ANALIZA MATEMATYCZNA 2.3A

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 1

Równanie różniczkowe zwyczajne.
Równania różniczkowe zwyczajne
rzędu pierwszego o zmiennych rozdzielonych.
Równania różniczkowe zwyczajne
rzędu pierwszego rozwiązywane metodą podstawienia.

NIEZBĘDNIK INŻYNIERA

Przykładowe zastosowania równań różniczkowych

- w fizyce: np. teoria obwodów elektrycznych, układy dragających ciał, mechanika, dynamika Newtona;
- w automatyce;
- w elektrotechnice i elektronice;
- w biologii: np. tempo namnażania bakterii;
- w ekonomii: np. wzrost lub spadek wartości pieniądza.

RÓWNANIE RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$y' = f(x, y),$$

w którym y' występuje istotnie, pozostałe zaś mogą nie występować.
Rozwiązaniem (całką) równania rózniczkowego nazywamy każdą funkcją rózniczkowalną $y = p(x)$, która spełnia dane równanie dla każdej wartości x z pewnego przedziału.

Linią (krzywą) całkową równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ nazywamy wykres każdej funkcji, która jest rozwiązaniem tego równania.
Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania różniczkowego $y' = f(x, y)$ nazywamy każdą funkcję postaci

$$y = \psi(x, C),$$

która dla każdej wartości C należącej do pewnego przedziału jest rozwiązaniem tego równania.
Rozwiązanie szczególne tego równania otrzymujemy nadając parametrowi C pewną stałą wartość (należącą do dziedziny).

Równanie rożniczkowe $y' = f(x, y)$ oraz warunek $y(x_0) = y_0$ nazywamy ***zagadnieniem początkowym*** lub ***zagadnieniem Cauchy'ego***.
Liczby x_0, y_0 nazywamy ***wartościami początkowymi (warunkiem początkowym)***.

Twierdzenie 1.1 (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania). *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ oraz jej pochodna $f_y(x,y)$ są ciągłe na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, to dla każdego punktu $(x_0, y_0) \in D$ zagadnienie początkowe*

$$y' = f(x,y), \;\; y(x_0) = y_0$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) francuski matematyk, sprecyzował podstawy analizy matematycznej, opierając je na **pojęciach granicy i ciągłości**, jako pierwszy podał precyzyjny dowód twierdzenia Taylora. Prowadził też badania nad **teorią liczb i liczb zespolonych, teorią grup, teorią funkcji, zagadnieniami równań różniczkowych i wyznaczników.** Zawdzięczamy mu również kilka ważnych twierdzeń z analizy zespolonej oraz zapoczątkowanie studiów nad grupami permutacji. Zajmował się też badaniami w dziedzinie mechaniki i optyki.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE
RZĘDU PIERWSZEGO
O ZMIENNYCH ROZDZIELONYCH

Równanie różniczkowe, które można sprowadzić do postaci

$$y' = g(x)h(y)$$

nazywamy ***równaniem różniczkowym pierwszego rzędu o zmiennych rozdzielonych***.

Jeśli $h(y_0) = 0$ dla pewnego y_0, to funkcja stała $y(x) = y_0$ jest jednym z rozwiązań tego równania.

Twierdzenie 1.2 (całka równania o zmiennych rozdzielonych). *Jeżeli funkcje* $g(x)$ *i* $h(y)$ *są ciągłe, przy czym* $h(y) \neq 0$ *dla każdego* y*, to całka rownania rożniczkowego o zmiennych rozdzielonych dana jest wzorem*

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C,$$

gdzie C *jest dowolną stałą rzeczywistą.*

Twierdzenie 1.3 (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania). *Jeżeli funkcje* $g(x)$ *i* $h(y)$ *są ciągłe odpowiednio w przedziałach* (a,b) *oraz* (c,d)*, przy czym* $h(y) \neq 0$ *dla* $y \in (c,d)$*, to dla dowolnych punktów* $x_0 \in (a,b), y_0 \in (c,d)$ *zagadnienie początkowe*

$$y' = g(x)h(y), \quad y(x_0) = y_0$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE
RZĘDU PIERWSZEGO
ROZWIĄZYWANE METODĄ PODSTAWIENIA

Równanie różniczkowe typu

$$y' = f(ax + by + c),$$

gdzie $a, b \neq 0$, a $f(ax + by + c)$ jest funkcją ciągłą, rozwiązujemy wprowadzając przez podstawienie nową zmienną zależną $u(x)$, gdzie $u = ax + by + c$, gdzie y uważamy za zmienną x. Wtedy równanie powyższe sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych

$$u' = bf(u) + a.$$

Równaniem różniczkowym jednorodnym względem x ***i*** y nazywamy równanie typu

$$y' = f(\frac{y}{x}).$$

Równanie rózniczkowe tej postaci rozwiązujemy wprowadzając nową zmienną zależną przez podstawienie $u = \frac{y}{x}$. Wtedy równanie powyższe sprowadza się do równania o zmiennych rozdzielonych

$$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u).$$

Twierdzenie 1.4 (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania jednorodnego). *Jeżeli funkcja* $f(u)$ *jest ciągła na przedziale* (a,b) *i spełnia tam warunek* $f(u) \neq u$*, to dla dowolnych punktów* (x_0, y_0) *takich, że* $a < \frac{y_0}{x_0} < b$ *zagadnienie początkowe*

$$y' = f(\frac{y}{x}), \quad y(x_0) = y_0,$$

ma tylko jedno rozwiązanie.