Matematyka Dyskretna – Lista 9 – 11-17.05.2023r.

1. Narysować wszystkie nieizomorficzne grafy (nie tylko proste) o:

   (a) 3 wierzchołkach i 3 krawędziach;

   (b) 4 wierzchołkach i 4 krawędziach.

2. Udowodnić, że przynajmniej jeden z grafów G i G' (Wykład 6, str. 5) jest spójny.

3. Udowodnić, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe drogi proste mają wspólny wierzchołek.

4.* Udowodnić, że graf prosty $G = (V, E)$ z $|V| > 2$ jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy $G - v$, będące wynikiem usunięcia z G wierzchołka v wraz z przyległymi krawędziami, są spójne.

5. Wykazać, że:

   (a) G jest spójny iff (if and only if) dla dowolnego rozbicia $V(G)$ na dwa rozłączne podzbiory V_1 i V_2 istnieje krawędź łącząca wierzchołek w V_1 z wierzchołkiem w V_2;

   (b) n-wierzchołkowy graf prosty o p składowych spójnych ma co najwyżej $\binom{n-p+1}{2}$ krawędzi; wywnioskować stąd, że graf prosty o ponad $\binom{n-1}{2}$ krawędziach jest spójny.

6. Graf G jest samodopełniający się, jeżeli G jest izomorficzny z G'. Pokazać, że graf samodopełniający się ma $4k$ lub $4k+1$ wierzchołków dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Narysować wszystkie grafy samodopełniające się o 4 i 5 wierzchołkach.

7. Przez Q_k oznaczamy graf k-wymiarowej kostki. Wierzchołkami grafu są ciągi binarne długości k. Dwa wierzchołki są sąsiednie iff odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jednym bitem. Wyznaczyć liczbę wierzchołków oraz krawędzi tego grafu. Pokazać, że jest to graf dwudzielny.

8. Podać interpretację elementów $A \cdot \mathbf{1}$ oraz $A^2 \cdot \mathbf{1}$, gdzie $\mathbf{1}$ jest wektorem złożonym z jedynek, a A – macierzą sąsiedztwa grafu.