ANALIZA MATEMATYCZNA 2.3A

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w **Karcie Przedmiotu**.

WYKŁAD 3

Równania różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego sprowadzalne do równań rzędu pierwszego. Równania różniczkowe liniowe o współczynnikach stałych. Układy dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego.

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE RZĘDU DRUGIEGO SPROWADZALNE DO RÓWNAŃ RZĘDU PIERWSZEGO

Równanie postaci

$$y'' = F(x, y, y')$$

nazywamy ***równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu drugiego***.
Równanie rożniczkowe $y'' = F(x, y, y')$ z warunkami

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

nazywamy ***zagadnieniem początkowym*** lub ***zagadnieniem Cauchy'ego***.

Równanie różniczkowe rzędu drugiego, w którym jawnie nie występuje zmienna y rozwiązujemy przez podstawienie

$$y' = p(x).$$

Otrzymujemy wtedy równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$p' = F(x, p).$$

Równanie różniczkowe rzędu drugiego, w którym jawnie nie występuje zmienna x rozwiązujemy przez podstawienie

$$y' = q(y).$$

Otrzymujemy wtedy równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$q' = F(y, q).$$

Równanie różniczkowe, które można zapisać w postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

nazywamy ***równaniem liniowym drugiego rzędu***.
Funkcje $p(x), q(x)$ nazywamy ***współczynnikami***, a $h(x)$ nazywamy ***wyrazem wolnym*** tego równania.

Jeżeli $h(x) = 0$, to równanie powyższe nazywamy ***jednorodnym***.

Twierdzenie 3.1. (istnienie i jednoznaczność rozwiązań równania liniowego drugiego rzędu). *Jeżeli funkcje* $p(x), q(x), h(x)$ *są ciągłe na przedziale* (a,b)*, to dla dowolnego punktu* $x_0 \in (a,b)$ *oraz* $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ *zagadnienie początkowe*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1$$

ma tylko jedno rozwiązanie i jest ono określone na przedziale (a,b).

Jeżeli równanie liniowe drugiego rzędu jest postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

to takie równanie nazywamy ***równaniem liniowym jednorodnym.***
Równanie takie rozwiązujemy przez podstawienie

$$y = e^{u(x)}$$

otrzymując równanie postaci

$$y'' = e^{u}(u'^2 + u'').$$

Parę rozwiązań $y_1(t), y_2(t)$ równania liniowego jednorodnego, określonych na przedziale (a,b), nazywamy ***układem fundamentalnym*** tego równania na tym przedziale, jeżeli dla każdego $t \in (a,b)$ spełniony jest warunek

$$W(y_1(t), y_2(t)) = \det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix}.$$

Powyższy wyznacznik nazywamy ***wrońskianem*** funkcji $y_1(t), y_2(t)$.
(Józef Maria Hoene-Wroński (1776-1853) matematyk polski. Jego imieniem nazwana jest ulica na terenie kampusu PWr).

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE LINIOWE DRUGIEGO RZĘDU O WSPÓŁCZYNNIKACH STAŁYCH

Jeżeli współczynniki równania różniczkowego liniowego jednorodnego są liczbami, to równanie to nazywamy ***równaniem liniowym jednorodnym o stałych współczynnikach***. Przyjmuje ono wtedy postać

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Rozwiązanie tego równania jest postaci $y = g(x)$ spełniające przy dowolnych wartościach x_0, y_0, y_1 warunki początkowe

$$g(x_0) = y_0, \quad g'(x_0) = y_1.$$

Jeżeli w równaniu $ay'' + by' + cy = 0$ podstawimy $y = e^{rx}$, (skąd mamy $y' = re^{rx}, y'' = r^2 e^{rx}$), to po podzieleniu równania przez e^{rx} otrzymamy równanie

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Równanie to nazywamy ***równaniem charakterystycznym*** równania różniczkowego jednorodnego rzędu drugiego o stałych współczynnikach.

Jeżeli równanie $ar^2 + br + c = 0$
- ma dwa różne pierwiastki r_1, r_2, to równanie jednorodne ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- jeden pierwiastek podwójny r_0, to równanie jednorodne ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x}$$

- nie ma pierwiastków, to równanie jednorodne ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)),$$

gdzie $\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Równanie postaci

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

gdzie $a \neq 0, f(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$ i f jest funkcją ciągłą na (a, b), nazywamy ***równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym rzędu drugiego o współczynnikach stałych***.

UKŁADY RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH RZĘDU PIERWSZEGO

Układem dwóch równań różniczkowych rzędu pierwszego nazywamy układ

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}$$

przy czym o funkcjach $f(x, y, z), g(x, y, z)$ zakładamy, że są ciągłe w pewnym obszarze $V \subset \mathbb{R}^3$.

Rozwiązaniem tego ukladu jest każdy układ dwóch funkcji $y = y(x), z = z(x)$ określonych w pewnym przedziale (a, b), sprowadzających w tym przedziale uklad w układ tożsamości. Funkcje te, jeżeli istnieją, zależą od dwóch stałych C_1, C_2.

Jeżeli narzucimy warunek, aby dla pewnej wartości $x_0 \in (a, b)$ zmiennej niezależnej x funkcje przybierały z góry zadane wartości y_0, z_0, to problem wyznaczenia rozwiązania układu nazywamy ***zagadnieniem na wartości początkowe dla układu równań różniczkowych***.

Rozwiązanie takiego układu jest więc postaci

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \quad z_0 = \psi(x_0, C_1, C_2),$$

jeżeli powyższe funkje są rozwiązalne względem C_1, C_2 w sposób jednoznaczny, czyli przez punkt (x_0, y_0, z_0) przechodzi dokładnie jedna krzywa dwuparametrowej rodziny.

Krzywą w przestrzeni trójwymiarowej odpowiadającą rozwiązaniu układu nazywamy ***linią (krzywą) całkową*** układu równań różniczkowych.