Elektryczność

Konrad Pempera

Informatyka Techniczna

1. Nośnikami prądu są ładunki np. Elektrony
2. Prawo Coulomba

Siła Coulomba przedstawiana jest wzorem

$$F_C = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2},$$

gdzie

q_1, q_2 – oddziałujące na siebie ładunki,

r_{12} – odległość między oddziaływującymi na siebie ładunkami,

k – stała oddziaływań ładunków w próżni wyrażona wzorem.

Ładunki q_1, q_2 mogą być różnoimienne lub jednoimienne. Różnoimienne mają inne znaki i przyciągają siebie nawzajem. Natomiast ładunki jednoimienne mają identyczne znaki i odpychają się. Siła Coulomba jest wprost proporcjonalna do iloczynu ładunku, a odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.

3. Stała k

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon},$$

$$k = 8{,}99 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2},$$

gdzie

ε_0 – przenikalność elektryczna ośrodka, w którym znajdują się oddziaływujące na siebie ładunki,

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r,$$

gdzie

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$ - przenikalność elektryczna próżni,

ε_r – względna przenikalność elektryczna (indywidualna dla każdego ośrodka).

4. Porównanie prawa Coulomba i Newtona

Prawo Coulomba	Prawo Newtona
- wzór: $F_C = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$, - element oddziaływujący: ładunek, - wprost proporcjonalne do iloczynu oddziaływujących elementów, a odwrotnie	- wzór: $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$, - element oddziaływujący: masa, - wprost proporcjonalne do iloczynu oddziaływujących elementów, a odwrotnie

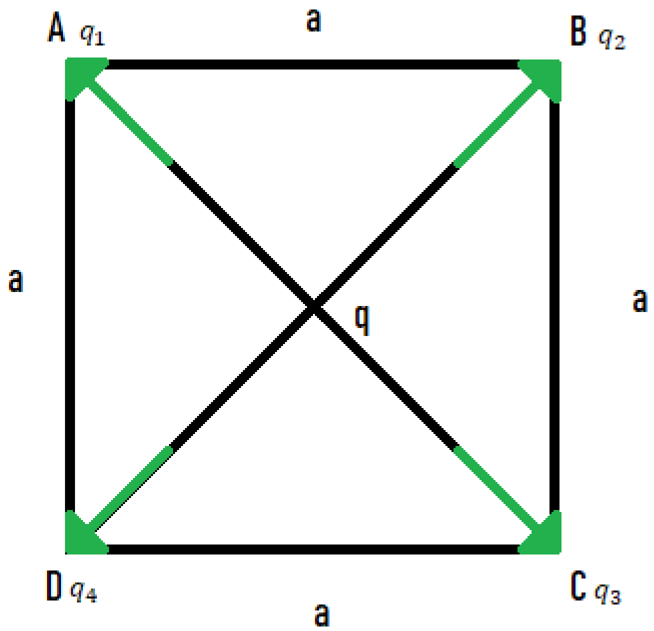
proporcjonalne do kwadratu odległości między nimi, - odpychanie i przyciąganie, - elementy mogą być o różnych znakach, - oddziaływanie: silne.	proporcjonalne do kwadratu odległości między nimi, - przyciąganie, - elementy tylko o dodatnich znakach, - oddziaływanie: słabe.

5. Natężenie pola – siła działająca na ładunek w danym punkcie przestrzeni podzielona przez ten ładunek

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

6. Potencjał elektryczny – energia potencjalna pola elektrycznego podzielona przez ładunek jednostkowy

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q} = k\frac{q}{r}$$



Natężenie pola elektrycznego jest wektorem, dlatego jego składniki dodajemy wektorowo. Potencjał elektryczny nie jest wielkością wektorową, więc w tym przypadku po prostu go sumujemy.

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4$$

Natężenie:

$E_1 = -E_3$,

$E_2 = -E_4$,

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4,$
$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 0.$

Potencjał:
$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4,$
$V = 4V_1.$

7. Prąd elektryczny – uporządkowany ruch swobodnych ładunków. Temu ruchowi towarzyszy ruch chaotyczny (jest on spowodowany np. temperaturą elektronów, która jest większa niż 0K), w którym nie przypływa prąd. Prąd przepływa z miejsca o niższym potencjale do miejsca o wyższym.

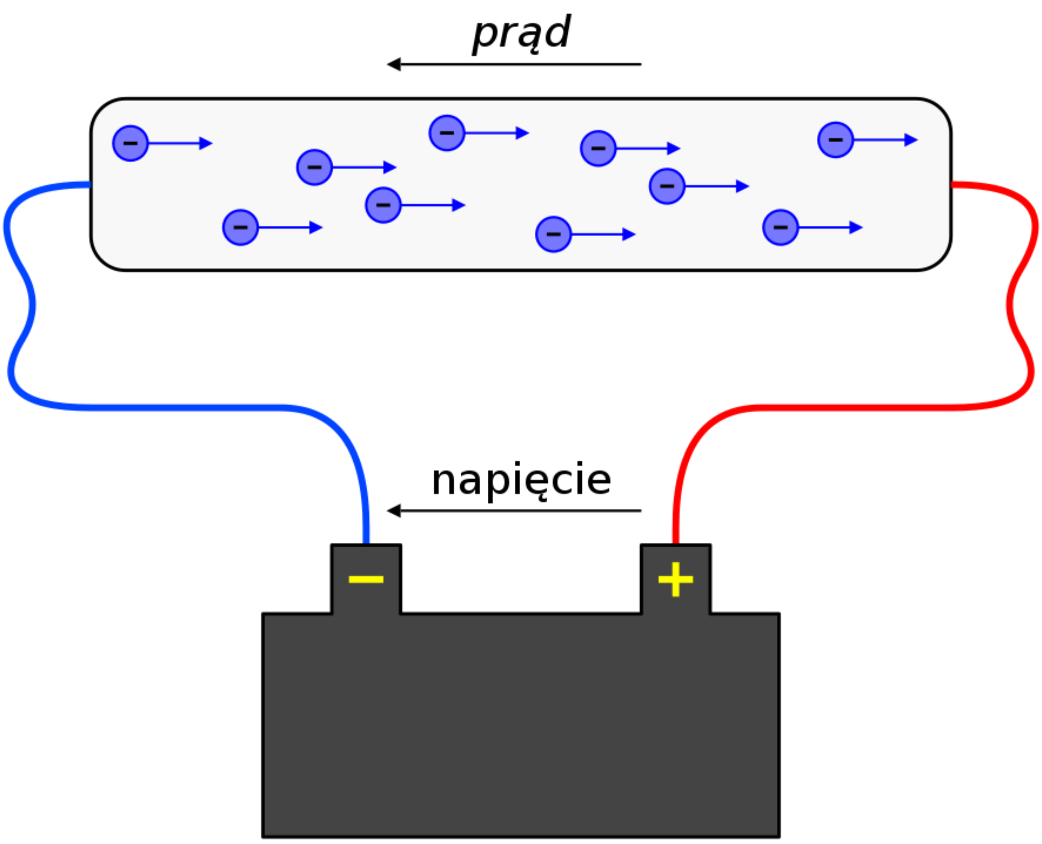
8. Natężenie prądu elektrycznego – zmiana ładunku elektrycznego w czasie. Jednostką natężenia jest amper [A]. W przypadku gdy szybkość przepływu jest stała stosujemy wzór:

$$I = \frac{q}{t},$$

Natomiast w przypadku, gdy ta szybkość się zmienia, stosujemy wzór:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

9. Kierunek przepływu prądu. Umownie przyjmujemy, iż prąd płynie tak jakby poruszały się dodatnio naładowane nośniki ładunku elektrycznego. W przypadku gdy nośniki są naładowane ujemnie, również przyjmujemy ten sam kierunek przepływu. Prąd „płynie” z anody do katody (z elektrody ujemnej do elektrody dodatniej).



Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Pr%C4%85d_elektryczny

10. Gęstość prądu określa natężenie prądu przypadające na jakąś powierzchnię. Jest ona wektorem.

Gęstość prądu przy stałym natężeniu

$$j = \frac{I}{S},$$

Gęstość prądu przy zmiennym natężeniu

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

11. Prędkość unoszenia

Elektrony, które przenoszą prąd przemieszczają się w przypadkowych kierunkach z prędkością $v_{el} = 10^6 \frac{m}{s}$ oraz z prędkością unoszenia $v_d = 10^{-5} \frac{m}{s}$, prędkość ta ma przeciwny kierunek do kierunku płynięcia prądu.

12. Prawo Ohma

$$U = I \cdot R,$$

gdzie

U – napięcie [V],

I – natężenie [A],

R – opór [Ω].

13. Wektorowe prawa Ohma

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

14. Opór i konduktancja

Opór określa jak bardzo ciało przeciwstawia się ruchowi elektronów. Odwrotnością oporu jest konduktancja [simens][S]

$$R = \frac{1}{G}\ [S].$$

15. Przewodność elektryczna właściwa oraz opór właściwy

$$\sigma = \frac{l}{SR}\left[\frac{S}{m}\right],$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}\,[\Omega\mathrm{m}],$$

gdzie

l – długość przewodnika,

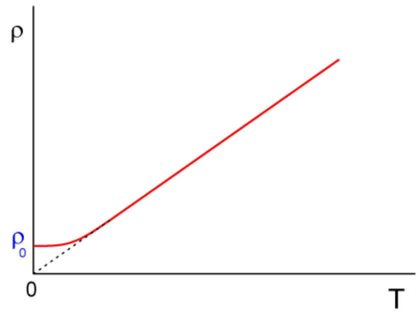
R – rezystancja przewodnika,

S – pole przekroju bocznego przewodnika.

Wartości te są zależne między innymi od:

- temperatury,
- ciśnienia,
- obecności domieszek.

Przewodność elektryczna największa będzie dla przewodników, natomiast najmniejsza dla izolatorów. Ponieważ opór właściwy jest odwrotnością przewodności to dla oporu właściwego wyżej wymienione zjawisko będzie odwrotne.



Zależność oporu właściwego od temperatury,

źródło: https://home.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/w21/main21b.html

Gdy temperatura osiągnie wartości bliskie 0 bezwzględnego, opór opornika nie będzie 0 Ω, a będzie miała w przybliżeniu stałą wartość, nazywamy ją oporem resztkowym. Jest on głównie zależny od czystości metalu.

Zależność oporu właściwego od temperatury przedstawia się wzorem

$$\rho - \rho_0 = \alpha\rho_0(T - T_0),$$

gdzie

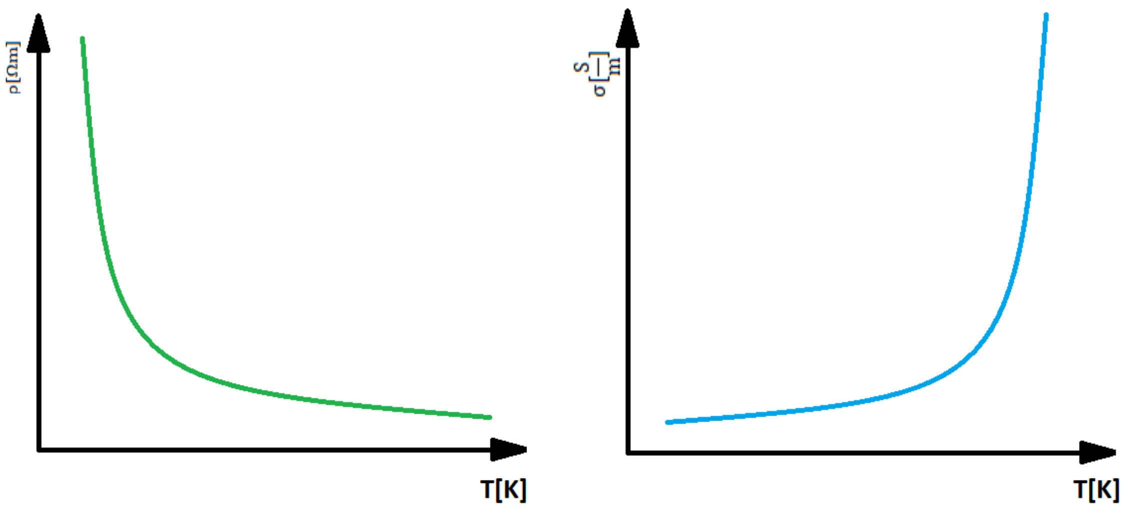
α-współczynnik temperaturowy oporu właściwego,

T_0- temperatura odniesienia,

ρ_0- opór właściwy w temperaturze odniesienia.

Aby metal doskonale przewodził prąd musi mieć doskonałą sieć krystaliczną.

16. Wykresy zależności przewodnictwa półprzewodników od temperatury



Rysunek 1: Zależność oporu właściwego od temperatury

Rysunek 2: Zależność przewodności elektrycznej właściwej od temperatury

17. Nadprzewodniki – metale lub ich stopy, które wykazują się całkowitym zanikiem oporu przy odpowiednio niskiej temperaturze. Wykorzystujemy je między innymi w wielkich elektromagnesach. Obecnie są prowadzone badania, aby budować nadprzewodniki wykazujące się bardzo niskim oporem w temperaturach pokojowych.

Zależność oporu właściwego nadprzewodnika od temperatury, źródło:
https://home.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/w21/main21b.html

18. Moc – ilość energii przekazanej ze źródła na odbiornik w jednostce czasu. Moc możemy również przedstawić jako zmianę energii potencjalnej źródła w czasie. Definicje te opisują następujące wzory

$$P = \frac{dq}{dt}U = IU = \frac{dE_p}{dt},$$

Korzystając z prawa Ohma, moc możemy wyrazić również jako

$$P = I^2R = \frac{I^2}{R} = \frac{U^2}{R} = U^2G.$$

19. Prawo Joule'a pozwala określić ilość ciepła, które wydzieli się podczas przepływu prądu przez przewodnik, wyraża się wzorem

$$Q = RI^2t,$$

gdzie
t – czas przepływu prądu.

20. Siła elektromotoryczna – energia elektryczna ΔW przekazywana ładunkowi Δq. W uproszczeniu, siła elektromotoryczna pozwala wytworzyć stały przepływ ładunków elektrycznych poprzez utrzymanie stałej różnicy potencjałów. Przedstawiamy ją jako SEM. Wyraża się wzorem

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}\ [\mathrm{V}].$$

Siłę elektromotoryczną w układach przedstawiamy jako idealne źródło napięcia połączone szeregowo z opornikiem, który jest jej faktycznym oporem wewnętrznym. Napięcie, które będzie w układzie jest mniejsze od SEM o spadek potencjału na tym oporze.

21. Twierdzenie Thevenina – dowolny układ elektryczny można przedstawić za pomocą idealnego źródła napięcia oraz rezystancji wewnętrznej, równej rezystancji zastępczej całego układu, podłączonej szeregowo.

22. Twierdzenie Nortona - dowolny układ elektryczny można przedstawić za pomocą idealnego źródła prądowego oraz rezystancji wewnętrznej, równej rezystancji zastępczej całego układu, podłączonej równolegle.

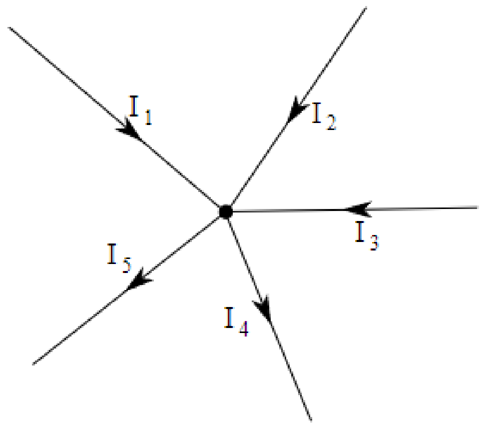
23. Prawa Kirchhoffa

Pierwsze prawo Kirchhoffa – suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła jest równa sumie natężeń prądów z niego wypływających. Twierdzenie to wynika z zasady zachowania ładunku. Precyzyjniej, niech IN będzie zbiorem indeksów prądów wpływających do węzła, natomiast OUT będzie zbiorem indeksów prądów wypływających z węzła. Pierwsze prawo Kirchhoffa możemy zapisać w następującej ogólnej formie matematycznej:

$$\sum_{s \in OUT} I_s = \sum_{s \in IN} I_s.$$

Przykład:

Rozważmy węzeł, do którego wpływają trzy prądy I_1, I_2, I_3 oraz wypływają I_4, I_5, zilustrowane na poniższym rysunku.



Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Prawa_Kirchhoffa_(elektryczno%C5%9B%C4%87)

Pierwsze prawo Kirchhoffa przyjmuje następującą postać:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5.$$

Drugie prawo Kirchhoffa -w każdym obwodzie zamkniętym suma spadków napięć jest równa sumie sił elektromotorycznych. To twierdzenie wynika natomiast z zasady zachowania energii. Precyzyjniej, niech Z będzie zbiorem indeksów sił elektromotorycznych w dowolnym obwodzie zamkniętym, natomiast E będzie zbiorem indeksów elementów obwodu zamkniętego (oczka). Drugie prawo Kirchhoffa możemy zapisać w następującej ogólnej formie matematycznej:

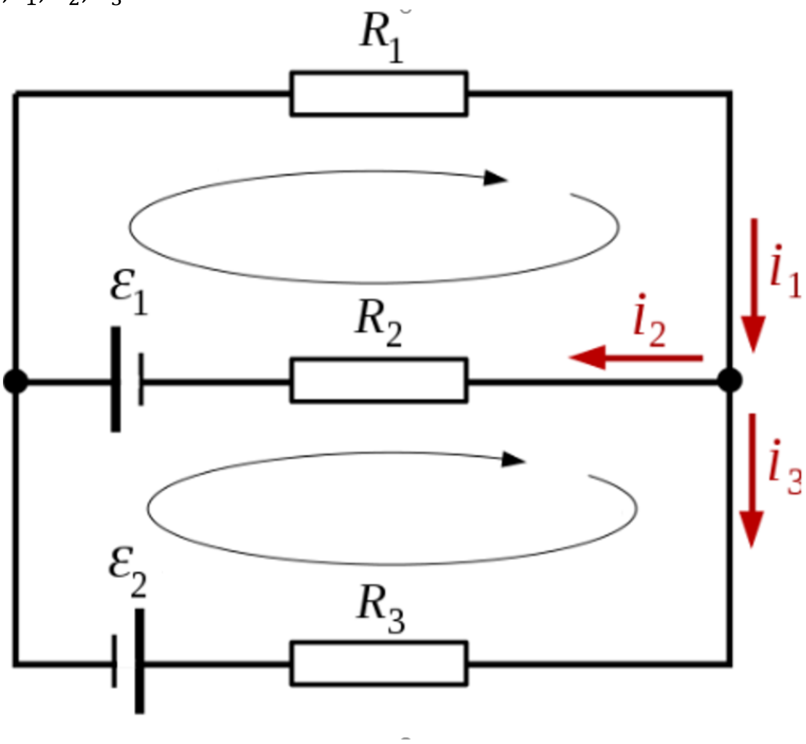
$$\sum_{s \in Z} \varepsilon_s = \sum_{s \in E} U_s,$$

gdzie ε_s - SEM s-tego źródła napięcia, U_s- spadek napięcia na s-tym elemencie oczka.

Przykład:

Rozważmy układ przedstawiony na rysunku poniżej. W układzie istnieją dwa obwody zamknięte składające się z następujących elementów:

1. pierwszy: R_1, R_2, ε_1,
2. drugi: $\varepsilon_2, \varepsilon_1, R_2, R_3$.



Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Prawa_Kirchhoffa_(elektryczno%C5%9B%C4%87)

Z drugiego prawa Kirchhoffa otrzymujemy dla:

pierwszego oczka:

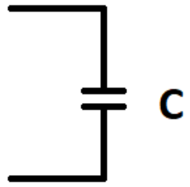
$$\varepsilon_1 = i_1 R_1 + i_2 R_2,$$

drugiego oczka:

$$-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = -i_2 R_2 + i_3 R_3,$$

gdzie $i_s R_s$ jest spadkiem napięcia na rezystorze s.

24. Kondensator – składa z dwóch okładek wykonanych z przewodnika, a na nich może gromadzić ładunki. Pomiędzy nimi znajduje się dielektryk. Naładowany kondensator na jednej z okładek ma ładunki dodatnie a na drugiej ujemne.



Schemat kondensatora w układzie

Pojemność kondensatora przedstawiamy wzorem

$$C = \frac{q}{\Delta \mathrm{V}} = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{U}}\ [F],$$

gdzie

ΔV – różnica potencjałów = U – napięcie

Pojemność kondensatora:

a) płaskiego

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d},$$

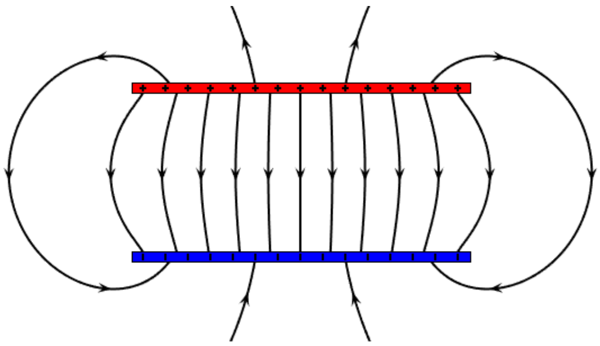
b) walcowego

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(\frac{R_b}{R_a})},$$

c) izolowana kula

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

25. Własności kondensatora



Kierunki pola elektrycznego kondensatora. Źródło: https://pl.wikipedia.org/wiki/Kondensator

Zmianę prądu na kondensatorze przedstawiamy jako

$$I_C(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C\frac{dU_C(t)}{dt},$$

Natomiast zmianę napięcia możemy przedstawić jako

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int I_C(t)dt$$

Kondensator możemy naładować, dostarczając do niego ładunki oraz rozładować, pobierając ładunki.

Wzór przedstawiający napięcie pomiędzy okładkami kondensatora w czasie podczas jego ładowania

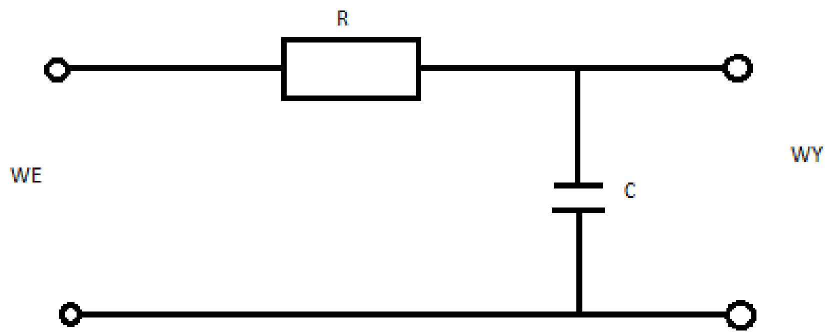
$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_Z(1 - e^{-\frac{t}{RC}})[\mathrm{V}].$$

Wzór przedstawiający napięcie pomiędzy okładkami kondensatora w czasie podczas jego rozładowywania

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = U_Z \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

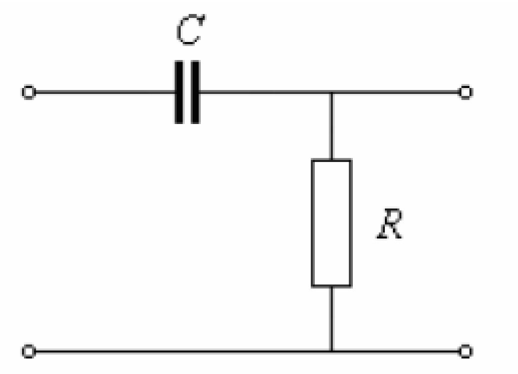
Dla powyższych wzorów RC (stała czasowa) jest stałe, a jednostką jest sekunda[s].

26. Wykorzystując kondensator oraz rezystor możemy skonstruować układ całkujący oraz różniczkujący.



Układ całkujący. Źródło: https://www.elektroda.pl/rtvforum/topic3384179.html

Do układu podawane jest napięcie o kształcie funkcji, która chcemy scałkować, a napięcie na wyjściu będzie całką napięcia wejściowego. Znając zasadę działania kondensatora jesteśmy stworzyć właśnie taki układ.



Układ różniczkujący. Źródło: https://ppef.amu.edu.pl/images/materialy-dydaktyczne/filami/pl/E102_E202_RC_RL.pdf

Układ różniczkujący działa na podobnej zasadzie co układ całkujący. Różnicą tych układów jest budowa, gdzie kondensator jest zamieniony miejscami z opornikiem. Układ ten jest bardzo czuły na zmiany oraz pokazuje, czy zmiany są dodatnie czy ujemne.

27. Układ z cewką również może być układem całkującym lub różniczkującym. W odróżnieniu od układu z kondensatorem, stała czasowa jest wyrażana jako $\frac{L}{R}$[s].

28. Kondensatory mogą również przechowywać energię. Wzory na energię zgromadzoną w kondensatorze możemy przedstawić jako

$$E_C = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$
$$W = \int_0^Q dW = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C}.$$

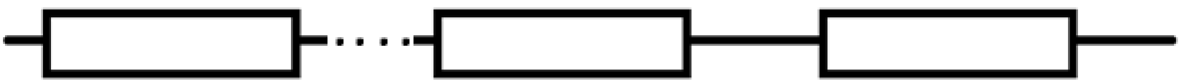
    Gęstość energii pola elektrycznego

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\, C^2,$$

    gdzie
    ε-przenikalność elektryczna ośrodka, w którym znajduje się określone natężenie,
    $\vec{E}$- natężenie pola elektrycznego.

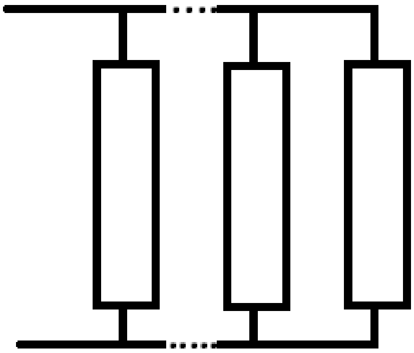
29. Przykładem użycia zmagazynowanej energii w kondensatorze jest defibrylator medyczny. Kondensatory pozwalają na wytworzenie dużej mocy chwilowej ze słabego źródła.

30. Łączenie rezystorów
    a) szeregowe



$$R_z = R_1 + R_2 + .. + R_N$$

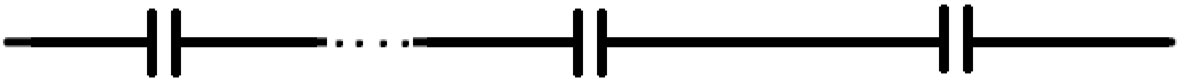
b) równoległe



$$\frac{1}{R_Z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}$$

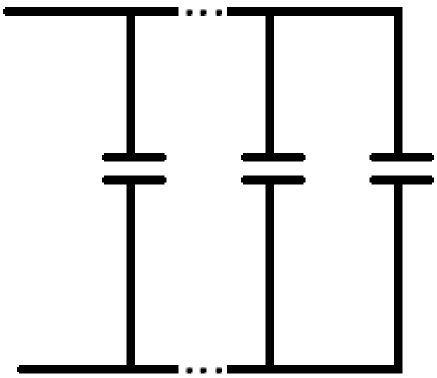
31. Łączenie kondensatorów

a) szeregowe



$$\frac{1}{C_Z} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$$

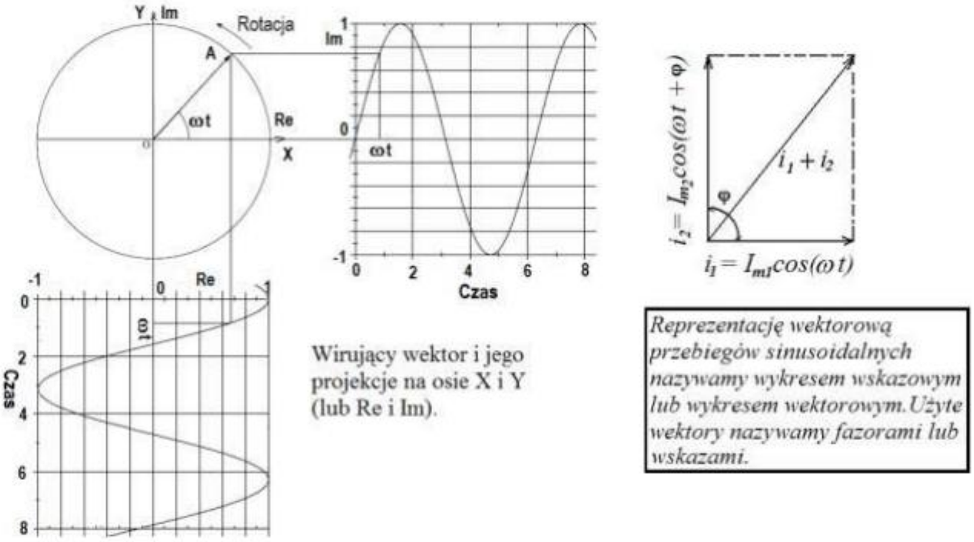
b) równoległe



$$C_z = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$$

Elektryczność cz.2

32. Obwody prądu sinusoidalnego



Rysunek 1 Wykresy przemian napięcia dla liczb zespolonych

Źródło: Materiały z wykładu z miernictwa dr. Ewy Frączek

Prawa Kirchhoffa oraz Ohma obowiązują w pełni dla liczb w zapisie zespolonym.

Zapis sygnału sinusoidalnego w liczbach rzeczywistych

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} U sin(\omega t + \varphi),$$

zapis w liczbach zespolonych

$$u(t) = \underline{u}(t) = U_m \mathrm{e}^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2} U e^{(\omega t + \varphi)},$$

gdzie

u(t) – rzeczywista wartość chwilowa,

U_m- amplituda,

U-wartość skuteczna.

33. W idealnym rezystorze pomiędzy napięciem a natężeniem nie ma przesunięcia fazowego. Natomiast w obwodzie z idealnym kondensatorem napięcie jest opóźnione względem natężenia o kąt fazowy $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, a w obwodzie z idealną cewką napięcie wyprzedza natężenie o kąt fazowy $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Reaktancja – urojona część impedancji (rezystancja zapisana w systemie zespolonym), występuję w obwodach, w których jest element pojemnościowy lub indukcyjny.

Pojemnościowa

$$X_C = \frac{1}{j2\pi f C} = -\frac{j}{2\pi f C},$$

Indukcyjna

$$X_L = j2\pi f L.$$

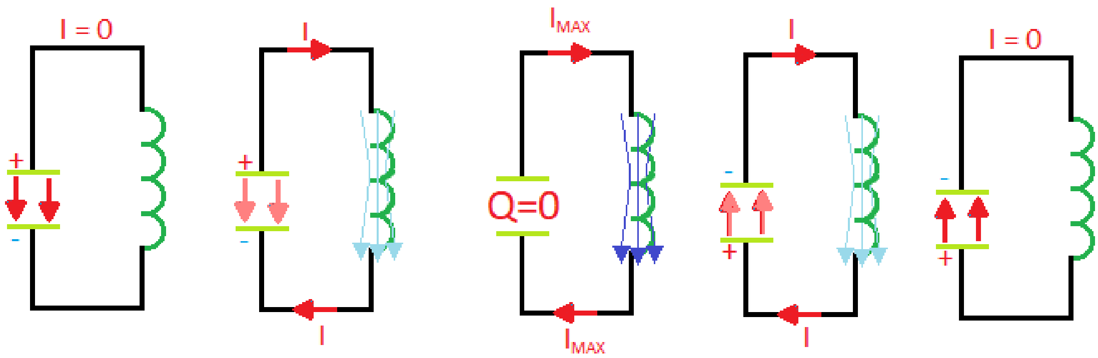
34. Susceptancja – urojona część admitancji (odwrotność impedancji inaczej drożność)
Pojemnościowa

$$B_C = \frac{1}{X_C} = j2\pi f C,$$

Indukcyjna

$$B_L = \frac{1}{X_L} = -\frac{j}{2\pi f L}.$$

35. W układzie z idealną cewką i idealnym kondensatorem, energia zgromadzona w polu magnetycznym będzie przekazywana na energię w polu elektrycznym (energia z cewki będzie przekazywana na energię kondensatora). Gdy energia w polu magnetycznym wyniesie 0, kondensator zacznie oddawać swoją energię na rzecz energii magnetycznej. Prąd w takim układzie będzie płynął stale oraz w jednym kierunku. Po tych pięciu etapach prąd zaczyna płynąć w drugą stronę i następują kolejno te same zjawiska. Jest to przykład oscylatora. Przekazywanie tych energii zostało przedstawione na poniższym rysunku



Rysunek 2 Schematy przepływu ładunku między kondensatorem a cewką

Opis drgań w układach elektrycznych jest identyczny jak opis drgań w układach mechanicznych.

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}},$$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -Q_0\omega\sin(\omega t) = -I_0\sin(\omega t).$$

36. W takim obwodzie występuje prawo Kirchhoffa, które wyraża się wzorem

$$U_L + U_C = 0,$$

gdzie

U_L to napięcie na cewce i przedstawia się wzorem

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C} = -LI_0\omega\cos(\omega t),$$

U_C to napięcie na cewce i wyrażone jest wzorem

$$U_C = \frac{Q}{C}\cos(\omega t)\,.$$

Napięcie maksymalne na cewce jest równe napięciu maksymalnemu na kondensatorze.

37. Energia zgromadzona w kondensatorze przedstawia się wzorem

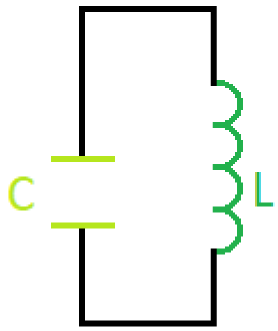
$$E_C = \frac{Q^2}{2C},$$

natomiast energia zgromadzona na przedstawiana jest wzorem

$$E_C = \frac{LI^2}{2}.$$

38. Drgania, które występują w obwodzie LC nazywamy drganiami elektromagnetycznymi.

39. Gdy w obwodzie LC część urojona impedancji wynosi 0 następuje rezonans.
    Przykład:



Rysunek 3 Schemat obwodu LC

$$Z = Z_L + Z_C$$

$$Z_L = j\omega L \qquad\qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

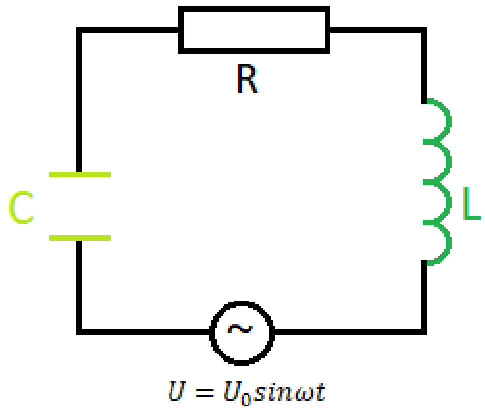
$$Z(\omega) = j\omega L + \left(-\frac{j}{\omega C}\right) = j\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} = 0$$

$$\omega^2 LC - 1 = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Gdy zestawimy układ jak na rysunku powyżej, a kwadrat częstotliwości zmian tego układu będzie równy odwrotności iloczynu indukcyjności cewki i pojemności kondensatora to w układzie wystąpi rezonans. Jest to układ idealny – nie występuje w nim tłumienie. Gdy w układzie pojawi się rezystancja, drgania będą tłumione. W powyższym przypadku występuje tylko impedancja urojona, rzeczywista impedancja (rezystancja) jest równa 0.

40. Obwód RLC



Rysunek 4 Schemat obwodu RLC

Dla powyższego układu zachodzi II prawo Kirchhoffa

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 sin\omega t.$$

Rozwiązaniem układu jest

$$I = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\mathrm{I}_0 = \frac{U_0}{|Z|}$$

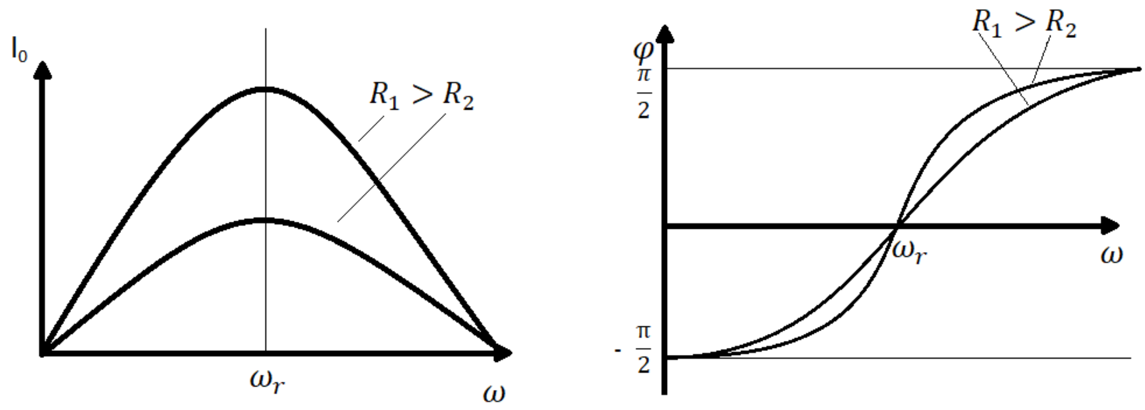
$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

41. Rezonans

Jak wcześniej wspomniano rezonans występuje, gdy część urojona impedancji wynosi 0, w przypadku gdy rzeczywista część impedancji wynosi 0, natężenie prądu rośnie w nieskończoność. Natomiast gdy w układzie pojawi się opór wystąpi tłumienie i natężenie będzie rosło do pewnej wartość. Wykres przedstawiający maksymalną wartość natężenia przy częstotliwości rezonansowej został przedstawiony na Rysunku 5. Przedstawia on również przesunięcie fazowe między napięciem a prądem w tym układzie. Wniosek jaki możemy z tego rysunku wyciągnąć to fakt, iż dla częstotliwości rezonansowej, natężenie oraz napięcie są w zgodnej fazie. Jest to zależność wspólna dla wszystkich wartości tłumienia. Różnicą, którą powoduje tłumienie jest szybkość narastania różnicy fazowej. Dla mniejszych tłumień różnica ta rośnie szybciej.



Rysunek 5 Zależność natężenia w obwodzie od częstotliwość rezonansowej dla różnych tłumień oraz zależność różnicy fazowej od częstotliwości rezonansowej dla różnych tłumień

Aby wyznaczyć współczynnik tłumienia również i w tym przypadku możemy stosować analogię do mechanicznego ruchu drgającego

$$\beta = \frac{1}{2\tau},$$

gdzie

τ - stała czasowa.

Gdy $\beta = 1$ układ powraca do pozycji równowagi bez drgań (krytycznie tłumiony),

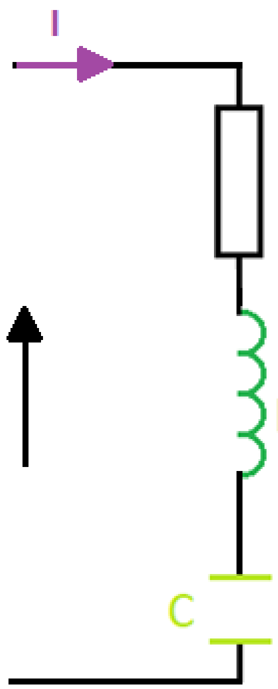
$\beta > 1$ układ powraca do stanu równowagi w sposób wykładniczy (silnie tłumiony), jednak nie oscyluje,

$1 > \beta > 0$ układ oscylując powraca do stanu równowagi, amplituda maleje w sposób wykładniczy,

$\beta = 0$ układ oscyluje, a amplituda jest stała.

42. Rezonans (układ szeregowy)

W układzie szeregowym natężenie przepływające przez każdy element układu jest stałe. Chcąc uzyskać rezonans w takim układzie, przesunięcie fazowe w układzie musi się równać 0. Na cewce napięcie wyprzedza prąd o $\varphi = \frac{\pi}{2}$, natomiast na kondensatorze prąd wyprzedza napięcie o $\varphi = \frac{\pi}{2}$.



Rysunek 6 Schemat układu RLC połączonego szeregowo

W takim układzie impedancja przedstawia się wzorem

$$Z_r = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Jak wyżej wspomniano, żeby zaszedł rezonans, urojona część impedancji musi wynosić 0 więc

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Dla powyższego obwodu kwadrat częstotliwość rezonansowej musi być równy odwrotności iloczynu indukcyjności cewki oraz pojemności kondensatora.

43. Zależność impedancji dla cewki oraz kondensatora dla różnych częstotliwości w połączeniach szeregowych.

Patrząc na wzór na impedancje cewki tj. $L = j\omega L = j2\pi f C$, możemy zauważyć, że im większa częstotliwość tym większa będzie impedancja. Natomiast impedancja kondensatora będzie się zmniejszać wraz ze wzrostem częstotliwości układu. W przypadku gdy częstotliwość jest równa częstotliwość rezonansowej, impedancje obydwóch elementów są sobie równe. Na podstawie tych zależności mówimy, iż gdy $f > f_0$ układ ma charakter indukcyjny, natomiast gdy $f < f_0$ układ ma charakter pojemnościowy.

44. Pasmo przenoszenia – jest to przedział częstotliwości zaczynających się w punkcie, gdzie moc prądu jest równa połowie mocy maksymalnej i kończący się następnym punkcie, gdzie moc prądu jest równa połowie mocy maksymalnej prądu. Możemy to również określić jako pasmo +/- 3 dB. Pasmo to pozwala nam określić dobroć układu która wyraża się wzorem

$$Q = \frac{f_r}{\Delta f}$$

gdzie
Q – dobroć układu,
f_r - częstotliwość rezonansowa,
Δf – pasmo przenoszenia.

45. Dobroć układu – określa, ile energii całkowitej jest tracona w jednym okresie. Możemy ją przedstawić wzorem

$$Q = 2\pi \frac{E_C}{E_{ST}},$$

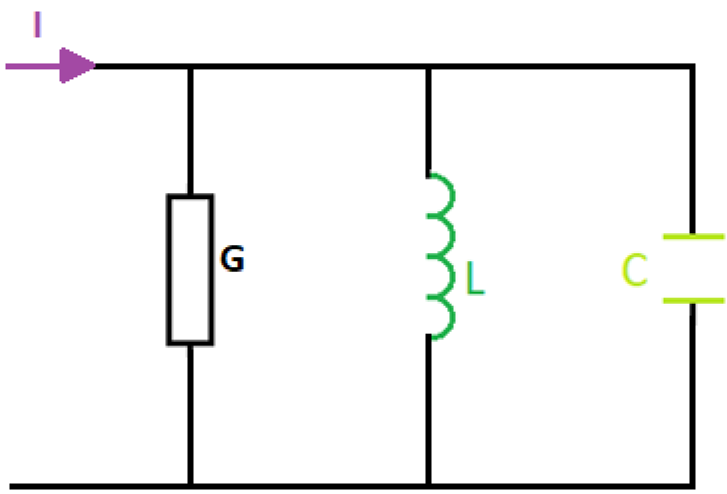
gdzie

E_C – energia całkowita układu,

E_{ST} – energia stracona w trakcie jednego okresu.

Na podstawie powyższych wzorów możemy powiedzieć, iż im wyższa dobroć tym mniejsza ilość energii układu jest tracona. Najwyższą dobrocią cechują się oscylatory atomowe i cząsteczkowe.

46. Rezonans (układ równoległy)



Rysunek 7 Schemat układu RLC połączonego równolegle

W układzie równoległym napięcie na każdym z elementów jest stałe. Tutaj również, gdy urojona część impedancji będzie równa 0 nastąpi rezonans. W przypadku układów równoległych łatwiej jest wykorzystać odwrotność impedancji – admitancje, która dla przedstawionego wyżej układu wyraża się wzorem

$$Y_r = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega R} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$
$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$
$$\omega^2 = \frac{1}{CL}$$

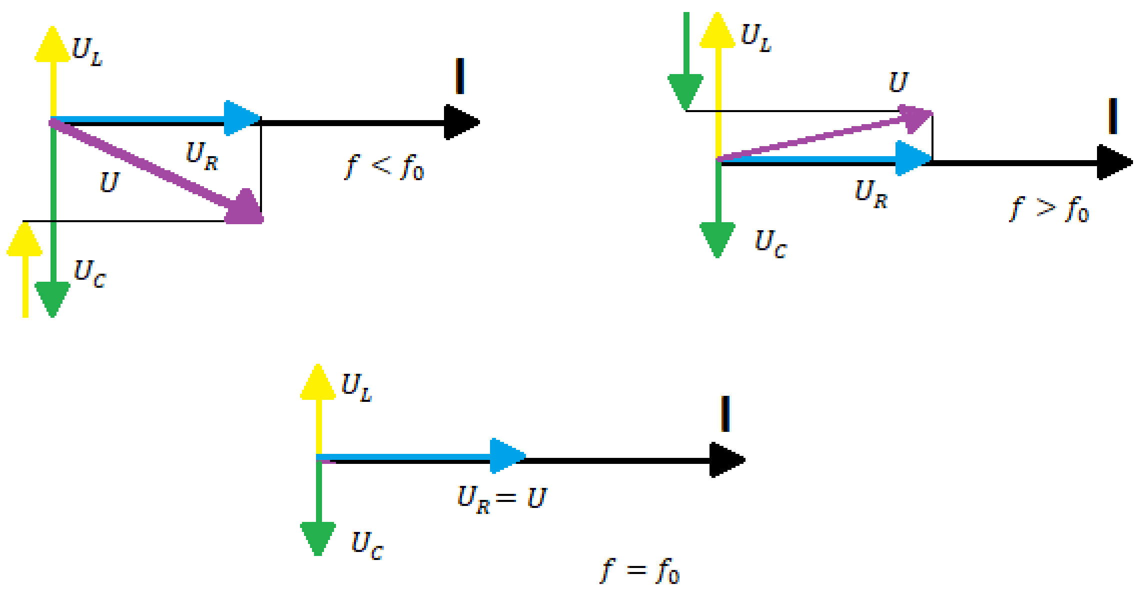
Dla powyższego obwodu kwadrat częstotliwość rezonansowej musi być równy odwrotności iloczynu indukcyjności cewki oraz pojemności kondensatora. Jest to taki sam warunek jak dla połączenia tych urządzeń w sposób szeregowy. Nie jest to jednak zależność, dla większości układów częstotliwości rezonansowe dla połączeń szeregowych i równoległych będą się różnić.

47. Zależność susceptancji dla cewki oraz kondensatora dla różnych częstotliwości w połączeniach równoległych.

Patrząc na wzór na susceptancje kondensatora tj. $Y_C = j\omega C = j2\pi f C$, możemy zauważyć, że im większa częstotliwość tym większa będzie susceptancja. Natomiast susceptancja cewki będzie się zmniejszać wraz z wzrostem częstotliwości układu. W przypadku gdy częstotliwość jest równa częstotliwość rezonansowej, susceptancje obydwóch elementów są sobie równe.

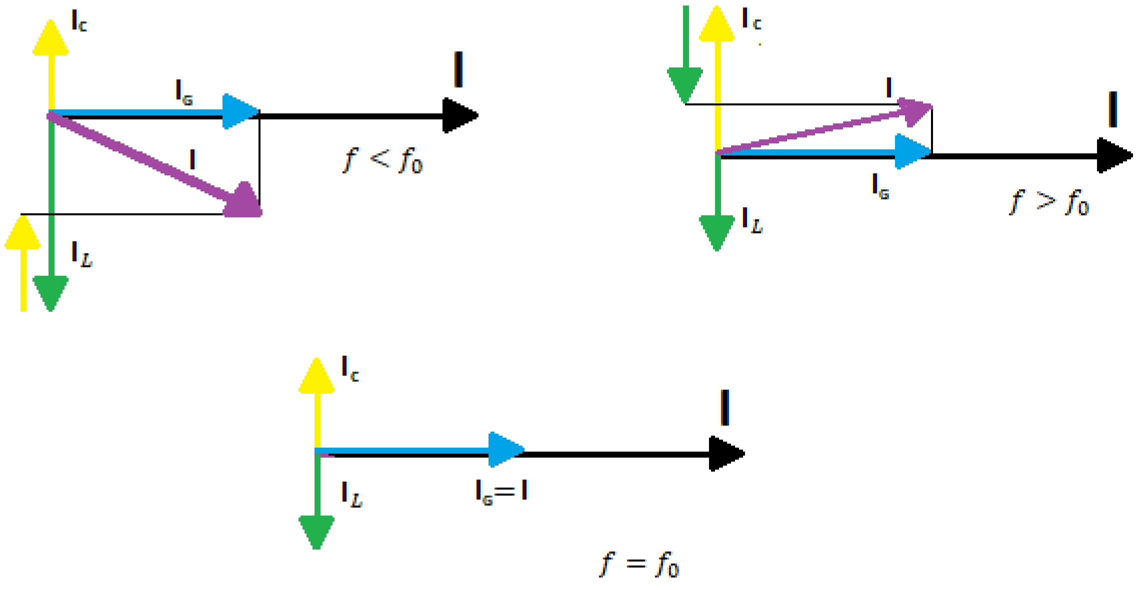
48. Wykresy wskazowe

1) napięć dla układu szeregowego RLC



Rysunek 8 Wykresy wskazowe dla napięć w układzie RLC szeregowym

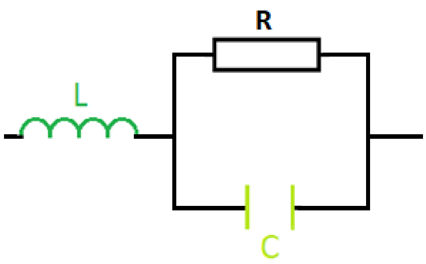
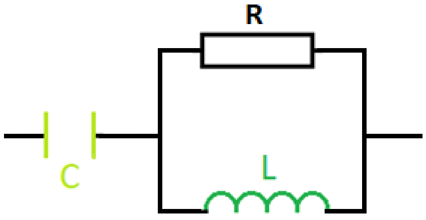
2) prądów dla układu równoległego RLC

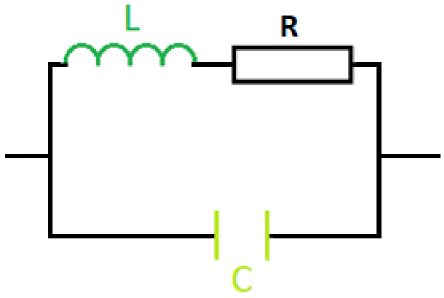
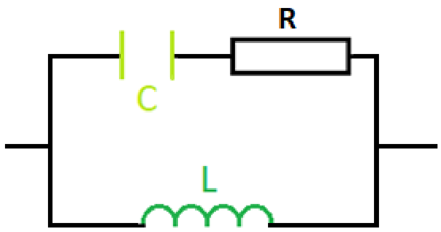
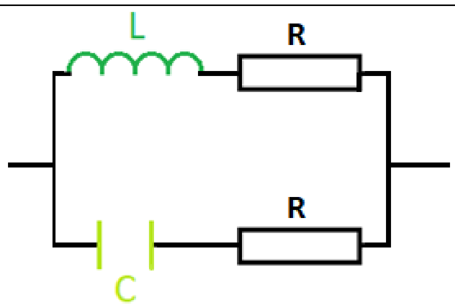


Rysunek 9 Wykresy wskazowe dla prądów w układzie RLC równoległym

49. Obwody rezonansowe i ich parametry

Tabela 1 Schematy oraz wzory na wartość częstości kołowej i impedancji przy rezonansie

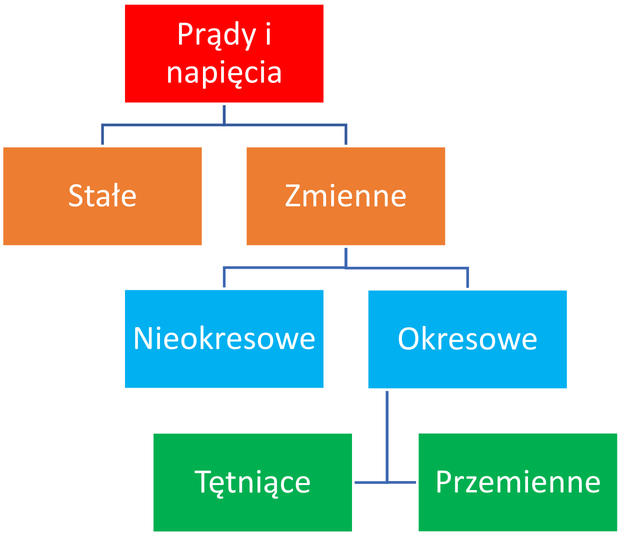
Schemat obwodu	Częstość kołowa	Impedancja przy rezonansie
	$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2}}$	$\frac{L}{RC}$
	$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC - \frac{L^2}{R}}}$	$\frac{L}{RC}$

	$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$	$\frac{L}{RC}$
	$\omega_r = \sqrt{LC - R^2C^2}$	$\frac{L}{RC}$
	$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{R}{2} + \frac{L}{2RC}$

50. Zastosowanie rezonansu

1) anteny,
2) radia (analogowe, zmiana częstotliwości rezonansowej zmieniała pasmo odbierania fal),
3) rezonator kwarcowy.

51. Podział sygnałów prądu oraz napięcia



52. Parametry napięć zmiennych

1) Wartość maksymalna - największa wartość napięcia w sygnale
2) Wartość skuteczna
   Jest to wartość prądu stałego, która spowoduje wydzielenie na odbiorniku takiej samej energii w tym samym czasie co prąd przemienny, którego wartość skuteczną chcemy znać. Przedstawia się wzorem
   $$U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u(t)^2\,dt}.$$
   Wartość skuteczną możemy nazwać RMS, jest to skrót z j. angielskiego, który przedstawia się po rozwinięciu jako Root Mean Square (pierwiastek, średnia, kwadrat).
3) Wartość średnia
   Jest to wartość prądu stałego, która spowoduje przepływ takiego samego ładunku w tym samym czasie co prąd przemienny, którego wartość średnią chcemy znać. Przedstawia się wzorem
   $$U_{\acute{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt,$$
4) Wartość średnia wyprostowana
   W sygnałach występują dwa prostowania jednopołówkowe i dwupołówkowe. W przypadku jednopołówkowego pomijamy wartości ujemne sygnału, a w drugim przypadku wszystkie wartości umieszczamy w wartości bezwzględnej. Wartości te przedstawiamy następującymi wzorami
   $$U_{\acute{S}} = \frac{1}{2T}\int_0^T |u(t)|\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |u(t)|\,dt,$$
   Wzór na wartość skuteczną sygnału wyprostowanego jednopołówkowego

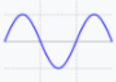
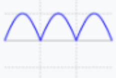
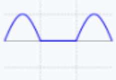
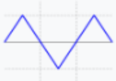
   $$U_{\acute{S}} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} |u(t)|\,dt.$$
   Wzór na wartość skuteczną sygnału wyprostowanego dwupołówkowego

5) Współczynnik szczytu
   Jest to stosunek wartości maksymalnej napięcia do jego wartości skutecznej, przedstawiany jest wzorem
   $$K_k = \frac{W_M}{W_e},$$
   gdzie
   K_k- współczynnik szczytu,
   W_M – wartość maksymalna,
   $W_{\acute{s}}$ − wartość średnia bezwzględna.

6) Współczynnik kształtu
   Określa kształt przebiegu sygnał, wyraża się wzorem
   $$FF = \frac{W_{sk}}{W_e},$$
   gdzie
   FF – współczynnik kształtu,
   W_{sk} – wartość skuteczna,
   $W_{\acute{s}} - wartość\ średnia\ bezwzględna.$
7) Współczynnik zawartości harmonicznych
   Jest to odchylenie sygnały od przebiegu sinusoidalnego

53. Parametry dla wybranych sygnałów okresowych

Tabela 2 Źródło https://pl.wikipedia.org/wiki/Sygna%C5%82_okresowy

Rodzaj sygnału	Postać sygnału	Wartość średnia bezwzględna	Wartość skuteczna	Współczynnik kształtu	Współczynnik szczytu
Sygnał stały (DC)		1	1	1	1
Sinusoidalny		$\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$	$\sqrt{2} \approx 1{,}414$
Sinusoidalny wyprostowany dwupołówkowo		$\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1{,}11$	$\sqrt{2} \approx 1{,}414$
Sinusoidalny wyprostowany jednopołówkowo		$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}318$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}571$	2
Trójkątny symetryczny		$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$	$\sqrt{3} \approx 1{,}732$
Prostokątny symetryczny (współczynnik wypełnienia 50%)		1	1	1	1
Piłokształtny		$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$	$\sqrt{3} \approx 1{,}732$

54. Moc prądu zmiennego

W przypadku gdy nie ma przesunięcia fazowego między prądem a napięciem możemy zastosować tylko liczby rzeczywiste. W innych przypadkach musimy przejść na zapis zespolony.

$$P_{śr} = \frac{U_{sk} \cdot I_{sk}}{2} \cdot \cos\varphi = \frac{U_{sk} \cdot I_{sk}}{2},$$

gdzie

U_{sk}- skuteczna wartość napięcia,

I_{sk}- skuteczna wartość prądu.

55. Moc chwilowa dla prądów i napięć przemiennych przedstawia się wzorem

$$P(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)]$$

gdzie

U_m- maksymalna wartość napięcia,

I_m- maksymalna wartość prądu.

56. Moc czynna jest uśrednioną wartością mocy chwilowej i po przekształceniach przedstawia się wzorem

$$P = U_{sk} I_{sk} cos(\varphi),$$

gdzie

U_{sk}- skuteczna wartość napięcia,

I_{sk}- skuteczna wartość prądu.

Jednostką mocy czynnej jest Wat [W]. Zapisujemy ją w liczbach rzeczywistych.

57. Moc bierna wyraża się wzorem

$$Q = jU_S I_S \sin(\varphi).$$

Jednostką mocy biernej jest War [Var]. Zapisujemy ją w liczbach urojonych.

58. Moc zespolona

$$S = UI^* = P + jQ = UIcos(\varphi) + jUIsin(\varphi) = I^2R + jl^2X = \frac{I^2Z^2}{Z^*} = \frac{U^2}{Z^*},$$

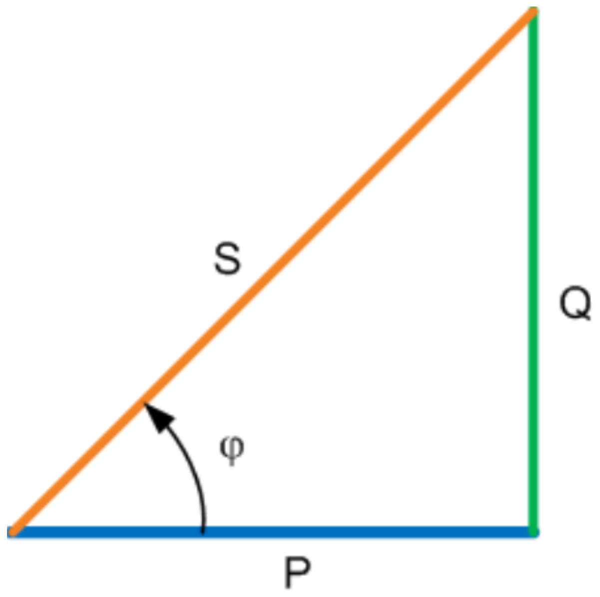
Z uwagi na to, iż Q – urojona część mocy zależy od reaktancji układu, a układ może być indukcyjny lub pojemnościowy to w przypadku obciążenia indukcyjnego kąt między napięciem, a prądem jest dodatni, natomiast w przypadku obciążenia pojemnościowego kąt jest ujemny. Ze względu na to w przypadku indukcyjnym współczynnik mocy jest opóźniony. Natomiast w przypadku obciążenia pojemnościowego współczynnik ten jest ujemny. Gdy współczynnik jest dodatni prąd jest opóźniony względem napięcia, a gdy jest ujemny prąd wyprzedza napięcie. „*” we wzorach oznacza sprzężenie wartości zespolonej. Moc czynna jest składową rzeczywistą mocy zespolonej, natomiast moc bierna jest składową urojoną.

59. Moc pozorna wyraża się wzorem

$$|S| = |UI^*|.$$

Jednostką mocy pozornej jest woltamper [VA]. Jest to moduł mocy rzeczywistej – czynnej oraz urojonej – biernej.

60. Trójkąt mocy



Rysunek 10 Trójkąt mocy. Źródło: Materiały do wykładu dr. hab. Leszka Kasprzyka.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\left(U_{sk}I_{sk}cos(\varphi)\right)^2 + (U_S I_S \sin(\varphi))^{\,2}}$$

Przykładowe zadania

1. L = 1 mH, C = 1 nF, t = 0 s, I = 1 A. Podać po jakim czasie na kondensatorze będzie maksymalny ładunek oraz ile on wynosi. Układ LC połączony jest szeregowo.

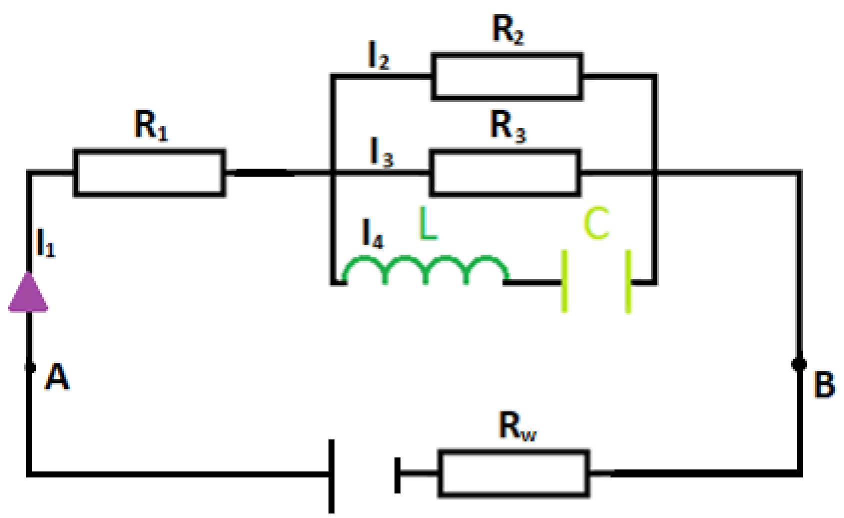
$$E_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{10^{-3}H \cdot 1A^2}{2}$$
$$E_C = \frac{Q^2}{2C}$$
$$E_C = E_L$$
$$Q = \sqrt{E_L \cdot 2C}$$
$$E_L = 0{,}5 \cdot 10^{-3}J$$
$$\boldsymbol{Q = \sqrt{0,5 \cdot 10^{-3}J \cdot 2 \cdot 10^{-9}F} = 10^{-6}C}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{2\pi}{T}$$
$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Okres (T) jest to czas pomiędzy dwoma następującymi po sobie pełnymi rozładowaniami kondensatora. Połowa tego czasu to czas między całkowitym rozładowaniem kondensatora i jednocześnie całkowitym naładowaniem kondensatora więc

$$t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi\sqrt{LC}}{2} = \pi\sqrt{LC}$$
$$\boldsymbol{t = \pi\sqrt{LC} = \pi\sqrt{10^{-3}H \cdot 10^{-9}F} = 3,14 \cdot 10^{-6}s}$$

2.



$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4,$$

gdzie

I_1- jest stałym natężeniem.

Ponieważ prąd w całym układzie jest stały a w gałęzi, gdzie „płynie” I_4 znajduje się kondensator $I_4 = 0$ ponieważ przez kondensator nie popłynie prąd stały.

$$R_{AB} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$$
$$I_1 = \frac{U}{R_{AB} + R_w}$$

Spadki napięcia na poszczególnych elementach:

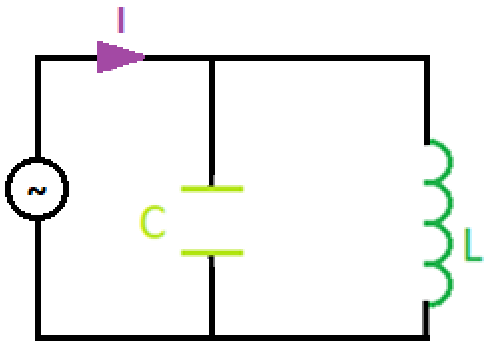
$$U_1 = I_1/R_1$$

$$U_{23} = \frac{I_1}{R_{23}}$$

$$U_{23} = U_2 = U_3$$

$$U_W = \frac{I_1}{R_w}$$

3.



$$I = I_L + I_C$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{U}{\frac{1}{j\omega C}}$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{j\omega L}$$

$$I = Uj(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

Źródła

https://pl.wikipedia.org/wiki/Prawo_Coulomba

https://pl.wikipedia.org/wiki/Przenikalność_elektryczna

https://pl.wikipedia.org/wiki/Gestość_prądu_elektrycznego

https://pl.wikipedia.org/wiki/Kondensator

https://pl.wikipedia.org/wiki/Warto%C5%9B%C4%87_%C5%9Brednia_przebiegu_czasowego

https://pl.wikipedia.org/wiki/Warto%C5%9B%C4%87_skuteczna

https://pl.wikipedia.org/wiki/Wsp%C3%B3%C5%82czynnik_kszta%C5%82tu_przebiegu_czasowego

https://pl.wikipedia.org/wiki/Moc_bierna

Wykład z fizyki dr. Ewy Frączek

Materiały z wykładów z miernictwa