Sequências, Séries e Progressões

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

Material Teórico

Séries de funções

Responsável pelo Conteúdo:
Profa. Dra. Ana Lúcia Nogueira Junqueira

Revisão Textual:
Profa. Esp. Natalia Conti

UNIDADE Séries de funções

- Introdução
- Séries de Potências
- Séries de Taylor e de Maclaurin
- Polinômios de Taylor
- Concluindo

Objetivo de APRENDIZADO

- Introduzir o conceito de séries de funções.
- Trabalhar séries de potências e suas propriedades, raio e intervalo de convergência de uma série de potência, teoremas.
- Apresentar algumas funções definidas por séries de potências.
- Definir série de Taylor e de Maclaurin e critérios de convergência.
- Aproximar funções por polinômios de Taylor e analisar erro de aproximação
- Apresentar exemplos e aplicações de séries de funções.

Caro(a) aluno(a),

Nesta unidade iremos estudar as séries de funções. Tentaremos mostrar a sua importância na matemática e em áreas correlatas, como também sua utilidade prática.

Vamos ver inicialmente o que são séries de potências, intervalo e raio de convergência, visando ao longo do desenvolvimento do conteúdo chegar a séries de Taylor e de Maclaurin geradas por funções, para estudar as aproximações dessas funções por suas séries em determinados intervalos de convergência. Veremos também Polinômios de Taylor, inclusive exemplos gráficos de aproximações de algumas funções, bem como estimativas de resto e erro de truncamento dessas aproximações.

Esse estudo tem por finalidade chegar a aproximações de funções por séries de potências, determinando o intervalo de convergência e podendo também estimar o erro que podemos cometer se usarmos as aproximações com um número finito de termos da série de Taylor, denominados polinômios de Taylor. Veremos que este é um uso prático para o cálculo de funções por aproximação.

Acompanhe o desenvolver da teoria, preste bem atenção às definições, propriedades e teoremas, confira os exemplos dados, preparando-se assim para resolver as atividades propostas na unidade. Serão úteis as estratégias algébricas e como se tratam de séries infinitas, de funções, o conceito de limite estará sempre presente. Recomendo prestar atenção nos procedimentos das demonstrações, bem como nas resoluções dos exemplos no sentido de adquirir habilidades no desenvolvimento do raciocínio e da lógica matemática como um todo, em particular, no tratamento de séries de funções.

Bom estudo!

Contextualização

Gottfried W. Leibniz (1646–1716) é conhecido na matemática como um dos inventores do cálculo diferencial e integral, juntamente com Isaac Newton (1643–1727). Ao estudar um trabalho de Blaise Pascal (1623–1662) sobre a quadratura de um quadrante de um círculo de raio unitário, ele descobriu uma série infinita envolvendo π , que é dada por:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Animado com a descoberta, tratou logo de publicá-la em seu periódico *Acta Eruditorum*. O que Leibniz não sabia é que seu grande rival Newton também descobriu uma série infinita para π dada por:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots$$

Leibniz parece ter encontrado a série em 1673, mas a fórmula era conhecida do jovem matemático escocês James Gregory (1638–1675) em 1671. É uma elegante fórmula para π, mas a série converge muito lentamente para fins computacionais. Newton apontou isto quando enviou a Leibniz (através de Oldenburg) a sua expressão variante sobre π.

Ambos usaram séries de potências e a função inversa da tangente, o arcotangente.

$arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\ldots$, que converge para $|x|\leq 1$ e para $x=1$ resulta na série de Leibniz.

Newton também usou séries de potências e vamos aqui explicar, em notação moderna, a sua demonstração. Newton começou com a série geométrica:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots \textbf{ (1)}$$

Substituindo x por x^4 para obter:

$$\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^8-x^{12}+x^{16}-x^{20}+\ldots \textbf{ (2)}$$

Multiplicando **(2)** por x^2, obtemos:

$$\frac{x^2}{1+x^4}=x^2-x^6+x^{10}-x^{14}+x^{18}-x^{22}+\ldots \textbf{ (3)}$$

Adicionando as séries **(2)** e **(3)**, segue que:

$$\frac{1+x^2}{1+x^4}=1+x^2-x^4-x^6+x^8+x^{10}-x^{12}-x^{14}+x^{16}+x^{18}-x^{20}-\ldots \quad \textbf{(4)}$$

Integrando a expressão **(4)** com limites de 0 a 1, termo a termo, temos:

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx=\int_0^1\left(1+x^2-x^4-x^6+x^8+x^{10}-x^{12}-x^{14}+x^{16}+x^{18}-x^{20}+\ldots\right)dx$$

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots \quad \textbf{(5)}$$

Por outro lado, a integração do membro à esquerda de **(5)** é igual a:

$$\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (*)$$

Para o leitor atento, tudo que foi feito até agora carece de rigor matemático presente nos livros atuais, mas nos primórdios do cálculo, essas manipulações eram muito comuns e, somente no século XIX, que os matemáticos criaram o conceito de limite, de sequência e convergência para tratar as séries infinitas de forma rigorosa.

(*) Confira esse resultado em **Saiba Mais**

Seguindo os passos de Newton, neste dia internacional de π, calcularemos a integral dada em **(5)**. Como:

$$1+x^4=1+2x^2+x^4-2x^2=\left(1+x^2\right)^2-2x^2=\left(1+x^2+\sqrt{2}x\right)\left(1+x^2-\sqrt{2}x\right)$$

$$1+x^2=\frac{1}{2}\left(2+2x^2\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}x+x^2\right)+\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)\right]$$

Logo:

$$1+x^4=\left(1+\sqrt{2}x+x^2\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right) \quad \textbf{(6)}$$

$$1+x^2=\frac{1}{2}\left[\left(1+\sqrt{2}x+x^2\right)+\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)\right] \quad \textbf{(7)}$$

De **(6)** e **(7)**, temos:

$$\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{\left(1+\sqrt{2}x+x^2\right)+\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)}{2\left(1+\sqrt{2}x+x^2\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)}=\frac{1}{2\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)}+\frac{1}{2\left(1+\sqrt{2}x+x^2\right)}$$

Assim:

$$\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}=I_1+I_2 \quad \textbf{(8)}$$

Observem que:

$$x^2-\sqrt{2}x+1=x^2-2\frac{\sqrt{2}x}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+1=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(2x-\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2} \quad \textbf{(9)}$$

Analogamente:

$$x^2-\sqrt{2}x+1=\frac{1}{4}\left(2x+\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2} \quad \textbf{(10)}$$

Substituindo **(9)** em l_1 da relação **(8)**, temos:

$$l_1=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{4}\left(2x-\sqrt{2}\right)^2+\frac{1}{2}}=\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{2}\left(2x-\sqrt{2}\right)^2+1}=\int_{-1}^{\sqrt{2}-1}\frac{du}{u^2+1}$$

Onde: $u = \sqrt{2}x - 1 \Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \sqrt{2} \Rightarrow dx = \dfrac{du}{\sqrt{2}}$

Logo: $l_1 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}} arctan(u)\right]_{-1}^{\sqrt{2}-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[arctan\left(\sqrt{2}-1\right) - arctan(-1)\right]$

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{\pi}{4}\right] \textbf{ (11)}$$

Analogamente: $l_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left[arctan\left(\sqrt{2}+1\right) - \dfrac{\pi}{4}\right]$ **(12)**

Portanto:

$$l_1 + l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arctan\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arctan\left(\sqrt{2}-1\right) + arctan\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$$

$$l_1 + l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[arctan\left(\sqrt{2}+1\right) + arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\right] \textbf{ (13)}$$

Mas temos o resultado que: $arctan(p) + arctan\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

Basta tomar $f(p) = arctan(p) + arctan\left(\dfrac{1}{p}\right)$

$$f'(p) = \frac{1}{1+p^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{p^2}}.\left(-\frac{1}{p^2}\right)$$

$$f'(p) = \frac{1}{1+p^2} - \frac{1}{1+p^2} = 0 \Rightarrow f(p) = k \text{ , } k \text{ constante}$$

Tomando $p = 1 \Rightarrow k = f(1) = arctan(1) + arctan(1) = 2.\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

Substituindo em **(13)**

$$l_1 + l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\pi}{2}$$

E, portanto:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \ldots$$

Fonte: BURTON. **The History of Mathematics: An Introduction** – 7 ed. Mc Graw – Hill, 2011.

Como surgiram as séries de potências?

Até a metade do século XVII, matemáticos tinham desenvolvido e analisado séries de números. O tempo tinha chegado para investigar sequências e séries de funções. Vimos que ambos, Newton e Leibniz, desenvolveram representações de séries para funções. Usando métodos algébricos e geométricos, Newton calculou as séries para as funções trigonométricas *sen(x) e cos(x)* e para a função exponencial. Estes resultados estão nos trabalhos de Newton intitulados *Method of Fluxions and Infinite Series e Analysis with Infinite Series*. Ele utilizou séries para desenvolver muitos resultados de cálculo, tais como área, comprimento de arco e volumes. Leibniz somou sequências de recíprocas de números poligonais e somou e analisou várias sequências geométricas. Leibniz usou uma abordagem sequencial de valores infinitamente próximos para explicar o conceito de limite. Embora nunca tenha pensado na derivada como um limite, ele descobriu muitos dos resultados que agora estudamos em cálculo usando limites. Leibniz também é responsável pelo símbolo "∫" para integral, como uma extensão do $\mathcal{S}$ de soma.

Brook Taylor (1685–1731) não foi o primeiro a inventar a estrutura e o processo que chamamos de série de Taylor, e a série de Maclaurin não foi desenvolvida por Colin Maclaurin (1698–1746). James Gregory (1638–1675) estava trabalhando com séries de Taylor quando ele tinha apenas alguns anos de idade. Gregory também publicou a série de Maclaurin para muitas funções trigonométricas antes que Maclaurin tivesse nascido. Taylor não conhecia o trabalho de Gregory quando publicou seu livro *Methodus incrementorum directa et inversa*, o qual continha o que chamamos agora de **série de Taylor**. Ele tinha desenvolvido independentemente um método baseado em cálculo para gerar representações de funções em séries. Posteriormente, Maclaurin citou um trabalho de Taylor em um livro de cálculo que escreveu em 1742. O livro de Maclaurin popularizou representações de funções em séries, e embora Maclaurin nunca tenha afirmado que as tinha descoberto, a série de Taylor centrada em $a = 0$ tornou-se posteriormente conhecida como série de Maclaurin. Johann Bernoulli (1667–1748) também fez uma descoberta independente do teorema de Taylor.

Euler (1707–1783) publicou *Mechanica* em 1736, onde aplicou sistematicamente o cálculo à mecânica e desenvolveu novos métodos para resolver equações diferenciais usando séries de potências. D'Alembert (1717–1783) escreveu cinco artigos lidando com métodos para integrar equações diferenciais. Embora tenha recebido pouca educação científica formal (provavelmente conhecia os trabalhos de Newton, L'Hôpital e dos Bernoullis), D'Alembert publicou muitos trabalhos sobre matemática e física matemática, culminado com seu trabalho principal, *Traité de dynamique*. Desenvolveu o teste da razão para determinar a convergência de muitas séries e através de seus trabalhos, a natureza da pesquisa sobre séries sofreu uma mudança de cálculos práticos para uma fundamentação mais teórica. Por volta de 1748 Euler usou a representação em série de potências de e^x, com $x = 1$, para obter o valor do número e com 23 dígitos. Em 2000, Gourdon e Kondo usaram a mesma representação e técnicas especiais e obtiveram o valor para e com mais de 10 bilhões de casas decimais.

Lagrange (1736–1813) publicou *Mécanique analytique* (1787), que aplicava cálculo ao movimento de objetos. O seu maior trabalho foi na teoria e aplicação do cálculo. Ele sentiu que a série de Taylor desempenhava um papel fundamental no entendimento do cálculo, embora ainda evitasse o limite e as propriedades de convergência de sequências e séries. Bolzano (1781–1848) acreditava no método de Lagrange para usar séries de Taylor como a base para o cálculo.

Fourier (1768–1830) fez contribuição ao estudo e cálculo da difusão de calor e à solução de equações diferenciais. Seu trabalho, *Théorie analytique de la chaleur* (A Teoria Analítica do Calor), de 1822, contém uso extenso de séries, consistindo em funções trigonométricas que hoje chamamos de **séries de Fourier**, embora já fossem conhecidas anteriormente por Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange, que contribuíram mais para a teoria das séries.

Finalmente, a comunidade matemática foi motivada a estabelecer fundamentos mais teóricos para as ideias de limite e convergência de sequências e séries. Cauchy (1789–1857) foi o primeiro a definir por completo as ideias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas. Também foi o primeiro a desenvolver uma teoria sistemática para números complexos e a transformada de Fourier para equações diferenciais.

Runge (1856–1927) desenvolveu o método de resolução baseado em sequências para solucionar numericamente equações diferenciais junto com M. W. Kutta (1867–1944). No final do século XIX e início do século XX, sequências e séries tornaram-se ferramentas padrão para aproximar funções e calcular resultados em computação numérica. O matemático indiano autodidata Srinivasa Ramanujan (1887–1920) usou sequências e séries de potências para desenvolver resultados em teoria de números, seus trabalhos produziram numerosos resultados importantes usados por matemáticos no século XX. Seus colaboradores britânicos Godfrey Harold (G.H.) Hardy (1877–1947) e John Littlewood (1885–1977) usaram o conhecimento sobre séries para produzir avanços importantes em teoria de números e estenderam a utilidade das séries para muitas áreas da matemática. Por exemplo, é muito utilizado encontrar a solução de equações diferenciais pelo desenvolvimento de série de potências.

Resultado Importante

Uma função $f(x)$ denomina-se **analítica** em $x = a$ quando ela puder ser representada por sua Série de Taylor em algum intervalo aberto contendo a. De acordo com o Teorema de Taylor, uma função infinitamente derivável em uma vizinhança de a é analítica se, e somente se, o resto de sua aproximação de Taylor tende para zero, com $n \to \infty$. Assim, a soma e o produto de funções analíticas são analíticas, como também são analíticas em seus respectivos domínios, além dos polinômios, as demais funções elementares do cálculo: e^x; $log\ (x)$; $sen\ (x)$; $cos\ (x)$, entre outras. Um fato crucial, porém não tão óbvio, é que se uma função $f(x)$ é analítica em um intervalo I, onde ela nunca se anula, então a função $\dfrac{1}{f(x)}$ é também analítica em I. Com isto queremos enfatizar que as funções racionais são analíticas em todo intervalo onde o denominador é diferente de zero.

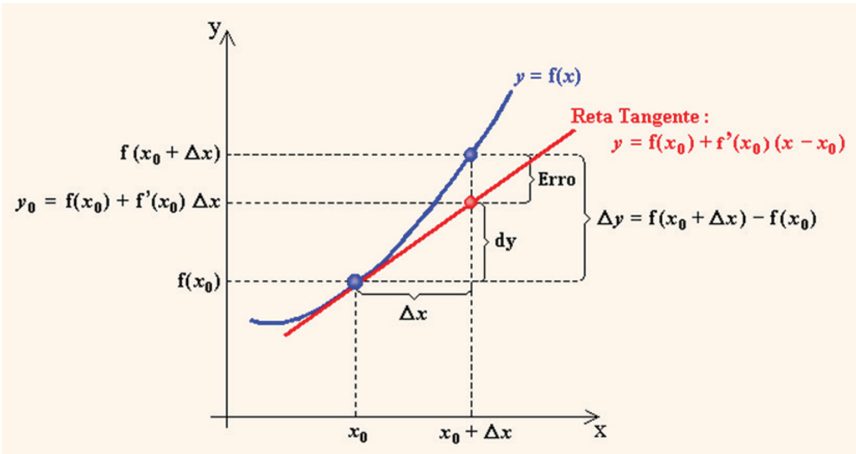
O texto acima foi adaptado de:

BURTON, D. M. **The History of Mathematics:** an introduction. New York: MacGraw-Hill, 2011. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/calculoII/h1sese.html

Introdução

O objetivo principal desta unidade é representar as funções elementares do cálculo como séries de potências, que são aquelas séries cujos termos contêm potências de uma variável x. Ao mesmo tempo, apresentaremos os fundamentos e as técnicas que nos permitem aproximar funções por polinômios. Entretanto, antes vamos recapitular algumas noções que vão ajudar na compreensão desse tema.

Vocês se recordam que, ao definir a derivada de uma função $f(x)$ num ponto x_0, obtemos também a aproximação da reta tangente a essa função naquele ponto? A reta tangente é um polinômio de grau 1, e sua expressão pode ser dada por $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Entretanto, verificamos que essa reta tangente, para além de eventualmente ser uma reta secante à curva em outros pontos, apenas tangencia a função $f(x)$ no ponto x_0, exceto se a função $f(x)$ for a própria reta. Ao nos afastarmos do ponto original x_0, vemos que há um erro entre os valores da função $f(x)$ e da função que determina a reta tangente em x_0, esse polinômio de grau 1, conforme indica a figura a seguir.



Fonte: uff.br

Observe nesse caso que a reta tangente é dada por: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

E o erro é $E = f(x_0 + \Delta_x) - y_0 = \Delta_y - d_y$.

Por exemplo, se quisermos calcular o valor de $\sqrt{4,02}$, podemos tomar a função

$f(x) = \sqrt{x}$, com $x_0 = 4$ e $\Delta_x = +\,0,02$. Daí, como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{1}{4}$, temos:

$$\Delta_y = \sqrt{4,02} - \sqrt{4} \cong d_y = f'(4).\Delta_x = \frac{1}{4}.(0,02) = (0,25).(0,02) = 0,005 .$$

Então, $\sqrt{4,02} = f(4 + 0,02) = f(4) + \Delta_y \cong f(4) + d_y = \sqrt{4} + 0,005 = 2,005$.

Logo, $\sqrt{4,02} \cong 2,005$.

Se usarmos uma calculadora, que faz uma aproximação melhor, com mais casas decimais, encontramos: $\sqrt{4,02} \cong 2,00499376556$.

O que desejamos?

Fazer aproximações de uma função elementar do cálculo por polinômios de grau maior do que 1 e ver se com isso conseguimos 'colar' o polinômio à função, não só num ponto, mas em um intervalo em torno desse ponto. Em outras palavras, aproximar a função elementar por um polinômio de determinado grau (porque é relativamente mais fácil trabalhar com polinômios, por serem funções bem comportadas) em algum intervalo que possa ser determinado em torno de um ponto x_0 e com um pequeno erro que possa ser controlado.

Dá para intuir que, se conseguirmos aproximar uma função por uma série infinita de polinômios, podemos analisar a convergência da série e, caso afirmativo, escolher uma aproximação da função por um polinômio de grau finito que permita ter um erro admissível ou controlado para o fim que se destina. Em muitos casos isto será possível, e é o que pretendemos mostrar nesse estudo. Para tal, vamos ver primeiro o que são séries de potências.

As séries de potências aparecem em muitos problemas da Física-Matemática, como por exemplo, em fenômenos ondulatórios e distribuição de temperatura em placas, onde recorremos às funções de Bessel, e em aproximação de soluções de equações diferenciais por séries de Taylor.

Séries de Potências

Definição 1

Uma série de potências centrada num ponto $x = x_0$ é uma série $\sum_0^\infty c_n.(x-x_0)^n$, com c_n constantes, para todo $n \geq 0$.

Se $x_0 = 0$, temos a série $\sum_0^\infty a_n.\ x^n$ que já vimos (na unidade anterior) ser uma série geométrica que converge para $|x| < 1$, ou seja, $-1 < x < 1$. Então, com uma simples mudança de parâmetro, vemos que uma série de potências converge para $|x - x_0| < 1$, ou seja, para $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$, que é um intervalo aberto de raio 1, centrado em x_0.

E, claro que, fixado um ponto x, se a sequência das somas parciais da série de potências tem limite L, isto é, $\lim_{n\infty} S_n = L$, então dizemos que a série de potências converge para L, para este valor de x. Logo, pelo que vimos acima, uma série de potências pode convergir para alguns valores e divergir para outros. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1

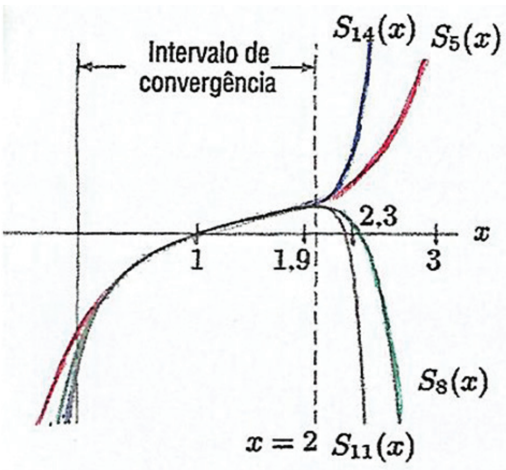
Visualização numérica e gráfica da convergência.

Considere a série de potências:

$$(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots$$

Para analisar a convergência, vamos analisar a sequência de somas parciais da série. Como série geométrica, a sequência de somas parciais $(S_n)_{n\geq 0}$ deve convergir para x no intervalo aberto (0,2). Vamos mostrar que ela converge no intervalo $0<x\leq 2$. Este será o **intervalo de convergência** desta série de potências. Examinem antes a representação gráfica cartesiana a seguir, com os gráficos de alguns termos da sequência $(S_n)_{n\geq 0}$, lembrando que cada elemento desta sequência, digamos S_k é um polinômio de grau k, a saber:

$$S_k=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{k-1}\frac{(x-1)^k}{k}=\sum_0^k(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$



Fonte: adaptado de HUGHES-HALLET *et al* (2004, p. 347)

Agora vamos analisar no quadro abaixo os valores numéricos de alguns termos da (S_n) em pontos próximos a $x=2$, menores e maiores, para perceber o comportamento. Consideremos dois pontos, um dentro e outro fora do intervalo, a saber, $x = 1,9$ e $x = 2,3$. Lembre-se de que essas sequências nestes pontos são sequências numéricas.

n	*Sn* (1,9)	*Sn* (2,3)
2	0,495	0,455
5	0,69207	1,21589
8	0,61802	0,28817
11	0,65473	1,71710
14	0,63440	– 0,70701

O que se percebe é que S_n (1,9) parece convergir, mas S_n (2,3) parece divergir. Isto é verdade, S_n (1,9) converge, mais lentamente, por estar próxima do extremo superior do intervalo e S_n (2,3) vai divergir, pois quanto maior o n, mais violentas serão as oscilações. Por exemplo, a S_{25} (2,3) = 28 e a S_{100} (2,3)=-2.500.000.000.

Vamos verificar os valores da sequência de somas parciais nos pontos extremos do intervalo. $S_n(0) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{n}$. Logo, $\lim_{n\to\infty} S_n(0) = -\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$, que é a série oposta da série harmônica, que já sabemos ser divergente.

$S_n(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}$. Logo, $\lim_{n\to\infty} S_n(2) = \sum_1^{n} (-1)^{n+1} . \frac{1}{n}$, que já conhecemos como série alternada convergente. Portanto, a série de potências em questão converge para todos os valores de x no intervalo $0 < x \le 2$. Neste exemplo, vimos que tínhamos um intervalo de convergência obtido por meio de critérios de convergência de séries numéricas, mas tivemos que testar à parte a convergência nos extremos do intervalo de convergência. É isso que costuma ocorrer.

Intervalo e raio de convergência

Definição 2

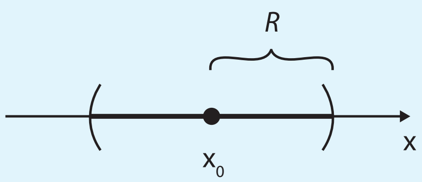
Uma série de potências vai se enquadrar em uma das seguintes situações:

a) Se a série de potências converge apenas para $x = x_0$, o raio de convergência é definido como $R = 0$.

b) Se existe um número positivo R tal que a série de potências converge se $|x - x_0| < R$ e diverge se $|x - x_0| > R$, definimos R como raio de convergência da série. Nesse caso, o intervalo de convergência I é o intervalo entre $x_0 - R$ e $x_0 + R$, podendo incluir qualquer extremo onde a série converge.

c) Se a série de potência convergir para todo $x \in \mathbb{R}$, dizemos que a série tem raio de convergência infinito.

Representação: intervalo e raio de convergência em torno de $x = x_0$



Exemplo 2

Já conhecemos o raio de convergência de algumas séries.

a) $\sum_0^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$

Sabemos que é uma série geométrica que converge para $|x| < 1$ e diverge para $|x| \ge 1$. Logo, o raio de convergência é $R = 1$ e o intervalo de convergência é $I = (-1,1)$, centrado no ponto $x_0 = 0$.

b) $\sum_0^\infty \left(\frac{x}{5}\right)^n = 1 + \frac{x}{5} + \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{x}{5}\right)^n + \ldots$

Da mesma forma, a série é geométrica que diverge para $\left|\frac{x}{5}\right| \geq 1$ e converge para $\left|\frac{x}{5}\right| < 1$. Logo, converge para $-1 < \frac{x}{5} < 1$ ou $-5 < x < 5$. Então, o intervalo de convergência é $I = (-5,5)$, centrado no ponto $x_0 = 0$ e raio de convergência é $R = 5$.

c) $\sum_0^\infty \left(\frac{x-1}{2}\right)^n = 1 + \frac{x-1}{2} + \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{x-1}{2}\right)^n + \ldots$

Também com uma simples substituição $u = \frac{x-1}{2}$, vemos que é uma série geométrica que diverge para $|u| \geq 1$ e converge para $|u| < 1$. Logo, converge para $-1 < \frac{x-1}{2} < 1$, ou seja, $-2 < x - 1 < 2$, ou ainda $-1 < x < 3$. Logo, o intervalo de convergência é $I = (-1,3)$, centrado no ponto $x_0 = 1$ e o raio de convergência é $R = 2$.

Teorema 1

Método para calcular o raio de convergência.

Para calcular o raio de convergência R de uma série de potências $\sum_0^\infty c_n (x - x_0)^n$ utiliza-se o teste da razão, considerando $a_n = c_n (x - x_0)^n$.

a) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$, então $R = 0$ e a série diverge para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, então $R = \infty$ e a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = K|x - x_0|$, onde K é finito e não nulo, então $R = \frac{1}{K}$ e a série converge no intervalo $I = \left(x_0 - \frac{1}{K}, x_0 + \frac{1}{K}\right) = (x_0 - R,\ x_0 + R)$.

Demonstração

Observe que basta apenas usar as condições do teste da razão para convergência de séries numéricas.

Observações

I) Se a série tiver termos nulos, reescrevemos a série com termos não nulos para poder aplicar o teste da razão.

II) O teste da razão não é conclusivo se $x = x_0 \pm R$, daí é necessário testar a convergência da série numérica obtida da série de potências nos pontos extremos do intervalo.

Exemplo 3

Vamos analisar o raio e intervalo de convergência da série $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$.

Usando o teste da razão para convergência de séries de potências, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}.\frac{n!}{|x^n|}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}.|x|\right]=0.|x|=0$$

Logo, $R=\infty$ e a série converge para todo $x\in\mathbb{R}$.

Exemplo 4

Vamos analisar o raio e intervalo de convergência da série $\sum_0^\infty \frac{(n+1)x^n}{2^n+n}$.

Usando o teste da razão para convergência de séries de potências, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+2)|x^{n+1}|}{2^{n+1}+(n+1)}.\frac{2^n+n}{(n+1)|x^n|}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2}{n+1}.\frac{2^n+n}{2^{n+1}+(n+1)}.|x|\right]$$

Vamos calcular separadamente os limites:

Sabemos que $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1$.

E que $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+n}{2^{n+1}+(n+1)}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$; logo, aplicando a regra de l'Hôpital temos:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(2^n+n)'}{[2^{n+1}+(n+1)]'}=\lim_{N\to\infty}\frac{2^n.\ln 2+1}{2^{n+1}.\ln 2+1}=\lim_{N\to\infty}\frac{(2^n.\ln 2+1)'}{(2^{n+1}.\ln 2+1)'}=\lim_{N\to\infty}\frac{2^n.\ln 2.\ln 2}{2^{n+1}.\ln 2.\ln 2}=\lim_{N\to\infty}\frac{2^n.(\ln 2)^2}{2^n.2^1.(\ln 2)^2}=\frac{1}{2}$$

Ao aplicarmos L´Hopital, temos que efetuar a derivada do numerador e do denominador da fração: Regra de Derivação da Função Exponencial: $(a^n)' = a^n.\text{In } a$	Aplicamos pela segunda vez a regra de L´Hopital.	Simplificando.

Assim, $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+2}{n+1}.\frac{2^n+n}{2^{n+1}+(n+1)}.|x|\right]=1.\frac{1}{2}.|x|=\frac{|x|}{2}$.

Para que a série convirja, queremos que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|x|}{2}<1\Rightarrow -2<x<2.$

Logo, $R = 2$ e a série converge para $-2 < x < 2$, mas falta testar a convergência nos pontos extremos do intervalo.

Para $x=2\Rightarrow \sum_0^\infty \frac{(n+1)2^n}{2^n+n}$, podemos tentar o teste da comparação para séries numéricas.

Como $2^n > n$, $\frac{(n+1)2^n}{2^n+n}>\frac{(n+1)2^n}{2^n+2^n}=\frac{(n+1)2^n}{2.2^n}=\frac{n+1}{2}\to\infty$, quando $n\to\infty$.

Portanto, a série diverge para $x = 2$.

Para $x=-2\Rightarrow \sum_0^\infty \frac{(n+1)(-2)^n}{2^n+n}=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n(n+1)2^n}{2^n+n}$, que é uma série alternada. Vamos aplicar o teste o n-ésimo termo.

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^n+n}$ é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, vamos aplicar a regra de l'Hôpital, daí temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{2^n+n}\overset{RH}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+(n+1)2^n ln2}{2^n ln2+1}\overset{RH}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2^n ln2+2^n ln2+(n+1)2^n(ln2)^2}{2^n(ln2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(n+1)ln2}{ln2}=\infty$$

Assim, também não existe $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(n+1)2^n}{2^n+n}$ e, portanto, a série diverge para $x = -2$.

Logo, o intervalo de convergência da série $\sum_0^\infty \frac{(n+1)x^n}{2^n+n}$ é $I = (-2, 2)$.

Exemplo 5

Encontre o raio e o intervalo de convergência da série $\sum_0^\infty 2^{2n}x^{2n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{2n+2}|x|^{2n+2}}{2^{2n}|x|^{2n}}=4x^2<1\Rightarrow|x|<\frac{1}{2}$. Então o raio de convergência desta série é $R=\frac{1}{2}$. Além disso, para os valores $x=\pm\frac{1}{2}$ a série é igual (pois os expoentes são pares) e fica sendo $\sum_0^\infty 2^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\sum_0^\infty 1$, que é divergente pelo teste do n-ésimo termo. Então, o intervalo de convergência é $I=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Teorema 2

Teorema da Derivação Termo a Termo

Se $\sum_0^\infty c_n\left(x-x_0\right)^n$ converge para $x_0-R<x<x_0+R$, para algum $R>0$, isso define uma função f tal que $f\left(x\right)=\sum_0^\infty c_n\left(x-x_0\right)^n$, no intervalo (x_0-R, x_0+R).

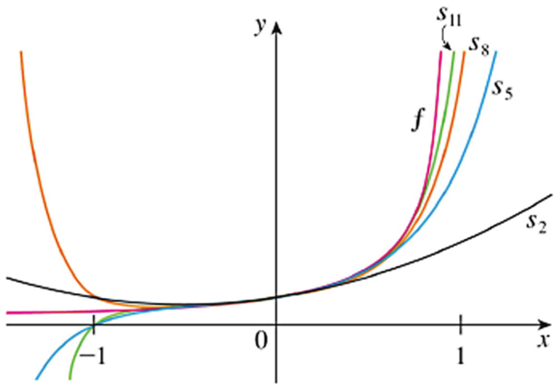
Tal função tem derivadas de todas as ordens nesse intervalo de convergência e as derivadas podem ser obtidas por meio da derivação da série original termo a termo:

$f'\left(x\right)=\sum_0^\infty nc_n\left(x-x_0\right)^{n-1}$ $f''\left(x\right)=\sum_0^\infty n\left(n-1\right)c_n\left(x-x_0\right)^{n-2}$ e assim por diante. Cada uma dessas séries derivadas converge em todo ponto interior do intervalo de convergência da série original.

Obs: Omitimos a demonstração, mas é fácil perceber que se uma função é representada por uma série de potências, cada termo da soma parcial é um polinômio e polinômios são funções contínuas e diferenciáveis no interior do intervalo de convergência. Daí é de se esperar que o $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(x-x_0\right)=S\left(x-x_0\right)$ seja também contínua e derivável em qualquer ordem no interior do intervalo de convergência. Além disso, $S\left(x-x_0\right)=\sum_0^\infty c_n\left(x-x_0\right)^n$ é a função para a qual a série de potências converge, para todo x no interior do intervalo de convergência da série.

Exemplo 6

A função $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-x}$ tem as seguintes aproximações polinomiais no intervalo $(-1,1)$, onde $S_n=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n$.



Fonte: Stewart (2007, p. 752)

Portanto, é de se esperar que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\sum_0^\infty x^n=f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-x}$ para $I=(-1,1)$.

De fato, vamos verificar o intervalo de convergência desta série.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|x^{n+1}\right|}{\left|x^n\right|}=\left|x\right|<1$ para convergir. No extremo $x=1$, a função f sequer está definida. No extremo $x=-1$ do intervalo a série diverge, pois é uma série numérica alternada com valores 1 e –1 e vimos que admite duas subsequências divergentes.

Então a função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n+\ldots$ está bem definida como série de potências apenas no intervalo $-1<x<1$. Além disso, é uma função infinitamente derivável neste intervalo, pelo teorema 2.

Portanto, valem:

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}=2+6x+12x^2+20x^3+\ldots+n(n-1)x^{n-2}+\ldots$$

E assim por diante.

Teorema 3

Teorema da integração termo a termo.

Suponha que $f(x)=\sum_0^{\infty}c_n(x-x_0)^n$ convirja para $x_0-R<x<x_0+R$, com $R>0$.

Então, $\sum_0^{\infty}c_n\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ também converge neste intervalo e $\int f(x)\,dx=\sum_0^{\infty}c_n\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+C$, sendo C uma constante qualquer.

Obs: Omitimos a demonstração, mas observe que tem um raciocínio similar ao do teorema 2.

Exemplo 7

Vamos encontrar uma série para a função *arctgx*.

Considere a série: $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots$ Esta série é uma série geométrica com primeiro termo x e razão $-x^2$, logo converge para $\dfrac{x}{1+x^2}$, desde que $\left|-x^2\right|=\left|x^2\right|<1\Rightarrow -1<x<1$. É o que o teorema garante.

Logo, temos que:

$$\sum_0^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots=\frac{x}{1+x^2}=f(x),$$

definida para $-1<x<1$.

Vamos derivar termo a termo esta série.

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{2n-1} . \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$
$$f'(x) = 1.x^{1-1} - \frac{3.x^{3-1}}{3} + \frac{5.x^{5-1}}{5} - \frac{7.x^{7-1}}{7} + \ldots + (-1)^{2n-1} . \frac{(2n-1).x^{2n-1-1}}{2n-1} + \ldots$$
$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{2n-1} .x^{2n-2} + \ldots$$

Que é uma função definida no intervalo $-1 < x < 1$, também série geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão $-x^2$, portanto, com soma $\frac{1}{1+x^2}$

Agora vamos integrar $\int f'(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$

Como a série é zero para $x = 0$, assim $C = 0$

Portanto, $f(x) = arctgx = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$, no intervalo $-1 < x < 1$.

Obs: Pode-se mostrar que esta série também converge para $f(x) = arctgx$, nos pontos extremos do intervalo, ou seja, em $x = \pm 1$, mas com outros resultados que não dispomos até então (confira depois no material complementar).

Exemplo 8

Vimos no exemplo 6 que a função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ tem uma aproximação por séries de potências, dentro do intervalo $-1 < x < 1$, da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots$$

Sendo assim, pelo teorema 3 podemos integrar termo a termo a função f nesse intervalo.

$\int f(x)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$ cuja série vai convergir em $-1 < x < 1$.

Por outro lado: $\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{1-x} = \int -\frac{du}{u} = ln|u| + C = ln|1-x| + C = g(x)$, onde C é uma constante qualquer.

Como $-1 < x < 1$, então $|1 - x| = 1 - x$. Além disso, para $x_0 = 0$, temos:

$g(0) = \ln(1-0) + C = ln1 + C = 0 + C = C$. Então, $g(x) = \ln(1-x) + g(0)$. Podemos escolher $g(0) = C = 0 \Rightarrow g(x) = \ln(1-x)$.

Logo, $g(x) = \ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$, para $-1 < x < 1$.

O que concluímos com isso: que a série de potências $\sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1}$ converge para a função $g(x)=\ln(1-x)$ no intervalo $x\in(-1,1)$ e podemos escrever que:

$$\ln(1-x)=\sum_0^\infty \frac{x^{n+1}}{n+1}\text{ , para todo } x\in(-1,1)$$

Exemplo 9

Vimos no exemplo 3 que a série $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ é uma série convergente para todo $x\in\mathbb{R}$. Então seu raio de convergência é $R=\infty$.

Vamos usar o teorema 2 para mostrar que esta série de potências converge para a função exponencial em toda reta.

Seja f a função representada pela série: $f(x)=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$.

Aplicando o teorema 2, podemos achar sua série derivada:

$$f'(x)=\sum_1^\infty \frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_1^\infty \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{n^n}{n!}+\ldots$$

Então, $f'(x)=f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Logo, $f(x)=C\,.\,e^x$, para alguma constante C.

Mas $f(0)=1=C$. Logo $f(x)=e^x$, para todo $x\in\mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

Além disso, tomando $x=1$ podemos então expressar o número e como a soma convergente da seguinte série numérica:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

Importante!

Por meio de substituições algébricas, podemos usar a representação em séries de potências de uma função para obter representação análoga para outras funções relacionadas, sempre respeitando o intervalo de convergência, onde a função original tem sua representação por série de potências.

Exemplo 10

Levando em conta agora que $e^x=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$ e que esta igualdade ocorre para todo $x\in\mathbb{R}$, podemos encontrar a série de potências que representa a função $f(x)=e^{-x}$. Para tal, basta substituir x por $-x$ na expressão de e^x. Assim, temos que:

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Podemos então aproveitar e encontrar a série para a função $g(x) = \cosh(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Para tal, basta lembrar que:

$$g(x) = coh(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Exemplo 11

Obtenha uma aproximação da $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$.

Vocês devem se lembrar de que não conhecemos a antiderivada da função $f(x) = e^{-x^2}$. Não se consegue por métodos convencionais de integração. Entretanto, como agora sabemos que $f(x)$ pode ser representada por uma série de potências, será possível encontrar uma aproximação para a integral definida $\int_0^{0,5} e^{-x^2} dx$. Basta que representemos a $f(x)$ por sua série de potências, para poder encontrar a integral e resolver a questão.

Substituindo $x = -t^2$ na série de e^x temos:

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \frac{t^{10}}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} + \ldots$$

Segundo o teorema 3, podemos encontrar uma aproximação para a integral definida:

$$\int_0^{0,5} e^{-t^2} dt = [t]_0^{0,5} - \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{0,5} + \left[\frac{t^5}{10}\right]_0^{0,5} - \left[\frac{t^7}{42}\right]_0^{0,5} + \ldots =$$

$$= 0,5 - \frac{0,5^3}{3} + \frac{0,5^5}{10} - \frac{0,5^7}{42} + \ldots$$

Se considerarmos os dois primeiros valores da série numérica, teremos uma aproximação da integral definida, com erro inferior à $\frac{0,5^5}{10} \cong 0,003125$. (**)

$$\int_0^{0,5} e^{-t^2} dt \cong 0,458333$$

(**) **Teorema: forma simples de determinação de erro em séries alternadas**:

Seja $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ uma série alternada que satisfaz as condições do Teste para Séries Alternadas. Se S é a soma da série e S_n uma soma parcial, então:

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}$$

Isto é, o erro cometido ao aproximarmos S por S_n é, no máximo, igual a a_{n+1}.

Em seguida, veremos um tópico muito importante no estudo de séries de funções:

Séries de Taylor e de Maclaurin

Vimos que o conhecimento sobre séries geométricas foi útil para encontrar algumas funções que podem ser representadas por séries de potências, dentro do intervalo de convergência. Agora vamos aprender uma técnica mais geral para construção de séries de potências, que faz bom uso das ferramentas do Cálculo. Em muitos casos, essas séries podem fornecer aproximações polinomiais úteis para a função geradora, dentro do intervalo de convergência da série.

Construindo uma série

Já sabemos que, no interior do intervalo de convergência, a soma de uma série de potências é uma função contínua com derivadas de todas as ordens (teorema 2).

Mas e quanto ao contrário? Se uma função $f(x)$ tiver derivadas de todas as ordens num intervalo I, ela poderá ser expressa como uma série de potências? Se puder, como serão seus coeficientes?

Podemos responder acerca dos coeficientes se considerarmos que $f(x)$ é a soma de uma série de potências com intervalo de convergência I:

$$f(x) = \sum_0^\infty c_n (x - x_0)^n$$
$$= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots$$

Repetindo a derivação termo a termo, segundo o teorema 2, temos:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_3(x - x_0)^2 + \ldots + nc_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots$$
$$f''(x) = 1.2c_2 + 2.3c_3(x - x_0) + 3.4c_4(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$f'''(x) = 1.2.3c_3 + 2.3.4c_4(x - x_0) + 3.4.5c_5(x - x_0)^2 + \ldots$$

Até que, com a n-ésima derivada, temos: $f^{(n)}(x) = n!c_n$ + uma soma de termos com $(x - x_0)$ como fator. E como essas equações são válidas para $x = x_0$, temos:

$$f'(x_0) = c_1$$
$$f''(x_0) = 1.2c_2$$
$$f'''(x_0) = 1.2.3c_3$$

E, em geral: $f^{(n)}(x_0) = n!c_n$

Portanto, concluímos que: $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

Dessa forma, vemos que estas fórmulas revelam um ótimo padrão nos coeficientes de qualquer série de potências $\sum_0^\infty c_n\left(x-x_0\right)^n$, que convirja para valores de uma função $f(x)$ em I. Então, se existir essa série, haverá somente uma série deste tipo e seu coeficiente será $a_n=\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}$. A série deverá ser:

$$f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f'\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\ldots$$

Dessa forma, resta saber em que condições uma função terá uma série convergindo para ela, dentro de um intervalo de convergência da série. Se começarmos com uma função arbitrária infinitamente derivável em um intervalo centrado num ponto e usarmos o que fizemos aqui, será que a série obtida convergirá para a função f para cada x deste intervalo? A resposta é talvez, para algumas funções isto ocorrerá, para outras não.

Atenção

A notação $f^{[n]}(x)$ é para indicar a derivada de ordem n da função $f(x)$. Observe que o expoente vem entre colchetes, para distinguir do expoente n de uma potência.

Definição 3

Séries de Taylor e de Maclaurin

Seja f uma função com derivadas de todas as ordens em algum intervalo contendo x_0 como ponto interior. Então a **série de Taylor** gerada em x_0 é:

$$\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n=$$

$$=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+\ldots$$

A **série de Maclaurin** gerada por f é a série de Taylor no ponto $x_0=0$:

$$\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}x^n=f\left(0\right)+f'\left(0\right)\left(x\right)+\frac{f''\left(0\right)}{2!}\left(x\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}\left(0\right)}{n!}\left(x\right)^n+\ldots$$

Exemplo 12

Encontrando uma série de Taylor.

Vamos expressar a série de Taylor para a função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ em $x=2$.

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f(2)=\frac{1}{2}$$

$$f'(x)=-x^{-1}\Rightarrow f'(2)=-2^{-2}=-\frac{1}{2^2}$$

$$f''(x)=2!x^{-3}\Rightarrow \frac{f''(2)}{2!}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\,n!x^{-(n+1)}\Rightarrow \frac{f^{(n)}(2)}{n!}=(-1)^n\,2^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$$

A série de Taylor é:

$$f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-2)}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\ldots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\ldots$$

Observe que essa série é geométrica com primeiro termo $a=\dfrac{1}{2}$ e razão $r=-\dfrac{(x-2)}{2}$, que converge para $|x-2|<2$, ou seja, $0<x<4$; e sua soma é:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{(x-2)}{2}}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{x}$$

Então vimos que $f(x)=\dfrac{1}{x}=\sum_0^\infty(-1)^n\dfrac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$ se $0<x<4$.

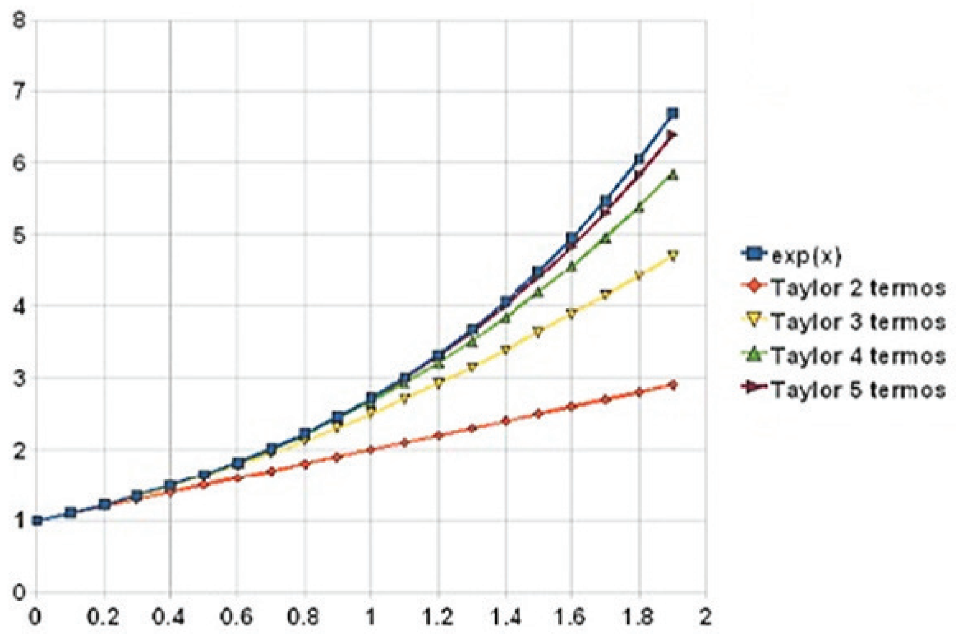
Exemplo 13

Podemos também mostrar de outra maneira que a série da função $f(x) = e^x$ (exemplo 10) é de fato $\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$. Para tal, vamos desenvolver a série de Maclaurin para a função $f(x) = e^x$. Mas como $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo n, portanto, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, a série de Maclaurin é:

$$f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n+\ldots=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

Veja a aproximação da função $f(x) = e^x$, em $x = 0$, por algumas somas parciais da série de potências descrita acima:



Fonte: slideshare.net

Teorema 4

Série de Maclaurin para uma função

Se a função f admite uma representação em série de potências da forma

$$f(x)=\sum_0^\infty c_n x^n$$

com raio de convergência $R > 0$, então $f^{(k)}(0)$ existe para todo inteiro $k \geq 1$ e o coeficiente da série assume o valor $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Assim, a série de Maclaurin de f é:

$$f(x)=\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n+\ldots$$

Teorema 5

Série de Taylor para uma função

Se a função f admite uma representação em série de potências da forma

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

com raio de convergência $R > 0$, então $f^{(k)}(x_0)$ existe para todo inteiro $k \geq 1$ e o coeficiente da série assume o valor $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Assim, a série de Taylor de f é:

$$f(x)=\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n =$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Polinômios de Taylor

A linearização de uma função derivável $f(x)$ em um ponto x_0 é o polinômio:

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Se f tiver derivadas de ordem superior em x_0, então f terá aproximações polinomiais de ordem mais alta. Esses polinômios são chamados de Polinômios de Taylor.

Definição 4

Polinômio de Taylor de Ordem n

Seja f uma função com derivadas até ordem k, para $k = 1,2,3, \ldots , N$ em algum intervalo contendo x_0 como ponto interior. Então, para algum inteiro n de 0 a N, o polinômio de Taylor de ordem n gerado por f em $x = x_0$ é o polinômio:

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Assim, como a linearização de f em $x = x_0$ fornece a melhor aproximação linear de f ao redor de $x = x_0$, os polinômios de Taylor de maior ordem fornecem as melhores aproximações polinomiais dos seus respectivos graus.

Obs: Falamos de polinômios de ordem n, e não de grau n porque $f^{(n)}(x_0)$ pode ser zero. Por exemplo, os dois primeiro polinômios da função $f(x) = cosx$ no ponto $x_0 = 0$ são $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = 1$. O polinômio de ordem 1 tem grau zero e não 1.

Exemplo 14

Reveja o exemplo 13, no qual apresentamos graficamente algumas aproximações polinomiais da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$. E o polinômio de ordem n para esta função nesse ponto é:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum_0^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Atente que esta série é finita e que estes polinômios de Taylor aproximam a função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x_0 = 0$, mas só a série de Taylor (infinita) é que tem soma $S = e^x$. Este é o propósito de trabalharmos com os polinômios: para obtermos aproximações em termos de cálculo que admitam um erro tão pequeno quanto se deseja, uma vez que, por razões óbvias, nunca poderíamos calcular a soma de infinitos termos, apenas podemos mostrar com fundamentos e técnicas matemáticas que convergem para a função em questão.

Exemplo 15

Encontrando os polinômios de Taylor da função $g(x) = senx$ em torno do ponto $x_0 = 0$.

$$g(x) = senx \Rightarrow g(0) = sen0 = 0$$
$$g'(x) = cosx \Rightarrow g'(0) = cos0 = 1$$
$$g''(x) = -senx \Rightarrow \frac{g''(0)}{2!} = 0$$
$$g'''(x) = -cosx \Rightarrow \frac{g'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3!}$$
$$g^{(4)}(x) = -senx \Rightarrow \frac{g^{(4)}(0)}{4!} = 0$$

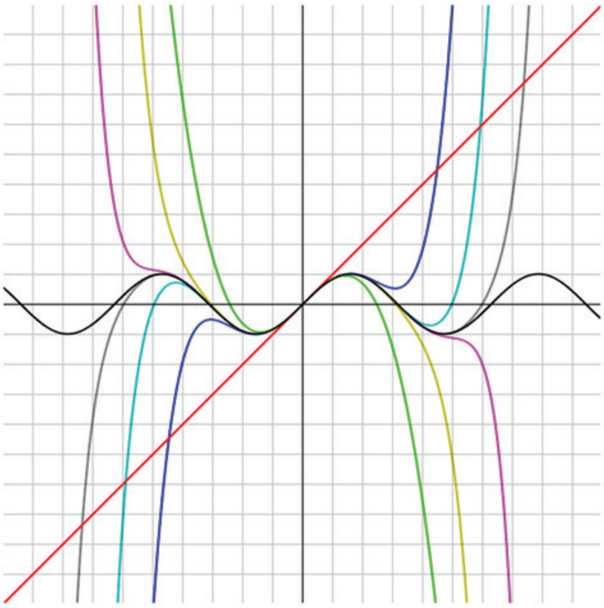
Observe que a partir daqui as derivadas se repetem nesse padrão, derivadas de ordem par são todas nulas e de ordem ímpar alternam os valões 1 e –1. Em outras palavras, $f^{(2k)}(0) = 0$ e $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^{k+1}$, $k \geq 0$.

Assim, podemos expressar os polinômios de Taylor da função $g(x) = senx$ em torno do ponto $x_0 = 0$ da seguinte forma:

$$0 + 1.x + 0.x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0.x^4 + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_0^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

A figura a seguir mostra aproximações da função $g(x) = sen x$ no ponto $x_0 = 0$ com polinômios de Taylor de grau 1, 3, 5, 7, 9, 11 e 13.



Fonte: Wikimedia Commons

Observem que quanto maior o grau (ímpar) dos polinômios de Taylor gerados pela função $g(x) = sen x$, no ponto zero, melhor a aproximação da mesma.

É claro que a série de Taylor da função g no ponto zero (série de Maclaurin) é:

$$\sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Logo mais mostraremos que esta série converge de fato para a função *senx* para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 16

Agora veremos um caso interessante: uma função f cuja série de Taylor é convergente para todo x, mas só converge para $f(x)$ em $x = 0$. Seja

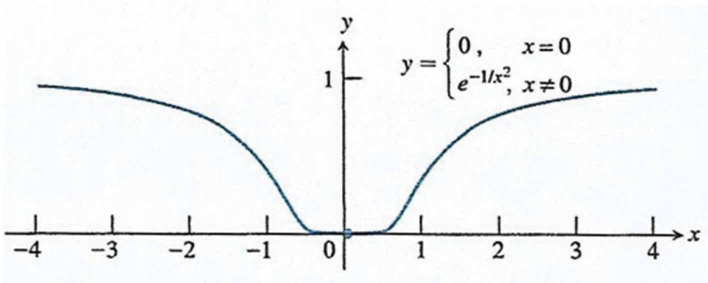
$$f(x) = \begin{cases} 0, & para\, x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & para\, x \neq 0 \end{cases}$$

Pode-se mostrar (não muito facilmente) que esta função tem derivadas de todas as ordens em $x = 0$ e que $f^{(n)}(0) = 0$, para todo n. Aqui vamos simplesmente admitir isto. Consequentemente, a série de Taylor gerada por f em $x = 0$ é a série:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \ldots =$$

$$= 0 + 0\,.\,x + 0\,.\,x^2 + 0\,.\,x^3 + \ldots + 0\,.\,x^n + \ldots$$

Como é uma série identicamente nula, portanto, convergente para todo x, pois a soma será sempre nula, para qualquer x. Entretanto, converge para $f(x)$ apenas em $x = 0$. Observe a seguir que o gráfico da extensão contínua da função $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ é tão plano na origem que todas as suas derivadas nesse ponto são nulas.



Fonte: THOMAS (2003, p. 66)

Este exemplo nos faz levantar duas questões importantes:

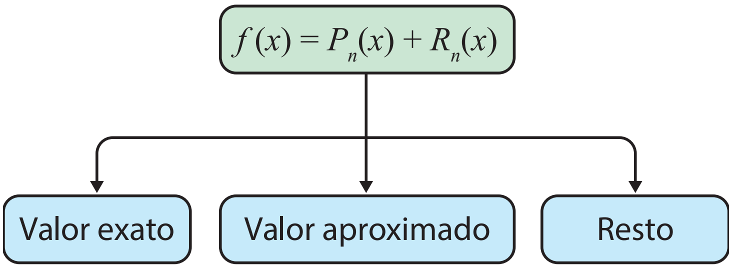
a) Para quais valores de x podemos esperar que uma série de Taylor convirja para sua função geradora?

b) Com que precisão uma função polinomial de Taylor se aproxima da função em um intervalo?

É o que vamos abordar a seguir, para responder a estas questões.

Resto de um Polinômio de Taylor

Precisamos de uma medida de precisão na aproximação do valor de uma função $f(x)$ por seu Polinômio de Taylor $P_n(x)$. Podemos então escrever:



Logo, $f(x)$ é o valor exato (não confundir com numero inteiro), $P_n(x)$ o valor aproximado dado pelo polinômio de Taylor e $R_n(x)$ o que chamamos de resto, que é a diferença entre o valor exato e a aproximação.

Teorema 6

Teorema de Taylor

Se $f(x)$ for derivável até ordem $n + 1$ em um intervalo aberto I contendo x_0, então para cada $x \in I$ existe um número c entre x e x_0, tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Sendo que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Vale observar que o Teorema de Taylor é uma generalização do Teorema do Valor Médio. Vamos omitir a demonstração por ser bastante extensa. Mas destacamos que se $R_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ para todo $x \in I$, dizemos que a série de Taylor gerada por f em x_0 converge para f em I e escrevemos:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Exemplo 17

A série revista de Maclaurin para a função e^x.

Já vimos no exemplo 13 a série de Maclaurin gerada por esta função e até já provamos que converge para a função para todo x real. Entretanto, é interessante mostrar usando a noção do resto. Para tal, vamos usar o teorema 6.

Já vimos que $f(x) = e^x$ tem derivadas de todas as ordens no intervalo $I = (-\infty, \infty)$ e que podemos então escrever:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

E que, para c entre 0 e x,

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Como e^x é uma função crescente e $\begin{cases} 1 = e^0 < e^c < e^x, \, para \;\; x > 0 \\ e^x < e^c < e^0 = 1, \;\; para\, x \leq 0 \end{cases}$, temos:

$|R_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, quando $x \leq 0$ e $|R_n(x)| \leq e^x \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, quando $x > 0$.

Além disso: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Logo: $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ e a série converge para e^x para todo $x \in \mathbb{R}$.

Frequentemente é possível estimar o resto $R_n(x)$ como aqui fizemos. Esse método de estimativa é muito conveniente e será tratado a seguir.

Teorema 7

Teorema da Estimativa do Resto

Se existirem constantes positivas M e r tais que $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq Mr^{n+1}$ para todo t entre x_0 e x, inclusive, então todo $R_n(x)$ do Teorema de Taylor vai satisfazer a desigualdade:

$$\left|R_n(x)\right| \leq M \frac{r^n \left|x - x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Se essas condições forem válidas para todo n, bem como as condições do teorema de Taylor forem satisfeitas para a função f, então a série convergirá para $f(x)$.

Em caso mais simples podemos escolher $r = 1$, desde que f e todas as suas derivadas sejam limitadas em valor absoluto por uma constante M. Em outros casos, talvez tenhamos que considerar um valor adequado de r, como por exemplo, para a função $f(x) = 2sen\,(3x)$ porque toda vez que derivamos aparece um fator 3, daí podemos tomar $r = 3$ e $M = 2$.

Exemplo 18

Vamos mostrar que a série de Maclaurin para a função $g(x) = senx$ converge para $senx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vimos (exemplo 15) a série de Maclaurin para a função $g(x) = senx$, portanto, podemos escrever:

$$1.x + -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$$

Como todas as derivadas da função $senx$ têm valores absolutos menores ou iguais a 1, podemos aplicar o Teorema da Estimativa do Resto, com $M = 1$ e $r = 1$.

$$\left|R_{2k+1}(x)\right| \leq 1.\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

E como $\frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} \to 0$, quando $n \to \infty$, qualquer que seja o valor de x, $R_{2k+1}(x) \to 0$ e a série de Maclaurin converge para a função $senx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Erro de Truncamento

O teorema de Estimativa do Resto permite também encontrar o erro de truncamento, ou seja, se queremos aproximar o valor de uma função pela soma de alguns termos do seu polinômio de Taylor com um grau de precisão desejado.

Exemplo 19

Calculando o número e com erro menor do que 10^{-6}.

Vamos usar o resultado do exemplo 17 para a função e^x no ponto $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Como e < 3 temos que $1 = e^0 < e^c < e^1 < 3$ para $0 < c < 1$ e valem que:

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Fazendo os cálculos, descobrimos que $\frac{1}{9!} > 10^{-6}$ e que $\frac{3}{10!} < 10^{-6}$, dessa forma, basta tomar, no mínimo, $(n + 1) = 10$, ou seja, $n = 9$.

Assim, com um erro menor do que 10^{-6}, vamos ter:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{9!} \cong 2{,}718282$$

Exemplo 20

Usando o exemplo 18, para quais valores de x podemos substituir $senx$ por duas parcelas do polinômio de Taylor, gerado por esta função, de forma que o erro não ultrapasse $0{,}0003 = 3 \, . \, 10^{-4}$?

Vamos usar que:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4$$

E o Teorema de Estimativa do Resto com $M = r = 1$. Assim teremos:

$$|R_4| \leq 1.\frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

Portanto, o erro será menor ou igual a 3.10^{-4} se:

$$\frac{|x|^5}{120} < 3.10^{-4}$$

$$|x| < \sqrt[5]{360.10^{-4}} \approx 0{,}514$$

Exemplo 21

Vamos encontrar a série de Maclaurin para a função $h(x) = x \,.\, senx$.

No exemplo 15 encontramos a expressão dos polinômios de Taylor para a função $g(x) = senx$

$$P_{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Portanto, para a série de Maclaurin gerada pela função g basta tomar a extensão desta expressão, a saber:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Portanto, a série de Malaurin gerada pela função h pode ser obtida por uma multiplicação da série de Maclaurin da função g por x:

$$x.senx = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$$

E a nova série converge para todo x, porque a série de $senx$ converge para todo x.

Para finalizar, veremos um teorema que vai garantir a unicidade de uma série de potências de uma função. Isto é importante para garantir se já conhecemos uma série de potências de uma função em torno do ponto $x = x_0$, ela será a série de Taylor desta função. Segue o teorema e omitimos a demonstração.

Teorema 8

Se uma função f estiver representada por uma série de potências em $(x - x_0)$ em algum intervalo aberto contendo x_0, então aquela série de potências é a série de Taylor para f em torno de x_0.

Concluindo

Vimos nesta unidade inicialmente o que são séries de potências, intervalo e raio de convergência, visando ao longo do desenvolvimento do conteúdo chegar a séries de Taylor e de Maclaurin geradas por funções, para estudar as aproximações dessas funções por suas séries em determinados intervalos de convergência. Vimos também Polinômios de Taylor, inclusive exemplos gráficos de aproximações de algumas funções, bem como estimativas de resto e erro de truncamento de aproximações. Apresentamos os fundamentos mais importantes e diversos exemplos resolvidos para auxiliar na compreensão do tema e sua aplicabilidade. Dessa forma, chegamos ao fim da unidade esperando que tenha sido produtivo para vocês.

Revejam os exemplos e a forma de resolução que são úteis para o desenvolvimento tanto do raciocínio e pensamento matemático, como da lógica de demonstração, preparando-se para as tarefas da unidade. Recomendo fortemente consultar o Material Complementar para ver algumas aplicações costumeiramente usadas em outras áreas exatas. Lá também abordamos superficialmente o que são **séries de Fourier**, apenas para conhecimento que pode ser útil futuramente.

Bom estudo!

Material Complementar

A) Maclaurin e Taylor: um pouco da história e seu contexto.

> *"Este método* [das fluxões] *deriva imediatamente de sua própria natureza, não de indivisíveis, diferenças leibnizianas ou quantidades infinitamente pequenas. Pois não existem quantidades primeiras nascentes ou quantidades últimas evanescentes, existem somente razões primeiras de quantidades nascentes e razões últimas de quantidades últimas evanescentes"*
>
> (Newton, 1714, Philosophical transctions, In: MP–3, p. 17–18).

O Método das Fluxões

Newton adotou uma visão cinemática das grandezas geométricas. Tais grandezas foram chamadas de fluentes e as velocidades a elas referidas de Fluxões. Criou-se assim o método das fluxões. Newton demonstrou a Harley, baseado no método das fluxões e em cálculos avançados, por ele desenvolvidos, que a força é inversamente proporcional ao quadrado da distância (conhecida como segunda lei de Newton), colocando um fim aos questionamentos da segunda lei de Kepler.

Certamente não houve realização no século XVIII comparável com a formulação de cálculo no XVII. Em vez disso, a questão filosófica da estrutura lógica do cálculo parecia absorver as energias dos matemáticos do século XVIII. Como o assunto saiu das mãos de Newton e Leibniz, o tema descansou em nenhuma base sólida; alguns matemáticos, interessados na expansão do alcance e eficácia daquele conteúdo, dedicaram-se a examinar as contradições básicas na teoria. Tal estado de coisas não poderia continuar por muito tempo sem contestação, e acabaram provocando uma reação em conjunto contra a total falta de clareza e necessidade de um acordo sobre a natureza do conceito de limite. Os ataques vieram de todos os cantos; Voltaire denominava esse cálculo de "a arte de numerar e medir exatamente uma coisa cuja existência não podia ser concebida". O ataque mais astuto de todos, no entanto, foi feito por um não-matemático, George Berkeley (1685–1753), o bispo da diocese irlandesa de Cloyne. O evento matemático mais significativo na Inglaterra do século XVIII foi a publicação, em 1734, de um folheto intitulado The Analyst: ou discurso endereçado a um infiel Matemático, no qual Berkeley tentou mostrar que os mistérios do cálculo – embora levassem a resultados verdadeiros - não eram mais firmemente fundamentados do que os mistérios da religião.

O referido matemático era amigo de Newton, o astrônomo Edmund Halley. Parece que Berkeley havia se recusado a dar a Harley o conslolo espiritual, quando este se encontrava em seu leito de morte, porque Halley tinha provado a insustentável natureza das doutrinas do cristianismo. Isto teria induzido Berkeley a atacar "a moderna análise" no seu ponto mais fraco: as bases do cálculo infinitesimal.

Ele provocou os proponentes do cálculo referindo-se a eles que "submetem à autoridade, levando as coisas na confiança e acreditando em pontos inconcebíveis", que são precisamente as acusações contra os seguidores de doutrinas religiosas.

Em um ponto do The Analyst, Berkeley ridicularizou a idéia de taxas de variação instantânea, utilizando uma expressão que se tornou quase clássica:

"E quais são esses fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes. E quais são mesmos esses incrementos evanescentes? Eles não são nem quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas, nem mesmo assim nada. Não podemos chamá-los de fantasmas de quantidades que partiram?"

> "*De fato, mesmo que se tenha empregado muitos artiícios para escapar ou evitar a admissão de quantidades infinitamente pequenas, de nada adiantou*"
> [Comentário de Berkeley sobre o método newtoniano das fluxões]
>
> (Berkeley, O Analista, 1979 [1734], § 11, p.71).

Ao negar a utilidade dos novos dispositivos ou a validade dos resultados, Berkeley desenvolveu uma teoria engenhosa de compensar os erros que eram para explicar a exatidão dos resultados do cálculo; assim, "em virtude de um duplo erro que você chega, embora não na ciência, mas, na verdade".

É difícil entender por que Berkeley pensou que ele poderia restaurar a conta para religião, mostrando que os matemáticos estavam tão aptos a confiar na fé como os teólogos. Seja como for, a crítica de Berkeley foi bem fundamentada e deu bons frutos.

A atenção foi assim focada em algumas das grandes fraquezas do cálculo, em especial a óbvia necessidade de um esclarecimento lógico. Quase todos os matemáticos importantes do período de Abraham De Moivre (1667–1754) e Brook Taylor (1685–1731), na Inglaterra, Colin Maclaurin (1698–1746), na Escócia, Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), na França, e os Bernoullis, na Suíça, fizeram esforços para dar ao assunto todo o rigor das manifestações dos mais antigos. De longe, a mais famosa tentativa de responder ao The Analyst foi o Tratado de Fluxões de Maclaurin, em 1742. Esse trabalho, consistindo de 763 páginas, foi a primeira formulação sistemática dos métodos de Newton, feito tão cuidadosamente que se tornou um padrão de rigor matemático até o trabalho de Cauchy em 1821. Maclaurin tentou fornecer um quadro geométrico para a doutrina das "primeiras e últimas razões" de Newton. O esforço foi louvável, muito elogiado, mas também negligenciado: 59 anos se passaram antes de aparecer uma segunda edição.

A Tratado das Fluxões é notável por sua investigação de séries infinitas, incluindo a derivação de uma expansão bem conhecida de uma função de x em termos de uma série de potências, hoje conhecida como série de Maclaurin, com todo o seu simbolismo:

$$f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}(x)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n+\ldots$$

Para obter essa série, Maclaurin procedeu da seguinte maneira:

Seja $f(x)$ representada pela série da forma $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$, onde $A, B, C, D, \ldots$ são constantes cujos valores podem ser determinados. As seguintes expressões em derivações sucessivas nos dão:

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots$$

$$f''(x) = 2C + 3D \,.\, 2x + \ldots$$

$$f'''(x) = 3D \,.\, 2 + \ldots$$

Assim sucessivamente. Substituindo $x = 0$ em cada equação, obtemos as constantes desejadas:

$$A = f(0),\ B = f'(0),\ C = \frac{f''(0)}{2},\ D = \frac{f'''(0)}{3.2},\ldots$$

Pelos padrões atuais, este argumento não seria chamado de uma prova. Maclaurin simplesmente assume que a sua expansão em série de potências é sempre possível, sem exigir explicitamente que $f(x)$ tem derivadas de todas as ordens em $x = 0$. Ele também toma como certo que a série de uma função pode ser diferenciada termo a termo, como se fosse um polinômio, e que o resultado de diferenciar a série de uma função na verdade representa a derivada da função.

O talentoso Colin parece ter sido uma espécie de prodígio matemático. Entrou na Universidade de Glasgow aos 11 anos e se formou com um mestrado com a idade de 15. Tendo participado de uma avaliação competitiva, Maclaurin foi designado para uma cadeira em Aberdeen, embora tivesse apenas 19 anos. Ele se mudou para a Universidade de Edimburgo em 1725 por recomendação de Newton, tornando-se seu discipulo. Maclaurin foi duas vezes premiado pela Academia de Ciências, na primeira ocasião (1724) por um livro sobre a colisão de corpos e, posteriormente (1740) pelo seu ensaio sobre a teoria matemática das marés. Quando o exército de Charles Stuart cercou Edimburgo na insurreição de 1745, Maclaurin fugiu para a Inglaterra quando a cidade foi invadida, mas a exposição nas trincheiras e os rigores da noite já tinham feito as suas vítimas. Ele morreu pouco depois aos 48 anos de idade.

Com a morte de dois dos mais ardentes defensores de Newton, Cotes e Maclaurin, a escola matemática inglesa permaneceu relativamente medíocre no restante do século XVIII. É razoável especular que se Cotes e Maclaurin tivessem vivido mais o hiato no desenvolvimento da matemática britânica, o período teria sido encurtado. Pode-se dizer que a série de potências de Maclaurin é meramente uma instância específica de que havia sido obtido anteriormente por Brook Taylor (1685–1731) usando uma abordagem diferente. Maclaurin reconhece isso perfeitamente no seu Tratado das Fluxões. A singularidade é que o resultado geral e um caso particular têm nomes diferentes, relacionados às pessoas que lhes são inerentes.

Brook Taylor foi educado em Cambridge. Em 1714, foi eleito para a Royal Society e tornou-se seu secretário dois anos depois. Foi nomeado para o comitê criado pela sociedade para resolver as reivindicações rivais de prioridade em matéria de descoberta do cálculo. Mas com apenas 34 anos de idade problemas de saúde obrigaram Taylor a se demitir do cargo e abandonar sua atividade matemática. O principal trabalho de Taylor, *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* (1715), inclui a expansão "série de Taylor" para $f(x)$. Com exceção da notação, seu desenvolvimento dizia:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)h}{1!} + \frac{f''(x)h^2}{2!} + \frac{f'''(x)h^3}{3!} + \ldots$$

Expressão da qual a série de Maclaurin se realiza tomando $x = 0$.

Taylor anunciou sua descoberta pelo menos três anos antes de aparecer na imprensa. Na tradição newtoniana, o seu argumento envolveu fluxões e quantidades evanescentes, juntamente com o simbolismo pesado em que apareceram pontos acima e abaixo variáveis. Sua apresentação não era mais livre de imperfeições do que a de Maclaurin, ambas deram pouca atenção às considerações de convergência das séries por eles tratadas.

Taylor realizou a primeira investigação satisfatória sobre refração astronômica e teve vários trabalhos seus publicados, incluindo relatórios sobre trabalhos em magnetismo e atração capilar. Publicou em 1719 o livro *New Principles of Linear Perspective*, uma versão melhorada do seu trabalho pioneiro intitulado *Linear Perspective* de 1715, obra depois revisada por Colson em 1749 e reeditada em 1811. Após sua morte, em 1793, seu neto publicou a obra de Taylor intitulada *Contemplatio Philosophica*. Mas ficou mesmo conhecido pelo seu trabalho sobre séries que hoje recebem seu nome.

A influência das Fluxões sobre o progresso da matemática dos britânicos em 1700 estava num momento desafortunado. O uso hábil de Maclaurin em geometria convenceu os compatriotas de Newton a aderir rigidamente aos métodos clássicos geométricos no momento em que a "análise" (o estudo dos processos infinitos), não a geometria, estava em ascensão na Europa Continental. Assim, Inglaterra ficou para trás. Com pouca consideração pelo rigor, os matemáticos continentais empurraram o desenvolvimento puramente formal de vários novos ramos de análise: equações diferenciais, cálculo das variações, geometria diferencial e a teoria de funções de uma variável complexa. O centro da atividade mudou várias vezes em toda a Europa, com nenhuma nação permanecendo como líder por qualquer período de tempo prolongado.

B) Algumas aplicações de série de potências

Vamos mostrar como séries de potência são usadas por cientistas e engenheiros em várias aplicações.

I) Séries Binomiais para potências e raízes.

A **série binomial** é a série de Maclaurin gerada por $f(x) = (1 + x)^m$, para m constante, ou seja:

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

Essa série converge para a função f se $|x| < 1$. É fácil verificar a construção desta série, uma vez que $f^{(k)}(x) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}(1+x)^{m-k}$ calculada no ponto $x = 0$ e substituída na fórmula de Maclaurin.

Para m, um número inteiro, temos:

Se $m \geq 0$, a série para depois de $(m + 1)$ termos, porque os coeficientes são nulos a partir de $k = m + 1$, portanto, a série na prática é finita, portanto tem soma que é o valor de $f(x)$.

Se $m < 0$, a série é infinita e converge para $|x| < 1$. Para confirmar isto, basta verificar que:

$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x|$ quando $k \to \infty$. Portanto, para convergir, temos que impor que $|x| < 1$.

Essa dedução mostra que a série binomial é gerada por $f(x) = (1 + x)^m$ converge para $|x| < 1$, mas não mostra que converge para $(1 + x)^m$, entretanto, vamos assumir que sim (omitimos a demonstração).

Podemos, então, escrever que:

Série binomial

$$(1+x)^m = 1 + \sum_1^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \text{ onde } \binom{m}{k} \text{ é assim definido:}$$

$$\binom{m}{1} = m;\ \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!};\ \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}, \text{ para } k \geq 3.$$

Por exemplo, para $m = -1$, usando a série binomial, temos:

$$\binom{-1}{1} = -1;\ \binom{-1}{2} = \frac{-1(-2)}{2!} = 1;\ \binom{-1}{k} = \frac{-1(-2)(-3)\dots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{k!}{k!} = (-1)^k$$

Com esses valores como coeficientes, a série binomial fornece uma conhecida série geométrica:

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 + \sum_1^{\infty} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

Se $m = \frac{1}{2}$, $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$ e temos que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ para $|x|$ pequeno.

A série binomial para $m = \frac{1}{2}$ dá aproximações quadráticas e de maior ordem, junto com estimativas de erro, obtidas pelo Teorema de estimativa de erro para séries alternadas, que pode assim ser enunciado: "Se a série alternada $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ satisfaz as condições do Teorema de Leibniz (teorema para séries alternadas que vimos na unidade anterior), então o erro de truncamento para a n-ésima soma parcial é menor do que o termo u_{n+1} e tem o mesmo sinal do termo não usado".

Então temos:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!} x^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!} x^3 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!} + \dots == 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots$$

A substituição de x também dá outras aproximações, como por exemplo:

$$\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \text{ para } |x^2| \text{ pequeno}$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \text{ para } \left|\frac{1}{x}\right| \text{ pequeno, ou seja, } |x| \text{ grande.}$$

II) Solução na forma de série para equações diferenciais

Sabemos que nem sempre conseguimos encontrar uma expressão simples para a solução de um problema de valor inicial de uma equação diferencial. Uma maneira de contornar essa dificuldade é encontrar uma representação de série de potências para a solução. Vejamos este exemplo para a solução de uma equação diferencial de primeira ordem com valores iniciais.

Vamos encontrar a solução para o problema de valor inicial:

$$y' - y = x \text{ com } y\,(0) = 1$$

Vamos presumir que existe uma solução em série da forma:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Queremos encontrar os valores dos coeficientes desta série tal que satisfaçam as condições da equação diferencial. Então vamos expressar a série da derivada primeira desta série:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

$$y' - y = (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)\,x + (3a_3 - a_2)\,x^2 + \ldots\,(na_n - a_{n-1})\,x^{n-1} + \ldots$$

Se y satisfaz a equação $y' - y = x$, a série obtida tem que ser igual a x. Portanto, pela igualdade de polinômios, $2a_2 - a_1 = 1$ e os demais coeficientes da série $y' - y$ são nulos. Além disso, como $y\,(0) = a_0 = 1$. Daí temos:

$$a_1 = a_0 = 1;\ a_2 = \frac{1+a_1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2};\ a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{2}{3.2} = \frac{2}{3!};\ \ldots\ ;\ a_n = \frac{a_{n-1}}{n!}$$

Substituindo estes valores na equação da série de y:

$$y = 1 + x + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} + \ldots + 2\frac{x^n}{n!} + \ldots = 1 + x + 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\frac{x^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + x + 2\,(e^x - x - 1) = -1 - x + 2e^x$$

Então a solução do problema de valor inicial $y' - y = x$ é:

$$y = -1 - x + 2e^x$$

Verificando $y\,(0) = -1 - 0 + e^0 = -1 + 2 = 1$ e $y' - y = (-1 + 2e^x) - (-1 - \mathrm{x} + 2e^x) = x$.

III) Calculado limites de formas indeterminadas

Vamos calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{senx - tgx}{x^3}$ por meio da série de potência.

As séries de Maclaurin das funções do numerador explicitadas até o termo x^5 são:

$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad e \quad tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

$$senx - tgx = -\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{8} - \ldots = x^3\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \ldots\right)$$

Portanto:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{senx - tgx}{x^3} = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{8} - \ldots\right) = -\frac{1}{2}$$

IV) Usando séries de potências para calcular a derivadas e integrais

Sabendo que $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$

No exemplo 7 do conteúdo teórico encontramos a série da função $f(x) = arctgx$ e para tal, usamos a série

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$$

Para mostrar que esta série é convergente com soma $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ para $|x| < 1$, e que derivando termo a termo, obtínhamos a série

$$g'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^{2n-1}x^{2n-2} + \ldots$$

Que também é uma série convergente com soma $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ para $|x| < 1$

Integrando termo a termo obtivemos:

$\displaystyle\int g'(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C$ e fazendo $x = 0$ encontramos $C = 0$

E, portanto, deduzimos que $g(x) = arctgx$. Entretanto, faltou provar que o resto da integração da série $g'(x)$ de fato tende a zero. Então vamos provar o Teorema de Integração termo a termo para esta série. Vamos tomar a série finita

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2} \quad \text{para } n \geq 0$$

Integrando ambos os membros da fórmula finita entre $t = 0$ e $t = x$, temos:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2+1} + R_n(x)$$

Sendo que $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}dt$

Como $1 + t^2 > 1$ temos:

$\left|R_n(x)\right| \leq \int_0^x t^{2n+1} dt = \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3}$ e se $|x| \leq 1$, o membro direito da desigualdade tende a zero quando n tende para infinito.

Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ se $|x| \leq 1$.

Agora sim, provamos que a série original converge para a função *arctgx*, ou seja,

$arctgx = \sum_0^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ para $|x| \leq 1$.

O que nos permite aproximar alguns valores desta função, por exemplo, tomando $x = 1$:

$$arctg(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$$

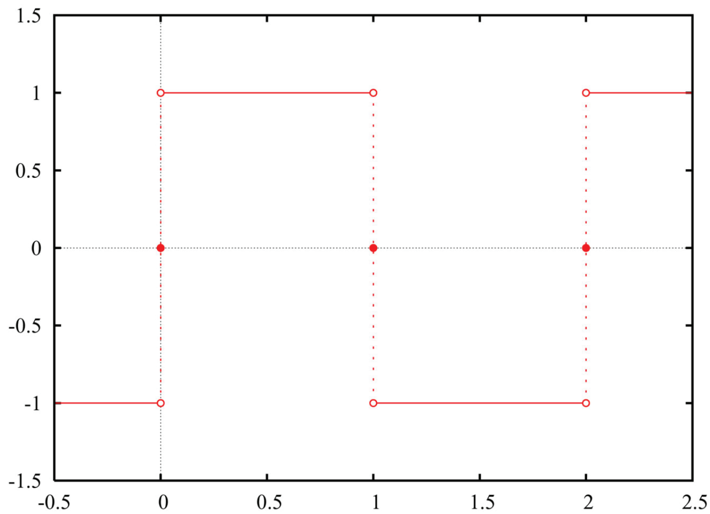
Que é uma série que converge, embora lentamente.

C) Série de Fourier

Vimos a aproximação de funções por polinômios de Taylor de grau fixo, e habitualmente esses polinômios estão bem próximos do valor real da função perto do ponto em que foram gerados. Em outras palavras, os polinômios de Taylor são boas aproximações locais, mas não globais. Para aproximações mais globais, nem que sejam tão próximas localmente, utilizam-se aproximações de Fourier. Elas são muito úteis, principalmente para funções periódicas, que é o caso das funções trigonométricas. Além disso, as aproximações de Fourier podem ser feitas até para funções não contínuas.

Muitos processos que ocorrem na natureza são periódicos ou repetitivos, de modo que faz sentido aproximá-los por funções periódicas. Por exemplo, as ondas sonoras são constituídas por oscilações periódicas de moléculas do ar. Os batimentos do coração, o movimento dos pulmões, bem como a corrente elétrica que traz energia para nossas casas são fenômenos periódicos.

Vejamos o exemplo da engenharia elétrica de uso da onda quadrada para modelar um interruptor alternado (que liga e desliga repetidamente)



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Onda_quadrada

Podemos expressar a onda quadrada pela fórmula:

$$f(x) = \begin{cases} \vdots \\ -1, para -1 < x < 0 \\ 1, para\, 0 < x < 1 \\ -1, para\, 1 < x < 2 \\ 1, para\, 2 < x < 3 \\ \vdots \end{cases}$$

Como podem ver, não é nada fácil trabalhar com funções deste tipo, seja pela sua fórmula, mas principalmente por não serem contínuas e muito menos diferenciáveis. Entretanto, são periódicas.

Vamos mostrar como podemos aproximar funções deste tipo com funções periódicas diferenciáveis. As funções mais simples diferenciáveis e periódicas são $senx$ e $cosx$. Assim, serão as componentes básicas destas aproximações.

Como seus períodos são 2π, vamos supor que a função que desejamos aproximar tenha período 2π (depois pode-se ajeitar para outros períodos). Podemos pensar na onda quadrada, com suas abcissas $m = n\pi$.

Vamos aproximar a função f por uma soma de funções trigonométricas

$$f(x) \approx F_n(x) = a_0 + \sum_1^n a_k cos(kx) + \sum_1^n b_k sen(kx)$$

$F_n\,(x)$ é chamado **polinômio de Fourier grau *n***. Embora não sejam polinômios no sentido usual, são assim chamados em homenagem ao matemático francês Joseph Fourier (1868–1830), que foi o primeiro a investigá-los com maior profundidade.

Fourier ficou conhecido principalmente por sua contribuição à análise matemática do fluxo de calor, com sua obra de 1822, *Theorie analytique de la Chaleur*. Ele estabeleceu a equação diferencial parcial administrando a difusão de calor e resolveu isto usando série infinita de funções trigonométricas. Embora estas séries tivessem sido usadas antes, Fourier as investigou em detalhe muito maior. Sua pesquisa, inicialmente criticada por falta de rigor, foi mostrada depois como válida.

Os coeficientes a_k e b_k são chamados coeficientes de Fourier. $F_n\,(x)$ devem ter período 2π e, portanto, potencialmente um método de boa aproximação para funções com este mesmo período.

Os coeficientes de Fourier de uma função f periódica de período 2π estão representados no quadro a seguir:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x})\cos(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx},\ \ \mathrm{k} > 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\mathrm{x})sen(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx},\ \ \mathrm{k} > 0$$

Obs: as integrais para os coeficientes podem ser substituídas por integrais em intervalos quaisquer de comprimento 2π. Isto depende da função que desejamos aproximar.

Da mesma forma que os polinômios de Taylor, quanto mais alto o grau de aproximação de Fourier, mais precisa ela é. Portanto, continuando o processo, indefinidamente resulta na **série de Fourier**.

Assim, a série de Fourier de uma função f em $[-\pi, \pi]$ é assim definida:

$$f(x) = a_0 + a_1 cos\,(x) + a_2 cos\,(2x) + a_3 cos\,(3x) + \ldots$$
$$+ b_1 sen\,(x) + b_2 sen\,(2x) + b_3 sen\,(3x) + \ldots$$

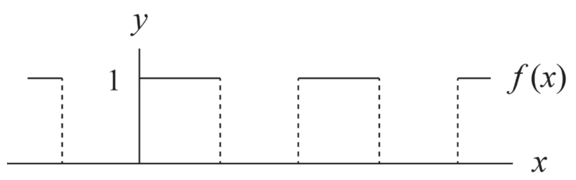
Os coeficientes definidos como no quadro anterior.

Exemplo

Por simplicidade, vamos considerar a onda quadrada assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 0, para -\pi \leq x < 0 \\ 1, para\, 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

Que pode ser representada pelo gráfico a seguir.



Fazendo os cálculos para os coeficientes de Fourier da onda quadrada temos:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1dx = 0 + \frac{1}{2\pi}.(\pi) = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} cos(kx)dx = 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{sen(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = 0$$

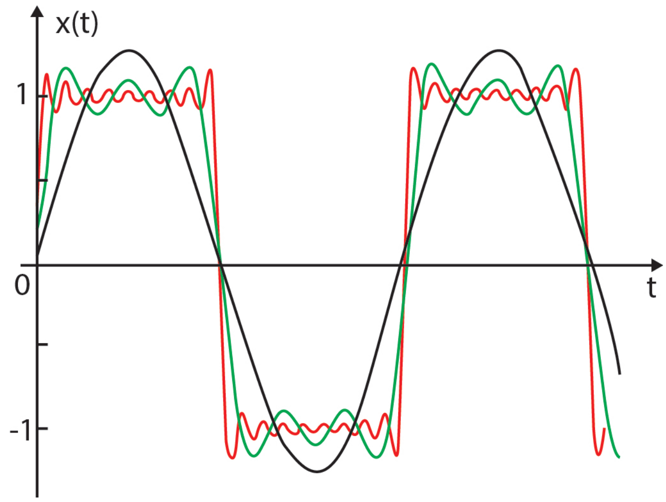
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} sen(kx)dx = 0 + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[-cos(k\pi) + cos(0)\right] = \begin{cases} \frac{2}{k\pi}, para\, k\, ímpar \\ 0,\ para\, k\ par \end{cases}$$

Portanto, a série de Fourier da onda quadrada fica sendo:

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}sen(x)+\frac{2}{3\pi}sen(3x)+\frac{2}{5\pi}sen(5x)+\frac{2}{7\pi}sen(7x)+\ldots=\frac{1}{2}+2\sum_{1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)x}{(2n-1)\pi}$$

Veja uma representação gráfica de aproximações do sinal periódico da onda quadrada por termos da série de Fourier, muito utilizada na engenharia elétrica.



Fonte: https://leoknuppe.wordpress.com/page/2/

Livros:

BURTON, D. M. **The History of Mathematics:** an introduction. New York: MacGraw-Hill, 2011.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. v. 2., 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BROLEZZI, A. C. **O ensino do cálculo poderia seguir sua história?** Disponível em: http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20062/mat341/calculo.pdf Acesso em 25 de maio de 2016.

Sites:

Vídeo Univesp sobre polinômios de Taylor
http://univesptv.cmais.com.br/calculo-ii/home/polinomios-de-taylor-funcoes-de-uma-variavel-real

Série de Fourier
https://leoknuppe.wordpress.com/page/2/

Referências

BOULOS, P. **Exercícios resolvidos e propostos de sequências e séries de números e de funções**. São Paulo: Edgard Blucher, 1986.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

Referências Complementares

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. v. 2., 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. v 2. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1982. 2 v.

HUGHES-HALLET, D. et al. **Cálculo de uma variável**. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomsom Learning, 2007.

Anotações

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo - SP - Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Cruzeiro do Sul
Educacional