BÀI TOÁN TỒN TẠI

TOÁN RỜI RẠC - MI3010

Nội dung

I. Các phương pháp chứng minh
   1. Cấu trúc của chứng minh
   2. Chứng minh trực tiếp
   3. Chứng minh bằng phản đề
   4. Chứng minh bằng phản chứng
   5. Chứng minh bằng qui nạp toán học
   6. Chứng minh bằng phản ví dụ
   7. Chứng minh bằng vét cạn

II. Nguyên lý chuồng chim bồ câu

Giới thiệu

Ví dụ

- Định lý Fermat lớn

  Không tồn tại nghiệm nguyên khác không x, y, z thỏa mãn

$$x^n + y^n = z^n \ (n > 2)$$

Ví dụ

- Định lý Fermat lớn

  Không tồn tại nghiệm nguyên khác không x, y, z thỏa mãn

$$x^n + y^n = z^n \ (n > 2)$$

- Bài toán tô màu bản đồ

  Mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có 2 miền nào có chung biên giới cùng màu với nhau.

Ví dụ

- Định lý Fermat lớn

  Không tồn tại nghiệm nguyên khác không x, y, z thỏa mãn

$$x^n + y^n = z^n \ (n > 2)$$

- Bài toán tô màu bản đồ

  Mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có 2 miền nào có chung biên giới cùng màu với nhau.

- Số nguyên tố sinh đôi

  Tồn tại vô hạn số nguyên tố sinh đôi? (là những số nguyên tố có dạng n, n+2)

Giới thiệu

- Mỗi người đều phải đọc, hiểu và thực hiện nhiều lần các chứng minh khác nhau.
- Có bí quyết gì không? - KHÔNG!
- Mấu chốt:
  - Tư duy
  - Nắm vững một số kỹ thuật cơ bản

I. Các phương pháp chứng minh

1. Cấu trúc của chứng minh

- Cấu trúc cơ bản của chứng minh là một dãy các mệnh đề.
  - Bắt đầu từ giả thiết
  - Suy ra các tiền đề
  - Cuối cùng là kết luận.
- Thành phần phụ: giải thích
- Một chứng minh được trình bày tốt cần đảm bảo có thể theo dõi dễ dàng:
  - Mỗi bước thực hiện đều rõ ràng (hoặc được giải thích rõ)
  - Thực hiện theo trình tự các bước trong chứng minh có thể đến được kết quả hợp lệ.

Ví dụ

- Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ

Ví dụ

- Chứng minh $\sqrt{2}$ là số vô tỉ
- Giả sử $\sqrt{2}$ không là số vô tỉ

$\Rightarrow \sqrt{2} = {}^{a}/_{b} \in Q, a, b \in N$ (${}^{a}/_{b}$ là phân số tối giản)

$\Rightarrow 2 = {}^{a^2}/_{b^2}$

$\Rightarrow a^2 = 2b^2$

$\Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2 \Rightarrow {}^{a}/_{b}$ không là phân số tối giản

$\Rightarrow$ mâu thuẫn

$\Rightarrow$ giả sử sai

$\Rightarrow \sqrt{2}$ là số vô tỉ

2. Chứng minh trực tiếp

Direct Proof

2. Chứng minh trực tiếp

- Phần lớn các định lý (bài tập, bài kiểm tra) bản chất đều có dạng $P \to Q$ hay “Nếu P, Thì Q".
- Đây là dạng phát biểu chuẩn của rất nhiều định lý.
- Chứng minh trực tiếp có thể hình dung như là một dãy các suy diễn bắt đầu từ “P” và kết thúc bởi "Q".

$$P \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q$$

2. Chứng minh trực tiếp - Ví dụ

- Ví dụ 1: CM $\forall$ số nguyên lẻ đều là hiệu của hai số chính phương.
- CM: Xét số nguyên lẻ 2a+1.

  Ta có: $2a+1 = (a+1)^2 - a^2$
- Ví dụ 2: CM Số 100...01 (với 3n-1 số 0) là hợp số.
- CM: Ta có thể viết $100...01 = 10^{3n} + 1$ ($n \in Z^+$)

  Sử dụng hằng đẳng thức: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

  với $a = 10^n$ và $b = 1$:

$$(10^n)^3 + 1 = (10^n + 1)(10^{2n} - 10^n + 1)$$

Khi $n \in Z^+$: $(10^n + 1) > 1$ và $(10^{2n} - 10^n + 1) > 1$ => đpcm

2. Chứng minh trực tiếp - Ví dụ

- Nêu cách chứng minh trực tiếp cho phát biểu: “Nếu n là số nguyên lẻ thì n^2 là số nguyên lẻ”

3. Chứng minh bằng phản đề

Proof by Contraposition

3. Chứng minh bằng phản đề

- Sử dụng: $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \rightarrow \overline{P}$
- Do đó, để chứng minh “Nếu P, Thì Q" bằng phương pháp phản đề, ta chứng minh: “Nếu phủ định Q thì phủ định P”

3. Chứng minh bằng phản đề - Ví dụ

- Chứng minh rằng Nếu x, y $\in$ Z, x+y là số chẵn $\rightarrow$ x, y cùng tính chẵn lẻ
- Phản đề: “Nếu x, y là hai số nguyên không cùng tính chẵn lẻ, thì tổng của chúng là số lẻ."
- CM:

  Giả sử x và y không cùng tính chẵn lẻ, không giảm tổng quát, giả sử rằng x chẵn, y lẻ.

  $\Rightarrow$ x = 2m và y = 2n+1 (m, n $\in$ Z)

  $\Rightarrow$ x + y = 2m + 2n + 1 = 2(m + n) + 1 => x + y là số lẻ

  Vậy x + y là số chẵn thì x và y cùng tính chẵn lẻ

3. Chứng minh bằng phản đề - Ví dụ

- Nêu cách chứng minh bằng phản đề cho phát biểu: “Nếu n là số nguyên lẻ thì n^2 là số nguyên lẻ”

4. Chứng minh bằng phản chứng

Proof by Contradiction

4. Chứng minh bằng phản chứng

- Trong chứng minh bằng phản chứng ta sử dụng các giả thiết và mệnh đề phủ định của kết quả; từ đó suy ra các kết luận mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.
- Nghĩa là:
  - Để chứng minh “$P \rightarrow Q$”
  - Ta giả thiết: $P \wedge \overline{Q}$ đúng, sử dụng các quy tắc suy luận để suy ra mâu thuẫn.
- Ví dụ: Chứng minh căn bậc hai của 2 là số vô tỷ .

4. Chứng minh bằng phản chứng - Ví dụ

- Chứng minh không tồn tại số nguyên tố lớn nhất
- Giả sử số nguyên tố lớn nhất là p

- Lưu ý:
  - Số **nguyên tố** là số chỉ có hai ước số dương phân biệt là 1 và chính nó
  - Các số có nhiều hơn 2 ước số dương được gọi là **hợp số**
  - Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được thành tích các thừa số nguyên tố

4. Chứng minh bằng phản chứng - Ví dụ

- Chứng minh không tồn tại số nguyên tố lớn nhất
- Giả sử số nguyên tố lớn nhất là p

  Xét số m = 2.3.5.7.11…p + 1 => m là hợp số

  => m không chia hết cho số nguyên tố nào ≤ p

  => m không có ước số nào là số nguyên tố

  => Vô lý

  Vậy không tồn tại số nguyên tố lớn nhất

4. Chứng minh bằng phản chứng - Ví dụ

- Nêu cách chứng minh bằng phản đề cho phát biểu: “Nếu n là số nguyên lẻ thì n^2 là số nguyên lẻ”.
- Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành một tam giác.
- Các đỉnh của một thập giác đều được gán bởi các số nguyên từ 0,…,9. CMR luôn tìm được 3 đỉnh liên tiếp có tổng lớn hơn 13?
- Chứng minh rằng không thể nối 55 máy tính thành một mạng sao cho mỗi máy nối với đúng 7 máy tính khác.

Phản chứng vs phản đề

- Phản chứng: $\mathrm{P} \quad \overline{\mathrm{Q}}$ => Sai
- Phản đề: $\overline{\mathrm{Q}} \rightarrow \overline{\mathrm{P}}$
- Phương pháp chứng minh bằng phản đề có ưu điểm là có mục đích rõ ràng là: Chứng minh $\overline{\mathrm{P}}$.

5. Chứng minh qui nạp

Proof by Induction

5. Chứng minh qui nạp

- Cần chứng minh: P(n) với n là số tự nhiên, n ≥ a
- Chứng minh quy nạp gồm 2 bước:
  - Bước 1: Bước cơ sở

  Ta chứng minh P(n) đúng với n = a
  - Bước 2: Bước quy nạp
    - Giả sử P(n) đã đúng cho các trường hợp a ≤ n ≤ k
    - Dựa trên những điều kiện có được, ta chứng minh P(n) đúng với n = k+1.

Từ 2 bước này, theo nguyên lý quy nạp toán học => đpcm!

5. Chứng minh qui nạp - Ví dụ

- Chứng minh: $\forall n \geq 5 \rightarrow 2^n > n^2$

5. Chứng minh qui nạp - Ví dụ

- Chứng minh: $\forall n \geq 5 \rightarrow 2^n > n^2$
- Bước cơ sở:

  Bất đẳng thức đúng với n = 5: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$
- Bước quy nạp:

  Giả sử biểu thức đúng với n = k tức là: $2^k > k^2$

  Ta sẽ chứng minh biểu thức cũng đúng với n = k+1

  Thật vậy: $2^{k+1} = 2.2^k > 2.k^2 = (k+1)^2 + (k-1)^2 - 2$

  Vì k > 5 nên $(k-1)^2 - 2 > 0$

  => $2^{k+1} > (k+1)^2$

  Vậy bất đẳng thức đúng với n = k+1

  Theo nguyên lý quy nạp ta có: $2^n > n^2$ với mọi n ≥ 5

5. Chứng minh qui nạp - Ví dụ

- Chứng minh rằng: $1^3 + 2^3 + \ ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
- Chứng minh rằng $\forall n \in N^*$

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

6. Chứng minh bằng phản ví dụ

Proof by counterexamples

6. Chứng minh bằng phản ví dụ

- Cho $p(n) = n^2 + n + 41$. Chứng minh $p(n)$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n

6. Chứng minh bằng phản ví dụ

- Cho $p(n) = n^2 + n + 41$. Chứng minh $p(n)$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n
- Kiểm tra:

  $p(0) = 41$
  $p(1) = 43$
  $p(2) = 47$
  $p(3) = 53$
  ….
  $p(20) = 461$
  …
  $p(39) = 1601$

6. Chứng minh bằng phản ví dụ

- Cho $p(n) = n^2 + n + 41$. Chứng minh p(n) là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n
- Kiểm tra:

  p(0) = 41

  p(1) = 43

  p(2) = 47

  p(3) = 53

  ….

  p(20) = 461

  …

  p(39) = 1601

P(40) = 1681 – không nguyên tố

6. Chứng minh bằng phản ví dụ

- Phỏng đoán của Euler (1769):

Phương trình $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ không có nghiệm nguyên dương

(1986) Noam Elkies đưa ra được phản ví dụ:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

(1988) Roger Frye tìm ra phản ví dụ nhỏ nhất là:

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$$

6. Chứng minh bằng phản ví dụ

Ví dụ:

- CMR: ánh xạ $f : R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 1$ không là toàn ánh?

7. Chứng minh vét cạn

Exhaustive proof, proof by cases

7. Chứng minh vét cạn

- Chia nhỏ tất cả trường hợp thành các nhóm trường hợp con và chứng minh từng trường hợp một cách riêng rẽ.
- Số trường hợp đôi khi rất lớn.
- Lỗi thường gặp: không xét được hết tất cả các trường hợp
- Bài toán điển hình: định lý bốn màu

  Cách chứng minh đầu tiên: 1.936 trường hợp.

  Cách chứng minh ngắn nhất: hơn 600 trường hợp.

7. Chứng minh vét cạn

- Ví dụ: CMR nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 chia 3 dư 1
- CM:

  Nếu n không chia hết cho 3 => n chia 3 dư 1 hoặc 2

  +) n chia 3 dư 1: $n = 3m+1 \Rightarrow n^2 = (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1$

  +) n chia 3 dư 2: $n = 3m+2 \Rightarrow n^2 = (3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4$

  => n^2 chia 3 dư 1

7. Chứng minh vét cạn - Ví dụ

- CMR: phương trình $x^2 + 3y^2 = 8$ không có nghiệm nguyên.

Tìm lỗi trong chứng minh

Chứng minh: 1 = 2

Đặt a là một số nguyên dương và b = a

Ta có:

$a = b$

$\Leftrightarrow a^2 = ab$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = ab - b^2$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b) = (a - b)b$

$\Leftrightarrow (a + b) = b$

$\Leftrightarrow 2b = b$

$\Leftrightarrow 2 = 1$

Tìm lỗi trong chứng minh

Chứng minh: nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn

Giả sử n^2 là số chẵn

$\Rightarrow n^2 = 2k$

$\Rightarrow n = 2m$

$\Rightarrow$ n chẵn

Tìm lỗi trong chứng minh

Chứng minh $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

Xét $y \in f(A) \cap f(B)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \in f(A) \\ y \in f(B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x \in A | f(x) = y \\ \exists x \in B | f(x) = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B | f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A \cap B)$$

$$\Rightarrow f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$$

II. Nguyên lý chuồng chim bồ câu

Nguyên lý chuồng chim bồ câu

- Nếu xếp n+1 đồ vật vào trong n chiếc hộp thì có ít nhất 1 chiếc hộp có từ 2 đồ vật chở lên
- Ví dụ:

  Trong 13 người luôn có ít nhất 2 người sinh cùng tháng
- Tổng quát: Nếu đem xếp n đồ vật vào trong k chiếc hộp thì sẽ có ít nhất 1 hộp chứa không ít hơn n/k vật

Nguyên lý chuồng chim bồ câu

- Định lý

  Một hàm số f từ tập hợp gồm ít nhất $k + 1$ phần tử vào một tập hợp gồm k phần tử không phải là hàm đơn ánh.

- Ví dụ:
  - VD2: Trong một nhóm có 367 sinh viên, sẽ có ít nhất 2 sinh viên có trùng ngày sinh nhật nhau.
  - VD3: Trong 27 từ tiếng Anh bất kỳ, có ít nhất 2 từ có chữ cái bắt đầu giống nhau.
  - VD4: Có ít nhất bao nhiêu sinh viên trong một lớp học để đảm bảo rằng có ít nhất 2 sinh viên có cùng điểm thi biết rằng điểm thi nằm từ $0 - 100$?
  - VD5: Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng luôn tồn tại một bội số của n chỉ chứa các số 0 và 1.

Ví dụ

1. Chứng minh rằng trong 1 cuộc họp bao giờ cũng có ít nhất 2 người có số người quen (trong những người tham gia) bằng nhau.
2. Trong kỳ thi giữa kỳ, điểm được phân bố từ 0 đến 10. Điểm lẻ đến 0.5. Hỏi số sinh viên của lớp ít nhất là bao nhiêu thì chắc chắn có 3 bạn bằng điểm nhau?

Ví dụ

1. Chứng minh rằng trong 1 cuộc họp bao giờ cũng có ít nhất 2 người có số người quen (trong những người tham gia) bằng nhau.

Số người: n

Số người quen mà một người có thể có: 0->n-1

Vì số người quen bằng 0 và n-1 không thể xảy ra đồng thời => có tối đa n-1 cách chọn cho số người quen của 1 người

Ví dụ

2. Trong kỳ thi giữa kỳ, điểm được phân bố từ 0 đến 10. Điểm lẻ đến 0.5. Hỏi số sinh viên của lớp ít nhất là bao nhiêu thì chắc chắn có 3 bạn bằng điểm nhau?

Số hộp: 21

$\Rightarrow$ số sinh viên ít nhất để … là:

21 x (3-1) + 1 = 43 (sv)

III. Hệ đại diện phân biệt

1. Định nghĩa

Cho một họ các tập hợp $\{S_1, S_2, \dots, S_n\}$

Một hệ đại diện phân biệt của họ $\{S_i, i = \overline{1, n}\}$ là một bộ

$$\{a_i | \, a_i \in S_i, a_i \neq a_j \, \forall i \neq j\}$$

Viết tắt: TRAN

Phần tử a_i trong TRAN được gọi là phần tử đại diện của tập S_i

Ví dụ: $S_1 = \{1, 2\}; S_2 = \{1, 2\}; S_3 = \{2, 4, 6\}$

Hãy liệt kê 3 TRAN của họ $\{S_1, S_2, S_3\}$

1. Định nghĩa:

- **Lưu ý:**
  - Các tập S_i không bắt buộc phải khác nhau
  - Không phải họ $\{S_i\}$ nào cũng tồn tại TRAN
  - Nếu tồn tại TRAN, hợp của k tập bất kỳ trong họ phải có $\geq$ k phần tử

2. Định lý Hall

- Giả sử các tập hợp $S_1, S_2, \dots, S_n$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} N\left(s_{i_1} \cup s_{i_2} \cup \cdots \cup s_{i_k}\right) \geq k & \forall k = \overline{1, n}; 1 < i_1 < \cdots < i_k \leq m \\ N\left(S_{i_j}\right) \geq t & \forall j = \overline{1, k} \end{cases}$$

Khi đó:

- Nếu $t \leq n$: Họ $\{S_i\}$ có ít nhất $t!$ TRAN
- Nếu $t > n$: Họ $\{S_i\}$ có ít nhất $\frac{t!}{(t-n)!}$ TRAN

2. Định lý Hall – ví dụ

- VD1: Cho trước n chàng trai và một số cô gái. Biết rằng một nhóm k chàng trai bất kỳ trong đó quen với ít nhất k cô gái. Chứng minh rằng: có thể ghép mỗi chàng trai với một cô gái mà mình quen.
- VD2: Có m người thực hiện n công việc. Giả sử mỗi người thứ i ta biết được tập S_i là tập hợp các công việc mà người đó có thể làm được. Hỏi có thể phân công mỗi người làm một việc được khong?

Ví dụ 3: Xét bàn cờ cỡ 4×5, với một số vị trí bị cấm như trong hình vẽ. Mỗi hàng đặt 1 quân cờ vào vị trí trống sao cho các quân cờ không cùng hàng và không cùng cột nhau.

	1	2	3	4	5
A_1		$\times$			
A_2			$\times$		$\times$
A_3	$\times$		$\times$		$\times$
A_4	$\times$				

	1	2	3	4	5
A_1		$\times$		$\otimes$	
A_2	$\otimes$		$\times$		$\times$
A_3	$\times$	$\otimes$	$\times$		$\times$
A_4	$\times$				$\otimes$

Ví dụ 4: Xét tập hợp $\{1,2,\ldots,n\}$. Đếm số TRAN của họ tập con

$$S_i = S - \{i\}, 1 \leq i \leq n$$

Mỗi TRAN là một hoán vị của $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ của $(1,2,\ldots,n)$ sao cho $a_i \neq i, \forall i$.

Số lượng là

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

- Số lượng Số mất thứ tự là:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

- Số mất thứ tự là một hoán vị của các đối tượng mà ở đó không đối tượng nào đúng vị trí ban đầu của nó.
- Ví dụ: hoán vị 21453 là một số mất thứ tự của 12345.