# ALGEBRA LINIOWA 2

dr Joanna Jureczko

Politechnika Wrocławska
Wydział Elektroniki
Katedra Telekomunikacji i Teleinformatyki

Niniejsza prezentacja stanowi jedynie skrypt do wykładu. Wykład będzie wzbogacony o dodatkowe informacje, tj. dowody wybranych twierdzeń przykłady, wskazówwki do zadań itp. Dodatkowe informacje dotyczące programu znajdują się w Karcie Przedmiotu.

# WYKŁAD 7

Przekształcenia liniowe
Reprezentacja macierzowa odwzorowań liniowych

# PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

**Przekształcenia liniowe**

Niech $V$ i $V'$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$. Funkcję $\varphi\colon V \to V'$ nazywamy **przekształceniem liniowym**, jeśli spełnione są warunki:
1) $\forall_{v,w\in V} \quad \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$;
2) $\forall_{a\in\mathbb{K}}\forall_{v\in V} \quad \varphi(a\cdot v) = a\cdot\varphi(v)$.

Warunki 1) i 2) są równoważne warunkowi
3) $\forall_{v,w\in V}\forall_{a,b\in\mathbb{K}} \quad \varphi(av+bw) = a\varphi(v) + b\varphi(w)$.

Przekształcenie liniowe jest **homomorfizmem** przestrzeni lniowych.

Wyróżniamy następujące typy homomorfizmów:

a) monomorfizm = homomorfizm różnowartościowy

b) epimorfizm = homomorfizm, który jest "na"

c) izomorfizm = homomorfizm wzajemnie jednoznaczny

d) endomorfizm = homomorfizm w siebie czyli $\varphi : V \to V$

e) automorfizm = endomorfizm wzajemnie jednoznaczny.

Wprowadzamy oznaczenia

$L(V, V')$ - zbiór wszystkich przekształceń liniowych przestrzeni $V$ w przestrzeń $V'$.

$End(V)$ - zbiór wszystkich endomorfizmów przestrzeni $V$.

$Aut(V)$ - zbiór wszystkich automorfizmów przestrzeni $V$.

Mówimy, że przestrzenie liniowe $V$ i $V'$ są izomorficzne, jeśli istnieje izomorfizm $\varphi\colon V \to V'$. Piszemy wtedy $V \cong V'$.

**Uwaga:** Każda $n$-wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem $\mathbb{K}$ jest izomorficzna z przestrzenią $\mathbb{K}^n$.

Niech $V$ i $V'$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ i niech $(v_t)_{t\in T}$ będzie bazą przestrzeni $V$. Dla dowolnego układu $(v'_t)_{t\in T}$ przestrzeni $V'$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\varphi\colon V \to V'$ takie, że $\varphi(v_t) = v'_t$, dla każdego $t \in T$. Przekształcenie to jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $(v'_t)_{t\in T}$ jest bazą przestrzeni $V'$.

**Uwaga:** Gdy $V$ i $V'$ są przestrzeniami skończenie wymiarowymi, to $T$ jest zbiorem skończonym.

Jeśli $\mathbb{O}$ i $\mathbb{O}'$ są wektorami zerowymi odpowiednio $V$ i $V'$ oraz $\varphi\colon V \to V'$ jest przekształceniem liniowym, to $\varphi(\mathbb{O}) = \mathbb{O}'$.

Niech $V$ i $V'$ będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem $\mathbb{K}$ i niech $(v_1, ..., v_n) \in V$ oraz $(v'_1, ..., v'_n) \in V'$. Wtedy następujące warunki są równoważne
1) istnieje przekształcenie liniowe $\varphi\colon V \to V'$ takie, że $\varphi(v_t) = v'_t$, dla każdego $t = 1, ..., n$;
2) $\forall_{a_1, ..., a_n} \in \mathbb{K}\ (a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_1 v'_1 + ... + a_n v'_n = 0')$

# REPREZENTACJA MACIERZOWA PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWEGO

Niech $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ i $\mathscr{C} = (w_1, ..., w_m)$ będą odpowiednio bazami przestrzeni liniowych $V$ i $V'$ i niech $\varphi \in L(V, V')$. **Macierzą przekształcenia** $\varphi$ w bazach $\mathscr{B}(\varphi)$ oraz $\mathscr{C}$ nazywamy macierz $M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\varphi)$ wymiaru $m \times n$, której elementy $a_{ij} \in \mathbb{K}$ są określone przez równości $\varphi(v_j) = a_{1j}w_1 + ... + a_{mj}w_m, (j = 1, ..., n)$.

**Uwaga:** Zamiast $M_{\mathscr{B}\mathscr{B}}(\varphi)$ piszemy $M_{\mathscr{B}}(\varphi)$. Jeśli $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ są bazami kanonicznymi to piszemy $M(\varphi)$ zamiast $M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\varphi)$.

Niech $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n)$ i $\mathscr{C} = (w_1, ..., w_m)$ będą odpowiednio bazami przestrzeni liniowych $V$ i $V'$ i niech $M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\varphi)$ będzie macierzą przekształcenia liniowego $\varphi\colon V \to V'$. Dla dowolnego wektora $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \in V$ współrzędne $y_1, ..., y_m$ w bazie $\mathscr{C}$ jego obrazu $\varphi(v)$ wyrażają się wzorem

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\varphi) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathscr{B} = (v_1, ..., v_n), \mathscr{C} = (w_1, ..., w_n)$ i $\mathscr{D} = (u_1, ..., u_m)$ będą odpowiednio bazami przestrzeni liniowych $V, V'$ i $V"$ i niech $\varphi \in L(V, V')$ i $\psi \in L(V', V")$. Zachodzi wtedy równość

$$M_{\mathscr{B}\mathscr{D}}(\psi \circ \varphi) = M_{\mathscr{C}\mathscr{D}}(\psi) \cdot M_{\mathscr{B}\mathscr{C}}(\varphi)$$