Sequências, Séries e Progressões

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

Material Teórico

Séries numéricas

Responsável pelo Conteúdo:
Profª. Dra. Ana Lúcia Nogueira Junqueira

Revisão Textual:
Profª. Esp. Natalia Conti

UNIDADE Séries numéricas

- Introdução
- Séries infinitas
- Séries e Somas Parciais
- Séries geométricas
- Séries de termos não negativos
- Séries alternadas

Objetivo de APRENDIZADO

- Definir séries numéricas e apresentar exemplos.
- Trabalhar sequências de somas parciais de uma série numérica.
- Apresentar algumas séries especiais, como a geométrica e a harmônica.
- Apresentar e trabalhar com os testes de convergência de séries numéricas: teste da comparação, da razão, da raiz, convergência condicional e convergência absoluta.
- Apresentar teoremas sobre séries numéricas e explorar propriedades.
- Apresentar exemplos e resolução de exercícios sobre séries numéricas.

Veremos como trabalhar com a adição de infinitos termos, como isto pode ser feito por meio da construção de uma sequência de somas parciais da série e, assim, verificar se é possível encontrar o limite desta sequência que, caso exista será a soma da série numérica infinita, doravante denominada apenas de série numérica, ou simplesmente série, se isto não causar dúvidas. No entanto, mesmo que não seja possível exibir a soma de uma série, ou saber se ela existe, através da sua sequência de somas parciais, podemos estudar o comportamento da série aplicando os testes de convergência que mais se adequem ao tipo da série. O mais importante é saber mostrar e concluir se uma série converge ou não.

Veremos então alguns tipos especiais de séries numéricas e diversos critérios (testes) de convergência. Então, fique atento às condições em que cada teste pode ser utilizado e para que tipo de série: se para séries alternadas, se para séries de termos positivos ou se independe do tipo de série. Mesmo assim cada teste tem sua exigência a priori (condições para poder ser utilizado) para ser utilizado e pode não ser conclusivo em alguns casos, daí nada se pode afirmar e deve ser tentado outro teste.

Acompanhe o desenvolver da teoria, preste bem atenção às definições, propriedades e teoremas, confira os exemplos dados, preparando-se assim para resolver as atividades propostas na unidade. Usaremos muitas estratégias algébricas e se você não está afiado nelas, vai ficar! Como se tratam de séries infinitas, o conceito de limite estará sempre presente. Recomendo rever o estudo sobre integral imprópria, que será utilizada no Teste da Integral para convergência de séries.

Teremos, como de costume, atividades avaliativas e de reflexão sobre o tema da unidade. Fique atento aos prazos!

Contextualização

Ao falarmos de séries numéricas estamos nos referindo à soma de uma sequência infinita de termos, lembrando que a soma é o resultado da operação adição. E o que significa uma 'soma infinita'? Como generalizar a adição de finitos termos para infinitos termos? Será que isto ocorreu de forma natural, sem percalços, ou foi motivo de várias controvérsias e acaloradas discussões ao longo do tempo?

Atualmente, nas escolas, o primeiro contato com estas 'somas infinitas' surge já no Ensino Fundamental, quando tratamos de encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica. No entanto, quando se ensinam essas dízimas, usa-se um procedimento no qual a soma infinita não aparece explicitamente. Vamos recordar encontrando a fração geratriz da dízima periódica: $x = 0{,}666666\ldots$

$$x = 0{,}666666\ldots \quad I$$

$$10x = 6{,}666666\ldots \quad II$$

Isolamos o período multiplicando por 10, pois o período de repetição possui um algarismo

$$10x - x = 6{,}666666 - 0{,}666666$$

Subtraímos a equação I da equação II para eliminarmos o período de repetição.

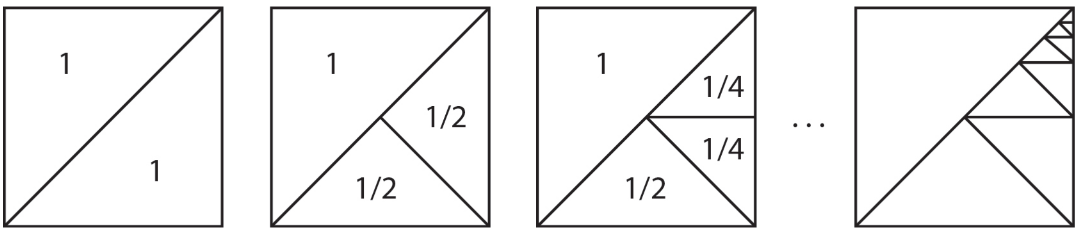
$$9x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Este artifício aritmético é bastante interessante, mas já esconde uma generalização acerca do cancelamento de 'infinitas casas decimais iguais' quando subtraídas. No entanto, é verdade que $\frac{2}{3}$ é a fração irredutível dessa dízima periódica, mas por motivos abordados em estudos posteriores ao fundamental. Na verdade, de fato

$$x = \frac{2}{3} = 0{,}666666\ldots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \ldots + \frac{6}{10^n} + \ldots$$

Isto significa que $\frac{2}{3}$ é o resultado da soma dos termos da sequência $(a_n)\ n \geq 1$.

Veja agora o seguinte exemplo de uma construção geométrica:



Partindo de um quadrado de área igual a 2, traçamos uma de suas diagonais, que o divide ao meio, resultando em dois triângulos, cada um com área igual a 1, como na primeira figura; em seguida dividimos um desses triângulos ao meio, como se vê na segunda figura, depois um desses triângulos menores ao meio como ilustra a terceira figura, e assim por diante, indefinidamente. O resultado é uma divisão do quadrado numa infinidade de triângulos, cada um com área igual à metade da área do triângulo anterior, representado na quarta figura.

Nessa construção geométrica em sequência, a medida da área do quadrado original se exprime como soma infinita das medidas das áreas dos triângulos subsequentes obtidos no processo. Assim, de forma intuitiva e visual, sem preocupação com maiores formalismos, é fácil ver que a soma dessas áreas todas é igual a 2, pois a sequência de triângulos aparenta ficar contida no quadrado original.

E essa soma de infinitas parcelas pode ser representada por:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Isto significa que 2 é o resultado da soma dos termos da sequência $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\geq 0}$. De fato, veremos que isto é verdade.

Vimos dois exemplos, que podem ser trabalhados sem grandes formalismos já na educação básica, e que sugerem ser possível a generalização da adição de finitos termos para a adição de infinitos termos. Entretanto, sabemos que apenas dois exemplos não são suficientes para garantir tal generalização. Além disso, notamos que os dois exemplos retratam casos muito específicos do que chamamos de séries geométricas, que são a soma de sequências numéricas, cujos termos diferem entre si por uma razão r e, nestes casos em questão, ainda temos que $|r| < 1$.

Voltemos à questão: Como somar um número após outro, e assim por diante, indefinidamente? Num primeiro contato com séries infinitas, a ideia ingênua e não crítica de soma infinita não costuma perturbar o estudante e os mais desavisados. Porém, encarar somas infinitas da mesma forma que somas finitas acaba levando a dificuldades sérias, ou mesmo a conclusões irreconciliáveis, como bem ilustra um exemplo simples, dado pela chamada *série de Grandi*, em homenagem ao matemático, filósofo e sacerdote italiano Luigi Guido Grandi, que em 1703 realizou trabalhos de destaque sobre esta série.

Vejamos o que acontece com a soma de infinitos termos da sequência $((-1)^n)_{n\geq 0}$:

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

Esta série parece ter soma $S = 0$ ou $S = 1$, dependendo de como a encaramos:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$$

ou

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$$

E veja ainda o que poderíamos fazer:

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1 - S$$

Daí, $S = 1 - S \Rightarrow 2S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2}$. Afinal, $S = 0$, $S = 1$ ou $S = \frac{1}{2}$?

Isto pode ocorrer? Uma soma com valores distintos? De fato, isto não pode ocorrer. Na verdade, esta série é divergente. Analogamente ao comportamento das sequências, uma série converge quando existe sua soma (valor único real), caso contrário, dizemos que a série diverge.

Contexto sócio histórico epistemológico

Segundo Ávila (1996b), uma das grandes dificuldades com somas infinitas é de natureza prática, pois cada parcela somada exige certo tempo e, mesmo que consigamos somar cada parcela num tempo muito pequeno, a soma de parcela após parcela, indefinidamente, acabará exigindo um tempo arbitrariamente longo, uma impossibilidade, já que nossas vidas são finitas. Outra complicação séria é a própria concepção de adição, que significa somar números, uns após outros, sucessivamente, ideia inicialmente concebida para uma quantidade finita de parcelas a somar. Ao aplicá-la a somas infinitas, por mais que somemos, sempre haverá parcelas a somar; portanto, o processo de somas sucessivas não termina e, em consequência, não serve para definir a soma de uma infinidade de números.

Os matemáticos têm consciência das dificuldades com as séries infinitas há mais de dois milênios. A primeira soma infinita que se tem conhecimento na Matemática ocorreu num trabalho de Arquimedes, no qual ele calcula a área de um segmento de parábola com soma de uma série geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

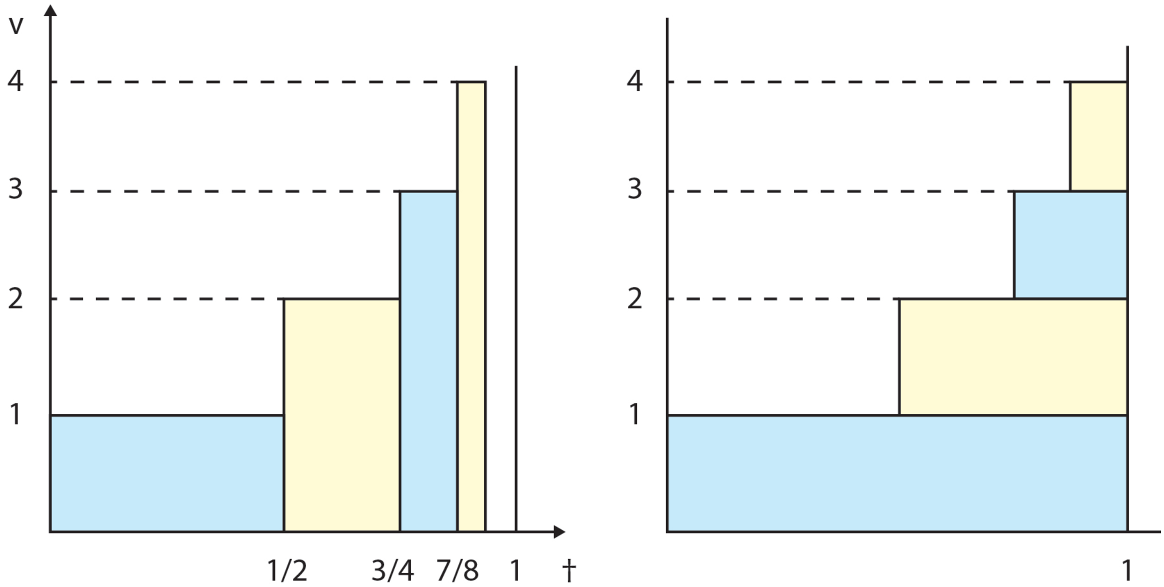
Ainda segundo Ávila (1996a), depois dessa ocorrência no trabalho de Arquimedes, as séries infinitas só voltaram a aparecer na Matemática cerca de 1500 anos mais tarde, no século XIV. Nessa época, um grupo de matemáticos na Universidade de Oxford estudava a cinemática, ou fenômeno do movimento e, ao que parece, foi esse estudo que levou à reconsideração das séries infinitas.

Pesquisadores de outros centros também desenvolviam estudos nessa direção; em particular, na Universidade de Paris, destaca-se Nicole Oresme (1325-1382), intelectual de vários ramos do conhecimento, como Filosofia, Matemática, Astronomia, Ciências Físicas e Naturais. Além de professor universitário, Oresme foi bispo de Liseux e conselheiro do rei, principalmente na área de finanças públicas; nessa função, revelou-se um homem de larga visão, recomendando medidas monetárias que tiveram grande sucesso na prática. Oresme contribuiu com o grupo de pesquisadores de Oxford no estudo de várias séries estudadas nessa época, entre elas a série $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$

Esta série foi considerada, por volta de 1350, por Richard Swineshead, um grande matemático de Oxford, autor do *"Livro dos Cálculos" (Liber Calculationum)*, um conjunto de 16 tratados que lhe valeram o apelido de "O Calculador". Swineshead mostrou a soma da série ser $S = 2$ utilizando um longo argumento verbal velocidade x tempo, ao qual mais tarde Oresme deu uma interpretação geométrica interessante e bem mais simples.

O raciocínio de Swineshead surge a propósito de um movimento que se desenvolve durante o intervalo de tempo [0, 1] da seguinte maneira: na primeira metade do intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, a velocidade permanece constante e igual a 1; dobra de valor no segundo subintervalo (de duração 1/4), triplica no terceiro subintervalo (de duração 1/8), quadruplica no quarto subintervalo (de duração 1/16), e assim sucessivamente.

Oresme deu uma interpretação geométrica a esta ideia, traduzida na imagem a seguir.



Fonte: Ávila (1996a, p. 3)

Confira na figura à esquerda onde o tempo é representado no eixo horizontal e as velocidades no eixo vertical. Como se vê, a soma da série construída por Swineshead, $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots\frac{n}{2^n}+\ldots$ é a soma dos produtos da velocidade pelo tempo em cada um dos sucessivos subintervalos de tempo e representa o espaço total percorrido pelo móvel. Swineshead concluiu com seu argumento que $S = 2$. Observe, na figura à esquerda, que essa soma é igual à área da figura formada com uma infinidade de retângulos verticais.

Na figura da direita, Oresme dá nova interpretação à ideia de Swineshead, considerando a soma das áreas de uma infinidade de retângulos com mesma altura e comprimentos cada vez menores à razão de $\frac{1}{2}$, $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2$ (resultado já visto anteriormente). Na verdade, o raciocínio de Swineshead, combinado com a interpretação geométrica de Oresme, se traduz simplesmente no seguinte: a soma das áreas desses retângulos verticais (representados na figura à esquerda) é igual à soma das áreas dos retângulos horizontais (representados na figura à direita). Ora, isso é o mesmo que substituir o movimento original por uma sucessão infinita de movimentos, todos com velocidade igual a 1. Esta interpretação dada por Oresme facilita bastante a interpretação pretendida por Swineshead.

Não se esqueçam de que isto se deu no século XIV. Hoje em dia, é possível demonstrar a soma de Swineshead utilizando a notação de somatório adotada para séries $\sum_1^\infty a_n$.

Assim, temos:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots\frac{n}{2^n}+\ldots=\sum_1^\infty\frac{n}{2^n}\ \text{(na figura da esquerda)}$$

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_0^\infty\frac{1}{2^n}\ \text{(na figura da direita)}$$

Vamos mostrar que as duas séries têm mesmo valor. Observe que utilizamos artifícios algébricos e que os termos iniciais fazem diferença no somatório, por isso, como $2=\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}=1+\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$, então $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}=1$. Daí, para provar que a soma de Swineshead é também 2, fazemos o seguinte:

$$S=\sum_1^\infty \frac{n}{2^n}=\sum_1^\infty \frac{1+(n-1)}{2^n}=\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}+\sum_1^\infty \frac{n-1}{2^n}=1+0+\sum_2^\infty \frac{n-1}{2^n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_2^\infty 2\left(\frac{n-1}{2^n}\right)=1+\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{n-1}{2^{n-1}}=1+\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{k}{2^k}=1+\frac{1}{2}S$$

Logo, $S-\frac{1}{2}S=1 \Rightarrow \frac{1}{2}S=1 \Rightarrow S=2$. E os dois somatórios são iguais a 2.

Um dos trabalhos mais notáveis de Oresme sobre as séries infinitas está ligado à série denominada harmônica, $\sum_1^\infty \frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

Observe que os termos da série harmônica estão decrescendo para zero, como acontece no caso da série geométrica vista anteriormente, mas será que esta série também converge? À primeira vista parece que sim. Mas vejamos o argumento usado por Oresme, na notação atual:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots$$

$$>1+\frac{1}{2}+2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8}+8.\frac{1}{16}+\ldots>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots=\frac{1}{n}\sum_1^\infty n\to\infty$$

Logo, a série harmônica diverge, apesar de seus termos, a partir do segundo, serem todos menores que 1. A demonstração de que a série harmônica diverge, feita pela primeira vez por Oresme, mostra o papel decisivo do raciocínio lógico. O trabalho com a série harmônica aparece na principal obra publicada de Oresme, *De configurationibus*, a primeira a apresentar gráficos de velocidade.

Duzentos anos depois, Simon Stevin (1548--1620) avançou a matemática providenciando uma simbologia que facilita a compreensão. Ele entendeu os conceitos físicos e matemáticos da aceleração devido à gravidade. Somou séries e analisou sequências, mas parou um pouco antes de definir ou explicar limites e convergência. O contemporâneo de Stevin, Galileu (1564--1642), aplicou matemática às ciências, especialmente à astronomia. Baseado no estudo de Stevin sobre Arquimedes, Galileu melhorou a compreensão de hidrostática, desenvolveu os resultados para o movimento em queda livre sob a ação da gravidade e os movimentos dos planetas. Até sugeriu que poderia existir uma terceira propriedade entre o finito e o infinito. Galileu deixou a seus sucessores conselhos e desafios, como nesta citação:

> Infinitos e indivisíveis transcendem nosso entendimento finito, o primeiro por conta de sua magnitude, o segundo pela sua pequenez; imagine o que eles são quando combinados.

A ideia contida na citação dá a dimensão da complexidade e das dificuldades de compreensão das noções de infinito e de infinitésimos. Que, aliás, remontam à Grécia Antiga.

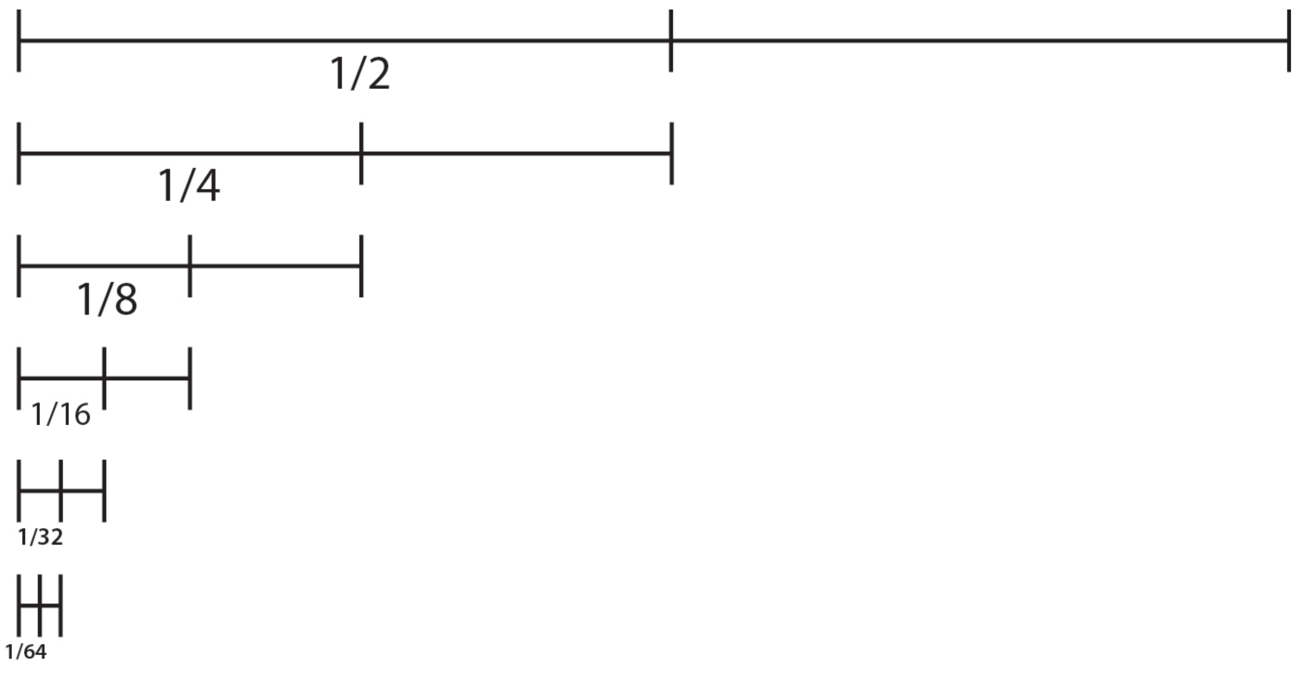
Um pouco sobre as ideias de infinito e de infinitésimos

Os debates acerca do infinito são anteriores a Platão e Aristóteles e foram uma constante nas escolas gregas. Foi durante o séc. V a.c., que Zenão de Elea (490-425 a.c) mostrou que se o conceito de contínuo e de infinita divisão for aplicado ao movimento de qualquer corpo, então o movimento não existe. Zenão expôs a sua argumentação com base em quatro situações hipotéticas, que ficaram conhecidas como os **paradoxos de Zenão**.

Os paradoxos de Zenão contêm argumentos dialeticamente utilizados para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade, divisibilidade e movimento. Zenão procurava, partindo das premissas de seus oponentes, reduzi-las ao absurdo e, com isso, sustentar o ponto de fé dos eleáticos e de seu mestre Parmênides, que ia contra as ideias pitagóricas.

No primeiro paradoxo, a Dicotomia, Zenão colocou um objeto se movendo, uma distância finita entre dois pontos fixos, mas em uma série infinita de intervalos. Pode ser exemplificado assim:

Suponha que um objeto se desloca do ponto A ao ponto B. Antes de atingir o ponto B, o objeto deverá passar pela metade do caminho entre A e B, o ponto A_1; antes de atingir o ponto A_1 o objeto deve atingir a metade da distância entre A e A_1, o ponto A_2, e assim por diante (como representado na figura a seguir).



Até quando esta divisão pode ser feita? Parece que indefinidamente. E isso é verdade para qualquer distância entre dois pontos fixos. Dessa forma, entre dois pontos há uma infinidade de subdivisões, ou seja, infinitas distâncias e, portanto, se deslocar de um ponto a outro envolve percorrer infinitas distâncias. Mas uma tarefa que envolve realizar infinitas ações é uma tarefa impossível. Logo, deslocar-se de um ponto a outro é uma tarefa impossível, o que mostra a impossibilidade do movimento. Assim, a conclusão surpreendente de Zenão foi de que o movimento era impossível!

Aristóteles (384-322 a.C.) tentou refutar os paradoxos de Zenão com argumentos filosóficos. Os outros paradoxos de Zenão contêm a mesma ideia, e o que ficou mais famoso foi o atualmente conhecido (ou adaptado) por paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

Segundo Caraça (2002, p. 70-71), os argumentos de Zenão visavam questionar, em última instância, a escola Pitagórica. A principal doutrina dessa escola era a existência de uma ordenação matemática do Cosmos, nas palavras de Filolao, discípulo da escola: "todas as coisas têm um números e nada se pode conceber sem um número". Dessa ideia grandiosa os pitagóricos apresentavam uma enormidade de justificações: da geometria à música. O próprio brilhantismo dos triunfos da escola pitagórica foi seu algoz: da sua doutrina principal sobre a existência de uma ordenação matemática do Cosmos – todas as coisas têm um número – fez-se outra mais grave e difícil de verificar – as coisas são números (o que os levaria a procurar uma estrutura da matéria como a estrutura numérica, passível de verificação). Tal foi a argumentação dos pitagóricos a esse respeito: a matéria era formada de corpúsculos cósmicos (denominados mônadas) de extensão não nula, embora pequena, que reunidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada uma das mônadas era assimilada à unidade numérica e, assim, corpos se formavam por arranjos de mônadas como os números se formam por quantidade e arranjo de unidades. A mônada era a unidade material, uma "unidade dotada de posição", muito pequena, mas com certa extensão: era um "ponto extenso". Daí porque os paradoxos de Zenão vieram para mostrar a inconsistência desse pensamento, talvez querendo ilustrar o pouco que se sabia sobre tempo, espaço e tudo aquilo que pode ser contado ou medido.

Aristóteles comentou acerca disto que a doutrina pitagórica tinha dois lados: um positivo e outro negativo. Positivo era a ordenação matemática do Cosmos; negativo era atribuir aos números tudo aquilo que está fora de sua propriedade fundamental de traduzir relações de quantidade. E a escola pitagórica acabou sendo abalada no que lhe era mais precioso – a ordenação matemática do Cosmos – e exatamente por meio do Teorema de Pitágoras: a descoberta da incomensurabilidade, detectada na impossibilidade de encontrar a razão entre as medidas do lado e da hipotenusa de um triângulo retângulo. Foi um golpe à afirmação de que "os princípios dos números são os elementos de todos os seres", ou ainda, "O Céu inteiro é harmonia e número". Como então não conseguir responder a uma coisa 'tão simples' como a razão entre estas duas medidas?

Zenão de Eléia (aproximadamente 464 a.C), que fora discípulo de Parmênides, este último dissidente da escola pitagórica, tenta mostrar que aceitando a tese da escola pitagórica – que admitia a existência das mônadas – e a de Heráclito –, que afirmava que só existe o movimento – era possível provar que o movimento é impensável, formulando o seguinte raciocínio:

> "Se existe o menor segmento que mede uma mônada, então podemos tomar dois desses segmentos, apoiados numa mesma reta e muito próximos um do outro; tão próximo quanto se queira, porém que não se toquem e deixe entre si um pequeno intervalo. Ora, como o segmento que mede uma mônada é o menor que existe, então nesse intervalo cabe um deles (pelo menos) e não esgota o intervalo todo, porque ele é o menor; e deixa então dois outros intervalos bem pequeninos, nos quais certamente caberão dois segmentos que medem uma mônada cada (pois a mônada é o menor segmento); neste caso, essas duas mônadas intercaladas vão deixar quatro intervalos, nos quais caberão quatro mônadas, que pelo fato de não esgotarem cada intervalo deixarão a seguir oito intervalos... e assim por diante... " (PIERRO NETO, 1995)

Os paradoxos de Zenão punham também em dúvida a ideia de não existência de números irracionais, prenunciando a noção de incomensurabilidade, só bem resolvida por Cantor, cerca de 1500 anos depois, embora não por seus pares à época. De fato, depois da época de Zenão, a matemática não progrediu como se esperava. Nenhum dos problemas por ele propostos foi resolvido na Antiguidade. Somente muitos séculos mais tarde uma aplicação cuidadosa do conceito de limite resolveria as questões levantadas pelos seus paradoxos.

Já Arquimedes (287-212 a.C.), em suas demonstrações rigorosas das fórmulas para certas áreas e volumes, encontrou várias séries infinitas. Não possuindo o conceito de limite propriamente dito, Arquimedes inventou argumentos muito engenhosos chamados de redução ao absurdo duplo que, na verdade, incorporam alguns detalhes técnicos do que agora chamamos de limites.

Por vários séculos, as noções de limite foram muito confusas e mesmo contraditórias, com ideias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito (números infinitamente grandes e infinitamente pequenos e outras entidades matemáticas) e com intuição geométrica subjetiva e indefinida.

No início do Livro I do *Principia*, Newton (1642–1727) tentou dar uma formulação precisa do conceito de limite: quantidades e as razões de quantidades, as quais em qualquer tempo finito convergem continuamente para igualdade, e antes do final daquele tempo se aproximam entre si por qualquer dada diferença, tornam-se iguais no final.

Mas foi Georg Cantor (1845–1918) o matemático que mais contribuiu para a evolução do conceito de infinito, através do seu trabalho no âmbito da teoria dos conjuntos. Fundamentalmente, a genialidade de Cantor permitiu-lhe sistematizar o estudo do infinito, elaborando uma teoria que viria a constituir-se como um dos grandes pilares da matemática.

Pode-se dizer que o termo limite, no sentido moderno, resultou do iluminismo na Europa no final do século XVIII e início do século XIX, e a definição moderna tem menos de 150 anos de idade. Até então, existiram apenas raras ocasiões nas quais a ideia de limite foi usada de forma rigorosa e corretamente.

Já em relação às séries, apesar de conterem em sua essência as noções de infinito e de infinitésimos, houve avanços anteriores, pois até a metade do século XVII, matemáticos já tinham desenvolvido e analisado séries de números. À medida que o desenvolvimento do cálculo foi tomando corpo, o progresso no entendimento de séries infinitas teve um papel preponderante no desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Pascal (1623–1662) era fascinado pelos resultados impressionantes acerca das somas infinitas, embora tivesse um confuso entendimento do seu conceito. Para ele, o infinito era alguma coisa para admirar, mas impossível de entender. Pascal preferiu a abordagem geométrica de St. Vincent (1584–1667) para séries e sua convergência em vez da nova abordagem analítica de Fermat (1601–1665) e de Descartes (1596–1650) que ele não conseguia visualizar ou entender. Apesar dessa limitação, tanto Pascal, quanto Descartes e Fermat usaram cálculos com séries nas contribuições aos fundamentos do cálculo diferencial e integral.

Como devem ter percebido, relatamos aqui questões envolvendo conceitos de complexidade filosófica e epistemológica que demandaram muitos séculos para serem destrinchadas convenientemente, de forma correta e aceita pela comunidade matemática. Acredito ser importante ter minimamente uma noção da origem, bem como dos percalços na evolução dessas ideias e conceitos, que são fundamentais na matemática. Conhecer as dificuldades epistemológicas na evolução histórica de um conceito ajuda a compreender o seu significado, além de munir o futuro professor de argumentos consistentes para sua prática pedagógica.

Introdução

Uma série numérica é a soma dos termos de uma sequência numérica.

A notação adotada usa a letra grega sigma maiúscula $\sum$:

$\sum_1^n a_k$ para somas com número finito de termos

$\sum_1^\infty a_n$ para somas com número infinito de termos

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

Uma moça seria contratada como balconista para trabalhar de segunda a sábado nas duas últimas semanas que antecederiam o Natal. O patrão ofereceu R$ 1,00 pelo primeiro dia de trabalho e nos dias seguintes o dobro do que ela recebera no dia anterior. A moça, achando um absurdo essa proposta, recusou o trabalho. Se ela tivesse aceitado a oferta, quanto teria recebido pelos 12 dias de trabalho?

Na tabela, a_i é o valor a receber, em reais, pelo trabalho do dia i, $1 \leq i \leq 12$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_i	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Logo, a soma das 12 parcelas é:

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024 + 2048 = 4095$ reais.

Provavelmente a moça não sabia matemática, pois se fizesse os cálculos talvez aceitasse o emprego temporário.

Exemplo 2

(simulado Unicamp 2011) Considere a sequência de figuras, cada uma delas formada por um conjunto de palitos de fósforos.

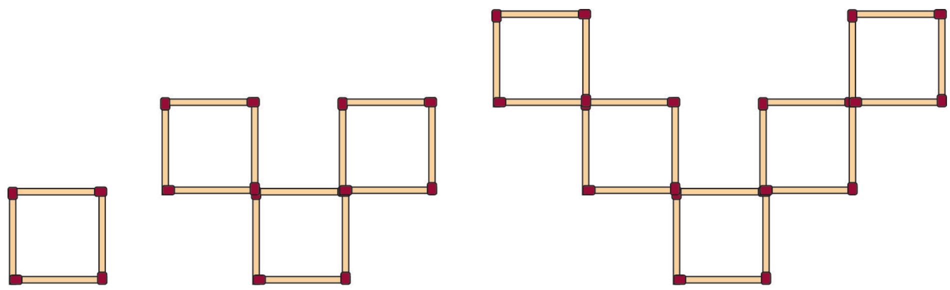


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Supondo que esta sequência continue com a mesma formação, quantos palitos de fósforo serão necessários para exibir as primeiras 50 figuras da sucessão?

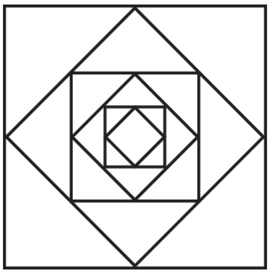
Primeiro temos que escrever o termo geral p_n da sequência que representa a quantidade de palitos da figura na posição n. Então, $p_n = 4 \,.\, (2n - 1)$. Agora temos que encontrar a soma $S = \sum_1^{50} p_n = \sum_1^{50} 4(2n-1)$. Observe que esta soma é o quádruplo da soma dos 50 primeiros números ímpares. Já vimos, seguindo o exemplo de Gauss, que podemos somar da seguinte maneira:

$$S = \frac{(p_1 + p_{50}).50}{2} = \frac{(4+396)50}{2} = 400.25 = 10.000 \text{ palitos.}$$

Nesses dois exemplos vimos a soma de uma quantidade finita de termos. Vejamos o próximo exemplo em que temos uma soma de infinitos termos, que costumamos simplificar chamando de série infinita.

Exemplo 3

Considere a seguinte sequência de construção geométrica: partindo de um quadrado, marque os pontos médios de seu lado e ligue esses pontos, formando outro quadrado inscrito no anterior; prossiga o processo repetindo o procedimento sucessivas vezes, conforme indica a figura a seguir. A seguir, supondo que o quadrado original tem lado medindo 1 unidade, encontre a soma dos perímetros e das áreas da sequência de quadrados assim obtida.



Vamos escrever a sequência da medida dos lados dos quadrados:

$$l_1 = 1;\ l_2 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ l_3 = \frac{1}{2},\ l_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ l_5 = \frac{1}{4},\ l_6 = \frac{1}{4\sqrt{2}},\ l_7 = \frac{1}{8},\ l_8 = \frac{1}{8\sqrt{2}},\ l_9 = \frac{1}{16}, \ldots$$

Verificamos que as medidas dos lados formam uma sequência, que é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, os perímetros formam uma progressão geométrica de mesma razão, mas com primeiro termo $p_1 = 4l_1 = 4$. Recordando que a soma de uma progressão geométrica $S = \frac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo e q a razão, temos que a soma dos perímetros desta sequência de quadrados é:

$$S_p = \frac{4}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1} = 8 + 4\sqrt{2}$$

Agora é com você: verifique que a sequência formada pelas áreas desses quadrados também é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, cuja soma é $S_A = 2$.

Você sabe explicar porque a soma das áreas é menor que a soma dos perímetros desta sequência de quadrados?

Séries infinitas

O conceito de **série**, ou ainda, de **série infinita**, surgiu da tentativa de generalizar o conceito de soma para uma sequência de infinitos termos.

Esta generalização, longe de acontecer de forma impune, traz diversas dificuldades:

- Nem sempre é possível definir um valor resultante da soma para uma série;
- Nem sempre é possível trocar a ordem ou reagrupar os termos da série;
- Algumas séries têm soma infinita.

A série $\sum_0^\infty (-1)^n$ que vimos na Contextualização exemplifica bem os dois primeiros itens dessas dificuldades. Por outro lado, a série $\sum_1^\infty n$, que é a soma de todos os números naturais, obviamente não dá um número real, sua soma é infinita.

Observe que quando dizemos séries infinitas estamos nos referindo a uma soma de infinitos termos e, embora essa ideia seja bastante antiga, uma formulação matemática rigorosa só veio surgir no século XVIII, com o advento da análise real, que denota e define uma série de termos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ da seguinte forma:

$$\sum_1^\infty a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

com $S_n = \sum_1^n a_k$ sendo os termos de uma nova sequência, chamada sequência das somas parciais da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Euler (1707--1783) usou frequentemente séries infinitas em seu trabalho para desenvolver novos métodos ou para modelar problemas aplicados. Estabeleceu a notação de somatório que usamos hoje, usando sigma para o símbolo da soma.

D'Alembert (1717--1783) desenvolveu o teste da razão para determinar a convergência de muitas séries. Através do trabalho de D'Alembert, a natureza da pesquisa sobre séries estava mudando de cálculos práticos para uma fundamentação mais teórica.

Lagrange (1736--1813) estendeu o trabalho de Euler nas equações de movimento e o entendimento da energia potencial, sendo que seu maior trabalho foi na teoria e aplicação do cálculo: ele sentiu que a série de Taylor desempenhava um papel fundamental no entendimento do cálculo, embora ainda evitasse o limite e as propriedades de convergência de sequências e séries.

Bolzano (1781-1848) confrontou este assunto, apontando que a convergência era importante para entender e usar séries. Tentou explicar convergência associando-a com a ideia de subconjuntos limitados. Bolzano acreditava no método de Lagrange para usar séries de Taylor como a base para o cálculo.

Fourier (1768--1830) contribuiu para o estudo e cálculo da difusão de calor e solução de equações diferenciais. Sua obra, *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria Analítica do Calor), de 1822, contém uso extenso de séries consistindo de funções trigonométricas que hoje chamamos de séries de Fourier. Apesar disso, contribuiu pouco para a teoria destas séries, que já eram conhecidas, muito antes, por Euler, Daniel Bernoulli e Lagrange.

Dessa forma, a comunidade matemática foi motivada a estabelecer fundamentos mais teóricos para as ideias de limite e convergência de sequências e séries. Cauchy (1789-1857) foi o primeiro a definir por completo as ideias de convergência e convergência absoluta de séries infinitas, trabalho realizado em conjunto com o desenvolvimento de uma análise rigorosa do cálculo. Também foi o primeiro a desenvolver uma teoria sistemática para números complexos e a transformada de Fourier para equações diferenciais. Contudo, Cauchy e seu colega Niels Henrik Abel (1802--1829) ignoraram a utilidade das séries divergentes. Abel escreveu em 1828 "séries divergentes são a invenção do diabo, e é uma vergonha basear nelas qualquer demonstração".

Runge (1856--1927) desenvolveu o método de resolução baseado em sequências para solucionar numericamente equações diferenciais junto com M. W. Kutta (1867--1944). Sequências e séries tornaram-se, então, ferramentas padrão para aproximar funções e calcular resultados em computação numérica.

O matemático indiano autodidata Srinivasa Ramanujan (1887--1920) usou sequências e séries de potências para desenvolver resultados em teoria de números. O trabalho de Ramanujan era teórico e produziu numerosos resultados importantes usados por matemáticos no século 20. Seus colaboradores britânicos Godfrey Harold Hardy (1877--1947) e John Littlewood (1885--1977) usaram os conhecimentos de Ramanujan sobre séries para produzir avanços importantes em teoria de números e estenderam a utilidade das séries para muitas áreas da matemática.

Referências: http://www.mat.ufmg.br/calculoII/h1sese.html Acesso em: 20 jan. 2015

Séries e Somas Parciais

Em primeiro lugar, séries numéricas tratam da adição de números reais e queremos preservar as propriedades dessa operação. Então, para contornar a dificuldade de estender as propriedades da adição de um número finito para um número infinito de termos, restringimo-nos a somas parciais da série, com um número crescente, mas finito, de termos, formando uma sequência, como se segue.

Considere a série $\sum_1^{\infty} a_n$ e sejam as somas parciais:

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, e assim sucessivamente, $S_n = \sum_1^n a_k$.

A sequência de números reais, assim construída, é chamada de sequência das somas parciais $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Com isso, para todos os termos dessa sequência garantimos as propriedades das operações com números reais. Agora o mais importante:

Se a sequência de somas parciais tem um limite S quando $n \to \infty$, dizemos que a série **converge** para a soma S e escrevemos:

$$\sum_1^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Caso contrário, dizemos que a série **diverge**.

Algumas séries convergentes

Exemplo 4

Considere a série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

Vamos encontrar a sequência de somas parciais dessa série, já procurando descrever S_n em função de n, para poder calcular o seu limite.

$$S_1 = 1 = 2 - 1$$

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=2-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Assim, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=2-0=2$.

Lembre-se de que já vimos que $\frac{1}{2^n}\to 0$, quando $n \to \infty$, na unidade anterior e também na Contextualização desta unidade. Entretanto, o tópico seguinte vem dirimir qualquer dúvida que ainda houver quanto a esse limite.

Série geométrica

Uma série geométrica é aquela em que cada termo é obtido do termo precedente multiplicando-o por um mesmo número r, denominado razão. Então, se a e r são números fixos não nulos, uma série geométrica é da forma:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_1^\infty ar^{n-1}$$

A razão r pode ser **positiva**, como no caso do exemplo 4, em que $r = \frac{1}{2}$.

E a razão pode ser **negativa**, como neste caso:

$$\sum_0^\infty \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 9 - 3 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}, \ldots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \ldots$$

A convergência de séries geométricas foi um dos poucos processos infinitos aos quais os matemáticos estavam relativamente seguros antes do Cálculo. Vejamos porquê.

Se $|r| \neq 1$, podemos determinar a convergência ou divergência de uma série geométrica da seguinte maneira, começando pelo termo geral das somas parciais:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n (1 - r) = a (1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}, \; r \neq 1$$

Se $|r| < 1$, então $r^n \to 0$, quando $n \to \infty$ e $S_n \to \frac{a}{1-r}$

Se $|r| > 1$, então $r^n \to \infty$, quando $n \to \infty$ e a série diverge.

Se $r = 1$, $S_n = a + a.\,1 + a. + a.\,1 + \ldots + a.\,1 = n.\,a \to \infty$, quando $n \to \infty$ e a série diverge.

Se $r = -1$, a série diverge, pois S_n alterna entre 0 e 1.

Resumindo:

A série geométrica

$$\boldsymbol{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots = \sum_1^\infty ar^{n-1}}$$

Converge para a soma $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{a}}{1 - \boldsymbol{r}}$ se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$

Exemplo 5

Nas dízimas periódicas a parte do período é uma série geométrica, como esta:

$$2,34343434\ldots = 2 + \frac{34}{10^2} + \frac{34}{10^4} + \frac{34}{10^6} + \ldots = 2 + \sum_1^{\infty} \frac{34}{10^{2n}} = 2 + 34\sum_1^{\infty} \frac{1}{10^{2n}}$$

Como a série $\sum_1^{\infty} \frac{1}{10^{2n}}$ é geométrica, com primeiro termo $a = \frac{1}{100}$ e razão $r = \frac{1}{100} < 1$, temos que

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{10^{2n}} \Rightarrow \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{100}}{\frac{100-1}{100}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{100}}{\frac{99}{100}} \Rightarrow \frac{1}{100} \cdot \frac{100}{99} \Rightarrow \frac{1}{99}$$

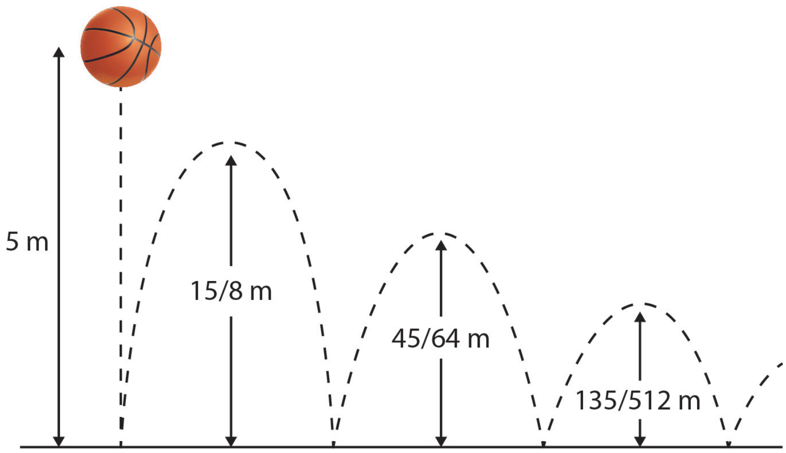
Fórmula da soma de uma progressão geométrica.

Daí: $2,34343434\ldots = 2 + 34\left(\frac{1}{99}\right) = 2 + \frac{34}{99} = \frac{232}{99}$

Exemplo 6

Ao se largar uma bola de uma altura de 5 m sobre uma superfície plana, observa-se que, devido a seu peso, a cada choque com o solo, ela recupera apenas 3/8 da altura anterior. Admitindo-se que o deslocamento da bola ocorra somente na direção vertical, qual é o espaço total percorrido pela bola pulando para cima e para baixo?

Observe a representação da situação na figura a seguir:



A soma das distâncias no sentido vertical percorridas pela bola dá uma série geométrica:

$$5 + 2.5.\frac{3}{8} + 2.5.\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 2.5.\left(\frac{3}{8}\right)^3 + \ldots = 5 + \sum_1^{n} 10.\left(\frac{3}{8}\right)^n = 5 + 10\sum_1^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

Como a série $\sum_1^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n$ é geométrica, cujo primeiro termo é $a = \frac{3}{8}$ e razão $r = \frac{3}{8} < 1$

$$5 + 10\sum_1^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 5 + 10.\left(\frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}}\right) = 5 + 10.\frac{3}{5} = 5 + 6 = 11m.$$

Exemplo 7

Uma série não geométrica, mas telescópica.

Chama-se série telescópica toda série cujos termos a_n possam ser escritos da forma: $a_n = b_n - b_{n+1}$, em que b_n é uma série geométrica.

Um exemplo de série telescópica é $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$.

Observe que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Então:

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \frac{1}{n.(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Logo, $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$, uma vez que $\frac{1}{n} \to 0$, quando $n \to \infty$.

A série então converge e sua soma é $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$

Algumas séries divergentes

Exemplo 8

A série $\sum_0^\infty (-1)^n$ converge ou diverge?

Expandindo tal série temos: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Já vimos que agrupar da forma $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$ é uma estratégia que só funciona para um número finito de termos. Então vamos escrever a sequência das somas parciais: $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0$, ...

Logo, essa sequência é $S_n = \begin{cases} 1, n \text{ ímpar} \\ 0, n \text{ par} \end{cases}$ que não converge, pois admite duas subsequências com limites distintos. Portanto, a série $\sum_0^\infty (-1)^n$ diverge.

Exemplo 9

Somas parciais não limitadas

a) A série $\sum_1^\infty n^2$ diverge, pois sua sequência de somas parciais (S_n) cresce indefinidamente. Vejamos:

$$S_n = 1 + 4 + 9 + 16 + ...+ n^2 > n^2 \text{ e, portanto, } \lim_{n\to\infty} S_n \geq \lim_{n\to\infty} n^2 \to \infty$$

b) A série $\sum_1^\infty \frac{n+1}{n}$ diverge, pois as somas parciais ultrapassam qualquer número, pois cada parcela é maior que 1, logo, a soma de n parcelas será maior do que n.

$$S_n = \frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\ldots+\frac{n+1}{n} > 1+1+1+1+\ldots+1 = n \to \infty$$

Exemplo 10

A série harmônica $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ é divergente, conforme vimos na Contextualização a demonstração dada por Oresme. É uma série importante e o nome *harmônica* é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Teorema 1

Se $\sum_1^\infty a_n$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Seja $S = \sum_1^\infty a_n$. Daí $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Mas $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, então temos que $a_n = S_n - S_{n-1}$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

Desse teorema resulta um importante critério de divergência de uma série.

Teste do enésimo termo para divergência

Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ou se $\lim_{n\to\infty} a_n$ não existe, então $\sum_1^\infty a_n$ diverge.

Exemplo 11

Aplicando o teste do enésimo termo.

a) $\sum_1^\infty n^2$ diverge, pois $\lim_{n\to\infty} n^2 \to \infty$

b) $\sum_1^\infty (-2)^n$ diverge, pois não existe $\lim_{n\to\infty} (-2)^n$

c) $\sum_1^\infty \frac{n}{2n-3}$ diverge, pois $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-3} = \frac{1}{2} \neq 0$

Exemplo 12

Pode ocorrer de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ e a série divergir, com esta série:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\ldots\frac{1}{2^n}+\ldots=$$

$$=1+2.\frac{1}{2}+4.\frac{1}{4}+\ldots+2^n.\frac{1}{2^n}+\ldots=1+1+1+1+\ldots+1+\ldots$$

Esta série tem soma parcial $S_n = n \to \infty$, portanto diverge, apesar de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Teorema 2

Propriedades de Séries Convergentes

Se $\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ são convergentes com $\sum_1^\infty a_n = A$ e $\sum_1^\infty b_n = B$, então:

a) $\sum_1^\infty (a_n + b_n) = A + B$

b) $\sum_1^\infty (a_n - b_n) = A - B$

c) $\sum_1^\infty k.a_n = k.\sum_1^\infty a_n = k.A$, para qualquer constante k.

A demonstração é bastante elementar e você poderá tentar fazê-la.

Exemplo 13

Aplicando o teorema 2.

a) $\sum_1^\infty \frac{2^n-1}{6^n} = \sum_1^\infty \left(\frac{2^n}{6^n}-\frac{1}{6^n}\right) = \sum_1^\infty \left[\frac{2^n}{(2.3)^n}-\frac{1}{6^n}\right] = \sum_1^\infty \left(\frac{2^n}{2^n.3^n}-\frac{1}{6^n}\right) = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{6^n}\right) = \sum_1^\infty \frac{1}{3^n} - \sum_1^\infty \frac{1}{6^n} \Rightarrow$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

b) $\sum_1^\infty \frac{-2}{n.(n+1)} = -2\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = -2.1 = -2$

Atenção

1) Quando multiplicamos uma série divergente por uma constante $k \neq 0$, a série resultante é divergente, mas se $k = 0$, a série resultante é identicamente nula e, obviamente, convergente para zero.

2) Se $\sum_1^\infty a_n$ é convergente e $\sum_1^\infty b_n$ é divergente, então tanto $\sum_1^\infty (a_n + b_n)$ como $\sum_1^\infty (a_n - b_n)$ serão ambas divergentes.

Séries de termos não negativos

Neste tópico vamos focar apenas séries que não têm termos negativos. A questão sempre que nos interessa é se uma série converge e, caso afirmativo, qual sua soma. No caso de séries com termos não negativos a sequência de somas parciais é crescente, pois $S_{n+1} = S_n + a_n$ e $a_n \geq 0$. Então teremos:

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \ldots$$

Nesse caso, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente e só terá limite se for limitada superiormente, conforme vimos na unidade anterior. Portanto:

A série $\sum_1^\infty a_n$ converge se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada superiormente.

Este resultado é a base para os testes de convergência que veremos neste tópico.

O primeiro é teste da integral e, para isso, vamos antes relembrar que a integral de uma função positiva, em um determinado intervalo, é área sob a curva delimitada por este intervalo. Além disso, pela soma de Riemann, essa área fica entre a soma das áreas dos retângulos circunscritos e dos retângulos inscritos, delimitados pelo mesmo intervalo.

Teorema 3

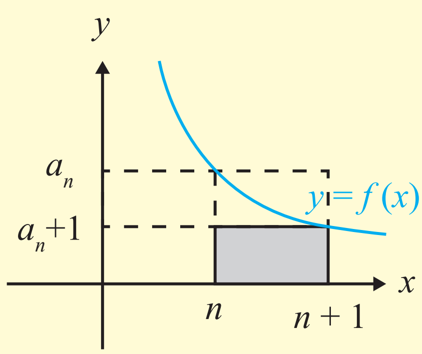
Teste da Integral

Seja $\sum_1^\infty a_n$ é uma série de termos positivos. Se f é uma função positiva que é contínua e decrescente no intervalo $[a, \infty)$ e tal que $a_n = f(n)$ para $n \geq a$, então $\sum_1^\infty a_n$ e $\int_1^\infty f(x)dx$ têm o mesmo comportamento: ou ambas convergem ou ambas divergem.

Demonstração

Se f é uma função contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1, \infty)$ tal que $f(n) = a_n$ temos:

$$a_{n+1} = f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) = a_n, \text{ se } x \in [n, n+1]$$



Integrando no intervalo $[n, n+1]$, como as bases dos respectivos retângulos de alturas a_{n+1} e a_n é 1, temos a comparação entre as áreas:

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le a_n$$

Efetuando a soma até N em todos os membros da inequação temos:

$$S_{N+1} = \sum_1^N a_{n+1} \le \int_1^N f(x)\,dx \le \sum_1^N a_n = S_N$$

Agora basta observar que, como $f(x) \ge 0$, isto implica que a integral imprópria ou converge ou tende para infinito, quando $N \to \infty$.

Se a integral diverge, a sequência monótona crescente das somas parciais não é limitada e, portanto, diverge, sendo a série divergente.

Se a integral converge, a sequência monótona crescente das somas parciais é limitada e, portanto, convergente, então a série converge.

Observação: No caso da integral convergir, o teste garante a convergência da série, mas não dá a soma da mesma.

Exemplo 14

Usando o teste da integral vamos analisar se as séries abaixo convergem ou divergem.

a) $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$

Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, que é uma função positiva, contínua e decrescente para $x \ge 1$. Então vamos analisar a $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}.dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-\frac{1}{2}}.dx = \lim_{N\to\infty}\left[2.x^{\frac{1}{2}}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[2.\left(N^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}\right)\right] = \lim_{N\to\infty} 2.\left(\sqrt{N}-1\right) \to \infty$$

Logo, como a integral diverge, então a série também diverge.

b) $\sum_1^\infty \frac{1}{n\sqrt{n}}$

Seja $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$, que é uma função positiva, contínua e decrescente para $x \ge 1$. Então vamos analisar a $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^1.x^{\frac{1}{2}}}.dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-\frac{3}{2}}.dx = \lim_{N\to\infty}\left[-2.x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^N \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\left[\frac{-2}{x^{\frac{1}{2}}}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{-2}{\sqrt{N}} - \left(\frac{-2}{1}\right)\right] = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{N}} + 2\right) = 2$$

Logo, como a integral converge, então a série também converge.

Definição 1

Uma **p-série**, ou série hiperarmônica, é uma série da forma:

$\sum_1^\infty \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$ onde p é um número real positivo.

Teorema 4

Teorema da p-série

Dada uma p-série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$, então vale:

a) A p-série converge se $p > 1$

b) A p-série diverge se $p \leq 1$

Demonstração: O teste da integral é ideal para mostrar se uma p-série converge ou diverge.

No caso de $p = 1$ vimos que a série diverge, pois é a série harmônica já tratada aqui.

Para $p > 0$ e $p \neq 1$ temos:

Seja $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$. A função f é positiva e contínua para todo $x \geq 1$. Além disso, podemos provar que f é decrescente neste intervalo. Para tal, vamos analisar o sinal da sua derivada. Como $f'(x) = -px^{(-p-1)} < 0$, pois $p > 0$ e $x \geq 1$. Estamos então nas condições de usar o teste da integral.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{x^{(1-p)}}{1-p} \right]_1^N = \frac{1}{1-p} . \lim_{N\to\infty} \left(N^{(1-p)} - 1 \right)$$

i) Se $p > 1$

$$\frac{1}{1-p} . \lim_{N\to\infty} \left(N^{(1-p)} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} . \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N^{(p-1)}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}$$

Então, como a integral converge, a série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ converge.

ii) $0 < p < 1$

$$\frac{1}{1-p} . \lim_{N\to\infty} \left(N^{(1-p)} - 1 \right) \to \infty$$

Então, como a integral diverge, a série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$ diverge.

Teorema 5

Teste da Comparação

Seja $\sum_1^\infty a_n$ uma série de termos não negativos. Então valem:

a) $\sum_1^\infty a_n$ converge se existe uma série convergente $\sum_1^\infty b_n$, com $a_n \leq b_n$ para todo $n > N$, para algum inteiro N.

b) $\sum_1^\infty a_n$ diverge se existe uma série divergente $\sum_1^\infty c_n$, com $a_n \geq c_n$ para todo $n > N$, para algum inteiro N.

Demonstração

Basta observar que, no caso (a), a sequência de somas parciais de $\sum_1^\infty a_n$ é limitada superiormente, portanto a série $\sum_1^\infty a_n$ converge e, no caso (b), essa sequência de somas parciais de $\sum_1^\infty a_n$ não é limitada superiormente, logo a série $\sum_1^\infty a_n$ diverge.

Teorema 6

Teste de Comparação pelo Limite

Suponha $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n > N$, para algum natural N. Então valem:

a) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = m$, $0 < m < \infty$, então $\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ têm o mesmo comportamento: ou ambas convergem ou ambas divergem.

b) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_1^\infty b_n$ converge, então $\sum_1^\infty a_n$ converge.

c) Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ e $\sum_1^\infty b_n$ diverge, então $\sum_1^\infty a_n$ diverge.

Observação: O teste de comparação é um método de comparação e o Teste de Comparação por Limite é outro método. Não confundir!

Exemplo 15

Determine se as séries abaixo convergem ou divergem.

a) $\sum_1^\infty \frac{1}{n!}$

Observe que $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$

Como $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^n}$ para $n>2$ e a série de termos não negativos $\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}$ é convergente porque é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}<1$, então, pelo Teste de Comparação, a série $\sum_1^\infty \frac{1}{n!}$ converge.

b) $\sum_1^\infty \frac{2n^3+3n}{n^5-3n^2+1}$

Para escolher o termo b_n conservamos apenas as maiores potências do termo a_n.

Então, seja $b_n=\frac{2n^3}{n^5}=\frac{2}{n^2}$. A série $\sum_1^\infty \frac{2}{n^2}$ converge, pois é uma 2-série. E como

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{\dfrac{2n^3+3n}{n^5-3n^2+1}}{\dfrac{2}{n^2}}=\frac{n^2\left(2n^3+3n\right)}{2\left(n^5-3n^2+1\right)}=\frac{2n^5+3n^3}{2n^5-6n^2+2}$$

Aplicando o limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n^3}{2n^5-6n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{n^2}}{2-\dfrac{6}{n^3}+\dfrac{2}{n^5}}=1$$

Assim, pelo Teste de Comparação pelo Limite, a série $\sum_1^\infty \frac{2n^3+3n}{n^5-3n^2+1}$ converge.

Observe que em casos como este fica mais fácil trabalhar com o limite de $\frac{a_n}{b_n}$ do que com o limite da sequência de somas parciais da série $\sum_1^\infty a_n$. A questão é só encontrar a série $\sum_1^\infty b_n$ que já sabemos se converge ou não.

Teorema 7

Teste da razão

Seja $\sum_1^\infty a_n$ uma série de termos positivos e suponhamos que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$

i) Se $L<1$, a série é convergente.

ii) Se $L>1$ (ou $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\infty$), a série é divergente.

iii) Se $L=1$, nada se pode afirmar, deve-se aplicar outro teste.

Demonstração

Vou deixar a cargo de vocês! Tentem ou pesquisem em qualquer livro de Cálculo a demonstração desse teste.

Exemplo 16

Vejamos a convergência ou não da série $\sum_{1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Vamos aplicar o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1).n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

Observação: $\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1).n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right]=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(n+1)^n.(n+1)^1.n!}{(n+1).n!.n^n}\right]=\lim_{N\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

Como $e>1$, a série diverge.

Observe que já mostramos na unidade anterior que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$, para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

Exemplo 17

Analise a convergência ou não da série $\sum_{1}^{\infty}\frac{ln(n)}{n}$.

Vamos tentar o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{ln(n+1)}{(n+1)}\cdot\frac{n}{ln(n)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln(n+1)}{ln(n)}\right).\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Vejamos cada limite separadamente.

i) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{1}=1$

ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln(n+1)}{ln(n)}\right)$ é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, portanto vamos usar a Regra de l'Hôpital.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{ln(n+1)}{ln(n)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

Sendo assim, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1$ e nada se pode afirmar, ou seja, o teste da razão é inconclusivo e temos que usar outro teste.

Vamos tentar o teste da integral: Seja a função $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida para $x \geq 1$. Neste intervalo, a função é não negativa, contínua. Falta mostrar que é decrescente. Vamos verificar o sinal da primeira derivada:

$$f^{'(x)}=\frac{\frac{1}{x}.x-1.\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}\leq 0,\text{ pois } x^2>0 \text{ e } \ln(x)>1 \text{ para } x>\text{e}.$$

Então vamos integrar no intervalo $e<x<\infty$. Teremos:

$$\int_e^{\infty}\frac{\ln(x)}{x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_e^{N}\frac{\ln(x)}{x}dx$$

Por substituição, seja $u(x)=\ln(x)$, daí $du=\dfrac{1}{x}dx$.

$$\int_e^{\infty}\frac{\ln(x)}{x}dx=\lim_{N\to\infty}\int_e^{N}\frac{\ln(x)}{x}dx==\lim_{N\to\infty}\int_1^{\ln(N)}u.du=\lim_{N\to\infty}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^{\ln(N)}=\frac{1}{2}.\lim_{N\to\infty}\left(\left(\ln(N)\right)^2-1\right)\to\infty$$

Logo, pelo Teste da Integral, a série diverge.

Teorema 8

Teste da Raiz

Seja $\sum_1^\infty a_n$ uma série de termos positivos e suponhamos que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=L$

i) Se $L<1$, a série é convergente.

ii) Se $L>1$ (ou $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)=\infty$), a série é divergente.

iii) Se $L=1$, nada se pode afirmar, deve-se aplicar outro teste.

Exemplo 18

Vamos analisar a convergência ou não da série $\sum_1^\infty \frac{2^{n+1}}{n^n}$.

Aplicando o teste da raiz, temos:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{n}\right)=0<1$$

Logo, a série $\sum_1^\infty \frac{2^{n+1}}{n^n}$ converge.

Vimos que o Teste da Raiz é apropriado para analisar séries em que o termo geral apresenta potências de ordem n. Mesmo assim, pode não ser conclusivo, no caso de $L=1$. Veja no exemplo a seguir.

Exemplo 19

Vamos testar a convergência da série $\sum_1^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ usando o Teste da Raiz.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

Como vemos, esse teste é inconclusivo para esta série.

Mas atenção: mesmo que se confirmasse a convergência da série, que já sabemos que conflui para soma $S = e$ o Teste da Raiz não dá a soma da série.

Os testes de convergência estudados até aqui só podem ser aplicados a séries de termos positivos. Vamos tratar agora da análise de convergência de séries que contêm termos positivos e negativos. O tipo mais comum de tais séries é a **série alternada**, em que os termos são alternadamente positivos e negativos.

Séries alternadas

Uma série alternada é da forma $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n$ ou $\sum_1^\infty (-1)^n a_n$ com todos $a_n \geq 0$.

Teorema 9

Teste para Séries Alternadas (critério de Leibnitz)

Uma série alternada converge se as duas condições abaixo forem satisfeitas.

i) $a_k \geq a_{k+1} > 0$ para todo k.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Demonstração: Vamos considerar a série alternada do tipo

$$\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

A ideia da demonstração é de que as condições (i) e (ii) satisfeitas garantam que a sequência das somas parciais, de índice par e de índice ímpar, convergem para um limite comum S.

Valendo as condições (i) e (ii) temos que as somas parciais de índice par $S_2, S_4, S_6, S_8, \ldots, S_{2n}, \ldots$ formam uma sequência crescente limitada superiormente por a_1. E as somas parciais de índice ímpar $S_1, S_3, S_5, S_7, \ldots, S_{2n-1}, \ldots$ formam uma sequência decrescente limitada inferiormente por 0. Assim as duas sequências são convergentes, digamos, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S_1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = S_0$.

Precisamos mostrar que convergem para o mesmo limite, ou seja, que $S_0 = S_1$.

Como o (2n)-ésimo termo da série é $-a_{2n}$, então $S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n}$ e, portanto, $S_{2n} = S_{2n-1} + a_{2n}$. Daí $S_0 = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n-1} + a_{2n}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} + \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = S_1 + 0 = S_1$.

Logo, $S_0 = S_1 = S$. Sendo assim, a série alternada converge e sua soma é S.

Exemplo 20

Use o Teste da Série Alternada para verificar a convergência da série $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \dfrac{n+2}{n(n+1)}$.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k+3}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{k(k+1)}{k+2} = \frac{k(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{k^2+3k}{k^2+4k+4} < 1$$

Logo, $a_k > a_{k+1}$ e a condição (i) está satisfeita.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+2}{k^2+k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} = 0 \text{ (aplicando l'Hôpital)}$$

Logo, a condição (ii) também é satisfeita, portanto, a série alternada converge.

Convergência Absoluta

Algumas séries não se enquadram em nenhuma categoria vista até aqui, por exemplo, a série $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \ldots$ esta série apresenta termos positivos e negativos, mas não é uma série alternada.

Definição 2

> Dizemos que uma série $\sum_1^\infty a_n$ converge absolutamente se a série de valores absolutos $\sum_1^\infty |a_n|$ convergir e dizemos que diverge absolutamente se a série de valores absolutos divergir.

Exemplo 21

Determine se as séries abaixo convergem absolutamente;

a) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \ldots$

A série de valores absolutos é $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}$. Vamos usar o teste da razão:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} . \frac{2^n}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$, portanto, a série de valores absolutos converge, portanto, a série original converge absolutamente.

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que é uma série alternada.

A série de valores absolutos é $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ que é a série harmônica, portanto divergente.

Logo, a série $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ diverge absolutamente.

Atenção

É importante distinguir convergência de convergência absoluta. Observe que a série do item (b) do exemplo 21 é uma série alternada convergente. Entretanto, ela não converge absolutamente.

Teorema 10

Se a série $\sum_1^\infty |a_n|$ convergir, então a série $\sum_1^\infty a_n$ também converge.

Demonstração

Seja a série $\sum_1^\infty a_n$ e podemos escrever que $a_n = a_n + |a_n| - |a_n|$. Como, por hipótese, a série $\sum_1^\infty |a_n|$ converge, basta mostrar que a série composta $\sum_1^\infty (a_n + |a_n|)$ converge. Daí a série original vai convergir por ser a diferença entre duas séries convergentes.

Para mostrar que $\sum_1^\infty (a_n + |a_n|)$ converge, observemos que $0 \le a_n + |a_n| \le 2\,|a_n|$ e como $\sum_1^\infty 2|a_n|$ converge, pois é uma constante multiplicando uma série convergente, pelo teste da comparação, a série $\sum_1^\infty (a_n + |a_n|)$ converge.

Exemplo 22

Vamos verificar se a série $\sum_1^\infty \frac{cos(n)}{n^2}$ converge ou não.

Vamos pegar a série dos valores absolutos $\sum_1^\infty \left|\frac{cos(n)}{n^2}\right| = \sum_1^\infty \frac{|cos(n)|}{n^2}$.

Como $0 \le \frac{|cos(n)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, pelo teste da comparação a série converge absolutamente, portanto, também converge.

Convergência Condicional

Embora o teorema 21 ofereça um resultado importante para séries que convergem absolutamente, não indica o que ocorre quando uma série diverge absolutamente. Vimos, por exemplo, no item (b) do exemplo 21 que a série $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que é convergente, pelo Teste de Série Alternada, uma vez que $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Entretanto, a série diverge em valor absoluto.

Se uma série converge, mas diverge absolutamente, dizemos que a série converge condicionalmente.

Teorema 11

Teste da Razão para Convergência Absoluta.

Seja $\sum_1^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos e tal que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

Então:

i) Se $L < 1$, a série converge absolutamente.

ii) Se $L > 1$ (ou se $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$) a série diverge.

iii) Se $L = 1$, nada se pode afirmar, deve-se aplicar outro teste.

Exemplo 23

Verifique se as séries abaixo convergem absolutamente, convergem condicionalmente ou divergem.

a) $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{ln(n+1)}$

Aplicando o Teste da Razão para Convergência Absoluta, temos:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{ln(n+2)} \cdot \frac{ln(n+1)}{1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{ln(n+1)}{ln(n+2)}$ aplicando a Regra de l'Hôpital, temos:

$\lim_{n\to\infty}\frac{ln(n+1)}{ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$. Pelo Teste da Razão para Convergência Absoluta, nada se pode concluir. Temos que tentar outro teste.

A série de valores absolutos é $\sum_1^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$. Vamos aplicar o teste da Integral.

Seja $f(x) = \frac{1}{ln(x+1)}$ que é uma função contínua para $x \geq 1$. E como a função $ln(x)$ é uma função crescente, o seu inverso é uma função decrescente. Daí $f(x)$ é decrescente, portanto:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{ln(x+1)}\,dx$$

Mas a função $ln(x) < x$ para todo $x \geq 1$, então $\frac{1}{ln(x+1)} > \frac{1}{x+1} > \frac{1}{2x}$. Daí temos:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{ln(x+1)}\,dx > \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{2x}\,dx \to \infty$$

Logo a série $\sum_1^{\infty}\frac{1}{ln(n+1)}$ diverge e, portanto, a série $\sum_1^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{ln(n+1)}$ diverge absolutamente.

Resta verificar se esta série converge. Vamos usar o Teste de Série Alternada.

Já vimos que a função $f(x)$ é decrescente para $x \geq 1$, então $a_n > a_{n+1}$ e a condição (i) está satisfeita. Resta calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(x+1)} = 0$, então a condição (ii) também está satisfeita. Portanto, pelo Teste da Série Alternada, a série $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{ln(n+1)}$ converge. Como não converge absolutamente, converge condicionalmente.

Resumo dos testes de convergência e divergência de séries

Teste	Série	Convergência ou Divergência	Comentários
n° termo	$\sum_1^\infty a_n$	Diverge se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$	Inconclusivo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Série geométrica	$\sum_1^\infty ar^{n-1}$	i) Converge p/ $S = \frac{a}{1-r}$, se $\vert r \vert < 1$ ii) Diverge se $\vert r \vert \geq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é análogo ao termo ar^{n-1}
p-série	$\sum_1^\infty \frac{1}{n^p}$	i) Converge se $p > 1$ ii) Diverge se $p \leq 1$	Útil para testes de comparação se o termo a_n é análogo ao termo $1/n^p$
Integral	$\sum_1^\infty a_n$ $a_n = f(n)$	i) Converge se $\int_1^\infty f(x)dx$ converge ii) Diverge se $\int_1^\infty f(x)dx$ diverge	A função f obtida de $a_n = f(n)$ deve ser contínua, positiva, decrescente e facilmente integrável para $x \in (1,\infty)$.
Comparação	$\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ $a_n \leq b_n$	i) Se $\sum_1^\infty b_n$ converge, então $\sum_1^\infty a_n$ converge ii) Se $\sum_1^\infty a_n$ diverge, então $\sum_1^\infty b_n$ diverge	Este teste aplica-se apenas a séries de termos não negativos.

Comparação por limite	$\sum_1^\infty a_n$ e $\sum_1^\infty b_n$ $a_n, b_n > 0$	$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ Se $0 < L < \infty$, ambas convergem ou divergem.	As duas séries têm o mesmo comportamento. Exige habilidade na escolha da $\sum_1^\infty b_n$ para comparar.
Razão	$\sum_1^\infty a_n$ $a_n > 0$	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L(ou\,\infty)$ i) converge se $L < 1$ ii) diverge de $L > 1$ ou ∞ iii) inconclusivo se $L = 1$	É útil quando a_n envolve fatoriais ou potências n-ésimas.
Raiz	$\sum_1^\infty a_n$ $a_n > 0$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L(ou\,\infty)$ i) converge se $L < 1$ ii) diverge de $L > 1$ ou ∞ iii) inconclusivo se $L = 1$	É útil quando a_n envolve potências n-ésimas.
Série alternada	$\sum_1^\infty (-1)^n a_n$ ou $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} a_n$ $a_n > 0$	A série alternada converge se duas condições forem satisfeitas: i) $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$	Este teste só se aplica a séries alternadas. Atente que $a_n > 0$ e a alternância de sinal se dá pelas potências de -1.
Razão para convergência absoluta	$\sum_1^\infty a_n$	$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\| = L(ou\,\infty)$ i) converge abs. se $L < 1$ ii) diverge abs. se $L > 1$ ou ∞ iii) inconclusivo se $L = 1$	A série não precisa ter termos só positivos e não precisa ser alternada para se aplicar este teste.
Convergência ou divergência condicional	$\sum_1^\infty a_n$	Se $\sum_1^\infty \|a_n\|$ converge, mas $\sum_1^\infty a_n$ diverge, então a série $\sum_1^\infty a_n$ converge condicionalmente	Útil para uma classificação mais apurada do comportamento da série.

Chegamos ao fim desta unidade. Recomendo que confiram o quadro com o resumo dos testes de convergência. Isto ajuda a fixar as ideias e será útil para consulta quando estiver fazendo as atividades. Revejam os exemplos cotejando com os critérios utilizados para análise da convergência ou não das séries envolvidas, preparando-se para as tarefas da unidade.

Bom estudo!

Já vimos que o número irracional $e \cong 2,718281828\ldots$ pode ser definido como o $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Pode-se também mostrar que a série

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots = e$$

Vejamos as somas parciais:

$S_0 = 1$

$S_1 = 1 + 1 = 2$

$S_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} = 2 + 0,5 = 2,5$

$S_3 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2,5 + \frac{1}{6} = 2,5 + 0,166666666 = 2,666666667$

$S_4 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = 2,666666667\ldots + \frac{1}{24} = 2,708333334\ldots$

$S_5 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2,708333334\ldots + \frac{1}{120} = 2,716666667\ldots$

$S_6 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} = 2,716666667\ldots + \frac{1}{720} = 2,718055556\ldots$

$S_7 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = 2,718055556\ldots + \frac{1}{5040} = 2,718255969\ldots$

$S_8 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = 2,718255969\ldots + \frac{1}{40320} = 2,718278771\ldots$

$S_9 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 2,718278771\ldots + \frac{1}{362880} = 2,718281527\ldots$

$S_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = 2,718281527\ldots + \frac{1}{3628800} = 2,718281803\ldots$

Observe que a partir da S7 já temos uma aproximação de e até a quarta casa decimal.

Material Complementar

I) A Curva e o Floco de Neve de Koch

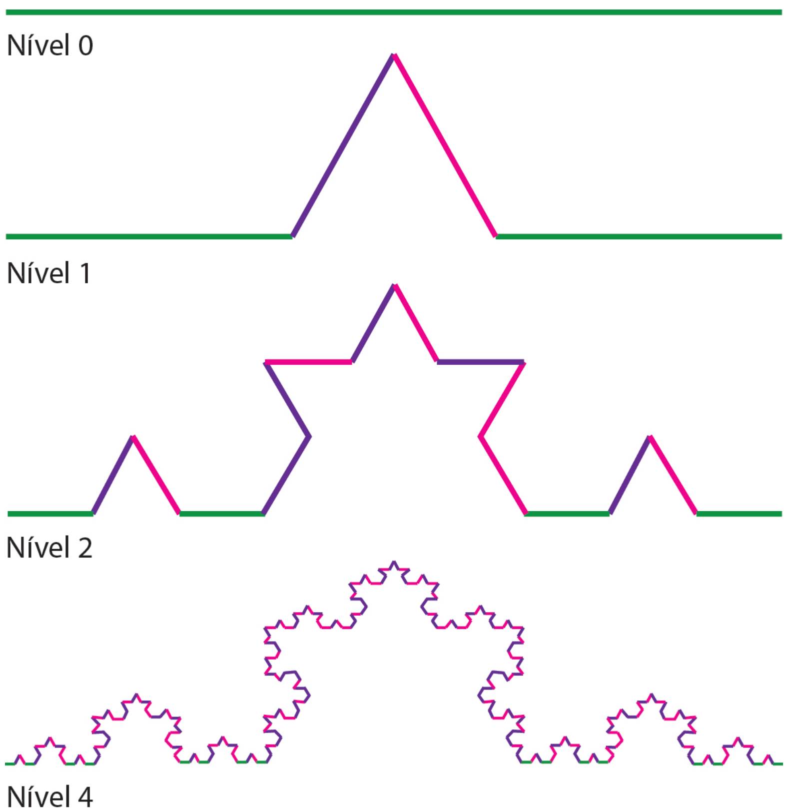
A **curva de Koch** é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais a serem descritos. Apareceu pela primeira vez num artigo de 1906, de autoria do matemático sueco Helge von Koch.

Algumas características fractais da curva de Koch são a estrutura fina (detalhamento infinito); auto semelhança (réplicas menores através da sua divisão); processo de construção repetitivo; simplicidade na lei de formação e, após a construção geométrica, é possível fazer uma análise algébrica do número de segmentos, comprimento de cada segmento, comprimento total da curva.

Podemos imaginar a sua construção a partir de um segmento de reta que será submetido a alterações recorrentes (iterações), assim descritas:

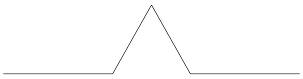
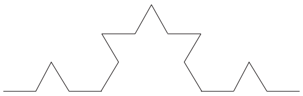
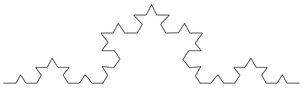
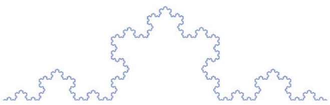
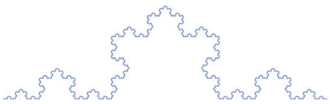
1. Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento.
2. Desenha-se um triângulo equilátero sobre o segmento central do primeiro passo.
3. Apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo no segundo passo.

Isto feito, o resultado será semelhante à secção longitudinal de um chapéu de bruxa. Procedendo da mesma forma para cada um dos quatro segmentos que ficam, formam-se dezesseis novos segmentos menores. Repete-se o processo para cada segmento retilíneo, em etapas sucessivas. A curva de Koch é o limite para o qual tende esta construção, repetindo as operações referidas, sucessivamente, para cada segmento. A seguinte figura representa quatro etapas de construção. A última curva (nível 4) é uma boa aproximação da curva final.



Observe que em uma determinada etapa, cada segmento desta uma etapa é substituído por 4 segmentos na etapa seguinte. Além disso, o comprimento l de cada segmento em uma etapa terá comprimento $\frac{4}{3}l$ na etapa seguinte.

Veja o resumo, conforme proposto por Pallesi (2007, p. 13), no quadro a seguir:

	Nível	Nº de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total da curva
	0	1	ℓ	ℓ
	1	4	$\frac{\ell}{3}$	$4\frac{\ell}{3}$
	2	4^2	$\frac{\ell}{3^2}$	$4^2\frac{\ell}{3^2}$
	3	4^3	$\frac{\ell}{3^3}$	$4^3\frac{\ell}{3^3}$
	4	4^4	$\frac{\ell}{3^4}$	$4^4\frac{\ell}{3^4}$
	...	...	...	...
	N	4^n	$\frac{\ell}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n \ell$

Fonte: http://people.ufpr.br/~ewkaras/especializa/pallesimono07.pdf

Observe que os comprimentos dos segmentos em cada etapa formam a sequência de somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ do comprimento total S da curva, se o processo continua indefinidamente, sendo l constante igual à medida do comprimento do segmento inicial. Logo temos:

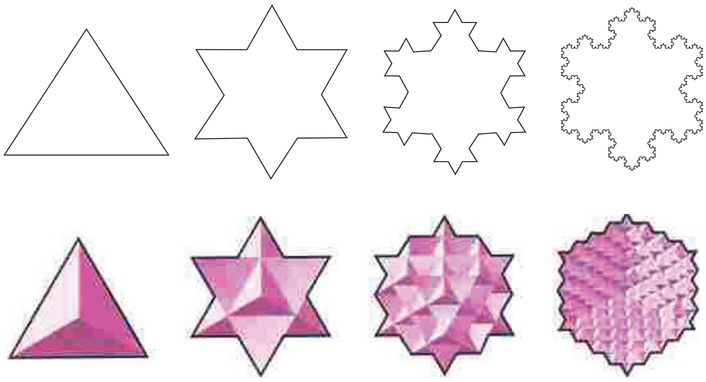
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[l.\left(\frac{4}{3}\right)^n\right] = l.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty$$

Vemos, então, que o comprimento total da curva torna-se infinitamente grande, à medida que o processo iterativo do fractal continue indefinidamente.

Podemos ressaltar ainda que, mesmo a curva tendo seu perímetro (comprimento) crescendo infinitamente, não é possível visualizá-la à medida que crescem as iterações do processo de construção. O mesmo se observa para o tamanho dos segmentos, que diminui infinitamente, mas nunca irá desaparecer por completo. A tecnologia dos nossos computadores não possui capacidade para tal visualização, já que o processo se repete indefinidamente.

Mais conhecido do que a Curva de Koch é o **Floco de Neve de Koch** (ou **estrela de Koch**), que corresponde ao mesmo processo dessa curva, mas sua construção se inicia a partir de um triângulo equilátero (em vez de um segmento de reta).

Eric Haines desenvolveu o mesmo conceito em três dimensões, o que resultou num fractal com volume de um floco de neve. Veja a figura.

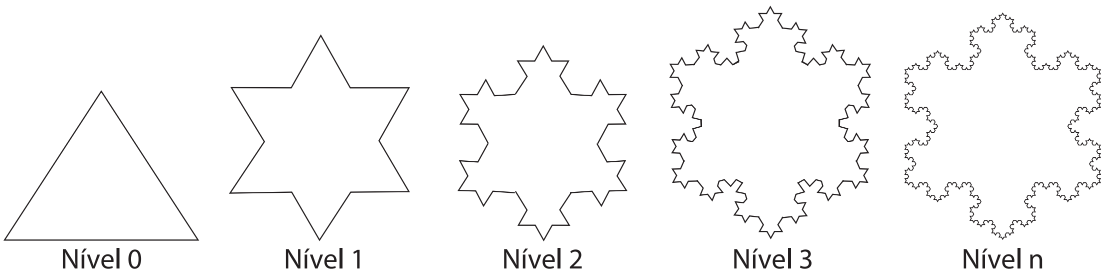


Fonte: Wikimedia Commons

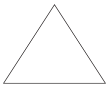
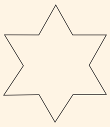
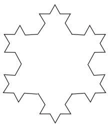
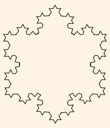
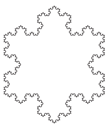
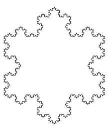
Floco de Neve de Koch em 2D e 3D
Veja uma animação do processo de construção do Floco de Neve de Koch
http://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Koch#mediaviewer/File:Von_Koch_curve.gif

Com o Floco de Neve de Koch ocorre também que seu perímetro tende para infinito, à medida que o processo iterativo de construção siga indefinidamente. Entretanto, ocorre um fato que, a princípio, é estranho, não intuitivo: a área do Floco de Neve de Koch é finita, mesmo o processo de construção se propagando indefinidamente. Quando tratamos de conceitos envolvendo o infinito, nossa intuição pode falhar.

Considere as etapas de construção do fractal Flocos de Neve de Koch



Veja a seguir o quadro que resume todos os dados dessa construção

	Nível	Nº de segm.	Comp. de cada lado	Comp. total da curva	Área de cada triângulo inserido	Nº de triângulo inserido	Soma da área total
	0	3.1	$.\ell$	3ℓ	$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$	0	A_0
	1	3.4	$\frac{\ell}{3}$	$3.4\,\frac{\ell}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\ell^2}{3^2}=\frac{A_0}{3^2}$	3	$A_0+3\frac{A_0}{3^2}$
	2	3.4^2	$\frac{\ell}{3^2}$	$3.4^2\,\frac{\ell}{3^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\ell^2}{3^4}=\frac{A_0}{3^4}$	3.4	$A_0+3\frac{A_0}{3^2}+3.4\frac{A_0}{3^4}$
	3	3.4^3	$\frac{\ell}{3^3}$	$3.4^3\,\frac{\ell}{3^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\ell^2}{3^6}=\frac{A_0}{3^6}$	3.4^2	$A_0+3\frac{A_0}{3^2}+3.4\frac{A_0}{3^4}+3.4^2\frac{A_0}{3^6}$
	4	3.4^4	$\frac{\ell}{3^4}$	$3.4^4\,\frac{\ell}{3^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\ell^2}{3^8}=\frac{A_0}{3^8}$	3.4^3	$A_0+3\frac{A_0}{3^2}+3.4\frac{A_0}{3^4}$ $+3.4^2\frac{A_0}{3^6}+3.4^3\frac{A_0}{3^8}$
	...	...	...	...	...	...	...
	n	3.4^n	$\frac{\ell}{3^n}$	$3.\left(\frac{4}{3}\right)^n\ell$	$\frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{\ell^2}{3^{2n}}=\frac{A_0}{3^{2n}}$	3.4^{n-1}	$A_0\left(1+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$

Fonte: http://people.ufpr.br/~ewkaras/especializa/pallesimono07.pdf

Observe que o perímetro dessa curva, de forma similar à Curva de Koch, tende para infinito. Entretanto a área $A = A_0\left[1+\frac{1}{3}\sum_1^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$ em que A_0 é a área do triângulo inicial. Basta encontrar então a soma S da série $\sum_1^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$, que é uma série geométrica de razão $\frac{4}{9}<1$. Então $S=\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9}{5}$. Daí, $A=A_0.\left(1+\frac{1}{3}.\frac{9}{5}\right)=\frac{8}{5}A_0$.

Sites:

Acerca desse assunto, confira mais detalhes nos links abaixo:

http://slideplayer.com.br/slide/1235203/

http://www.eciencia.usp.br/arquivoEC/exp_antigas/icaos.html

Acesso em 25 de Maio de 2016.

Vídeos:

Vídeos Unicamp

1) Série numérica é, por definição, o limite de uma sequência, a sequência das somas parciais dos termos da série. A professora Ketty Abaroa de Rezende, do Departamento de Matemática da UNICAMP, explica e dá exemplos de séries numéricas e de série geométrica. Na segunda parte da aula, a professora explica o uso dos testes de convergência, os testes de termo geral e os testes de comparação.

   http://univesptv.cmais.com.br/calculo-iii/home/series-numericas-testes-de-convergencia Acesso em 25 de Maio de 2016.

2) Vídeo-série: Matemática na Escola

   À espera da meia-noite

   O segurança Claudemir está à espera do fim do seu horário de trabalho, quando entregará o turno para o seu companheiro Adilson. Entretanto, lhe parece que a espera vai demorar infinitamente. O vídeo apresentará o problema clássico do "Paradoxo de Zenão", além de introduzir conceitos de limite de sequências

   http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1041 Acesso em 25 de Maio de 2016.

Referências

BOULOS, P. **Exercícios resolvidos e propostos de sequências e séries de números e de funções**. São Paulo: Edgard Blucher, 1986.

GUELLI, C. A.; IEZZI, G.; DOLCE, O. **Álgebra I: sequências, progressões, logaritmos**. São Paulo: Moderna, 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

Referências Complementares

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. v. 2., 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. V.2. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1982. v.2.

MACHADO, A. S. **Matemática: temas e metas: trigonometria e progressões**. São Paulo: Atual, 2004.

CARVALHO, M. C. C. S. **Padrões numéricos e sequências**. São Paulo: Moderna, 1997.

Referências Contextualização

ÁVILA, G. **As séries infinitas**. RPM - Revista do Professor de Matemática, n. 30, 1° quadrimestre de 1996. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM. Rio de Janeiro: IMPA, 1996a.

ÁVILA, G. **Ainda as séries infinitas**. RPM - Revista do Professor de Matemática, n. 31, 2° quadrimestre de 1996. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM. Rio de Janeiro: IMPA, 1996b.

BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo. 1974.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 4ª ed. Lisboa: Gradiva, 2002.

EUCLIDES. Elementos de Geometria. Série Científica. São Paulo: Edições Cultura, 1944

PIERRO NETTO, S. **Matemática: Conceitos e Histórias. 8ª série**. Editora Scipione. São Paulo. 1995.

STEWART, I. **Os Problemas da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

Anotações

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo - SP - Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Cruzeiro do Sul
Educacional