G - zbiór niepusty

$(G, +)$ - grupa abelowa gdy: $+$ jest łączne i przemienne
$0 \in G$ jako element neutralny względem $+$
każdy element z G ma element przeciwny

$(P, +, \cdot)$ - pierścień przemienny z jedynką gdy: $\cdot$ jest łączne i przemienne
$1 \in G$ jako element neutralny wzgl. $\cdot$
rozdzielność mnożenia wzgl. dodawania
$(P, +)$ jest grupą abelową.

Przykłady $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
$\mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$

Przykład 1 Dany wielomian z pierścienia $Z[X]$ zapisz w postaci sumy jednomianów: $f = (\underset{a_0}{5}, \underset{a_1}{1}, \underset{a_2}{0}, \underset{a_3}{-2}, \underset{a_4}{8}, 0, 0, \ldots 0)$

Wsk do 4.1

R

$$f(x) = 8x^4 - 2x^3 + x + 5$$

Przykład 2 Dany wielomian z pierścienia $Z[X]$ zapisz w postaci ciągu

$$f(x) = 2x^5 + x^2 - x + 10$$

Wsk do 4.2

R

$$f = (\underset{a_0}{10}, \underset{a_1}{-1}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_3}{0}, \underset{a_4}{0}, \underset{a_5}{2}, 0, 0, \ldots)$$

Przykład 3 Dane są wielomiany $f(x) = 2x^2+x+1$, $g(x) = x^3+2$ w $\mathbb{Z}_3[X]$. Wykonać działania: $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, $g:f$

Wsk do

4.3 – 4.6, 4.8

R

$$(f+g)(x) \equiv (2x^2+x+1)+(x^3+2) \equiv x^3+2x^2+x$$

$$(f-g)(x) \equiv (2x^2+x+1)-(x^3+2) \equiv 2x^3+2x^2+x+2$$

bo $-1 \equiv 2 \pmod 3$

$$(f\cdot g)(x) \equiv (2x^2+x+1)(x^3+2) \equiv 2x^5+x^2+x^4+2x+x^3+2 = 2x^5+x^4+x^3+x^2+2x+2$$

bo $4 \equiv 1 \pmod 3$

$(g:f)(x)$

$$(x^3+2):(2x^2+x+1) \equiv 2x+2$$

$$\begin{array}{l} -\ x^3+2x^2+2x \\ \hline \quad x^2+x+2 \\ -\ x^2+2x+2 \\ \hline \quad 2x \end{array}$$

$2x$ reszta

x	1	2
x^{-1}	1	2

$$(x^3+2) \equiv (2x^2+x+1)(2x+2)+2x$$

Przykład 4 Korzystając ze schematu Hornera wykonać dzielenie z resztą w $\mathbb{Z}_6[x]$

$x^4+5x^3+2x^2+4x+3$ przez $x+2$

(R)

	1	5	2	4	3
4		4	0	2	0
	1	3	2	0	$\boxed{3}$ reszta

x^3

$-2 \equiv 4 \pmod 6$

$$x^4+5x^3+2x^2+4x+3 \equiv (x^3+3x^2+2x)(x+2)+3$$

Weźcie do 4.7, 4.8, 4.12

Algorytm Euklidesa dla wielomianów

Wsk do 4.10

(Na każdym etapie wykonujemy dzielenie wielomianów)

Chcemy wyznaczyć $NWD(f_1, f_2)$. Wtedy kolejno

$f_1 : f_2 = q_1 + r_1$

$f_2 : r_1 = q_2 + r_2$

$r_1 : r_2 = q_3 + r_3$

$r_2 : r_3 = q_4 + r_4$

$\vdots$

$r_{n-2} : r_{n-1} = q_n + 0$

gdzie f_1, f_2 – wielomiany

$r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ – reszty z dzielenia (to też wielomiany)

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ – ilorazy (to też wielomiany)

Wtedy $NWD(f_1, f_2) = r_{n-1}$