

Algebra z geometrią analityczną

dr Joanna Jureczko

Zestaw 6

Działania na macierzach

6.1. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -8 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -8 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Które z poniższych działań są wykonalne? W przypadku pozytywnej odpowiedzi wykonać działanie:

- a) $2A + 3B$; b) $3C - 12D$;
- c) $A + E$; d) $(-5)E$;
- e) $7A - 6D - C$; f) $13A + D$;
- g) $E + F$; h) $3G$;
- i) $5H - 13G$; j) $A + B + C + D - E - F - G - H$.

6.2. Dla macierzy $A - H$ z zadania 6.1 sprawdzić, które z poniższych działań są wykonalne. W przypadku odpowiedzi pozytywnej wykonać działanie:

- a) $A \cdot B$; b) $A \cdot B^T$;
- c) $A \cdot C$; d) $E \cdot B$;
- e) $A \cdot H^T$; f) $E \cdot G$;
- g) $C^T \cdot D$; h) $E^T \cdot F^T$;
- i) $C \cdot H$; j) $G \cdot D$;
- k) $(A + B)^3$; l) $(F - E)^2$;
- m) $(A + B) \cdot (C - D)$; n) $(2F - 3E)^T \cdot (5G - H)$.

6.3.* Obliczyć kilka początkowych potęg macierzy A , następnie wysunąć hipotezę o postaci macierzy A^n , ($n \in \mathbb{N}$) i uzasadnić ją za pomocą indukcji matematycznej:

- a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$;
- c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; d) $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$.

ODPOWIEDZI

6.1. a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 23 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} -90 & 15 & 120 \\ 3 & 33 & 39 \end{bmatrix}$; c) działanie niewykonalne; d) $\begin{bmatrix} -15 & 0 \\ -10 & -5 \\ -20 & 0 \end{bmatrix}$; e) działanie niewykonalne; f) działanie niewykonalne; g) $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 5 & -7 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$; h) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -18 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$; i) $\begin{bmatrix} 15 & 7 & 5 \\ -8 & 108 & 12 \\ 15 & -8 & 0 \end{bmatrix}$; j) działanie niewykonalne.

6.2. a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 8 \\ -3 & -3 & 29 \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 11 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$; e) działanie niewykonalne; f) działanie niewykonalne; g) $\begin{bmatrix} -14 & -2 & 16 \\ 7 & 19 & -8 \\ 56 & -60 & -64 \end{bmatrix}$; h) działanie niewykonalne; i) $\begin{bmatrix} 19 & 6 & 3 \\ 37 & -13 & -24 \end{bmatrix}$; j) działanie niewykonalne; k) $\begin{bmatrix} -19 & 142 \\ -71 & 478 \end{bmatrix}$; l) działanie niewykonalne; m) $\begin{bmatrix} -7 & 0 & 42 \\ 17 & -10 & 88 \end{bmatrix}$; n) $\begin{bmatrix} 27 & -33 & 1 \\ -10 & 596 & 0 \end{bmatrix}$.

6.3. a) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $A^n = A$ dla n nieparzystych, $A^n = I$ dla n parzystych;

c) $A^n = A$ dla n nieparzystych, $A^n = I$ dla n parzystych;

d) $A = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$ dla $n \geq 2$.