

Sequências, Séries e Progressões



Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

Material Teórico



Sequências numéricas

Responsável pelo Conteúdo:
Profa. Dra. Ana Lúcia Nogueira Junqueira

Revisão Textual:
Profa. Esp. Natalia Conti



- Introdução
- O padrão
- Sequências convergentes e divergentes
- Exercícios Resolvidos
- Concluindo



Objetivo de APRENDIZADO



- Apresentar a noção e definir sequências numéricas procurando relacionar com situações problema envolvendo sequências.
- Definir sequências crescentes, decrescentes e monótonas.
- Trabalhar limites e critérios de convergência de sequências numéricas.
- Apresentar propriedades e principais teoremas sobre sequências numéricas.
- Trazer exemplos significativos e algumas aplicações.

Nesta Unidade vamos estudar sequências numéricas. Veremos como padrões geraram sequências e mostremos algumas sequências especiais, como sequência de Fibonacci. Vamos dar a definição formal de sequência numérica, propriedades, proposições e teoremas, diversos exemplos e demonstrações. Um fundamento básico da temática é saber avaliar se uma sequência é convergente ou não. Para isso, veremos proposições e teoremas, que garantem critérios de convergência, e também vamos calcular o limite de sequências. Prepare-se que vamos trabalhar bastante com limites, aquele mesmo conceito que já conhecem dos estudos de Cálculo. Se existir o limite de uma sequência, esta converge para o valor do limite.

Acompanhe o desenvolver da teoria, preste bem atenção às definições, propriedades e teoremas, confira os exemplos dados, preparando-se assim para resolver as atividades propostas na unidade. Recomendo rever o estudo sobre limites - conceito e propriedades - pois serão muito utilizados nessa unidade.

Organize-se para dar conta do estudo em tempo hábil. Não deixe acumular, não se atrasse. Em cursos à distância a disciplina pessoal e organização do tempo são fatores fundamentais para que você tenha autonomia e seja o protagonista da construção do seu conhecimento. Claro que você terá o acompanhamento do tutor para auxiliá-lo nos estudos, mas o caminho é determinado por você. Não deixe as tarefas se acumularem, pois a temática da disciplina requer estudos que reservem tempo de reflexão para cumprir o ciclo de aprendizagem, por isso, não deixe para última hora.

Contextualização

Muitas sequências são “geradas” de observações do cotidiano. Uma dessas sequências, muito famosa, presente em vários filmes de ficção como *O Código Da Vinci* (Buena Vista, 2006), é a sequência de Fibonacci.

O clássico problema dos coelhos, apresentado no capítulo 12 do livro *Liber Abaci* de Fibonacci, propõe o seguinte:

“Um homem pôs um par de coelhos (macho e fêmea) num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês”.

Liber Abaci (o Livro do Ábaco ou do Cálculo) foi escrito por Fibonacci, em 1202, baseado na aritmética e “Álgebra” que Fibonacci apreendeu durante as suas viagens pelo Mediterrâneo. Em 1228 o livro foi de novo publicado após uma revisão, esta que é hoje conhecida. No seu trabalho, Leonardo Fibonacci – ou Leonardo de Pisa, por ter nascido em Pisa, Itália, provavelmente em 1175 – introduziu na Europa a numeração árabe e a notação posicional, esclarecendo o funcionamento desta numeração e o zero, aprendido por Fibonacci com os árabes enquanto viveu com o seu pai, Guglielmo Bonaccio, no Norte da África. Fibonacci teria morrido em 1250, em Pisa.

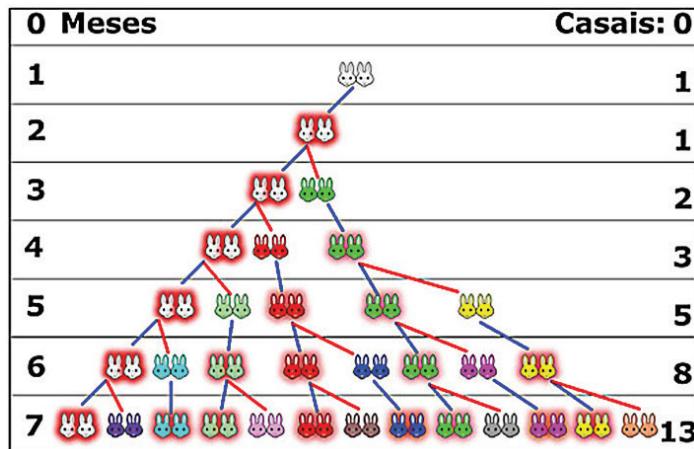
A solução deste problema é uma sequência numérica e um matemático francês, Edouard Lucas (1842–1891), ao editar um trabalho seu, ligou o nome de Fibonacci à essa sequência. Laurence Sigler, em 2002, lançou uma tradução para o inglês do *Liber Abaci*.

Para resolver tal problema é preciso prestar atenção ao processo de procriação do casal inicial de coelhos. Suponhamos, para ter uma ideia, que o primeiro casal de coelhos nasceu no dia 1 de Janeiro.

No dia 1 de Fevereiro, isto é, ao cabo de um mês, ainda não serão férteis. Porém, no dia 1 de Março já terão descendentes, e neste mês teremos um total de dois casais de coelhos.

No dia 1 de Abril, esse segundo casal de coelhos não será ainda fértil, mas o casal inicial de coelhos voltará a ter coelhinhos, e no quarto mês teremos um total de três casais de coelhos, dois dos quais serão férteis no dia 1 de Maio. Por conseguinte, para o quinto mês teremos cinco casais.

Se raciocinarmos de modo semelhante, no dia 1 de Junho haverá 8 casais de coelhos, em 1 de Julho 13 casais, em 1 de Agosto 21 casais e assim sucessivamente. Para ilustrar veja a representação icônica a seguir:



Fonte: bpiropo.com.br

Ao cabo de um ano, isto é, no dia 1 de Janeiro do ano seguinte, prevê-se que 144 casais de coelhos deem voltas pelo pátio.

Observa-se esta formação na representação, mas também se pode perceber que a sequência numérica, conhecida como a sequência de Fibonacci, indica o número de pares ao final de cada mês, e o processo poderá continuar como sequência numérica:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$$

Esta sequência tem uma característica especial denominada recursividade:

1º termo somado com o 2º termo gera o 3º termo

2º termo somado com o 3º termo gera o 4º termo

3º termo somado com o 4º termo gera o 5º termo, e assim sucessivamente...

Se escrevermos:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_3 = 1 + 1 = 2, \quad \text{logo } a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_2 = 1, a_3 = 2, \quad a_4 = 1 + 2 = 3, \quad \text{logo } a_4 = a_2 + a_3$$

$$a_3 = 2, a_4 = 3, \quad a_5 = 2 + 3 = 5, \quad \text{logo } a_5 = a_3 + a_4$$

$$a_4 = 3, a_5 = 5, \quad a_6 = 3 + 5 = 8, \quad \text{logo } a_6 = a_4 + a_5$$

Podemos generalizar:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 1, & \text{se } n = 2 \\ a_{n-2} + a_{n-1}, & \text{se } n \geq 3 \end{cases}$$

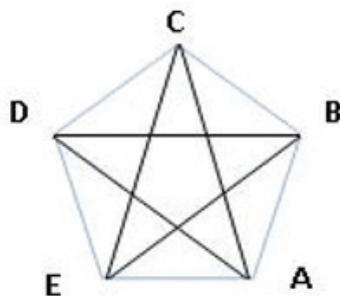
O problema de formas de recorrência é que, para calcular um determinado termo, temos que saber termos anteriores.

Mas de qualquer forma a sequência de Fibonacci é uma das sequências mais famosas. Querem saber por quê? Mas antes vejamos um número muito especial:

O Número de Ouro

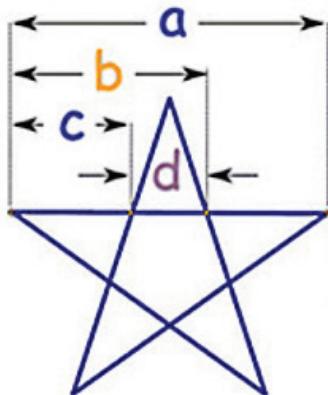
Os Gregos determinaram a razão entre a diagonal do pentágono regular e o seu lado (quociente dourado) e concluíram que:

$$\frac{\text{diagonal}}{\text{lado}} = \frac{AD}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1,6180339\dots$$



Na verdade, muitas relações de proporcionalidade iguais a esta podem ser identificadas, como:

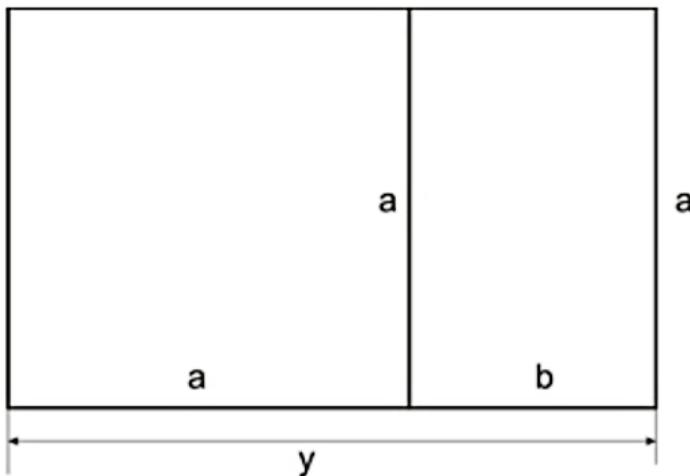
$$\phi = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$



Séculos antes de Cristo, os pitagóricos estudaram as relações entre os segmentos de um pentagrama e descobriram um número de importância histórica na geometria, estética, arquitetura e biologia. Este número foi chamado, mais tarde, de número áureo ou razão áurea e possui a designação da letra grega *phi* (PHI maiúsculo), que é a inicial do nome de Fídias, escultor e arquiteto do Partenon.

Os pitagóricos usaram a razão de ouro na construção da estrela pentagonal. Porém, não conseguiram exprimi-lo como quociente entre dois números inteiros (número racional), pois não acreditavam na existência de números não exprimíveis por uma fração. Quando chegaram a esta conclusão, ficaram muito espantados. Isto porque este número era contrário a toda a lógica que conheciam; daí lhe chamarem de número irracional (denominação usada até hoje). Este era o número de ouro, apesar deste nome só lhe ser atribuído uns dois mil anos depois...

Mais tarde, o matemático grego Endoxus estudou a teoria das proporções e chegou a constatar que essa razão era uma importante fonte para a estética, considerando o retângulo cujos lados apresentavam esta relação de notável harmonia. Chamando-o, então, de retângulo áureo.



Como os dois retângulos indicados na figura são semelhantes, temos:

$$\frac{y}{a} = \frac{a}{b}$$

Substituindo $b = y - a$, temos que $y^2 - ay - a^2 = 0$. E resolvendo esta equação do 2º Grau:

$$y = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Como a raiz negativa não convém para nosso caso, temos:

$$\frac{y}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398875\dots$$

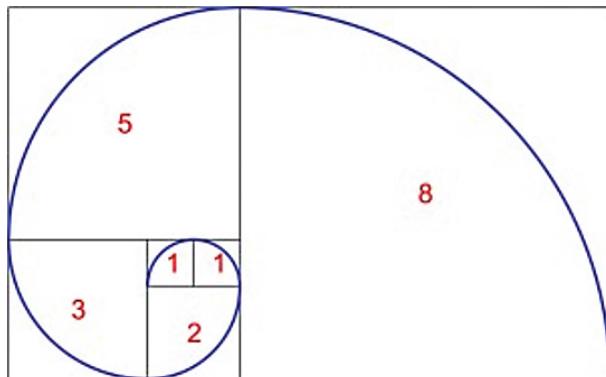
Que é conhecido como o número de ouro ϕ .

Uma característica interessante vem do fato de que se desenharmos um retângulo áureo, este pode ser dividido num quadrado e em outro retângulo de ouro. Este processo pode ser repetido indefinidamente, mantendo-se a razão constante:

Os Retângulos e a Proporção do Caracol

A regra é encostar quadrados para formar retângulos, começando por dois quadrados com lados iguais a 1, surge um retângulo de lados 1 e 2, como na soma acima $1 + 1 = \mathbf{2}$. Continuando com um quadrado com lados iguais a 2, porque a medida do maior lado do retângulo formado anteriormente é justamente **2**, surge um novo retângulo de lados 3 e 2. Encoste um novo quadrado de lado 3. Aplique a sequência quanto quiser, sempre vai ser proporcional e criará um novo retângulo a cada quadrado encostado. Veja no desenho.

Para enfeitar mais ainda, é possível criar um **caracol** desenhando um quarto de círculo em cada quadrado utilizado. Esta espiral é também conhecida como caracol ou espiral de Fibonacci.



Mas o que isto representa?

Primeiramente observe que os números indicados representam exatamente a **sequência de Fibonacci**: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

Em seguida, vejamos as proporções obtidas entre números consecutivos desta sequência. Considere a sequência de Fibonacci e vamos encontrar a razão entre dois números consecutivos desta sequência. Veja o quadro a seguir:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots\}$$

Menor/maior	Maior/menor
$1/2 = 0,5;$	$2/1 = 2$
$2/3 = 0,66666666\dots$	$3/2 = 1,5$
$3/5 = 0,6\dots$	$5/3 = 1,666\dots$
$5/8 = 0,625\dots$	$8/5 = 1,6\dots$
$8/13 = 0,6153846\dots$	$13/8 = 1,625\dots$
$13/21 = 0,6190476\dots$	$21/13 = 1,615\dots$
$21/34 = 0,617647\dots$	$34/21 = 1,619\dots$
$34/55 = 0,6181818\dots$	$55/34 = 1,61764\dots$
$55/89 = 0,6179775\dots$	$89/55 = 1,6181818\dots$
$89/144 = 0,618055\dots$	$144/89 = 1,6179775\dots$
$144/233 = 0,618025751\dots$	$233/144 = 1,618055556\dots$

Leonardo Fibonacci



Fonte: Wikimedia Commons

Observe que na coluna da direita, as razões tendem para o número ϕ e na coluna da esquerda, tendem para

$$\varphi = \frac{1}{\Phi} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{-4} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,618033988\dots$$

- Penso que ficou clara a relação entre sequência de Fibonacci e o número ϕ .

Agora vejamos como tudo isto se manifesta na natureza

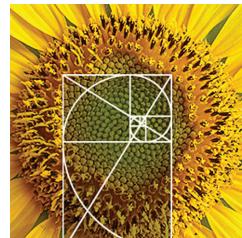
A sábia natureza utiliza estas proporções, mas não somente nos animais e nas plantas, também nós mesmos somos construídos fisicamente com algumas destas proporções.



Fonte: blogs.odiario.com



Fonte: blogs.odiario.com



Fonte: media.tumblr.com

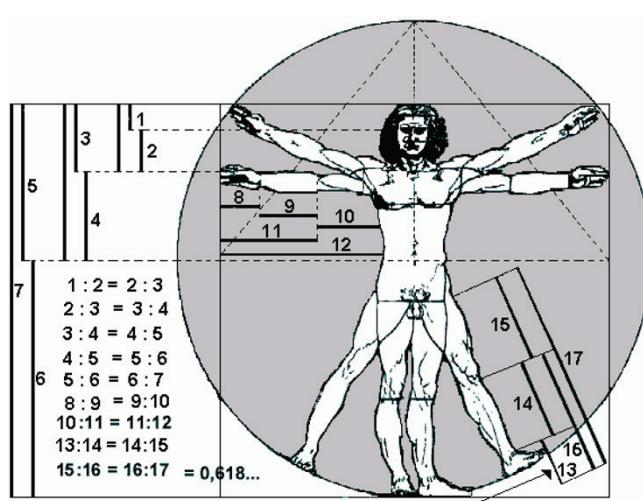


Fonte: blog.wesleycota.com



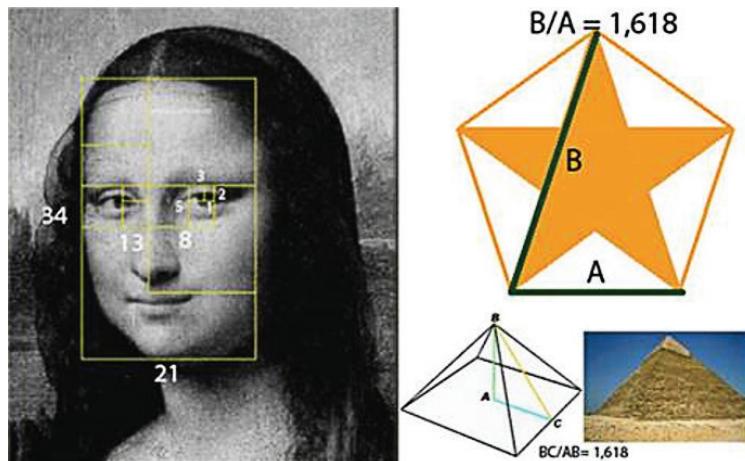
Fonte: pegasus.portal.nom.br

Leonardo da Vinci, em seus estudos de Anatomia, trabalhou com um modelo padrão (*canon*) para a forma de um ser humano, utilizando Vitrúvio como modelo. Tais dimensões aparecem na figura abaixo. A notação $a : b = c : d$ é uma proporção.

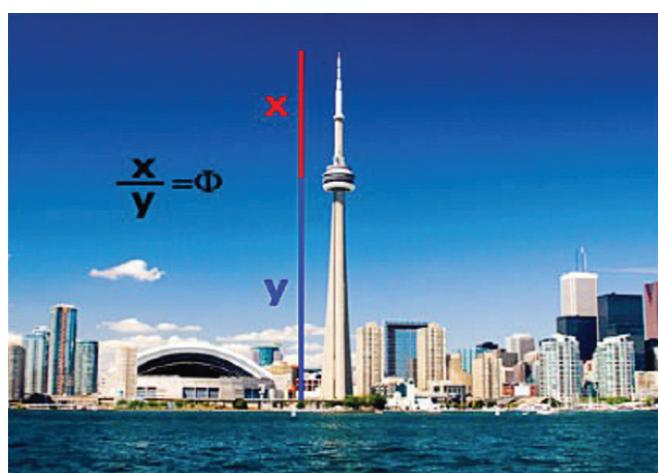


Nas artes e na arquitetura

Na construção das pirâmides do Egito e nas pinturas, como a Mona Lisa, bem como na Torre CN em Toronto, Canadá, entre outras, encontramos as proporções áureas.



Dimensões na Mona Lisa e na pirâmide de Gizé



Torre CN em Toronto, Canadá.

Podemos ainda encontrar essas relações na Física por construção proposital, como no campo da ótica, por exemplo. Na música podemos citar Beethoven. Em algumas de suas sinfonias, a quinta e a nona, usou a razão áurea na marcação do tempo. Na área de investimentos encontramos relação entre a Teoria da Onda de Elliott e a sequência de Fibonacci.



Assista aos seguintes vídeos. Tenho certeza de que você vai gostar!

Arte e matemática - O número de ouro

<http://tvescola.mec.gov.br/tve/videoteca-series!loadSerie;jsessionid=293F6BAA5A2F06E1EC89A17322654F99?idSerie=7251>

Número de ouro na natureza

<https://youtu.be/gbX3IIWxM1s>

Os números de Fibonacci na Natureza

<https://youtu.be/kkGeOWYOFoA>

O número de Ouro: a mágica por detrás do belo

<https://youtu.be/XM-o0HsjkV8>

Introdução



Você já reparou que as pessoas, em muitos momentos do dia, estão diante de situações que envolvem uma sequência de números? O torcedor procura, no caderno de esportes do jornal, a posição de seu time no campeonato nacional. O carteiro, ao localizar o endereço para entregar a correspondência, observa certa regra na numeração das casas: de um lado, estão dispostas as casas de numeração par em sequência crescente ou decrescente, e, do outro lado, as de numeração ímpar. Em um edifício, a numeração dos apartamentos indica também o andar em que eles se localizam. No hospital, a enfermeira é orientada sobre a sequência de horários em que deve administrar certo medicamento ao paciente.

O ser humano observa vários movimentos naturais que seguem uma determinada sequência, formando, assim, certo **padrão**: as horas do dia, as estações do ano, as fases da Lua ou o período de aparecimento de um cometa.

Desde a Antiguidade, grande parte do trabalho dos matemáticos e cientistas tem sido observar e registrar fenômenos que ocorrem segundo um padrão. O encontro de um **padrão** ou de uma **regularidade** será uma das possibilidades de compreensão, previsão e controle desses fenômenos.

Esse tipo de observação ocorreu, por exemplo, há quase 5 mil anos no Egito, motivada pela preocupação com as enchentes do Rio Nilo. O Egito é banhado pelo Rio Nilo que fertiliza suas margens tornando-as próprias para plantação e colheita de alimentos num país majoritariamente desértico. As chuvas sazonais causavam enchentes que depositavam húmus nas margens favorecendo a agricultura e pecuária, água fresca, peixes e aves aquáticas, além de servir para o transporte e comércio. Daí sua importância para a sobrevivência do seu povo.



Fonte: Rio Nilo - fotos da autora em viagem para o Egito em 2009.

Nesse sentido, o povo do Antigo Egito precisava saber com mais certeza a época das inundações, da plantação e da colheita, ou seja, o padrão desses acontecimentos. Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sirius se levantava ao leste, um pouco antes do sol. Notaram que isto ocorria a cada 365 dias, então criaram o calendário solar, composto de doze meses, de 30 dias cada, e mais cinco dias de festas dedicadas aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Isis e Nephthys. Já dividiam o dia em 24 horas. Como curiosidade, registre-se que os egípcios chegaram a notar que a duração exata do ano era de 365 dias e $\frac{1}{4}$, mas não chegaram a corrigir o calendário, senão em 238 a.C. Os egípcios dividiram os doze meses em três estações de quatro meses cada: o período das cheias/inundações (Akhet), o período de plantio (Peret) e o período da colheita (Shemu). Foram esses ciclos que levaram à criação do calendário egípcio.



O rio Nilo é um importante rio africano que deságua no mar Mediterrâneo, sua bacia hidrográfica, que ocupa uma área de 3 349 000 km², abriga vários países do continente africano como Uganda, Tanzânia, Ruanda, Quênia, República Democrática do Congo, Burundi, Sudão, Etiópia e Egito.

O rio Nilo é formado a partir da confluência de basicamente três rios: Nilo Branco, Nilo Azul e rio Atbara.

A palavra Nilo é oriunda do latim Nilus que deriva do grego Neilos, os egípcios chamavam o rio Nilo de Aur ou Ar, que significa “negro”. No decorrer da história, o rio Nilo sempre desempenhou um papel fundamental para diversas nações, especialmente para a civilização egípcia. Diante da gigantesca importância desse recurso hídrico para o território do Egito, o historiador grego Heródoto, no século V a. C., declarava “O Egito é a dádiva do Nilo”.

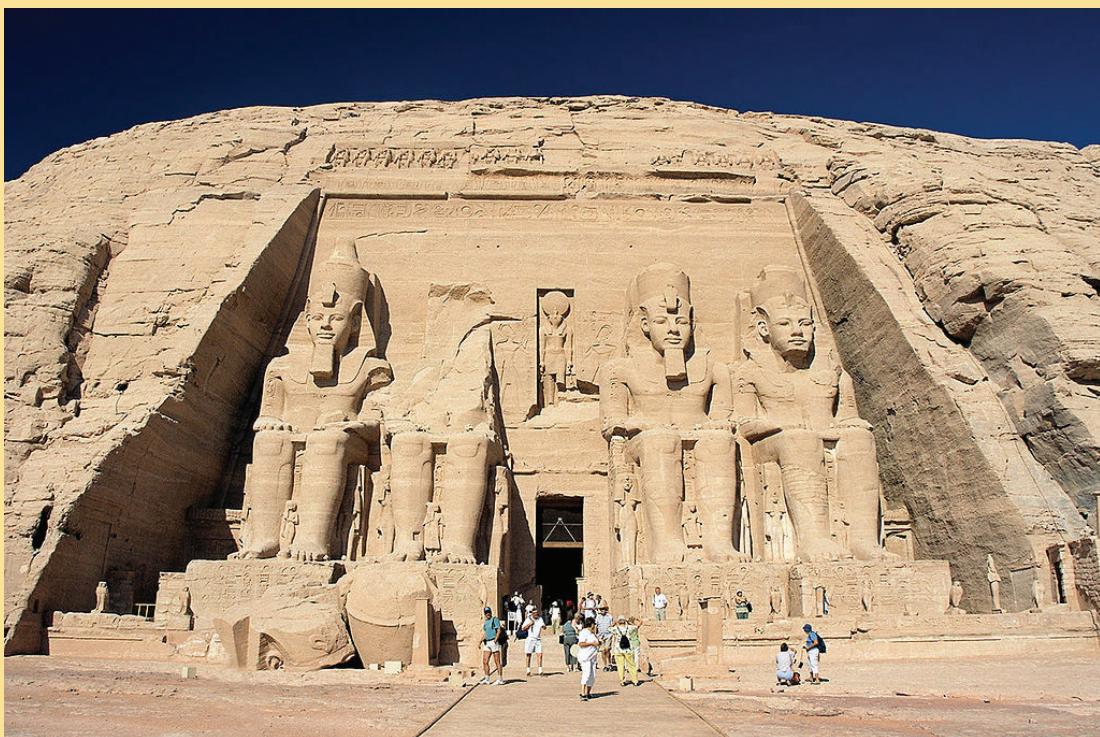
O Nilo é tão importante para o Egito que grande parte da população, cerca de 90%, encontra-se estabelecida em suas margens. A capital do Egito, Cairo, está situada às margens do Nilo, essa cidade abriga aproximadamente 9,5 milhões de pessoas.

A origem da civilização egípcia teve início há aproximadamente 5 mil anos, para o desenvolvimento da agricultura, em uma área de deserto, o Egito sempre foi dependente do ciclo do rio, com cheias e vazantes.

Nos períodos de cheias as águas do rio levavam consigo uma grande quantidade de sedimentos que eram distribuídos ao longo de suas margens, assim, quando chegava a época das vazantes, as águas abaixavam e deixavam no solo uma enorme quantidade de nutrientes importantes para sua fertilidade, como o húmus. A partir desse processo natural essa sociedade pôde desenvolver o cultivo de cereais que compunham a alimentação.

Apesar da fundamental importância do ciclo do rio para a fertilização dos solos situados nas margens, em 1971 foi construída a represa de Aswan (ou Assuã), criando o Lago Nasser. A partir desse empreendimento o rio alterou o seu regime, o que resultou na perda dos períodos de cheias e vazantes, impedindo o processo natural de fertilização do solo, levando os produtores a fazer uso cada vez maior de insumos agrícolas no cultivo. Em virtude da grandeza da obra arquitetônica dessa represa, que possui 3.600 metros de comprimento e 115 m de altura, uma enorme quantidade de água foi represada, formando o lago Nasser e inundando grandes riquezas arqueológicas. Algumas dessas riquezas foram salvas por meio de difíceis processos, esculturas e templos foram cortados em centenas de pedaços e retirados do lugar para serem reconstituídos em outro local. É o caso de Abu-Simbel, complexo arqueológico constituído por grandes templos escavados na rocha, ao sul do Egito, perto da fronteira do Sudão, numa região denominada Núbia, a cerca de 300km da

da cidade de Assuã, local para onde, entre 1963 e 1968, foi transladado e reconstruído como o original, com a ajuda da UNESCO, a fim de ser salvo de ficar submerso. Originalmente os templos foram construídos por ordem do faraó Ramsés II em homenagem a si próprio e à sua esposa preferida Nefertari (cujo nome significa a *mais bela, a mais perfeita*), grande rainha egípcia, considerada por ele com estatura de faraó, tanto que o templo também é conhecido como Templo de Nefertari. O Grande templo de Abu Simbel é um dos mais bem conservados de todo o Egito.



Fonte: Rio Nilo – fotos da autora em viagem para o Egito em 2009.

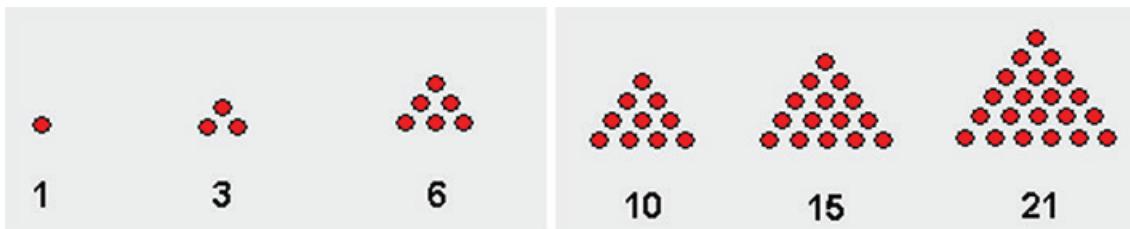
O padrão



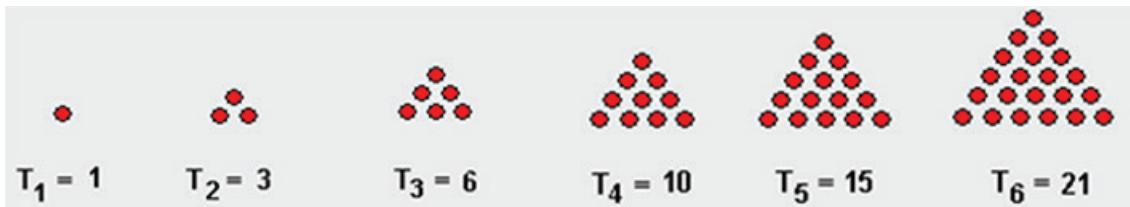
Vimos que um padrão ou regularidade pode ser de fenômenos ou acontecimentos e de suma importância é o seu registro, que pode ser numérico, como por exemplo, enumerar os números naturais $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$, ou algébrico, quando identificamos sua lei de formação.

Exemplo 1

Considere a representação a seguir:



Os números figurados, também chamados de números triangulares, pelo padrão de formação representado, sugere que podemos dar continuidade a essa formação e ainda encontrar sua lei de formação. Denotando os triângulos como segue:



Não é difícil verificar a lei de formação do padrão representado pelos números triangulares. Vamos denotar por T_i o número de bolinhas que formam o triângulo na i -ésima posição, $i \in \mathbb{N}$.

$$T_1 = 1$$

$$T_2 = 1 + 2 = 3$$

$$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \text{ e assim, sucessivamente...}$$

$$T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

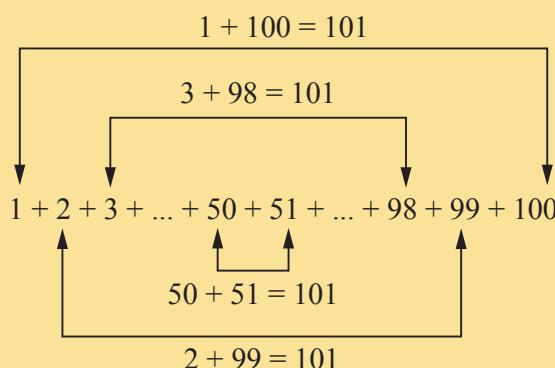
Aqui poderíamos estabelecer a seguinte relação: $T_n = T_{n-1} + n$, $n \geq 1$ e $T_0 = 0$, que é uma fórmula de recursão, ou seja, nos ajuda a encontrar um determinado termo a partir do seu termo anterior. Mas pense se quiséssemos encontrar o número de bolinhas para formar o triângulo T_{500} ? Teríamos que ir calculando um a um até o termo de ordem 499, o que dá muito trabalho. Então uma fórmula de recursão, embora útil em muitos casos, não é para encontrarmos um termo genérico que dependa apenas da ordem do termo, no caso, de n . Para este caso específico, T_n é a soma dos n primeiros números naturais. Isso não lembra algo? Acredito que sim. Quem quiser recordar leia a história em **Saiba Mais**.

Vou adiantar que o n -ésimo triângulo da nossa sequência terá $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$, bolinhas em formação triangular na posição n desta sequência de triângulos, ordenada no sentido crescente. Observe que, a partir de um padrão geométrico de formação, encontramos uma sequência numérica crescente representada pelo número de bolinhas que compõem cada triângulo, (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...), cuja representação algébrica da lei de formação, para seu termo de ordem n , $n \geq 1$, é $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$



Uma das histórias, não se sabe se verdadeira, mas com certeza fascinante, envolvendo sequências é a do matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777–1855), considerado um dos grandes matemáticos do século XIX e de todos os tempos, juntamente com Arquimedes e Isaac Newton. Filho de família pobre, seu pai tentou evitar que recebesse instrução adequada, porém, Gauss contou com o apoio da mãe para que pudesse estudar.

Tido como uma criança precoce, seu prodígio pode ser exemplificado por um fato interessante ocorrido em sua infância. Aos 10 anos, Gauss frequentava uma escola local, cujo professor era tido como muito exigente. Certo dia, com a intenção de manter a turma em silêncio, pediu aos alunos que somassem os números naturais de 1 a 100 ($1 + 2 + 3 + \dots + 100$) e, assim que terminassem, colocassem a solução sobre sua mesa. Quase que imediatamente, Gauss colocou sobre a mesa do professor a resposta encontrada. Ele olhou para o menino com pouco-caso, enquanto os demais alunos trabalhavam arduamente. Quando conferiu os resultados, o professor verificou que a única resposta correta era a de Gauss, 5.050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Na verdade, Gauss havia feito o cálculo mentalmente, observando que a soma do primeiro e do último termo ($1 + 100$), do segundo e do penúltimo termo ($2 + 99$), do terceiro e do antepenúltimo ($3 + 98$), e assim por diante era sempre 101, ou seja:



A soma dos números naturais de 1 a 100 é dada por $50 \cdot 101 = 5.050$, cálculo que resultou na fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (PA), tema que veremos em mais detalhes em outra unidade.

Nas palavras de Gauss:

“Verdadeiramente o que mais prazer me proporciona, não é o saber, mas o estudar, não a posse, mas a conquista, não o estar aqui, mas o chegar além.”

Exemplo 2

Considere a sequência de painéis formados por uma faixa de ladrilhos claros envoltos em uma moldura de ladrilhos escuros.



Escreva uma fórmula que indica o número de ladrilhos da moldura em um painel genérico P_n desta sequência.

Observe que a ordem do painel na sequência coincide com o número de ladrilhos claros, logo esta fórmula também indica a relação entre o número de ladrilhos escuros em função do número de ladrilhos claros. Temos então:

$$P_1 = 8, P_2 = 10, P_3 = 12, P_4 = 14, \dots, P_n = ?, \dots$$

No caso, não queremos só saber que $P_n = P_{n-1} + 2$, para $n \geq 2$ e $P_1 = 8$, mas encontrar o número de ladrilhos escuros de P_n . Para tal, podemos fazer raciocínios distintos, mas que com certeza devem coincidir ao final, após manipulações algébricas. Por exemplo, podemos pensar que:

$$P_n = 2n + 6 = 3(n + 2) - n = 2(n + 2) + 2 = 3(n + 2) - n$$

Cada uma destas expressões surge de um tipo de raciocínio, que simplificadas algebraicamente chegam ao resultado mais enxuto $P_n = 2n + 6$, $n \geq 1$.



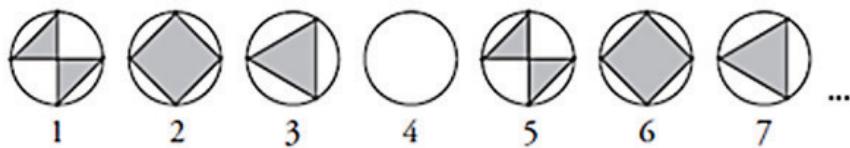
Para pensar

Exercite o pensamento algébrico descrevendo de forma argumentativa o raciocínio utilizado para se chegar a cada uma das expressões que representam o número de ladrilhos escuros em função dos ladrilhos claros, a saber:

- a) $P_n = 2n + 6$
- b) $P_n = 3(n + 2) - n$
- c) $P_n = 2(n + 2) + 2$
- d) $P_n = 3(n + 2) - n$

Exemplo 3

Observe a sequência de figuras:



Supondo que a lei de formação continue a mesma, indique qual das figuras deverá ocupar a posição 154?

Observe que o padrão da sequência inicia com a figura 1 e se repete a cada 4 figuras, portanto, a figura que ocupará a posição 154 será igual à figura da posição 2, pois a divisão de 154 por 4 deixa resto 2, após 38 repetições de blocos de 4 figuras.

Poderíamos dar muito outros exemplos, mas com certeza eles aparecerão ao longo do texto.

Definição 1

Uma sequência numérica é uma sucessão de números colocados em certa ordem, primeiro termo, segundo termo, terceiro termo e, assim, sucessivamente.

Uma sequência numérica pode ser finita ou infinita; pode ser aleatória ou não ter um padrão identificável; pode ter um padrão definido ou observável.

Exemplo 4

- a) A sequência de seis números de um determinado sorteio da Mega Sena é finita e aleatória.
- b) A sequência de dígitos das casas decimais de um número irracional é infinita e não tem padrão (período).
- c) A sequência de números primos não tem padrão, ou seja, para além do crivo de Eratóstenes que permite encontrar os primos até um limite determinado, entretanto isto é viável para limites razoavelmente pequenos. Sabe-se hoje que existem infinitos números primos, mas não há um padrão que determine o primo seguinte. Para mais detalhes sobre os primos, veja o link: http://www.hypatiamat.com/crivo_eratostenes.php

Exemplo 5

Uma sequência numérica definida por uma sentença matemática.

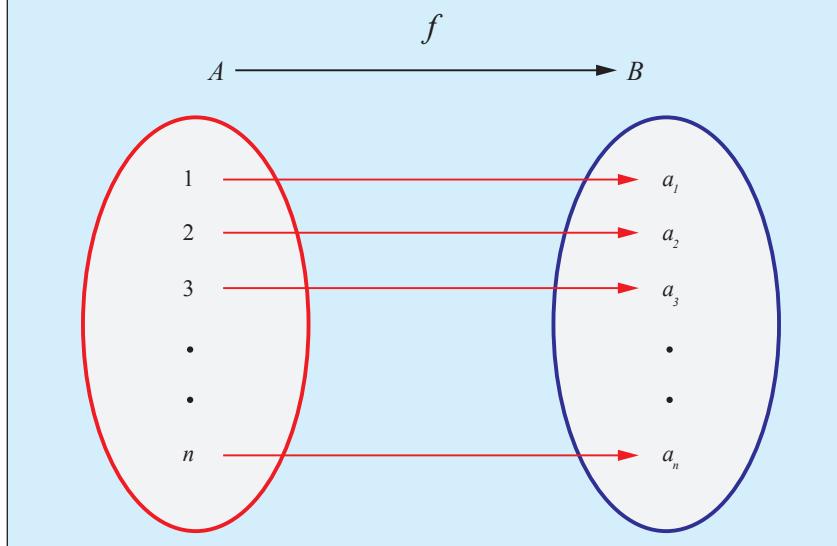
O primeiro termo é uma fração de numerador 1 e denominador 3; os demais termos são obtidos do anterior, acrescentando 1 no numerador e no denominador. Então os primeiros cinco termos desta sequência são: $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$

Entretanto, nos interessa, sobretudo as sequências numéricas infinitas que apresentem um padrão de formação. E nesse caso, é muito importante que tenhamos, ou saibamos encontrar, a expressão do termo geral da sequência. Vamos, então, dar a definição mais formal de uma sequência numérica.

Definição 2

Considere A um subconjunto qualquer dos números naturais, podendo ser ele próprio, e B um subconjunto de números reais. Uma sequência numérica é uma função $f: A \rightarrow B$, tal que $f(n) = a_n$, $n \in A$, $a_n \in B$.

Em uma possível representação gráfica temos:


(i) Importante!

Vale ressaltar que:

- Esta representação gráfica de sequência numérica não contempla todas as possibilidades, pois o conjunto A , domínio da função, pode ser qualquer subconjunto dos números naturais, finito ou infinito, e B , contradomínio da função, um subconjunto de números reais, lembrando ainda que o conjunto imagem da função é um subconjunto discreto, finito ou enumerável, de B ;
- A definição de sequência, dada por uma função que associa a cada elemento de um subconjunto dos naturais um valor real, imprime obrigatoriamente uma ordem ao conjunto imagem da função;
- Comumente identificamos a sequência com o conjunto imagem, digamos, $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ ou $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$, conforme seja finito ou infinito enumerável.
- Mesmos fazendo essa identificação temos que tomar cuidado em distinguir uma sequência com a notação adequada, uma vez que, por exemplo, a sequência em que todos os seus elementos são iguais tem no conjunto imagem apenas um elemento. Por isso optamos pela notação da sequência entre parênteses e não entre chaves, pois esta última é a notação adotada para conjuntos.

Notação

Feitas essas considerações, por simplicidade, vamos adotar a notação de uma sequência, identificando-a com o conjunto imagem da função, conforme o caso: descrita por extenso, $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ou $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$, ou de forma sintética, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente $(a_n)_n$, ou ainda apenas pela expressão do seu termo geral a_n .

Exemplo 6

Vejamos alguns casos de sequências numéricas:

- a) Sequência constante infinita: $(1, 1, 1, 1, 1, \dots)$
- b) Sequência crescente finita: $(3, 6, 9, 12, 18)$
- c) Sequência crescente infinita: $(-5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots)$
- d) Sequência decrescente infinita: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$
- e) Sequência alternada infinita: $((-1)^n \cdot 2)_{n \geq 1} = (-2, +2, -2, +2, -2, \dots)$

A partir de agora vamos tratar de sequências numéricas infinitas. Isto porque nos interessa estudar o comportamento dessas sequências.

Exemplo 7

Considere a sequência definida recursivamente pela fórmula:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n = 0 \\ 1, & \text{se } n = 1 \\ f(n-1) + f(n-2), & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Vemos que esta sequência é definida de forma recursiva (ou recorrente) por uma função com mais de uma lei. Substituindo os valores de n , temos:

$$\begin{aligned} n = 0, \quad a_0 &= f(0) = 0 \\ n = 1, \quad a_1 &= f(1) = 1 \\ n = 2, \quad a_2 &= f(2) = f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1 \\ n = 3, \quad a_3 &= f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2 \\ n = 4, \quad a_4 &= f(4) = f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3 \\ n = 5, \quad a_5 &= f(5) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5 \\ n = 6, \quad a_6 &= f(6) = f(5) + f(4) = 5 + 3 = 8 \\ n = 7, \quad a_7 &= f(7) = f(6) + f(5) = 8 + 5 = 13 \\ n = 8, \quad a_8 &= f(8) = f(7) + f(6) = 13 + 8 = 21 \\ n = 9, \quad a_9 &= f(9) = f(8) + f(7) = 21 + 13 = 34 \\ n = 10, \quad a_{10} &= f(10) = f(9) + f(8) = 34 + 21 = 55 \\ n = 11, \quad a_{11} &= f(11) = f(10) = f(9) = 55 + 34 = 89 \end{aligned}$$

Logo, temos a sequência $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$, que é a sequência de Fibonacci, apresentada na contextualização, agora representada por sua lei de recursão iniciando pelo zero.

Exemplo 8

Embora Fibonacci tenha criado a sequência a partir do problema dos coelhos, a sequência leva seu nome por causa dos estudos sobre a mesma feita pelo matemático francês François Edouard Anatole Lucas (1842–1891), que também usou a regra criando outras sequências, conhecidas como sequência de Lucas, como esta (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ...) que tem o mesmo padrão da sequência de Fibonacci. Por isso, algumas sequências no padrão de Fibonacci, mas diferentes da original, são às vezes conhecidas como sequências de Lucas. Entretanto, ao matemático grego Hipsicles (240–170 a.C.) atribui-se uma regra para gerar uma nova sequência numérica a partir de outra. O método consiste em tomar uma sequência numérica e criar outra em que cada termo é igual à soma dos anteriores. Por exemplo: a partir da sequência dos números naturais (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...) podemos criar outra:

Sequência nova	
1	1
$1 + 2$	3
$1 + 2 + 3$	6
$1 + 2 + 3 + 4$	10
$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	15
...	...



François Edouard Anatole Lucas nasceu em 04 de abril de 1842 em Amiens, França, e morreu em 03 de outubro de 1891, em Paris. Foi educado na École Normale Supérieure. Trabalhou no Observatório de Paris e posteriormente foi professor de matemática em escolas e universidades francesas. Lucas é conhecido pelos seus estudos na famosa fórmula matemática de Fibonacci, conhecida como Sequência de Fibonacci. Seus estudos nesta área são conhecidos como Sequência de Lucas.

Outro grande matemático francês, Jacques Philippe Marie Binet (1776–1856), ao estudar equações diferenciais lineares, debruçou-se sobre as relações entre a sequência de Fibonacci, o número de ouro e a razão áurea ϕ , em 1843, escreveu as fórmulas de Binet. Embora estas já fossem conhecidas por Euler e Daniel Bernoulli, cerca de um século antes, acredita-se que as deduziu por si só. Elaborou a fórmula para encontrar os termos da sequência a partir de uma expressão em potências n do número de ouro Φ e seu oposto do inverso $\varphi = -\frac{1}{\Phi}$.

Podemos hoje comparar as duas sequências, de Fibonacci e de Lucas, pelo método de Binet, a saber.

$$Fib(n) = \frac{\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

$$Luc(n) = \frac{\Phi^n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n}{1} = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right]$$

Vamos lembrar que o número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a raiz positiva da equação de 2º grau $x^2 - x - 1 = 0$ e a razão áurea $\varphi = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ é o oposto da raiz negativa da mesma equação, que ainda se relacionam por $\varphi = \frac{1}{\phi}$. Além disso, $\phi + \varphi = \sqrt{5}$ e $\phi - \varphi = 1$, então podemos escrever de forma resumida as duas expressões:

$$Fib(n) = \frac{\phi^n - (\varphi)^n}{\phi - (\varphi)}$$

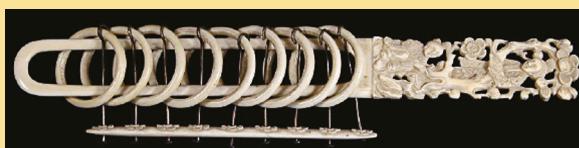
$$Lu(n) = \frac{\phi^n + (\varphi)^n}{\phi + (\varphi)}$$

Podemos assim mostrar a relação entre as potências de ϕ e φ e a sequência de Lucas:

n	ϕ^n	$(\varphi)^n$	$\phi^n + (\varphi)^n$
0	1,000000000	1,000000000	2,0
1	1,618033989	-0,618033989	1,0
2	2,618033989	0,318196601	3,0
3	4,236067978	-0,236067978	4,0

Lucas foi também um dos maiores estudiosos dos números primos. Foi o matemático que, manualmente, encontrou o maior número primo conhecido. Hoje, com a ajuda dos supercomputadores, que usam recursos algorítmicos desenvolvidos com base nos próprios estudos de Fibonacci e Lucas, é possível encontrar números primos maiores que o número de Lucas. Também desenvolveu e elaborou as equações dos Cálculos de Umbral, ou Cálculo do Limite, largamente usado nos dias de hoje para calcular custos ou limites de alerta para determinados fatos, como por exemplo, quando uma determinada doença está à beira de se tornar uma epidemia.

Lucas usou sua inteligência matemática não só para matemática avançada. Inventou vários quebra-cabeças, os mais populares foram o Quebra-cabeças de Baguenaudier, mais conhecido como Anéis Chineses, elaborado a partir de uma solução binária para o problema de mesmo nome, e a Torre de Hanói, que ele comercializou largamente na Europa.



Fonte: 2012 Hordern-Dalgety Collection

Tipos de Anéis Chineses ou quebra-cabeças de Baguenauder

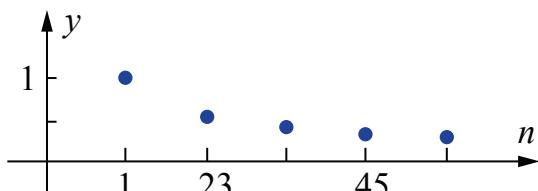


Jogo da Torre de Hanói



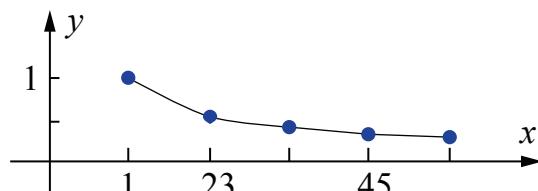
Exemplo 9

Uma vez que sequências são funções, faz sentido falar em seu gráfico. A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ é o gráfico da função $y = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, representado em (a) e que também pode ser comparado para ver a diferença com a gráfica da função $y = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}, x \geq 1$, representado em (b) da figura a seguir.



$$y = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots$$

(a)



$$y = \frac{1}{x}, x \geq 1$$

(b)

Observe que o gráfico (a) da sequência numérica são pontos discretos do plano, enquanto que o da função em (b), definida para todo número real maior ou igual a 1, é uma curva contínua. Mesmo assim, sabemos que os pontos do gráfico (a) estão contidos no gráfico (b).

Isto também nos ajuda a verificar o comportamento da sequência. Em outras palavras, queremos saber se uma sequência infinita tende ou não para algum valor real, ou seja, se a sequência converge ou diverge.

No caso específico do exemplo 9, notamos que os pontos do gráfico da sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ se aproximam do eixo horizontal, ou seja, as ordenadas $y = \frac{1}{n}$ se aproximam de zero, quando n cresce indefinidamente. Temos, então, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Nesse caso dizemos que essa sequência é convergente e converge para 0.

Interessa-nos saber quando uma sequência numérica infinita converge ou não. Mas antes vejamos algumas definições.

Definição 3

Uma sequência numérica diz-se **limitada** se o seu conjunto de valores é limitado. Caso contrário, diz-se que a sequência numérica é **ilimitada**.

Por vezes podemos falar de sequências limitadas inferiormente ou limitadas superiormente, daí para uma sequência ser limitada terá que ser limitada tanto inferiormente quanto superiormente.

Exemplo 10

Vejamos se as seguintes sequências são limitadas ou ilimitadas:

a) A sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ é limitada, pois para qualquer valor de $n \geq 0$, como $n + 1 > n$,

$$\text{temos: } 0 \leq \frac{n}{n+1} < 1.$$

b) A sequência $(-1)^n_{n \geq 0}$ é limitada, pois seus valores são 1, para n par, e -1, para n ímpar.

c) A sequência $(n)_{n \geq 0}$ dos números naturais é ilimitada.

Sequências convergentes e divergentes



Definição 4

Uma sequência (a_n) é um infinitésimo se dado um $\varepsilon > 0$, existe um natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $|a_n| < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Interpretação: Uma sequência (a_n) é um infinitésimo se, dado qualquer valor $\varepsilon > 0$ (número real tão pequeno quanto se queira), a partir de certo natural N todos os termos a_n estarão no intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e apenas uma quantidade finita desses termos estará fora deste intervalo. Os termos da sequência fora desse intervalo estarão entre os seguintes: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$. Em outras palavras, um infinitésimo é uma sequência que converge para zero, quando n tende para infinito.

Exemplo 11

Vamos mostrar que a sequência $a_n = \frac{1}{n}, n > 0$ é um infinitésimo.

Se $\varepsilon = \frac{1}{10}$, daí existe $N = 10$, tal que para $n > 10 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{10} \Rightarrow -\frac{1}{10} < \frac{1}{n} < \frac{1}{10}$.

Agora, se $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, daí existe $N = 1000$, tal que para

$$n > 1000 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow -\frac{1}{1000} < \frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$$

Podemos então considerar qualquer valor $\varepsilon > 0$, que sempre existirá um número natural

$N > \frac{1}{\varepsilon}$, tal que para $n > N \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Isto significa que $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Observação: a única sequência constante que é um infinitésimo é a sequência nula $(0, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Definição 5

Uma sequência (a_n) é convergente com limite L se a sequência $(a_n - L)$ é um infinitésimo. Em outras palavras, se dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $N = N(\varepsilon)$, tal que $|a_n - L| < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Se uma sequência (a_n) é convergente com limite L denotamos por:

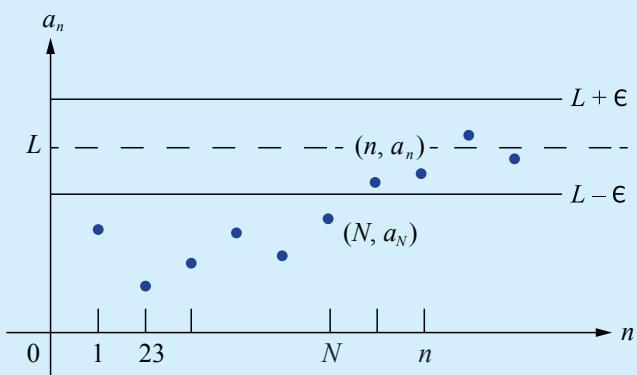
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Lê-se: “o limite de a_n quando n tende para infinito é L ”

Podemos ter uma interpretação gráfica da definição de limite de uma sequência na reta, evidenciando que para $n > N$, os termos a_n ficam no interior do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.



Outra representação gráfica do limite de uma sequência pode ser vista plotando os pontos (n, a_n) no plano cartesiano e verificando que os pares ordenados, para $n > N$ ficam na região do plano limitada pelas retas horizontais $y_1 = L - \varepsilon$ e $y_2 = L + \varepsilon$.



E caso não exista este limite, dizemos que a sequência é **divergente**.

Exemplo 12

Vamos mostrar que a sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ é convergente com limite $l = 1$. No exemplo

10 vimos que esta sequência é limitada e que $0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > \frac{1}{\varepsilon}$ tal

que para $n > N$, temos que $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ (uma vez que

$n+1 > n > N > \varepsilon$). Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$.

Podemos visualizar este comportamento pelo gráfico de alguns pontos $\left(n, \frac{n}{n+1}\right)$, $n \geq 1$, a seguir:

Exemplo 13

Vimos (exemplo 11) que a sequência $a_n = \frac{1}{n}, n > 0$ é um infinitésimo. Isto significa que esta sequência é convergente com limite $l = 0$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$. Isto pode também ser observado analisando o comportamento dos pontos $\left(n, \frac{1}{n} \right)$, para $n > 0$, na representação gráfica da figura (a) do exemplo 9, à medida que n cresce.

Exemplo 14

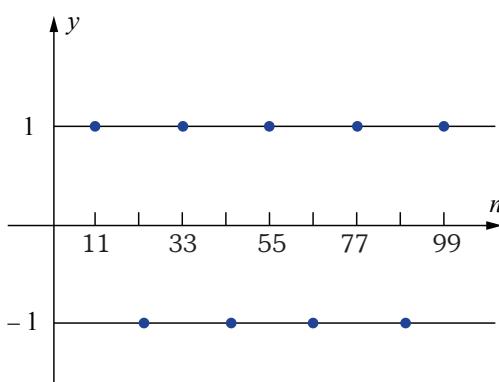
Vamos mostrar que a sequência $a_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ converge para $l = 1$.

Antes vamos recordar o Teorema do Valor Médio: Se f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , então existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Vamos também lembrar que $f(x) = \cos(x)$ é uma função contínua em toda reta cuja derivada é $f'(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Dado $\varepsilon > 0$ seja $N > \frac{1}{\varepsilon}$, então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ tal que $\left| \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| = \left| \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos(0) \right| = |\operatorname{sen}(\theta)| \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, para todo $n > N$.

Exemplo 15

Vejamos agora que a sequência $a_n = (-1)^{n+1}$, $n \geq 0$ é divergente. Se escrevermos os termos da sequência temos: $(-1, +1, -1, +1, -1, +1, \dots)$ vemos que é uma sequência alternada e, embora seja uma sequência limitada, pois $-1 \leq a_n \leq 1$ para todo $n \geq 0$, vemos que oscila entre os dois valores, -1 e 1 , indefinidamente, uma vez que $(-1)^{n+1} = -1$, para n par e $(-1)^{n+1} = 1$, para n ímpar. Portanto, não se aproxima de nenhum número. Isto também pode ser verificado no gráfico a seguir:



Logo o $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ não existe e, portanto, esta sequência é divergente.

Vimos nesse exemplo que nem toda sequência limitada é convergente. No exemplo seguinte vamos ver que nem toda sequência alternada é divergente.

Exemplo 16

Seja a sequência $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para todo $n > N$,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{N} < \varepsilon. \text{ Logo } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) = 0. \text{ Portanto, esta sequência é convergente e}$$

converge para zero.

A seguir apresentamos diversas proposições que tratam de resultados muito importantes sobre a convergência ou não de sequências numéricas. O primeiro deles nos diz que, se uma sequência é convergente, então seu limite é único.

Proposição 1

Seja $(a_n)_n$ uma sequência convergente. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_2$, então $l_1 = l_2$.

Demonstração

Vamos supor que $l_1 \neq l_2$ e seja $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$. Então existem $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n - l_1| < \varepsilon$ para todo $n > N_1$ e $|a_n - l_2| < \varepsilon$ para todo $n > N_2$. Seja $N = \max\{N_1, N_2\}$, então temos que:

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| < |l_1 - a_n| + |l_2 - a_n| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|, \text{ o que se configura um absurdo,}\\ \text{ou seja, } |l_1 - l_2| < |l_1 - l_2|. \text{ Logo, a premissa que partimos é falsa e, portanto, } l_1 = l_2.$$

Proposição 2

Se uma sequência $(a_n)_n$ for convergente com limite l , então toda subsequência $(b_n)_n$ também converge para l .

Isto nos diz que $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = l$, qualquer que seja a subsequência b_n da sequência original a_n .

A proposição 2 é muito importante, pois nos dá um critério negativo de convergência muito utilizado, a saber:

Proposição 3

Se uma sequência $(a_n)_n$ contém duas subsequências convergentes com limites distintos, então a sequência $(a_n)_n$ é divergente.

Vimos no exemplo 15 que a sequência alternada $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$ admite duas subsequências convergentes para 1 e -1, caso n seja só par ou só ímpar, respectivamente.

Logo, a sequência $((-1)^n)_{n \geq 1}$ é divergente.

Temos também outro resultado muito importante:

Proposição 4

Toda sequência convergente é limitada.

Demonstração

Seja $(a_n)_n$ uma sequência convergente para limite l , isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$. Seja $\varepsilon = 1$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < 1$, para todo $n > N$. Seja $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |l| + 1\}$, então para todo $n > N$ temos que $|a_n| < M$. Logo, $(a_n)_n$ é uma sequência limitada.

Mas atenção: A recíproca da proposição 4 não é verdadeira. Vimos isto no próprio exemplo 15, cuja sequência é limitada, pois $|(-1)^n| = 1$ para todo n , mas admite subsequências com limites distintos, portanto, não converge.

Proposição 5

Seja $(a_n)_n$ uma sequência. Então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, se e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

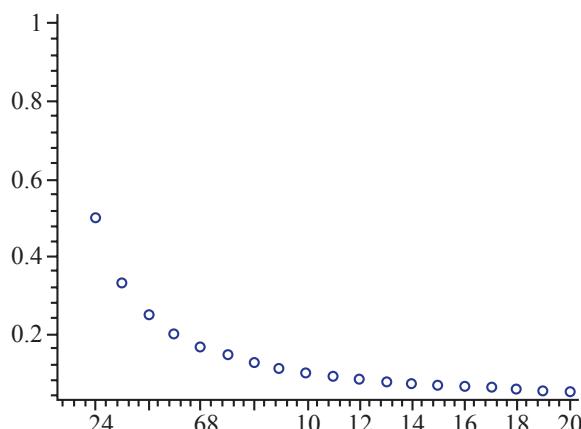
Demonstração

A sequência (a_n) converge para zero, \Leftrightarrow dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$, para todo $n > N$, \Leftrightarrow a sequência $(|a_n|)$ converge para zero.

Exemplo 17

Mostramos no exemplo 16 que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Então, pela proposição 5, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

A figura a seguir contém alguns pares ordenados $\left(n, \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ no plano cartesiano que ajudam visualizar o comportamento da sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ se aproximando do eixo das abscissas, quando n cresce.



Proposição 6

Seja $(a_n)_n$ uma sequência convergente com limite l . Então a sequência $(|a_n|)_n$ é convergente com limite $|l|$. A recíproca não é verdadeira.

Demonstração

É fácil de ver que se $(a_n)_n$ é uma sequência convergente com limite l , então dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > N$, $|a_n - l| < \varepsilon$. Mas como $||a_n| - |l|| = |a_n - l| < \varepsilon$, logo a sequência $(|a_n|)_n$ converge para $|l|$.

Novamente, para verificar que a recíproca não é verdadeira, basta ver a sequência do exemplo 15, uma vez que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1)^n = 1$, mas não existe o $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$.

Proposição 7

Seja $(a_n)_n$ uma sequência convergente com limite zero e seja $(b_n)_n$ uma sequência limitada. Então a sequência $(a_n \cdot b_n)_n$ é convergente e converge para zero.

Demonstração

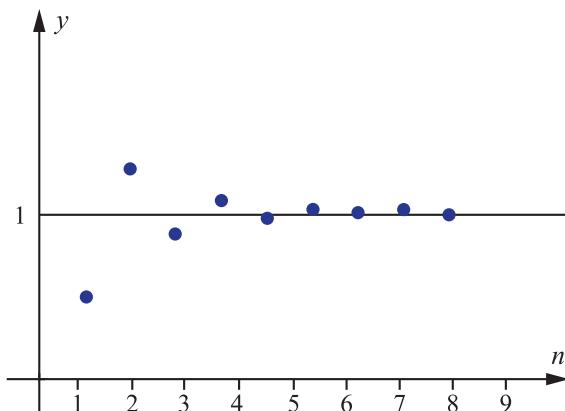
Como $(b_n)_n$ é limitada, existe um real positivo M tal que $|b_n| < M$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, existe um natural N tal que $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, para todo $n > N$. Logo, $|a_n \cdot b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$, para todo $n > N$. Portanto, existe $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

Exemplo 18

A sequência $\left(\frac{\cos(n)}{n} \right)_{n \geq 1}$ é convergente e converge para zero. Basta considerar $\frac{\cos(n)}{n} = \frac{1}{n} \cdot \cos(n)$. Daí temos que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ é convergente e converge para zero e a sequência $b_n = \cos(n)$ é limitada por $M = 1$. Portanto, pela proposição 7, a sequência $c_n = \left(\frac{\cos(n)}{n} \right)$ converge para zero.

Exemplo 19

Vamos mostrar que a sequência $(1 + (2)^{-n})_{n \geq 1}$ converge para 1. Vamos trabalhar apenas com limites, lembrando que $(2)^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, sabemos que o limite de uma soma é a soma dos limites. Portanto, temos que: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (2)^{-n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 0 = 1$. Confira no gráfico com alguns pontos desta sequência:



Teorema 1

Propriedade dos limites de sequências.

Sejam (a_n) e (b_n) sequências de números reais e sejam A e B números reais.

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, então valem:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{A}{B}$, se $b_n \neq 0$ e $B \neq 0$.
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot a_n) = k \cdot A$, k constante.
- vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$, k constante.

Essas propriedades são muito úteis para o cálculo de limites de sequências.

Exemplo 20

Aplicando as propriedades de limites de sequências.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = 5 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3n^4}{n^4 + 5} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2}{n^4} - 3}{\frac{n^4}{n^4} + \frac{5}{n^4}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{2}{n^4} - 3}{1 + \frac{5}{n^4}} \right) = \left(\frac{0 - 3}{1 + 0} \right) = \frac{-3}{1} = -3$$

Observem que utilizamos as propriedades do Teorema 1 sobre sequências que conhecíamos ou mostramos a existência de limites. Além disso, vejam que exigem habilidades algébricas na resolução.

Definição 6

Uma sequência (a_n) é dita crescente (decrescente) se $a_n \leq a_{n+1}$ (respectivamente $a_n \geq a_{n+1}$), para todo $N \in \mathbb{N}$. Analogamente, uma sequência é dita estritamente crescente (decrescente) se $a_n < a_{n+1}$ (respectivamente $a_n > a_{n+1}$), para todo $N \in \mathbb{N}$. Sequências (estritamente) crescentes ou decrescentes se dizem monótonas.

Observação: para vermos se uma sequência é crescente (decrescente) podemos testar se a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (respectivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$).

Exemplo 21

Algumas sequências monótonas divergentes:

- A sequência dos números naturais $a_n = n$ é obviamente estritamente crescente, portanto, não limitada, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Entretanto, atenção: lembramos aqui que “ ∞ ” e “ $-\infty$ ” **não** são números reais, mas a notação para indicar que a sequência diverge, ou seja, tende para valores infinitamente grandes, positivos ou negativos, quando n cresce indefinidamente.
- A sequência $b_n = 2^n$ também é estritamente crescente e não limitada, logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ e, portanto, a sequência diverge.
- A sequência $c_n = (1 - n)_{n \geq 1}$ representa os inteiros negativos $(-1, -2, -3, -4, \dots)$, portanto, é estritamente decrescente e não limitada, logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$ e a sequência é divergente.
- A sequência de Fibonacci é crescente, mas não limitada, portanto, é divergente.

Definição 7

Uma sequência (a_n) é dita limitada superiormente (inferiormente) se existe um $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) tal que $a_n \leq M$ (respectivamente, $a_n \geq m$), para todo $N \in \mathbb{N}$. Neste caso, M é dito um limitante superior (m um limitante inferior) para o conjunto dos termos da sequência a_n . Ao menor limitante superior dos conjuntos de termos da sequência chamamos de supremo e denotamos por $\sup(a_n)$. Analogamente, ao maior limitante inferior dos termos da sequência chamamos de ínfimo e denotamos por $\inf(a_n)$.

Propriedade 8

Se $L = \sup(a_n)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} \geq L - \varepsilon$. Analogamente, se $l = \inf(a_n)$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} \leq l + \varepsilon$.

Propriedade 9

Toda sequência (a_n) crescente e limitada é convergente com limite $L = \sup(a_n)$. Analogamente, toda sequência (a_n) decrescente e limitada é convergente com limite $l = \inf(a_n)$.

Demonstração

Seja (a_n) uma sequência crescente e limitada. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} \geq L - \varepsilon$. Como (a_n) é crescente temos $L > a_{n_0} \geq L - \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$, o que garante a convergência da sequência (a_n) . Além disso, se $L = \sup(a_n)$, ou seja, o menor dos limitantes superiores, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. A demonstração é análoga para o caso de sequência decrescente e limitada.

Exemplo 22

- a) A sequência $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \geq 1}$ é crescente, limitada superiormente por $M = 1$ e inferiormente por $m = \frac{1}{2}$. Inferiormente, porque sendo crescente com termos estritamente positivos, qualquer número negativo ou o zero são limitantes inferiores, como também o seu primeiro termo é um limitante inferior, aliás, este é o maior limitante inferior, ou seja, $\frac{1}{2} = \inf\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Por outro lado, para mostrar que é limitada superiormente, vamos calcular o seu limite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{1+0} = 1$. Logo $M = 1 = \sup\left(\frac{n}{n+1}\right)$. Então essa sequência converge para 1.

- b) A sequência $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ é decrescente e limitada inferiormente por $m = 0$ e, portanto, é convergente e converge para zero.

Teorema 2

Teorema do confronto para sequências.

Sejam (a_n) , (b_n) e (c_n) sequências de números reais. Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ for verdadeira para todo $n > N$ e se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Esse teorema é também conhecido como “Teorema do Sanduíche”. A demonstração é bastante óbvia, pois como $a_n \leq b_n \leq c_n$ temos que:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

Uma consequência imediata do Teorema 2 é que, se $|b_n| \leq c_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, pois $-c_n \leq b_n \leq c_n$.

Exemplo 23

Usando o teorema do confronto.

a) $\frac{\cos n}{n} \rightarrow 0$ porque $\left| \frac{\cos n}{n} \right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

b) $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ porque $0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

Teorema 3

Teorema da Função Contínua para sequências.

Seja (a_n) uma sequência de números reais. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ e se f for uma função contínua em L e definida para todos os a_n , então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(L)$.

Exemplo 24

Vamos mostrar que a sequência $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)$ converge para 1. Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1$ e que $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função definida para todo $x \geq 0$ e contínua para todo $x > 0$.

Logo, pelo teorema 3, $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = f(1) = \sqrt{1} = 1$. Portanto, a sequência $\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)$ converge para 1.

Teorema 4**Teorema da extensão**

Suponha que $f(x)$ seja uma função definida para todo $x \geq n_0$ e que (a_n) seja uma sequência de números reais tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq n_0$. Então, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty$, então a sequência (a_n) é divergente.

Observação: Esse teorema permite que se use a Regra de l'Hôpital para encontrar o limite de algumas sequências, obviamente, se satisfizerem determinadas condições. Por simplicidade, ao usar a Regra de l'Hôpital em sequências, costumamos tratar n como variável contínua.



A **regra de L'Hôpital**, por vezes denominada **regra de Cauchy**, foi incorporada no primeiro livro de texto sobre Cálculo Diferencial, publicado por Guillaume François Antoine, Marquês de l'Hôpital, em 1712. Seu objetivo é calcular o limite de frações nos casos em que há indeterminações do tipo “ $\frac{0}{0}$ ” ou “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”. A descoberta consistiu em perceber que, na vizinhança de um ponto, podemos comparar o quociente de duas funções com o quociente de suas derivadas, desde que determinadas hipóteses estejam satisfeitas.

De maneira informal podemos enunciar a Regra de l'Hôpital da seguinte forma:

Se $\frac{f(x)}{g(x)}$ tem a forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ em $x = a$ e se $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ ou $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Analogamente, aplica-se a Regra de l'Hôpital no caso de termos essas mesmas formas indeterminadas quando $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$. Além disso, a regra de l'Hôpital pode ser usada sucessivas vezes, desde que dentro dos critérios de uso em cada vez.

Caso $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ assuma outros tipos de indeterminação, como $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ , $\infty - \infty$, podemos tentar, por manipulações algébricas, contornar essas indeterminações. Caso consigamos transformar algumas delas nos dois tipos, $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, podemos usar a regra de l'Hôpital.

Basicamente, quando nos deparamos com esses tipos de indeterminação, o que não nos permite concluir nada (por isso denominados de indeterminação), é necessário contornar a indeterminação para poder chegar a um resultado conclusivo.

Exemplo 25

Aplicando a Regra de l'Hôpital para analisar a convergência de sequências.

a) A sequência $\left(\frac{2^n}{10n}\right)$ converge ou diverge?

Analisando que o $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{10n}$ é do tipo de indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de l'Hôpital

temos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{10n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n2^{n-1}}{10} = \infty$. Logo a sequência $\left(\frac{2^n}{10n}\right)$ é divergente.

b) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

A função $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ é definida para todo $x \geq 1$ e coincide com a sequência para os valores inteiros positivos. Portanto, pelo Teorema 3, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$.

Mas $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de l'Hôpital temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0. \text{ Logo, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

c) A sequência $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ diverge ou converge?

Analisando $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ vemos que assume uma indeterminação do tipo 1^∞ , que não é dos tipos que podemos aplicar a Regra de l'Hôpital. Mas podemos, usando um artifício, chegar às condições de usar a Regra de l'Hôpital. Algumas vezes o artifício é algébrico, caso não resolva ou não seja possível temos que lançar mão de outro recurso. Nesse caso vamos lançar mão da função logaritmo natural. Temos, então:

$$\ln(a_n) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n\right) = n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

Que é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$, que pode ser transformado em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}}$$

Que é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ o que permite aplicar a Regra de l'Hôpital.

Daí, como $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ e aplicando a regra da cadeia para $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ temos que

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{1.(x-1) - 1.(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)}{(x+1)} = \frac{-2}{x^2-1}.$$

E derivando a função $g(x) = \frac{1}{x}$ temos $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-2}{(n^2-1)}}{\frac{-1}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{n^2-1} \right) = 2$$

Logo, vimos que $\ln(a_n) \rightarrow 2$ e como $h(x) = e^x$ é uma função contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo Teorema 3, $a_n = e^{\ln(a_n)}$ e, pelo Teorema 4, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^2$.

Então a sequência $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = e^2$.

Este último item do exemplo foi mais elaborado para mostrar a força dos resultados obtidos por meio dos teoremas 3 e 4, permitindo encontrar o limite de algumas sequências que de outra maneira seria muito mais difícil.

Para finalizar vejamos uma aplicação prática de sequência.

Exemplo 26

Certa cidade vive uma epidemia de dengue, tendo sido registrados 1000 novos casos na presente semana. Medidas drásticas de saúde foram adotadas e o prefeito espera com elas que, em cada semana, consiga reduzir o número de novos infectados à $\frac{3}{4}$ dos casos registrados na semana anterior. Supondo que estas previsões estejam certas, quantas semanas, a partir da semana atual, serão necessárias para que o número de novos infectados seja menor que 10?

Vejamos:

Segundo as previsões, a partir a semana atual, os números de novos casos infectados semanalmente vão formar uma sequência cujo termo geral é $a_n = 1000 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Queremos que $a_n < 10$.

Atenção: inequações exigem cuidados, quando operamos com termos negativos (multiplicar ou dividir ambos os membros de uma inequação, por um número negativo, inverte o sinal da inequação).

$$1000 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n < 10 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n < 10^{-2} \Rightarrow n \cdot \log\left(\frac{3}{4}\right) < -2 \cdot \log 10 = -2$$

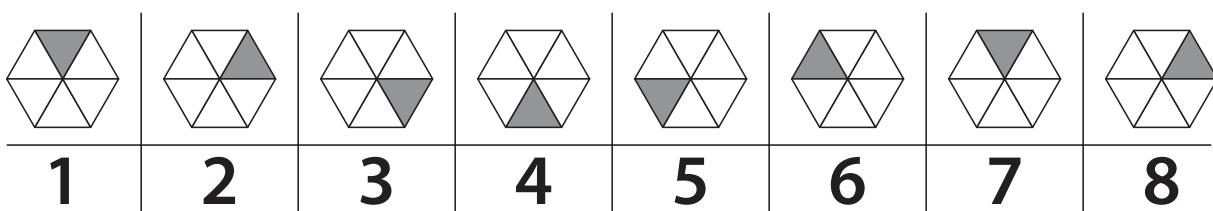
Como $\log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,125$, portanto negativo, temos que $n > \frac{-2}{\log\left(\frac{3}{4}\right)} \approx \frac{-2}{-0,125} = 16$.

Então, se a previsão se confirmar, apenas na 17ª semana, a partir da semana atual, o número de novos infectados será inferior a 10 casos.

Exercícios Resolvidos:



01) Observe o padrão da sequência figurativa a seguir:



Supondo que a regularidade do padrão se mantenha, qual figura ocupará a 1.961ª posição na sequência?

Resolução:

O padrão se repete a cada 6 (seis) posições. Então, ao efetuarmos a divisão de 1.961 por 6, obteremos o resto 5 (cinco), a figura que aparecerá na 1.961ª posição é igual à quinta figura.

02) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33000 passagens; em fevereiro, 34500; em março, 36000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

Resolução:

Temos um padrão de crescimento de **1500** passageiros por mês, assim, a partir de janeiro, temos uma sequência denominada P.A. (Progressão Aritmética).

A lei de formação de uma sequência chamada P.A. é $a_n = a_1 + (n-1)r$, fazendo $n=1$, para janeiro; $n=2$, para fevereiro; com $a_1=33000$ e com a razão $r=1500$, temos a seguinte P.A. $a_n = 33000 + (n-1)1500$:

Portanto, em julho ($n=7$), temos que:

$$a_7 = 33000 + (7-1)1500$$

$$a_7 = 33000 + 6.1500$$

$$a_7 = 33000 + 9000$$

$$a_7 = 42000$$

Assim, em julho do ano passado foram vendidas 42000 passageiros.

03) Encontre o termo geral a_n da seguinte sequência (1, 27, 125, 343, 729, 1331, ...).

Resolução:

Nessa sequência verificamos que os termos são os cubos dos números ímpares, e um número ímpar possui a seguinte forma algébrica $(2n-1)$ para $n \geq 1$, então o termo geral dessa sequência será dado por: $a_n = (2n-1)^3$.

Calculando a sequência, temos:

$$a_1 = (2.1-1)^3 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a_2 = (2.2-1)^3 \Rightarrow a_2 = 27$$

$$a_3 = (2.3-1)^3 \Rightarrow a_3 = 125$$

$$a_4 = (2.4-1)^3 \Rightarrow a_4 = 343$$

04) Segundo o IBGE, estima-se que o Brasil tenha 204,5 milhões de habitantes e uma taxa de crescimento geométrico anual de 0,87% de 2014 para 2015. Considerando essa taxa geométrica anual de 0,87% pelos próximos anos, calcule o número mínimo de anos (inteiros) para que a população brasileira ultrapasse o dobro de sua população de janeiro de 2015.

Resolução:

Como temos uma taxa geométrica padrão de crescimento populacional de 0,87% ao ano, a partir de janeiro de 2015, podemos utilizar a seguinte fórmula dos juros compostos $M = C.(1+i)^n$ para calcular nossa sequência populacional.

Queremos encontrar n (anos) tal que o dobro da população brasileira seja igual a **409** milhões de pessoas, assim, fazendo $M = 409$, para o dobro da população; $C = 204,5$, para a população em janeiro de 2015 e $i = 0,87\%$ ao ano ou $i = 0,0087$, para a taxa populacional, temos o seguinte cálculo:

$$409 = 204,5 \cdot (1 + 0,0087)^n$$

$$\frac{409}{204,5} = 1,0087^n$$

$$2 = 1,0087^n$$

$$\ln 2 = \ln 1,0087^n$$

$$\ln 2 = n \cdot \ln 1,0087$$

$$\frac{\ln 2}{\ln 1,0087} = n$$

$$\frac{0,6931}{0,0087} = n$$

$$n = 79,7$$



Utilizamos o logaritmo neperiano “ \ln ” nos dois lados da equação para podermos “tombar” o expoente “ n ” para frente do logaritmo, conforme a seguinte propriedade logarítmica:

$$\ln a^n = n \cdot \ln a$$

Então, daqui a 80 anos a população brasileira terá dobrado de tamanho, em torno de 409 milhões de habitantes.

Concluindo



Vimos uma diversidade de sequências numéricas, iniciando pelas considerações sobre padrão, passando por alguns exemplos iniciais e nos detendo com mais atenção em sequências numéricas infinitas, por exigirem uma análise mais aprofundada sobre seu comportamento, notadamente, se convergem ou não. Nesse sentido, apresentamos definições e resultados importantes, na forma de proposições e teoremas e algumas demonstrações matemáticas, que auxiliam tanto na compreensão do tema, quanto na resolução de exercícios mostrados nos muitos exemplos apresentados.

Assim, chegamos ao fim dessa unidade. Veja e reveja os exemplos, definições, proposições e teoremas. Procure refazê-los para se certificar de que compreendeu bem sobre sequências numéricas, preparando-se para resolver as atividades da unidade.

Bom estudo! Até a próxima!

Material Complementar

I) Alguns limites que aparecem com frequência

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \quad (|x| < 1)$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \quad (\text{para todo } x)$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \quad (\text{para todo } x)$$

Nas fórmulas 3 e 6, x permanece fixo quando $n \rightarrow \infty$

Vamos demonstrar o limite do item 5.

$$\text{Para qualquer } x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Seja $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, então $\ln(a_n) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \rightarrow x$. Vejamos:

como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$ dá uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$, vamos transformar em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ para poder aplicar a Regra de l'Hôpital, então temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{x}{n}}\right) \cdot \left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1 + \frac{x}{n}} \right) = x$$

(Observe que o limite é na variável n , logo, x está fixo).

Pelo Teorema 4 (da função contínua), como $f(x) = e^x$ é uma função contínua em \mathbb{R} podemos concluir que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln(a_n)} \rightarrow e^x$

II) Alguns links pra explorar mais

Leituras:



Infinito: uma história a contar
<http://www.ipv.pt/millenium/Millenium34/16.pdf>

Vídeos:



- a) Me Salva! Sequências - O que são sequências? Convergência e Divergência.
https://www.youtube.com/watch?v=T2_Nxy9pyqw
- b) Arte e matemática - O número de ouro (TV-Escola-MEC)
<http://tvescola.mec.gov.br/tve/video;jsessionid=224818EA4F70F2516E0EF45B190B2E5D?idItem=7253>
- c) O número de Ouro: a mágica por detrás do belo
<https://www.youtube.com/watch?x-yt-cl=84503534&v=XM-o0HsjkV8&x-yt-ts=1421914688>

Obs: Todos os acessos foram em 25/05/2016.

Referências

BOULOS, P. **Exercícios resolvidos e propostos de sequências e séries de números e de funções.** São Paulo: Edgard Blucher, 1986.

GUELLI, C. A.; IEZZI, G.; DOLCE, O. **Álgebra I:** sequências, progressões, logaritmos. São Paulo: Moderna, 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

Referências Complementares

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo.** v. 2., 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

CARVALHO, M. C. C. S. **Padrões numéricos e sequências.** São Paulo: Moderna, 1997.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica.** 2. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1982. 2 v.

MACHADO, A. S. **Matemática: temas e metas:** trigonometria e progressões. São Paulo: Atual, 2004.

THOMAS, G. B. **Cálculo.** v 2. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

Anotações





Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo - SP - Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000



Cruzeiro do Sul
Educacional