Politechnika Wrocławska

Inżynierskie zastosowania statystyki

Ćwiczenia
Semestr zimowy 2020/21

ĆWICZENIA 2

dr inż. Agata Kirjanów-Błażej

Wydział Elektroniki
Katedra Systemów i Sieci Komputerowych

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

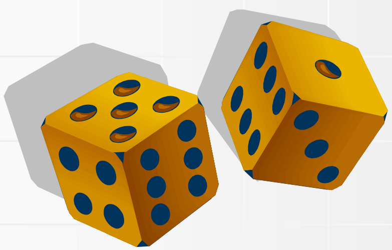
Politechnika Wrocławska

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa – analiza praw rządzących zdarzeniami losowymi.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych (przestrzeń probabilistyczna) → jest to zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych (zakładamy, że jest on skończony)

Oznaczenie: Ω



Moc przestrzeni zdarzeń elementarnych → liczba elementów danej przestrzeni probabilistycznej

Oznaczenie: $\overline{\overline{\Omega}}$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo zbioru pustego

$$P(\emptyset)=0$$

Przykład:
Rzucamy kostką idealną- zawsze coś wypadnie i wszystkie możliwości są równie prawdopodobne. Prawdopodobieństwo, że nic nie wypadnie jest równe zeru.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A' (przeciwnego do zdarzenia *A*):

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Przykład:
Rzucamy kostką.
A- wypadnie „6"
Wtedy A'- nie wypadła „6"

P(A)=1/6

Więc

P(A')=1-1/6=5/6

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa (Laplace'a)

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa nie pokazuje jak wyznaczać prawdopodobieństwo zdarzeń.

Jeżeli zdarzenia elementarne danego doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne, to można korzystać z **klasycznej definicji prawdopodobieństwa**, która wskazuje metodę obliczania prawdopodobieństw zdarzeń.

Jeżeli Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych i $A \subset \Omega$, to liczbę:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu } A}{\text{liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych}}$$

Gdzie $\overline{\overline{A}}$, $\overline{\overline{\Omega}}$ oznaczają odpowiednio moc zbioru ***A*** (ilość elementów zbioru ***A***) oraz moc zbioru Ω (ilość elementów zbioru Ω), nazywamy **prawdopodobieństwem zdarzenia** .

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Przy obliczaniu liczby wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia i liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu wykorzystuje się najczęściej wzory kombinatoryczne.

Przykład 1:

W partii 10 żarówek 4 są wadliwe.
Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród zakupionych 3 żarówek:
- wszystkie są wadliwe,
- dokładnie jedna jest wadliwa,
- przynajmniej jedna jest wadliwa.

Rozwiązanie:

Doświadczenie polega na losowym wyjęciu 3 żarówek spośród 10 żarówek.
Istotne jest, jakie żarówki zostały wyjęte, natomiast kolejność ich wyjmowania nie gra roli.
Zdarzeniami elementarnymi (jednakowo prawdopodobnymi) są więc wszystkie trzyelementowe podzbiory zbioru dziesięcioelementowego, czyli trzyelementowe kombinacje tego zbioru.
Ich liczba jest równa:

$$\overline{\overline{\Omega}} = C_{10}^{3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Oznaczmy zdarzenia:

A - wybór trzech wadliwych żarówek,
B - wybór jednej wadliwej i dwóch sprawnych żarówek,
C - wybór przynajmniej jednej wadliwej żarówki.

1. Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu ***A*** są wszystkie trzyelementowe podzbiory zbioru czteroelementowego (wybór trzech żarówek wadliwych spośród czterech wadliwych). Ich liczba jest równa:

$$\overline{\overline{A}} = C_4^3 = \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{n}{n-1} = n$$

Tak więc prawdopodobieństwo zdarzenia ***A*** wynosi:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Oznaczmy zdarzenia:

A - wybór trzech wadliwych żarówek,
B **- wybór jednej wadliwej i dwóch sprawnych żarówek**,
C - wybór przynajmniej jednej wadliwej żarówki.

2. Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu są wszystkie trzyelementowe podzbiory zawierające jedną żarówkę wadliwą wybraną spośród czterech wadliwych i dwie żarówki sprawne wybrane spośród sześciu sprawnych. Ich liczba jest równa:

$$\overline{\overline{B}} = \binom{4}{1}\cdot\binom{6}{2} = 4\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!} = 4\cdot\frac{5\cdot 6}{2} = 4\cdot 15 = 60$$

Przy obliczaniu ilości zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu ***B*** skorzystaliśmy z reguły mnożenia.
Tak więc prawdopodobieństwo zdarzenia ***B*** wynosi:

$$P(B) = \frac{\overline{\overline{B}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Oznaczmy zdarzenia:

A - wybór trzech wadliwych żarówek,
B - wybór jednej wadliwej i dwóch sprawnych żarówek,
C - wybór przynajmniej jednej wadliwej żarówki.

Prawdopodobieństwo zdarzenia ***C*** łatwiej jest obliczyć przy pomocy zdarzenia przeciwnego ***C':***
- nie wybrano ani jednej żarówki wadliwej, czyli wybrano trzy sprawne.

Zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu ***C'*** są wszystkie trzyelementowe podzbiory zbioru sześcioelementowego (trzy żarówki sprawne wybrane z sześciu sprawnych). Ich liczba jest równa:

$$\bar{\bar{C'}} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 3} = 20$$

Tak więc prawdopodobieństwo zdarzenia ***C'*** wynosi:

$$P(C') = \frac{\bar{\bar{C'}}}{\bar{\bar{\Omega}}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia jest równe:

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Przykład 2:

W kolejce stoi 5 kobiet i 7 mężczyzn. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że kobiety stoją przed mężczyznami.

Doświadczenie polega na ustawieniu w sposób losowy 12 osób w kolejce. Zdarzeniami elementarnymi są więc wszystkie permutacje zbioru 12-elementowego. Ich liczba jest równa:

$$\overline{\overline{\Omega}} = P_{12} = 12!$$

Oznaczmy zdarzenie:

A - kobiety stoją przed mężczyznami.

Zdarzenie A polega na ustawienie najpierw 5 kobiet w dowolnej kolejności na 5! sposobów, a następnie 7 mężczyzn też w dowolnej kolejności na 7! sposobów. Korzystając z reguły mnożenia można obliczyć ilość zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu :

$$\overline{\overline{A}} = 5! \cdot 7!$$

Tak więc prawdopodobieństwo zdarzenia, że kobiety będą stały przed mężczyznami wynosi:

$$P(A) = \frac{5! \cdot 7!}{12!} = \frac{120}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 11} = \frac{1}{792}$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo – szanse zajścia wybranego zdarzenia; funkcja na podzbiorze Ω.

Permutacja n-wyrazowego zbioru A – n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów zbioru A; gdzie n ϵ N; wykorzystywane do obliczeń **wariacji bez powtórzeń**.

$$\mathbf{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n\text{-}2) \cdot (n\text{-}1) \cdot n}$$

Wariacja z powtórzeniami to k-wyrazowa wariacja zbioru n-elementowego, gdzie n,k ϵ N

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Wariacja z powtórzeniami - ile jest możliwych wyników sześciokrotnego rzutu kością?

$$\Omega = \{k_1, k_2, \dots, k_6\}$$

$$k_n \in \{1,2,3,4,5,6\}, \quad n \in \langle 1,6 \rangle, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\overline{V}_6^6 = 6^6 = \underbrace{46656}$$

Wariacja bez powtórzeń – ile jest możliwości wyciągnięcia kart z 6-karcianej talii?

$$\frac{6}{sp} \to \frac{5}{sp} \to \frac{4}{sp} \to \frac{3}{sp} \to \frac{2}{sp} \to \frac{1}{sp}$$

sp. - liczba **sposobów** wypełnienia danego ‚slotu’

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Wariacja bez powtórzeń – ile jest możliwości wyciągnięcia 6 kart z 10-karcianej talii?

$$\frac{10}{sp} \to \frac{9}{sp} \to \frac{8}{sp} \to \frac{7}{sp} \to \frac{6}{sp} \to \frac{5}{sp} \Rightarrow 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 =$$

$$= 151200$$

$n = 10$

$k = 6$

$$\frac{n!}{(k-n)!} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 151200$$

Zadania cz. 1

1. Ile liczb czterocyfrowych można utworzyć, wykorzystując wszystkie cyfry liczby 2351?

2. Ile jest liczb czterocyfrowych podzielnych przez 5 jeżeli:

a) cyfry mogą się powtarzać?
b) cyfry nie mogą się powtarzać?
c) cyfry nie mogą się powtarzać i liczba musi być większa od 6484?

3. Ile jest liczb czterocyfrowych większych od 8572? Cyfry nie mogą się powtarzać.

4. Na ile sposobów może zaparkować 8 samochodów na parkingu mającym 15 miejsc?

5. Z talii 52 kart losowanych jest 8 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania tylko czarnych kart (pik lub trefl)?

Politechnika Wrocławska

Dystrybuanta zmiennej losowej

Do czego służy dystrybuanta?

Czasem nie interesuje nas konkretne zdarzenie, a grupa zdarzeń, np. nie interesuje nas, jaka jest szansa, że na zakupach wydamy dokładnie 200zł, ale będzie nas interesowało jaka jest szansa, że wydamy mniej niż 200zł, inaczej byśmy weszli na debet a tego nie chcemy. Do wyliczenia takiego prawdopodobieństwa posłużmy się **dystrybuantą,** czyli prawdopodobieństwem, że zajdzie zdarzenie **nie większe od ustalonej wartości** (w powyższym przykładzie od 200zł).

Dystrybuanta zmiennej losowej

Zmienna losowa x_i	1	2	3	4	5	6
Prawdopodobieństwo p_i	t	0,3	0,05	t	0,15	0,1

a) Wyznaczyć wartość parametru t

b) Wyznaczyć dystrybuantę

c) Narysować wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuanty

d) Obliczyć wartość oczekiwaną

e) Obliczyć odchylenie standardowe

f) Obliczyć $P(1,5<X\leq 3)$ i $P(4<X\leq 6)$

Dystrybuanta zmiennej losowej

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	t	0,3	0,05	t	0,15	0,1

a) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ $\qquad t + 0{,}3 + 0{,}05 + t + 0{,}15 + 0{,}1 = 1$

$$2t = 0{,}4 \quad / : 2$$

$$\underline{t = 0{,}2}$$

b)

x_i	$(-\infty, 1\rangle$	$(1, 2\rangle$	$(2, 3\rangle$	$(3, 4\rangle$	$(4, 5\rangle$	$(5, 6\rangle$	$(6, +\infty)$
$F(x)$	0	0,2	0,5	0,55	0,75	0,9	1

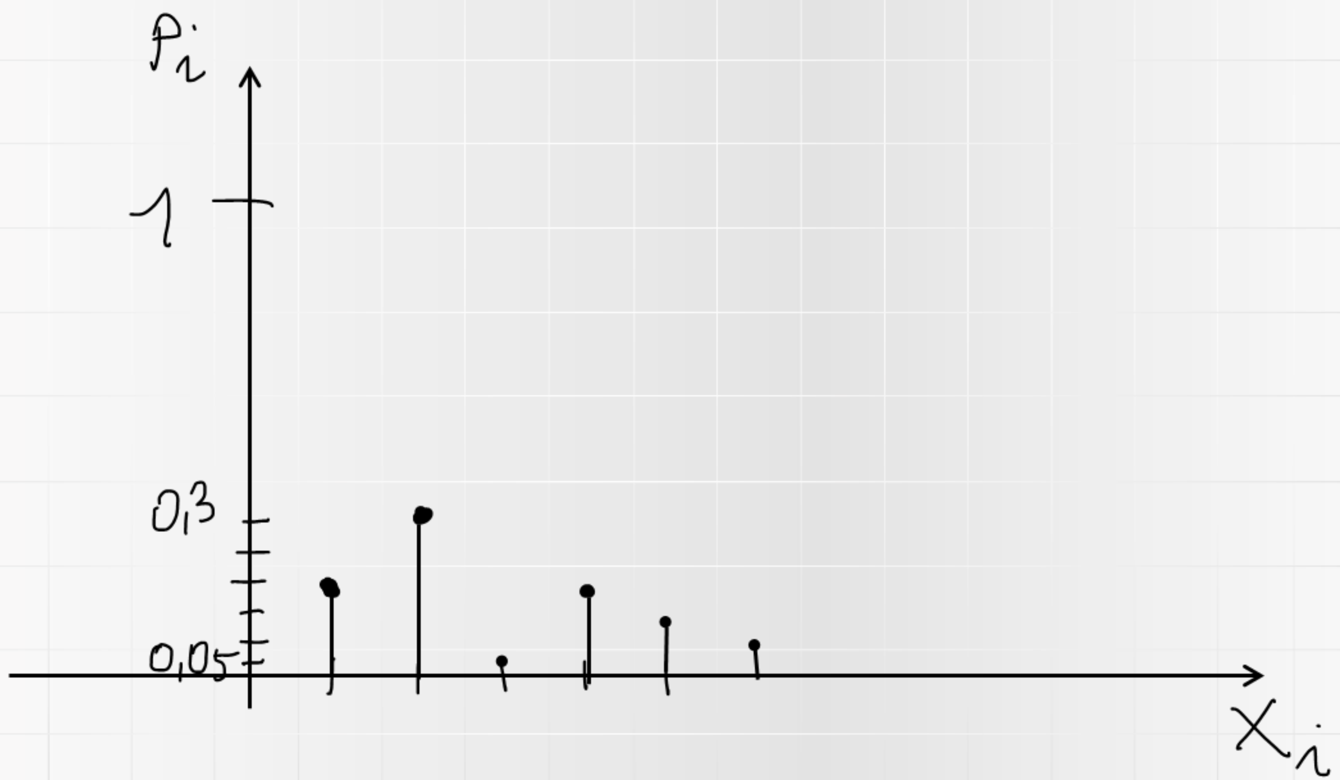
+0,2 $\quad$ 0,3 $\quad$ 0,05 $\quad$ 0,2 $\quad$ 0,15 $\quad$ 0,1

Dystrybuanta zmiennej losowej

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	t	0,3	0,05	t	0,15	0,1

$t = 0{,}2$

c)



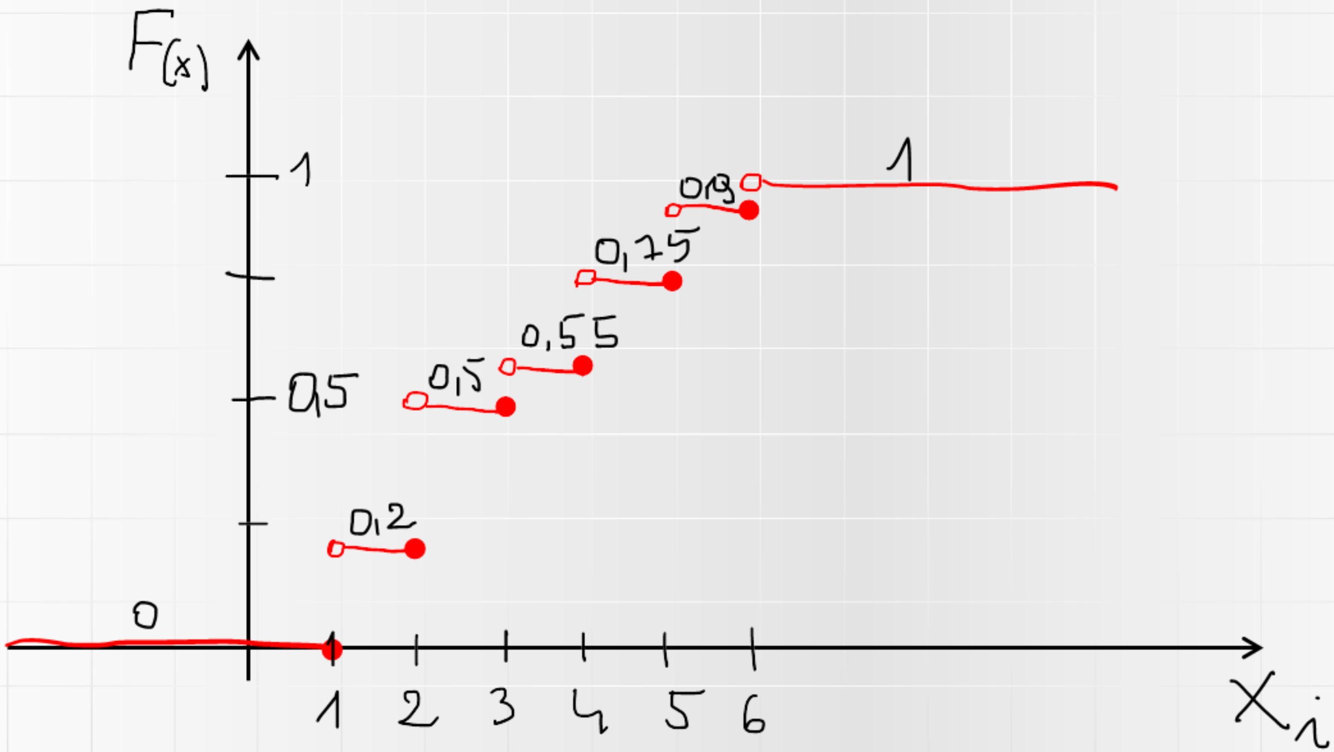
Dystrybuanta zmiennej losowej

b)

x_i	$(-\infty, 1>$	$(1, 2>$	$(2, 3>$	$(3, 4>$	$(4, 5>$	$(5, 6>$	$(6, +\infty)$
$F(x)$	0	0,2	0,5	0,55	0,75	0,9	1

+0,2 +0,3 +0,05 +0,2 +0,15 +0,1

c)



Dystrybuanta zmiennej losowej

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	t	0,3	0,05	t	0,15	0,1

$t = 0{,}2$

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}15 + 0{,}8 + 0{,}75 + 0{,}6 = \underbrace{= 3{,}1}$

Dystrybuanta zmiennej losowej

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	t	0,3	0,05	t	0,15	0,1

$t = 0{,}2$

e) $D(x) = \sqrt{D^2(x)}$

$$D^2X = EX^2 - E(x)^2$$

$$EX^2 = 1^2 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}05 + 4^2 \cdot 0{,}2 + 5^2 \cdot 0{,}15 + 6^2 \cdot 0{,}1 =$$

$$= 0{,}2 + 1{,}2 + 0{,}45 + 3{,}2 + 3{,}75 + 3{,}6 = 12{,}4$$

$$D^2(X) = 12{,}4 - 3{,}1^2 = 2{,}79$$

$$D(x) = \sqrt{2{,}79} = 1{,}67$$

Dystrybuanta zmiennej losowej

x_i	1	2	3	4	5	6
P_i	t	0,3	0,05	t	0,15	0,1

$t = 0{,}2$

f)

$P(1{,}5<X\leq 3) = 0{,}3+0{,}05 = \boxed{0{,}35}$

$P(4<X\leq 6) = 0{,}15+0{,}1 = \boxed{0{,}25}$

Zadania cz. 2

a) Wyznaczyć wartość parametru t

b) Wyznaczyć dystrybuantę

c) Narysować wykres funkcji rozkładu prawdopodobieństwa i dystrybuanty

d) Obliczyć wartość oczekiwaną

e) Obliczyć odchylenie standardowe

f) Obliczyć $P(2<X<3)$ i $P(2 \leq X<6)$

x_i	2	3	4	5	6
p_i	0,2	0,1	t	0,5	0,1

Politechnika Wrocławska

Dziękuję za uwagę

Powodzenia!