

Física Geral e Experimental I



Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material Teórico



Movimento Bidimensional

Responsável pelo Conteúdo:

Prof. Dr. José Agostinho Gonçalves de Medeiros
Prof. Ms. Eduardo Landulfo

Revisão Textual:

Profa. Ms. Selma Aparecida Cesarin

UNIDADE

Movimento Bidimensional



- Grandezas Vetoriais e Escalares
- Propriedades dos Vetores
- Componentes de um Vetor e Vetores Unitários
- Vetores Posição, Velocidade e Aceleração
- Movimento Bidimensional com Aceleração Constante



Objetivo de APRENDIZADO

- Nesta Unidade, voltaremos nossa atenção para os conceitos de Movimento, especificamente do Movimento Bidimensional.
- Será apresentada uma breve introdução sobre os conceitos de vetores, movimento bidimensional e movimento circular.
- Apresentaremos, também, exercícios resolvidos para fixar os conceitos apresentados. Os alunos devem ter especial atenção aos pontos destacados e aos exercícios resolvidos.

A leitura do Conteúdo Teórico com atenção é essencial para compreender os conceitos apresentados.

É comum encontrarmos conceitos que a princípio divergem do que observamos no dia a dia. Uma análise mais cuidadosa dos modelos teóricos apresentados explica não só o que podemos observar, como também permite prever resultados que não observamos por conta das nossas limitações.

Os exemplos e exercícios resolvidos ajudam a consolidar os conceitos estudados.

Não deixe de utilizar todos os recursos disponíveis e acessar aos links sugeridos no texto.

Fique atento às atividades avaliativas propostas e ao prazo de realização.

Nesta unidade temos Atividades de Sistematização e Atividade de Aprofundamento.

Lembre-se de que essas atividades são pontuadas e possuem prazos de entrega.

Contextualização

Os avanços tecnológicos permitem que as pessoas tenham um estilo de vida totalmente diferente do estilo de vida de algumas décadas atrás; a informação e a imagem estão disponíveis quase que instantaneamente.

Ao ligarmos uma televisão, colocamos em funcionamento ou utilizamos uma série de tecnologias baseadas em leis físicas no campo do eletromagnetismo, física moderna, óptica e também da mecânica.

Parece estranho falar que para assistir a um simples jogo de futebol, um clássico entre Corinthians e Palmeiras, depende-se do estudo do movimento bidimensional.



Fonte: INPE

A imagem transmitida pelas redes de telecomunicações utilizam dispositivos conhecidos como satélites, que realizam um movimento circular em torno da Terra.

Os satélites brasileiros são responsáveis pela transmissão de dados, monitoração do desmatamento, monitoração das áreas agrícolas e do desenvolvimento urbano.

Os principais satélites brasileiros são: Dove-OSCAR17(1990, fins educacionais); Brasilsat A1(1985), A2 (1986), B1 (1994), B2 (1995), B3 (1998), B4 (2000);

Star One C1 (2007), C2 (2008), C3 (2008), CBERS-1(1999), CBERS-2 (2003), CBERS-2B (2007),CBERS-3 (2013), SACI-1(1999), SACI-2 (1999), SCD-1 (1993) , SCD-2 (1998).

Mesmo um simples jogo de bilhar pode ser descrito utilizando as equações do movimento bidimensional. Na verdade, os jogos de computador que simulam um jogo de sinuca utilizam uma ferramenta matemática muito comum no estudo do movimento bidimensional, os vetores indicam a posição de cada um dos elementos do jogo em todos os instantes.



Fonte: Thinkstock/Getty Images

Grandezas Vetoriais e Escalares



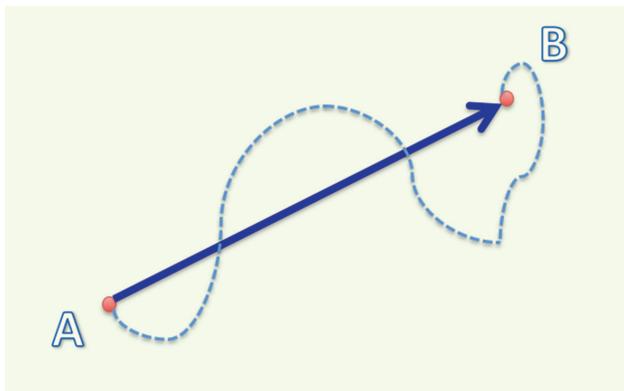
As grandezas em Física podem ser classificadas como **escalares** ou **vetoriais**.

Grandezas escalares são as definidas por sua quantidade, por exemplo: massa. Assim, um objeto de massa de 80kg tem definida a sua quantidade completamente.

As grandezas vetoriais, além de serem definidas pela quantidade, necessitam, para sua total definição, de uma direção e sentido. Quando mencionamos uma velocidade de 30 km/h, é natural perguntarmos qual direção. Dessa maneira, a “frase” completa seria velocidade de 30 km/h na horizontal (direção) da esquerda para a direita (sentido).

Representação dos Vetores

Um vetor é representado pela seta que une dois pontos **A** e **B**, com a ponta da flecha no ponto final em que uma partícula se deslocou, não importando o caminho realizado pela partícula, mas sim seus pontos inicial e final.



Na figura ao lado, podemos visualizar o vetor que une os pontos **A** e **B** e a trajetória, em linha tracejada, que mostra o caminho percorrido pela partícula. A direção da seta define a direção do deslocamento, e o seu comprimento, a magnitude do deslocamento.

O segmento **AB** pode ser representado por uma letra maiúscula ou minúscula – **A** (ou **a**) – em negrito, ou ainda \vec{A} (\vec{a}).

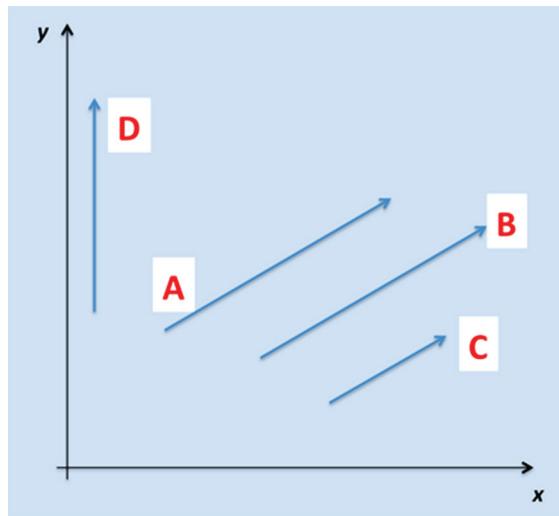
A magnitude ou módulo do vetor é representado por **A** (**a**) ou ainda: $|A|$ ou $|a|$. A magnitude ou módulo irá carregar a unidade da grandeza em questão.

Propriedades dos Vetores



Igualdade de vetores

Dois vetores são iguais quando suas direções e módulos são iguais. Assim, dois vetores paralelos e de mesmo valor são iguais. Na figura, **A** e **B** são iguais; o vetor **C**, apesar de ser paralelo, não possui o mesmo o módulo; o vetor **D**, apesar de ter o mesmo módulo, não é paralelo e, portanto, também não é igual aos vetores **A** e **B**.

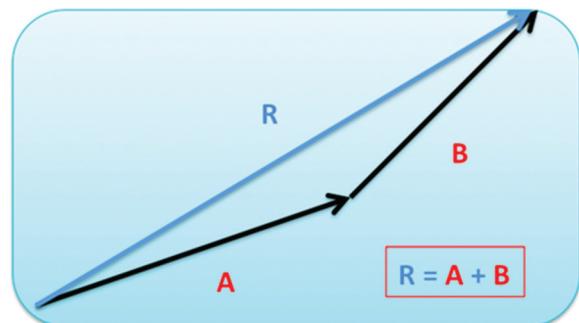


Soma de Vetores

A soma de vetores pode ser representada graficamente, e quando somamos o vetor \mathbf{B} ao vetor \mathbf{A} , primeiro desenhamos o vetor \mathbf{A} , ao colocarmos o vetor \mathbf{A} em escala, e com sua direção e sentido definidos pela ponta da flecha ou seta, a seguir desenhamos o vetor \mathbf{B} , mas, a partir da extremidade ou ponta da flecha de vetor \mathbf{A} , vetor resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, será o vetor que liga o início de \mathbf{A} ao final de \mathbf{B} .

As regras comutativa e associativa se aplicam aos vetores. Sendo assim, temos: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

Uma regra muito prática é que o negativo de um vetor é aquele cuja soma é zero, isto é, $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Isto implica que os vetores \mathbf{A} e $-\mathbf{A}$ têm o mesmo módulo e sentidos contrários.



Exemplo: Dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} têm módulos de 4 unidades e 6 unidades. Os valores máximo e mínimo que o vetor soma pode ter, respectivamente:

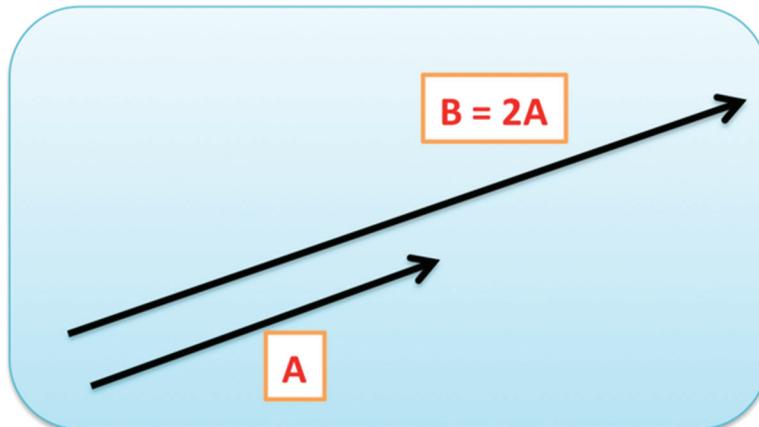
- 10 unidades e 2 unidades;
- 10 unidades e 0 unidades;
- 7,211 unidades e 4,472 unidades;
- 10 unidades e 10 unidades;
- 40 unidades e 12 unidades.

Resposta: a)

Quando os vetores são paralelos $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = 6 + 4 = 10$, temos o valor máximo, e quando \mathbf{A} e \mathbf{B} são antiparalelos e assim, $\mathbf{R} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = 6 - 4 = 2$.

Multiplicação de Vetores por um Escalar

A multiplicação de um vetor por um número (escalar), define-se como o produto de uma quantidade m pelo vetor \mathbf{A} . Assim teremos $m\mathbf{A}$, por exemplo, o vetor $3\mathbf{A}$ é 3 vezes maior que o vetor \mathbf{A} , e na mesma direção e sentido, e o vetor $-0,5\mathbf{A}$, é a metade de \mathbf{A} , na mesma direção e sentido contrário.



Componentes de um Vetor e Vetores Unitários



Ao lidarmos com vetores, nem sempre o uso do método gráfico é o mais prático se necessitarmos acurácia, principalmente se for com problemas que envolvam 3 dimensões (x, y, z).

Neste caso, utilizamos um método simples que faz uso das projeções dos vetores ao longo dos eixos de coordenadas. Estas coordenadas são chamadas de componentes de um vetor e qualquer vetor pode ser descrito pelas suas coordenadas, que também são vetores com propriedades específicas.

Considere o vetor \mathbf{A} no plano xy e que faça um ângulo (θ símbolo grego que se lê “téta”, com eixo x).

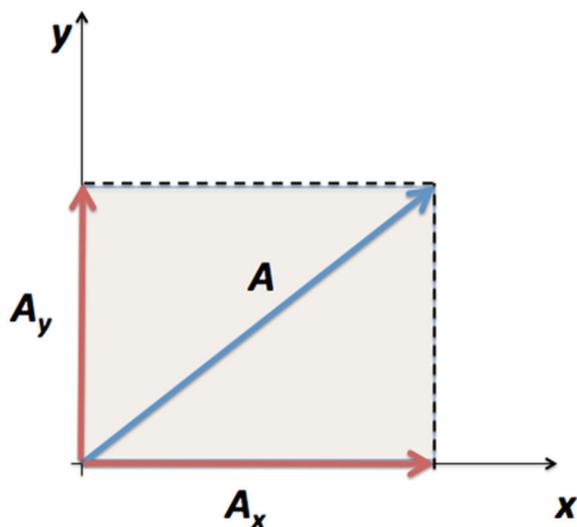
Este vetor pode ser expresso como a soma de dois outros vetores \mathbf{A}_x e \mathbf{A}_y , conforme a figura abaixo, onde:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \text{ ou } \mathbf{A} = \mathbf{A}_x + \mathbf{A}_y$$

As componentes de um vetor podem ser expressas na forma A_x ou A_y , não estando em negrito, e A_x é a projeção de \mathbf{A} em x, e A_y é a projeção de \mathbf{A} em y.

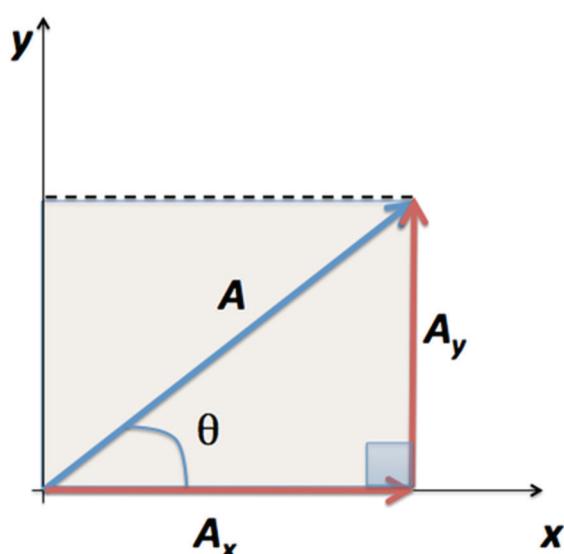
As projeções podem ser positivas, apontando no mesmo sentido do eixo onde elas estão apontando, ou negativas, no sentido contrário aos eixos cartesianos.

Evite confundir os **vetores componentes**: \mathbf{A}_x e \mathbf{A}_y , que são vetores, com as componentes A_x e A_y , que são escalares (números).



As componentes vão ser definidas pelo seno e o cosseno do ângulo θ . Sendo assim, $\cos \theta = A_x/A$ e $\sin \theta = A_y/A$. Temos, deste modo que as componentes de A são:

$$A_x = A \cos \theta \quad A_y = A \sin \theta$$



Veja que as componentes formam um ângulo reto, e o triângulo formado por A , A_x e A_y é um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento A (módulo do vetor A), e a relação de Pitágoras válida é:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

E o ângulo é definido como:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{A_y}{A_x} \right)$$

Exemplo: um vetor de módulo 15 forma um ângulo de 60° com a horizontal, as suas componentes A_x e A_y serão:

a) $15\sqrt{\frac{3}{2}}, 15\frac{1}{2}$

b) $-15\sqrt{\frac{3}{2}}, -15\frac{1}{2}$

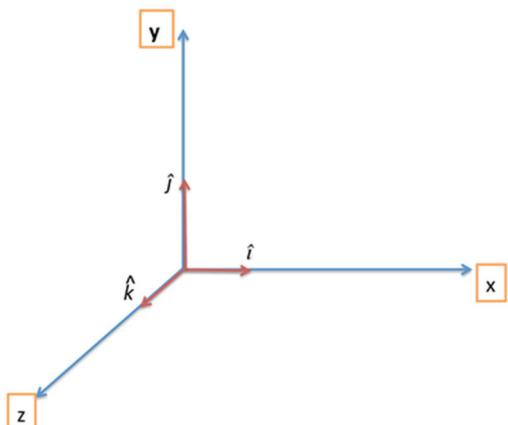
c) $15\sqrt{\frac{3}{2}}, -15\frac{1}{2}$

d) $15\frac{1}{2}, 15\sqrt{\frac{3}{2}}$

e) $15\sqrt{\frac{3}{2}}, 15\sqrt{\frac{3}{2}}$

Resposta d)

Resolução: $Ax = A \cos \theta$ e $Ay = A \sin \theta$, isto é:



$$A_x = 15 \cos 60 = 15 \frac{1}{2} = 7,5$$

$$A_y = 15 \sin 60 = 15 \sqrt{\frac{3}{2}} = 12,99$$

Os vetores, em geral, podem ser expressos em outros vetores, vetores estes com módulo igual a 1 e com direção específica, porém, sem significado físico algum, isto é, não representam uma quantidade grandeza.

Os vetores unitários mais comuns são: \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , que são vetores unitários que apontam nas direções positivas de x, y e z.

Observe que na notação usual, estes vetores possuem um “acento circunflexo (^)” sobre eles. Como mencionado, o módulo de cada vetor é igual a 1 (unidade).

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

Se tivermos um vetor qualquer \mathbf{A} , no plano xy, podemos expressá-lo pelas suas componentes A_x e A_y e os vetores unitários \hat{i}, \hat{j} :

$$\mathbf{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

Esta forma de representar os vetores vai tornar as operações entre vetores mais organizadas e diretas. Por exemplo, se tivermos que $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$:

$$\mathbf{R} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

rearranjando os termos,

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j}$$

Como $\mathbf{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$, temos que: $R_x = A_x + B_x$ e $R_y = A_y + B_y$

Mesmo para vetores tridimensionais, a soma de $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ seria:

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

Tanto em duas como em três dimensões, o módulo de \mathbf{R} é diretamente dado por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

O ângulo do vetor soma (em 2 D) será dado por:

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x}$$

Exemplo: dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} estão no plano xy e são dados por:

$$\mathbf{A} = (2, 0)\hat{i} + (3, 0)\hat{j} \text{ m} \quad \mathbf{B} = (2, 0)\hat{i} - (2, 0)\hat{j} \text{ m}$$

O vetor resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ é dado por (módulo e direção)

a) $\sqrt{17} \text{ m e } 14,04^\circ$

b) $\sqrt{17} \text{ m e } 3,58^\circ$

c) $\sqrt{15} \text{ m e } 26,57^\circ$

d) $\sqrt{5} \text{ m e } 14,04^\circ$

e) $\sqrt{5} \text{ m e } 3,58^\circ$

Resposta a)

Resolução

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2, 0 + 2, 0)\hat{i} + (3, 0 - 2, 0)\hat{j} \\ &= (4, 0)\hat{i} + (1, 0)\hat{j} \text{ m} \\ &= \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} = 4,123 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\theta = \tan^{-1}(0,25) = 14,0362^\circ$$

Exemplo

Uma partícula move-se regida por três vetores $\mathbf{d}_1 = 10,0\hat{i} + 30,0\hat{j} - 15,0\hat{k}$, $\mathbf{d}_2 = 5,0\hat{i} - 20,0\hat{j} + 10,0\hat{k}$, e $\mathbf{d}_3 = 8,0\hat{i} + 6,0\hat{j} + 6,0\hat{k}$, todos fornecidos em metros, o vetor soma resultante terá um módulo igual a:

- a) 40,0
- b) 6,32
- c) 28,04
- d) 6,16
- e) 38,0

Resposta: c)

Solução

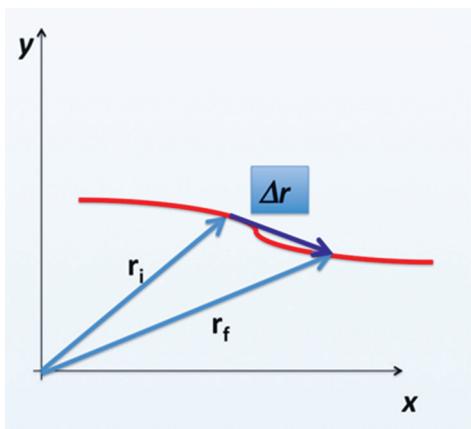
$$\mathbf{R} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$$

$$\mathbf{R} = (10,0 + 5,0 + 8,0)\hat{i} + (30,0 - 20,0 + 6,0)\hat{j} + (-15,0 + 10,0 + 6,0)\hat{k}$$

$$\mathbf{R} = 23,0\hat{i} + 16,0\hat{j} + 1,0\hat{k}$$

$$R = \sqrt{23,0^2 + 16,0^2 + 1,0^2} = \sqrt{786} = 28,04\text{ m}$$

Vetores Posição, Velocidade e Aceleração



As grandezas posição, velocidade e aceleração são grandezas vetoriais e, portanto, só são completamente descritas quando fornecemos direção e sentido ao seu módulo. O vetor posição, \mathbf{r} , é aquele que é descrito num plano cartesiano xy , que é desenhado a partir da origem e , em cada instante, em cada ponto de uma trajetória qualquer, há um vetor conectando a origem e o ponto nesta trajetória. Sendo assim, num instante inicial t_i , o ponto onde se encontra uma partícula há um vetor posição \mathbf{r}_i e, num instante mais tarde, t_f , a partícula se moveu para um ponto adiante na trajetória e teremos outro vetor \mathbf{r}_f .

A diferença entre os dois vetores Δr , também é um vetor, denominado **vetor deslocamento** dado por:

$$\Delta r \equiv r_f - r_i$$

Observe que a distância entre os pontos ao longo da trajetória é maior que o vetor espaço percorrido.

Conhecendo-se o vetor distância percorrida e o intervalo de tempo Δt que passou para a partícula ir de um ponto a outro, temos, analogamente à Unidade anterior, que o **vetor velocidade média** é dado por:

$$\bar{v} \equiv \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

Lembrando que a barra sobre o vetor indica valor médio.

Observe, ainda, que o vetor velocidade média independe do caminho tomado, pois a velocidade é proporcional ao deslocamento, que depende dos pontos inicial e final.

Numa partida de futebol, ao cobrar um pênalti que é defendido pelo goleiro, fazendo com que a bola retorne ao ponto da cobrança da penalidade, teremos que a velocidade média vetorial da bola irá ser zero, já que os pontos iniciais e finais na cobrança acabam sendo os mesmos.

Assim como na aula anterior, quando o intervalo de tempo Δt for tão pequeno que seu limite vai a zero, teremos o **vetor velocidade instantânea** v:

$$v \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

A direção da velocidade instantânea vai ser tangente ao caminho descrito pelo objeto nos pontos alcançados pela partícula na direção do movimento.

Da mesma maneira que temos velocidade média e velocidade instantânea, temos também o **vetor aceleração média e vetor aceleração instantânea**, dados respectivamente por :

$$\bar{a} \equiv \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{e} \quad a \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Quando consideramos o vetor aceleração, precisamos notar que ele pode ser responsável pela mudança na direção e módulo na velocidade, ou a mudança no módulo, ou a mudança apenas na direção, mas sem mudar o módulo da velocidade.

Na sua representação, o vetor posição pode ser decomposto na combinação dos vetores unitários \hat{i}, \hat{j} e \hat{k} assim:

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

E a partir do vetor posição, podemos obter o vetor velocidade como:

$$v = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Da mesma maneira, o vetor aceleração será dado por:

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt} \hat{\mathbf{k}}$$

ou ainda:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{\mathbf{k}}$$

onde $\frac{d^2x}{dt^2}$ é a derivada segunda de x em função de t . Que é o mesmo que a derivada da componente v_x em função de t .

Exemplo

Uma bola de futebol tem uma velocidade sobre o gramado de $\mathbf{v}_i = (4,00 \hat{\mathbf{i}} + 1,00 \hat{\mathbf{j}}) m/s$ em um ponto cuja posição em relação a um observador é $\mathbf{r}_i = (10,00 \hat{\mathbf{i}} - 4,00 \hat{\mathbf{j}}) m$. Após um chute, a bola adquire aceleração constante por 2 segundos, quando sua velocidade passa a ser de $\mathbf{v} = (20,00 \hat{\mathbf{i}} - 5,00 \hat{\mathbf{j}}) m/s$.

As componentes de sua aceleração são respectivamente:

- a) -8,00 m/s² e -3,00 m/s²
- b) 8,00 m/s² e -3,00 m/s²
- c) -8,00 m/s² e 3,00 m/s²
- d) 3,00 m/s² e 0,00 m/s²
- e) 0,00 m/s² e 3,00 m/s²

Resposta b)

Solução

A variação da velocidade em cada componente será dada por $v - v_i$. Assim, teremos $\Delta\mathbf{v} = (20,00 \hat{\mathbf{i}} - 5,00 \hat{\mathbf{j}}) - (4,00 \hat{\mathbf{i}} + 1,00 \hat{\mathbf{j}})$, que após rearranjar os termos será dada por:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{v} &= (20,00 - 4,00) \hat{\mathbf{i}} + (-5,00 - 1,00) \hat{\mathbf{j}} \\ \Delta\mathbf{v} &= 16,00 \hat{\mathbf{i}} - 6,00 \hat{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

A aceleração será dada por $\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$, isto é:

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{16,00}{2,00} \hat{\mathbf{i}} - \frac{6,00}{2,00} \hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a} = 8,00 \hat{\mathbf{i}} - 3,00 \hat{\mathbf{j}}$$

O módulo do vetor será dado por $\sqrt{8^2 + (-3)^2} = \sqrt{64 + 9} = \sqrt{73} \frac{m}{s^2}$ ou aproximadamente $8,5 \text{ m/s}^2$.

Movimento Bidimensional com Aceleração Constante



Uma grande parte dos movimentos que observamos podem ser considerados de aceleração constante. Mesmo aqueles que não apresentam este comportamento, podem, em primeira aproximação, ser divididos em trechos individuais, cada qual com aceleração constante.

Dessa maneira, se conhecemos o vetor posição de um objeto:

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$$

x e y podem variar com o tempo e assim podemos aplicar a definição de velocidade instantânea:

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{j}}$$

E quando assumimos que a aceleração é constante, o vetor velocidade e suas componentes em função do tempo assumem uma expressão específica:

$$\mathbf{v}(t) = (v_{xi} + a_x \cdot t) \hat{\mathbf{i}} + (v_{yi} + a_y \cdot t) \hat{\mathbf{j}}$$

E rearranjando a equação acima:

$$\mathbf{v}(t) = (v_{xi} \hat{\mathbf{i}} + v_{yi} \hat{\mathbf{j}}) + (a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}})t$$

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$

que nos fornece o vetor velocidade como o vetor velocidade inicial mais o vetor aceleração vezes o tempo. Observe que o vetor aceleração vai ser constante com o tempo.

Exemplo

Uma partícula inicia seu movimento num plano com velocidade inicial no eixo x igual a 20 m/s e no eixo y igual a -15 m/s. A partícula se desloca neste plano com uma aceleração constante apenas em x igual a 4,0 m/s². Após 5s o módulo da velocidade vai ser:

- a) $5\sqrt{73}$ m/s
- b) $5\sqrt{55}$ m/s
- c) 5 m/s
- d) $\sqrt{55}$ m/s
- e) 55 m/s

Resposta a)

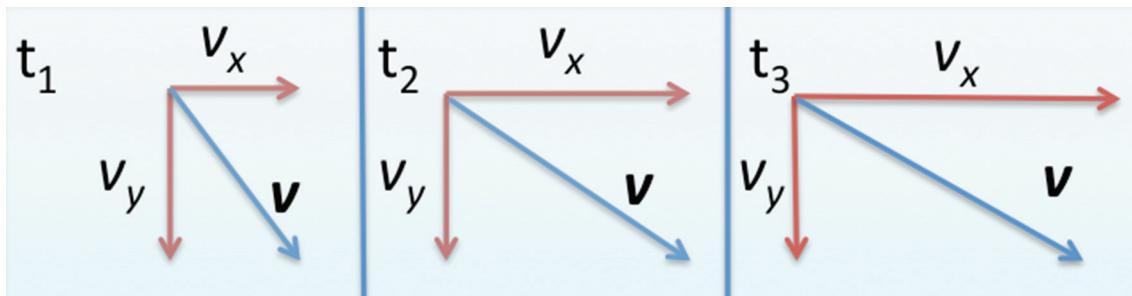
Resolução

São dados do problema $v_x = 20 + 4,0 \cdot t$ e $v_y = -15 + 0 \cdot t$, após 5s teremos as novas velocidades $v_x = 20 + 4,0 \cdot 5 = 40$ m/s e $v_y = -15 + 0 \cdot 5 = -15$ m/s.

O vetor velocidade nesse instante é, então :

$$v(t) = 40\hat{i} - 15\hat{j}$$

E seu módulo igual a: $\sqrt{40^2 + -15^2} = \sqrt{1600 + 225} = \sqrt{1825} = \sqrt{73 \times 25} = 5\sqrt{73}$ m/s ou 42,72 m/s.



Observe a evolução temporal (t_1 , t_2 , t_3) do vetor e suas componentes no exemplo numérico. Veja que v_y permanece inalterado, já que a aceleração só tinha componente em x.

Importante também observar que o módulo e a direção do vetor v vão mudando com o tempo.

Quando temos aceleração constante, o vetor posição apresenta um aspecto bem característico:

$$\mathbf{r} = \left(x_i + v_{xi} \cdot t + \frac{1}{2} a_{xi} \cdot t^2 \right) \hat{i} + \left(y_i + v_{yi} \cdot t + \frac{1}{2} a_{yi} \cdot t^2 \right) \hat{j}$$

e novamente rearranjando os termos:

$$\mathbf{r} = \left(x_i \hat{i} + y_i \hat{j} \right) + \left(v_{xi} \hat{i} + v_{yi} \hat{j} \right) \cdot t + \frac{1}{2} \left(a_{xi} \hat{i} + a_{yi} \hat{j} \right) \cdot t^2$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i \cdot t + \frac{1}{2} \mathbf{a} \cdot t^2$$

Exemplo

Considerando o exemplo anterior, o módulo do vetor deslocamento ou posição após 5s será:

- a) 75 m
- b) $75\sqrt{3}$ m
- c) $75\sqrt{5}$ m
- d) $5\sqrt{3}$ m
- e) 15 m

Resposta c)

Resolução

No instante inicial $t=0$, vamos considerar que $x_i = 0$ e $y_i = 0$.

Assim, o vetor posição:

$$\mathbf{r} = (x_i \hat{i} + y_i \hat{j}) + (v_{xi} \hat{i} + v_{yi} \hat{j})t + \frac{1}{2}(a_{xi} \hat{i} + a_{yi} \hat{j})t^2$$

passa a ser:

$$\mathbf{r} = (0\hat{i} + 0\hat{j}) + (20\hat{i} - 15\hat{j})t + \frac{1}{2}(4\hat{i} + 0)t^2$$

$$\mathbf{r} = (20\hat{i} - 15\hat{j})t + 2\hat{i}t^2$$

$$\mathbf{r} = (20t + 2t^2)\hat{i} - 15t\hat{j}$$

Lembrando que $v_{xi} = 20 \text{ m/s}$ e $v_{yi} = -15 \text{ m/s}$, e que $a = 4 \hat{i} \text{ m/s}^2$. Assim, em $t = 5 \text{ s}$ temos:

$$\mathbf{r} = (20.5 + 2.5^2)\hat{i} - 15.5\hat{j}$$

$$\mathbf{r} = 150\hat{i} - 75\hat{j}$$

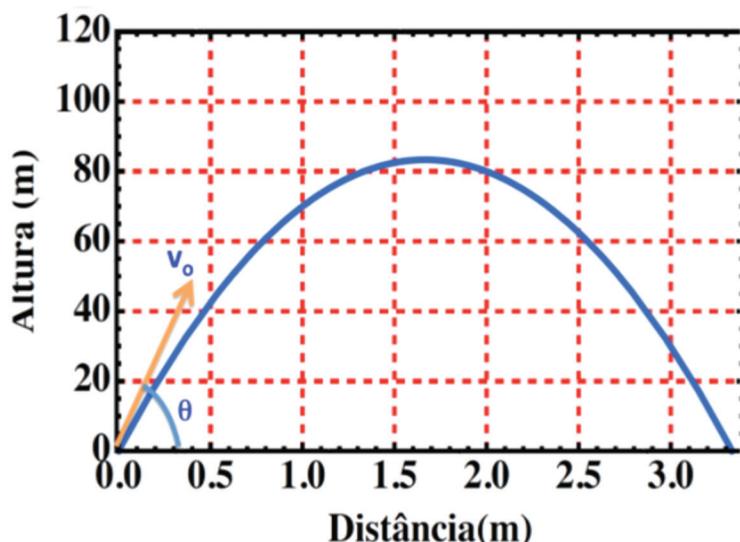
E seu módulo será: $\sqrt{150^2 + -75^2} = \sqrt{28125} = \sqrt{5625 \times 5} = 75\sqrt{5} \text{ m}$ ou aproximadamente 168 m.

Lançamento Oblíquo

Quando lançamos um projétil com uma velocidade inicial, o objeto lançado estará sujeito à **aceleração da gravidade** e pela resistência do ar, em casos mais detalhados, o lançamento seria afetado também pela rotação e curvatura da Terra. A curva traçada pelo objeto e sua forma são bem característicos deste movimento em 2 dimensões. E a sua trajetória terá a forma de uma parábola.

A figura ao lado ilustra um lançamento, em que se deve conhecer o valor e a direção do vetor velocidade inicial, para que se possa prever em qualquer instante a posição e a velocidade do projétil em qualquer ponto da trajetória (em azul). Num primeiro momento, vamos desprezar a resistência do ar.

Da figura, é óbvio que o movimento é em duas dimensões, e ele ocorre no plano xy , definido pelos eixos Ox , horizontal, orientado da esquerda para a direita, e Oy , vertical, orientado de baixo para cima.



Ao analisar o movimento deste projétil, notamos que a ação da gravidade, afeta apenas a altura do projétil e não o seu deslocamento lateral, e a chave da solução deste problema é tratar as componentes x e y separadamente: um movimento na horizontal com **velocidade constante**, e um movimento na vertical com **aceleração constante**. Desta maneira, as equações se dividem como:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \\ \mathbf{a} &= -g \hat{j}\end{aligned}$$

onde g é a aceleração da gravidade, cujo módulo é 9,8 m/s². Note que a aceleração é para baixo, por isso o sinal de menos na equação. A componente horizontal da aceleração, como mencionado, é zero.

A velocidade inicial v_0 e a equação da velocidade é:

$$\mathbf{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

onde

$$\mathbf{v}_x = v_{ox} \hat{i}$$

$$\mathbf{v}_y = (v_{oy} t - gt) \hat{j}$$

Assim:

$$\mathbf{v} = v_{ox} \hat{i} + (v_{oy} - gt) \hat{j}$$

O vetor posição r, será dado por:

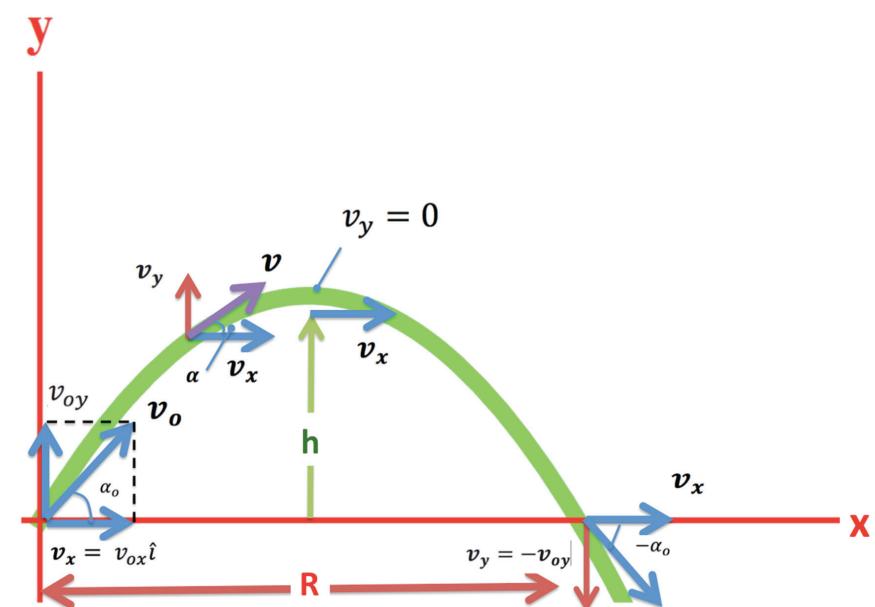
$$\mathbf{r} = (x_i \hat{i} + y_i \hat{j}) + (v_{xi} \hat{i} + v_{yi} \hat{j}) t + \frac{1}{2} (a_{xi} \hat{i} + a_{yi} \hat{j}) t^2$$

$$\mathbf{r} = (0 \hat{i} + 0 \hat{j}) + (v_{ox} \hat{i} + v_{oy} \hat{j}) t + \frac{1}{2} (0 \hat{i} - g \hat{j}) t^2$$

$$\mathbf{r} = (v_{ox} \hat{i} + v_{oy} \hat{j}) t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{j}$$

$$\mathbf{r} = v_{ox} t \hat{i} + \left(v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$$

Consideraremos por questão de praticidade que as posições iniciais x_0 e y_0 vão ser iguais à zero.



Com a definição do ângulo α_o , é possível reescrevermos os vetores iniciais em função das suas componentes:

$$v_{ox} = v_o \cos \alpha_o$$

$$v_{oy} = v_o \sin \alpha_o$$

E assim podemos reescrever o vetor posição como:

$$\mathbf{r} = v_o \cdot \cos \alpha_o \hat{i} + \left(v_o \cdot \sin \alpha_o \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$$

$$\mathbf{v} = v_o \cdot \cos \alpha_o \hat{i} + (v_o \cdot \sin \alpha_o - g t) \hat{j}$$

A altura máxima \mathbf{h} atingida pelo projétil ocorre quando a componente v_y for igual a zero e é numericamente igual a:

$$h = \frac{v_o^2}{2g} \sin^2 \alpha_o$$

O alcance R da partícula é aquele em que o ângulo é igual a $-\alpha_o$, pois a componente v_y será igual a $-v_0 y$. R é dado por:

$$R = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha_o}{g}$$

Exemplo

Um motociclista de acrobacias se projeta de um penhasco com velocidade horizontal de 5,0 m/s. A posição e velocidade do piloto após 0,25 vai ser, respectivamente:

- a) 1,00 m e 5,00 m/s
- b) 1,29 m e 5,57 m/s
- c) 1,21 m e 5,57 m/s
- d) 1,29 m e 4,36 m/s
- e) 1,21 m e 4,36 m/s

Resposta: b)

Solução

Velocidade Inicial $v_0 = 5$ m/s

Ângulo inicial: 0°

Aceleração: 9,8 m/s

$$\mathbf{r} = v_o \cdot \cos \alpha_o \hat{i} + \left(v_o \cdot \sin \alpha_o \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \hat{j}$$

$$\mathbf{r} = 5 \cdot \cos 0 \hat{i} + \left(5 \cdot \sin 0 \cdot t - \frac{1}{2} 9,8 t^2 \right) \hat{j}$$

$$\mathbf{r} = 5t \hat{i} - 4,9t^2 \hat{j}$$

Após 0,25 s temos:

$$\mathbf{r} = 5 \times 0,25 \hat{i} - 4,9 \times 0,25^2 \hat{j}$$

$$\mathbf{r} = 1,25 \hat{i} - 0,30625 \hat{j}$$

E o módulo será:

$$\sqrt{1,25^2 + (-0,30625)^2} = 1,28697 \approx 1,29 \text{ m}$$

E a velocidade:

$$\mathbf{v} = v_o \cdot \cos \alpha_o \hat{i} + (v_o \cdot \sin \alpha_o - gt) \hat{j}$$

$$\mathbf{v} = 5 \cdot \cos 0 \hat{i} + (5 \cdot \sin 0 - 9,8t) \hat{j}$$

$$\mathbf{v} = 5 \hat{i} - 9,8t \hat{j}$$

Após 0,25 s:

$$\mathbf{v} = 5 \hat{i} - 9,8 \times 0,25 \hat{j}$$

$$\mathbf{v} = 5 \hat{i} - 2,45 \hat{j}$$

E o seu módulo será dado por:

$$\sqrt{5^2 + (-2,45)^2} = 5,56799 \approx 5,57 \text{ m/s}$$

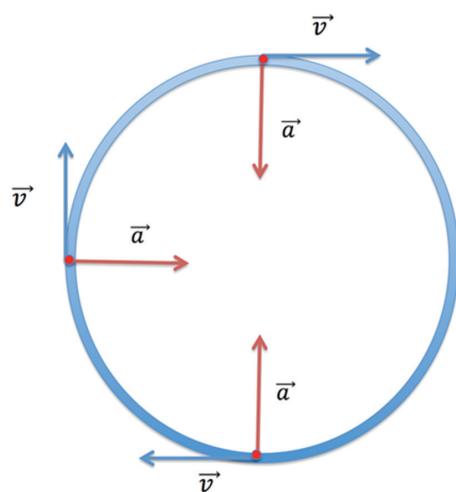
Movimento Circular Uniforme

Quando o objeto descreve uma trajetória em curva, a direção da sua velocidade varia. Isto significa que há uma componente da velocidade perpendicular à trajetória, mesmo quando o módulo da velocidade for constante.

A este movimento, chamamos de **movimento circular uniforme**. Este tipo de movimento também é bem comum no nosso dia a dia. Nele não há nenhum componente da aceleração tangente à trajetória, pois, caso houvesse, haveria variação da velocidade escalar, o que não ocorre.

No movimento circular uniforme, à medida que a velocidade muda de direção, a aceleração, perpendicular à trajetória, também vai mudando sua direção.

No movimento circular, a velocidade é tangente à circunferência em cada ponto e aceleração, sempre aponta para o centro do círculo. Esta aceleração é conhecida como **aceleração centrípeta**, e depende da velocidade e do raio do círculo descrito.



$$a_{cent} = \frac{v^2}{R}$$

A aceleração centrípeta também é conhecida como aceleração radial. E a velocidade é dada por:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

onde T é o período em segundos e R o raio da circunferência descrita.

Exemplo

Um carro esportivo pode ter no máximo uma “aceleração radial” de 0,9 g, isto é, $0,9 \times 9,8 \text{ m/s}^2 = 8,82 \text{ m/s}^2$. Quando um carro descreve uma curva não inclinada a 160 km/h, o raio mínimo dela é de:

- a) 5 m
- b) 224 m
- c) 2900 m
- d) 180 m
- e) 18 m

Resposta b)

Solução

$$R = \frac{v^2}{a_{rad}} = \frac{44,44^2}{8,82} = 223,958 \approx 224 \text{ m}$$

Material Complementar

Para complementar os conhecimentos adquiridos nesta Unidade, veja os vídeos indicados e consulte a bibliografia indicada.

Sistema Internacional de Medidas:

- <http://www.inmetro.gov.br/consumidor/unidLegaisMed.asp>

Vídeos Diversos: Movimento bidimensional – Fundação Lemann:

- http://www.fundacaolemann.org.br/khanportugues/ciencias/fisica/movimento_bidimensional
- <http://www.veduca.com.br/play/541> (**Vetores** – Massachusetts Institute of Technology – MIT: vídeo em inglês);
- <http://www.veduca.com.br/play/542> (**Movimento Balístico** – Massachusetts Institute of Technology – MIT: vídeo em inglês);
- <http://www.veduca.com.br/play/543> (**Movimento Circular Uniforme** – Massachusetts Institute of Technology – MIT: vídeo em inglês).

Referências

SERWAY, JEWETT Jr. **Princípios de Física**, Vol.1. São Paulo - THOMPSON editora; 2004.

SEARS E ZEMANSKY. **Física I**. – 10a. Edição – São Paulo: Addison Wesley, 2003.

HALLIDAY, RESNICK, WALKER. **Física 1** – 6^a. Edição - Rio de Janeiro. LTC editora, 2002.

ALONSO, M. **Física 1**. – 1a. edição – São Paulo: Edgard Blucher, 1992

TIPLER, P.A. **Física**. Vol. 1 - 4a Ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos S.A. Rio de Janeiro – 2000

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física básica**, 4a ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 2002. V.

Anotações





Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

