperymentalną oraz filozofią przyrody, profesor Uniwersytetu w Getyndze, członek korespondent Berlińskiej Akademii Nauk (1859) i Royal Society (1866). Jego wielowymiarowa „geometria Riemanna” dała matematyczne **podstawy ogólnej teorii względności.** Zapoczątkował **systematykę geometrii nieeuklidesowych.** Jego prace z teorii liczb i teorii funkcji analitycznych wywarły duży wpływ na rozwój matematyki. Był autorem pracy o szeregach trygonometrycznych i teorii całki, w której wprowadził całkę nazywaną dziś **całką Riemanna.**

Twierdzenie 4.5 (warunek dostateczny). *Jeżeli części* $u(x,y)$ *oraz* $v(x,y)$ *funkcji* $f(x+yi) = u(x,y) + v(x,y)i$ *spełniają równania Cauchy'ego - Riemanna w pewnym obszarze D i jeżeli ponadto pochodne cząstkowe tych funkcji są ciągłe w tym obszarze, to funkcja* $f(z)$ *ma w każdym punkcie* $z = x + yi$ *tego obszaru pochodną*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} i\right).$$

Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest ***funkcją holomorficzną w punkcie*** z_0, jeżeli jest w tym punkcie i w pewnym jego otoczeniu różniczkowalna.

Mówimy, że funkcja $f(z)$ jest ***holomorficzna w obszarze*** D, jeżeli jest holomorficzna w każdym punkcie tego obszaru.

Funkcję rzeczywistą dwóch zmiennych rzeczywistych $u(x, y)$, określoną w pewnym obszarze D, nazywamy ***funkcją harmoniczną w tym obszarze***, jeżeli ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego i spełnia w tym obszarze D równanie różniczkowe Laplace'a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Funkcję $u(x, y)$ nazywamy ***harmoniczną w punkcie*** (x_0, y_0), jeżeli jest harmoniczna w pewnym otoczeniu tego punktu.

Twierdzenie 4.6. *Część rzeczywista* $u(x, y)$ *oraz część urojona* $v(x, y)$ *funkcji holomorficznej w pewnym obszarze są funkcjami harmonicznymi w tym obszarze*.

Dwie funkcje harmoniczne $u(x, y)$ oraz $v(x, y)$, które spełniają równanie Cauchy'ego-Riemanna, nazywamy ***funkcjami harmonicznymi sprzężonymi***.

Z twierdzeni 4.6 wynika więc, że części: rzeczywista oraz urojona funkcji holomorficznej są funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

CAŁKA FUNKCJI ZMIENNEJ ZESPOLONEJ

Niech f będzie funkcją zmiennej zespolonej określoną wzdłuż krzywej regularnej C danej równaniem $z = z(t)$, gdzie $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Dzielimy krzywą C w dowolny sposób na łuki punktami $a = z_0, z_1, ..., z_n = b$ i tworzymy sumę "słupków" pod krzywą

$$S_n = \Sigma_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\delta z_k.$$

Jeżeli istnieje granica ciągu sum częściowych przy zalożeniu, że liczba łuków dąży do nieskończoności, a ich długości do zera i jeżeli granica ta nie zależy od sposobu podziału krzywej C na łuki i od wyboru punktow ζ_k, to granicę tę nazywamy ***całką krzywoliniową funkcji*** f ***wzdłuż krzywej*** C i oznaczamy symbolem

$$\int_C f(z)dz.$$

Twierdzenie 4.7. *Jeżeli funkcja $f(z) = u + vi$ jest ciągła wzdłuż krzywej regularnej C, to całka $\int_C f(z)dz$ istnieje i daje się wyrazić wzorem*

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u(x,y)dx - v(x,y)dy) + i\int_C (v(x,y)dx + u(x,y)dy).$$

Korzystanie z powyższego wzoru przy obliczaniu całek funkcji zmiennej zespolonej wzdłuż krzywej C jest niewygodne. W zastosowaniach zamiast tego wzoru korzysta się z następującego wzoru

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt,$$

gdzie $z = z(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ jest równaniem krzywej całkowania C.

Całka (krzywoliniowa) funkcji zmiennej zespolonej zachowuje wszystkie własności całki (krzywoliniowej) funkcji rzeczywistej:

$$\int_C [f_1(z) \pm f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz \pm \int_C f_2(z)dz$$

$$\int_C [kf(z)]dz = k\int_C f(z)dz$$

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Twierdzenie 4.8. *Jeżeli funkcja* f *jest ciągła w obszarze jednospójnym* D *i ma w tym obszarze funkcję pierwotną* $F(z)$, *to całka krzywoliniowa* $\int_C f(z)dz$ *wzdłuż dowolnej drogi regularnej* C *zawartej w* D *o początku* z_1 *i końcu* z_2 *nie zależy od drogi całkowania i wyraża się wzorem*

$$\int_C f(z)dz = F(z_2) - F(z_1).$$