CAŁKA POTRÓJNA

(Analiza Matematyczna 1, wykład 14)

Całka potrójna w prostopadłościanie
(analogie z całką jednej i dwóch zmiennych)

Niech P będzie prostopadłościanem opisanym w układzie $OXYZ$ nierównościami:

$$a \le x \le b, \qquad c \le y \le d, \qquad e \le z \le f,$$

a $f(x,y,z)$ funkcją w nim określoną i ograniczoną.

Prostopadłościan P dzielimy na n prostopadłościanów P_k o objętościach odpowiednio $|P_k|$ i w każdym z tych prostopadłościanów wybieramy punkt $A_k(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Rozważmy ciąg sum całkowych funkcji $f(x,y,z)$, dla którego $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$, gdzie d_n oznacza najdłuższą przekątną prostopadłościanów $P_1, P_2, ..., P_n$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)|P_k|$$

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)|P_k|$$

niezależna od dokonanego podziału i od wyboru punktów A_k, to nazywamy ją całką potrójną funkcji $f(x,y,z)$ w prostopadłościanie P i oznaczamy $\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dxdydz$, tzn.

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dxdydz \overset{df}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)|P_k|.$$

Jeżeli funkcja *f*(*x*,*y*,*z*) jest ciągła w prostopadłościanie *P* opisanym nierównościami:

$$a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \; e \le z \le f \text{, to}$$

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\,dz \right) dy \right] dx .$$

Uwага

Całka znajdująca się po prawej stronie powyższego wzoru jest równa każdej z pięciu całek różniących się jedynie kolejnością całkowania.

Przykład. ***Obliczyć całkę potrójną z funkcji***

$$f(x,y,z)=x^2y^2z$$

w prostopadłościanie P ograniczonym płaszczyznami:

x = 1, x = 3, y = 0, y = 2, z = 2, z = 4 .

Rozwiązanie

Mamy $\iiint\limits_P x^2y^2z\,dxdydz=\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_2^4 x^2y^2z\,dz$ **.**

Obliczamy całki w kolejności od wewnętrznej do zewnętrznej. Zatem

$$\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_2^4 x^2y^2z\,dz=\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^2 x^2y^2\left[\frac{1}{2}z^2\right]_2^4 dy=$$

$$=6\int\limits_1^3 x^2\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^2 dx=16\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3=138\frac{2}{3}$$

Uwaga 2.

Jeżeli funkcja $f(x,y,z)=h(x)\cdot g(y)\cdot k(z)$ **w prostopadłościanie *P* opisanym nierównościami**

$$a \le x \le b,\ c \le y \le d,\ e \le z \le f\ ,\ \text{to}$$

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x,y,z)dz = \int_a^b h(x)dx \cdot \int_c^d g(y)dy \cdot \int_e^f k(z)dz .$$

Całka potrójna w obszarze normalnym

Obszar domknięty *V* określony nierównościami:

$$p(x, y) \leq z \leq q(x, y)\ ,\ (x,y) \in D,$$

gdzie *D* jest obszarem normalnym na płaszczyźnie *OXY* , a funkcje

$p(x, y)$ i $q(x, y)$ są ciągłe w obszarze *D*,

nazywamy obszarem normalnym względem płaszczyzny *OXY*.

Jeżeli funkcja $f(x,y,z)$ jest ciągła w obszarze domkniętym *V* opisanym nierównościami $p(x, y) \leq z \leq q(x, y)$ **, $(x,y) \in D$, to**

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z)\,dz \right] dxdy.$$

Uwaga

1. **W sposób analogiczny definiujemy obszary normalne względem płaszczyzn *OXZ* i *OYZ* oraz całkę potrójną w tych obszarach.**
2. **Własności całki potrójne są analogiczne do własności całki podwójnej.**

Przykład

Obliczyć całkę potrójną z funkcji $f(x,y,z)=x+4$ w obszarze *V* ograniczonym powierzchniami: *x* =0, *y* = 0, *z* = 0, *z* = 4 – *x*, *x* + *y* = 2 , $y=x^2$.

Rozwiązanie

Obszar *V* można zapisać jako obszar normalny względem płaszczyzny *OXY* za pomocą układu nierówności

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le 2-x \\ 0 \le z \le 4-x \end{cases}.$$

Wtedy

$$\iiint\limits_V (x+4)dxdydz =$$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} dy \int_0^{4-x} (x+4)dz = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x+4)\left[z\right]_0^{4-x} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(16-x^2\right)\left[y\right]_{x^2}^{2-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4+x^3-18x^2-16x+32\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-6x^3-8x^2+32x\right]_0^1 = 18\frac{9}{20}$$

Interpretacja geometryczna całki potrójnej

Całka $|V| = \iiint\limits_V dxdydz$ przedstawia objętość bryły *V*.

Przykład

Obliczyć objętość bryły *V* ograniczonej powierzchniami :

$$z = 0,\ z = 9,\ y = x^2,\ 4 - 3y = x^2.$$

Rozwiązanie

Bryłę *V* można opisać nierównościami

$$\begin{cases} 0 \le z \le 9 \\ -1 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \frac{4}{3} - \frac{1}{3}x^2 \end{cases}$$

jako obszar normalny względem płaszczyzny *OXZ*.

Wtedy

$$|V| = \int_0^9 dz \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x^2} dy = \int_0^9 dz \cdot \int_{-1}^1 [y]_{x^2}^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}x^2} dx =$$

$$= 12\int_{-1}^1 \left(1 - x^2\right) dx = 12\left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = 16$$

Zmiana zmiennych w całce potrójnej

Podobnie jak w przypadku całki podwójnej, zmiana zmiennych w całce potrójnej może ułatwić obliczenia.

1. Współrzędne cylindryczne

Współrzędne kartezjańskie (x,y,z)$\in V$ zastępujemy współrzędnymi cylindrycznymi (r,φ, z)$\in\Delta$, zgodnie ze wzorami:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi \ .$$
$$z = z$$

Jakobian tego przekształcenia jest równy

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \ .$$

Wówczas

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\cdot r dr d\varphi dz$$

2. Współrzędne sferyczne

Współrzędne kartezjańskie (x,y,z)$\in V$ zastępujemy współrzędnymi sferycznymi (r,φ, θ)$\in \Omega$, zgodnie ze wzorami

$$x = r\cos\varphi\cos\theta$$

$$y = r\sin\varphi\cos\theta$$

$$z = r\sin\theta$$

Jakobian tego przekształcenia

$$J = r^2\cos\theta.$$

Wówczas

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint_\Omega f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, z\sin\theta)\cdot r^2\cos\theta drd\varphi d\theta$$

Przykład: **Obliczyć** $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$**, gdzie *V* jest kulą o promieniu *R* i środku w początku układu współrzędnych.**

Rozwiązanie

Przychodząc do współrzędnych sferycznych, czyli podstawiając

$$x = rcos\varphi\cos\theta$$

$$y = rsin\varphi\cos\theta$$

$$z = z\sin\theta$$

rozważany obszar możemy zapisać układem nierówności

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \varphi \le 2\pi . \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ponieważ jakobian przekształcenia jest równy $J = r^2\cos\theta$ **i** $x^2+y^2+z^2 = r^2$**, to**

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \iiint\limits_\Omega r^2 \cdot r^2 \cos\theta drd\varphi d\theta \quad \text{czyli}$$

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz =$$

$$= \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = \frac{2\pi}{5} R^5 \left[-\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{5} R^5$$

Interpretacja fizyczna całki potrójnej

Jeżeli funkcja $\rho(x,y,z)$ jest gęstością masy obszaru V, to masa obszaru

$$m = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dxdydz \cdot$$

1. Momenty statyczne oraz bezwładności obszaru V względem odpowiednich osi i płaszczyzn:

Względem	Momenty	
	Statyczne obszaru V	**Bezwładności obszaru V**
płasz-czyzny *OXY*	$M_{xy} = \iiint_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz$	$B_{xy} = \iiint_V z^2 \rho(x,y,z)\,dxdydz$
płasz-czyzny *OXZ*	$M_{xz} = \iiint_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz$	$B_{xz} = \iiint_V y^2 \rho(x,y,z)\,dxdydz$
płasz-czyzny *OYZ*	$M_{yz} = \iiint_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz$	$B_{yz} = \iiint_V x^2 \rho(x,y,z)\,dxdydz$
osi *OX*	$M_x = \iiint_V \sqrt{y^2+z^2}\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$	$B_x = \iiint_V \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$
osi *OY*	$M_y = \iiint_V \sqrt{x^2+z^2}\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$	$B_y = \iiint_V \left(x^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$
osi *OZ*	$M_z = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2\rho(x,y,z)\,dxdydz}$	$B_z = \iiint_V \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$
punktu (0,0,0)	$M_0 = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$	$B_0 = \iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dxdydz$

2. Współrzędne środka ciężkości dane są wzorami:

$$x_0 = \frac{1}{m} M_{yz}, y_0 = \frac{1}{m} M_{xz}, z_0 = \frac{1}{m} M_{xy}.$$

3. Jeżeli funkcja $\delta(x, y, z)$ jest gęstością ładunku rozłożonego w obszarze *V*, to całkowity ładunek elektryczny tego obszaru

$$L = \iiint\limits_V \delta(x, y, z)\,dxdydz.$$

4. Jeżeli funkcja $\delta(x, y)$ jest gęstością powierzchniową ładunku rozłożonego w obszarze *D*, to całkowity ładunek elektryczny tego obszaru:

$$L = \iint\limits_D \delta(x, y)\,dxdy.$$