Sequências, séries e progressões

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

Material Teórico

Progressões aritmética e geométrica

Responsável pelo Conteúdo:
Profa. Dra. Ana Lúcia Nogueira Junqueira

Revisão Textual:
Profa. Esp. Natalia Conti

UNIDADE Progressões aritmética e geométrica

- Introdução
- Progressões aritmética e geométrica
- Progressões aritméticas
- Progressões geométricas

Objetivo de APRENDIZADO

- Apresentar o conceito de progressão aritmética, suas propriedades e operações, como termo geral e soma de uma progressão aritmética, relacionando com sequências numéricas.
- Apresentar o conceito de uma progressão geométrica, suas propriedades e operações, como termo geral e soma, finita e infinita, de uma progressão geométrica, relacionado com sequência e séries geométricas.
- Explorar convergência de progressões, exemplos e exercícios.
- Apresentar aplicações de progressões.

Caro(a) aluno(a),

Vamos estudar progressões aritméticas e geométricas. Tentaremos mostrar a sua importância na matemática e também algumas aplicações que têm utilidade prática na vida cotidiana.

Não deixem de ver os tópicos abordados em Contextualização, por situarem o desenvolvimento do tema ao longo da história até os dias atuais e em Material Complementar, para ampliar o conhecimento e aplicações em outras áreas do saber.

Acompanhe o desenvolver da teoria, preste bem atenção às definições, propriedades e teoremas, confira os exemplos dados, preparando-se assim para resolver as atividades propostas na unidade. Serão úteis as estratégias algébricas bem como conhecimentos sobre função afim, função exponencial, e manipulações com potências e logaritmos.

E seguem as recomendações de praxe para que sempre sejam lembradas. Organize-se para dar conta do estudo em tempo hábil. Não deixe acumular, não se atrase. Em cursos à distância a disciplina pessoal e organização do tempo são fatores fundamentais para que você tenha autonomia e seja o protagonista da construção do seu conhecimento. Claro que você terá o acompanhamento do tutor para auxiliá-lo nos estudos, mas o caminho é determinado por você. Não deixe as tarefas se acumularem, pois a temática da disciplina requer estudos que reservem tempo para reflexão para cumprir o ciclo de aprendizagem, por isso, não deixe para a última hora.

Teremos, como de costume, atividades avaliativas e de reflexão sobre o tema da unidade. Fique atento aos prazos!

Espera-se que ao término da unidade você seja capaz de reconhecer, analisar e trabalhar com progressões, e também utilizar os conceitos aqui tratados transpondo-os em outras situações em que se façam presentes.

Contextualização

As progressões foram estudadas desde povos muito antigos como os babilônicos e os egípcios. Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes. De aproximadamente meio milhão de tabletas de argila babilônicas escavadas desde o início do século XIX, milhares são de natureza matemática, provavelmente a mais famosa delas seja a tableta **Plimpton 322** (referindo-se ao fato de ter o número 322 na coleção G.A. Plimpton da *Columbia University*). Acredita-se que esta tableta tenha sido escrita no século XVIII a.C. Possui uma tabela de 4 colunas e 15 linhas de números em escrita cuneiforme do período. Confira na imagem a seguir.

Fonte: Wikimedia Commons

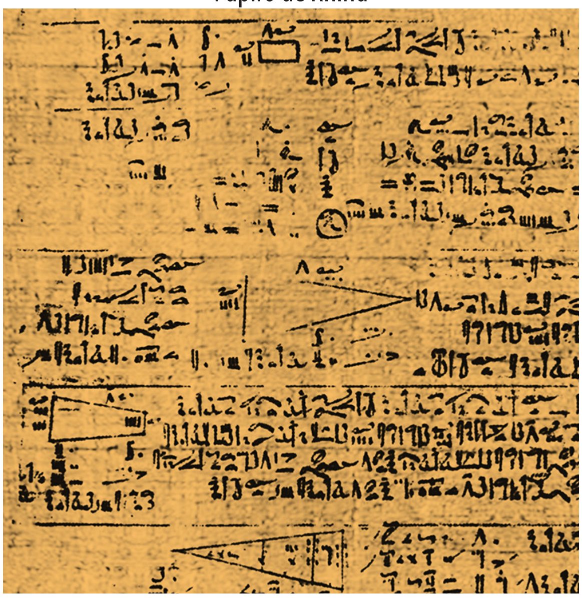
Embora esta tabela tenha sido formalmente interpretada pelos principais matemáticos como uma lista de ternos pitagóricos, existe uma perspectiva mais atual publicada pela *Mathematica Association of America* que diz que esta interpretação é questionável. Segundo Robson (2002), Plimpton 322, analisada apenas como uma peça matemática parece muito moderna, embora seja impossível dizer a qual ramo da matemática moderna mais se aproxima: trigonometria, teoria dos números ou álgebra. Entretanto, parece milênios à frente de seu tempo, incomparavelmente mais sofisticado do que outros documentos matemáticos antigos, e de onde emerge um produto muito particular de determinado lugar e tempo, fortemente dependente do antigo ambiente de escribas por seu layout físico, como uma mesa; seu conteúdo matemático e sua função como auxílio ao professor. As técnicas utilizadas são amplamente atestadas em outras partes do antigo corpo da Matemática escolar da Mesopotâmia e, sob esse olhar, podemos admirar a organização e habilidade em aritmética de seu autor ancestral, embora qualquer semelhança que a Plimpton 322 possa ter com a matemática moderna está em nossas mentes, não na dele.

Segundo EVE (1997), a matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. São muito diferentes as histórias políticas do Egito e da Babilônia antigos. Esta última era aberta a invasões de povos vizinhos e, por consequência, havia períodos de turbulência, com um império sucedendo outro. O Egito Antigo, ao contrário, manteve-se em semi-isolamento, protegido de invasões estrangeiras, governado pacificamente por sucessão de dinastias, enquanto a babilônia era o centro das rotas de navios, e consequentemente, era um centro de troca de saberes. No entanto, devemos lembrar que os egípcios desenvolveram um papel primordial na preservação de muitos papiros que contribuíram para o nosso conhecimento atual sobre a Matemática. Dentre esses papiros destacam-se o papiro de Moscou (1850 a.C.) e o papiro de Rhind (1650 a.C.).

O **Papiro de Moscou (ou de Moscovo)** também conhecido como **Papiro Golenischev** em referência ao seu proprietário Vladmir Golenischev, que o adquiriu em 1893 no Egito. Tem forma de uma estreita tira de 5,5m de comprimento por 8 cm de largura, com 25 problemas matemáticos grafados com escrita hierática, sendo impossível interpretar muitos deles devido ao grau de degradação do manuscrito. Neste papiro é apresentada uma forma de cálculo do volume do tronco de pirâmide de base quadrada. Foi adquirido em 1917, pelo Museu Pushkin de Belas Artes de Moscou, onde se encontra até hoje.

O **Papiro de Rhind** (ou de Ahmes) trata-se de um texto matemático na forma de um manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática de um trabalho mais antigo pelo escriba Ahmes. Vale conhecer um pouco a trajetória deste papiro: em 1858, esse documento muito antigo foi comprado por um antiquário escocês chamado Henry Rhind numa cidade do Egito. Esse documento mede 30 centímetros de largura por 5 metros de comprimento e contém diversos assuntos matemáticos: sistema de numeração, geometria, álgebra e muitas brincadeiras e jogos com números.

Papiro de Rhind



Fonte: fisica-interessante.com

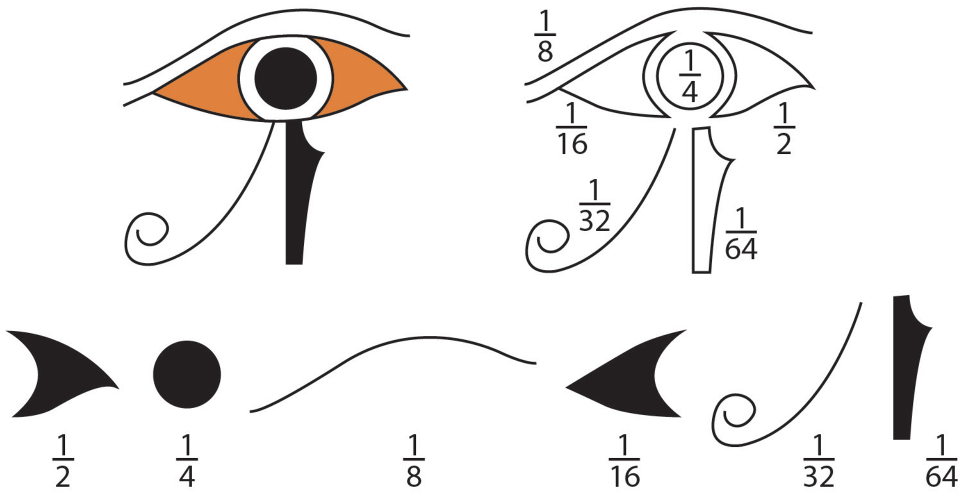
Nesse papiro encontram-se problemas envolvendo progressão aritmética e geométrica, como:

"Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em Progressão Aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores".

"Em 7 casas há 49 gatos, que comeram 343 ratos, que, se não morressem, comeriam 2401 espigas, cujos grãos encheriam 16807 cuias".

No papiro de Rhind aparece também uma progressão geométrica envolvendo frações bastante interessantes: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, conhecidas como as frações dos olhos do deus Hórus.

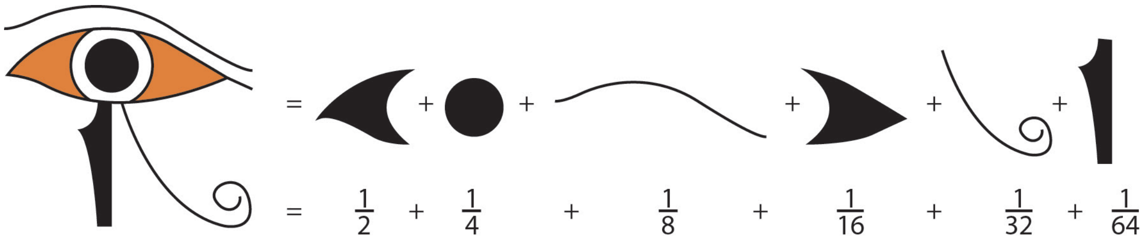
Olho de Hórus



Fonte: Adaptado de fisem.org

Os antigos egípcios usavam alguns caracteres para representar um sistema de frações. Os problemas 80 e 81 do papiro de Rhind apresentam uma tabela com essas frações.

Representação das frações do Olho de Hórus



Fonte: Adaptado de portalsaofrancisco.com.br

Os egípcios acreditavam que cada fração representava um sentido e todas juntas representariam a "unidade perfeita", isto é, 1/2 (olfato), 1/4 (visão), 1/8 (pensamento), 1/16 (audição), 1/32 (paladar) e 1/64 (tato). Além disso, acredita-se que esse esquema representativo do olho de Hórus no papiro de Rhind tinha o intuito de ser analisado durante procedimentos matemáticos ou até mesmo em caráter de crendices (como amuleto).

Os babilônicos também utilizavam sequências. Segundo EVE (1997, p. 77), há tabletas nas coleções de Berlim, de Yale e do Louvre que contêm problemas sobre juros compostos. Há uma tableta em Istambul que parece ter sido originalmente tabelas de a^n, para n de 1 a 10 e para $a = 9,16,100,225$.

Na tábua de Louvre, de cerca de 1700 a.C., há o seguinte problema: Por quanto tempo deve-se aplicar certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?

Segundo SÀ (2012), é interessante registrar que a prática do uso das taxas anuais, que ainda vigora nos dias atuais, tem tradição milenar e era plenamente justificável na época, pois havia a prática da troca e do escambo. Os tomadores do empréstimo, que pegavam sementes emprestadas para a semeadura, por exemplo, precisavam de um ano de prazo para que se concretizasse a nova colheita.

Podemos resolver a antiga questão constante na tábula do Louvre em linguagem algébrica atual e recairmos em fatos matemáticos importantes, estudados na Escola Básica ou no Ensino Superior, os quais, normalmente, não são relacionados às questões financeiras.

Analisando o problema apresentado na tábula do Louvre, temos:

Se o capital C está crescendo a juros compostos de 20% ao ano, temos que ao final do primeiro ano, o capital C estará acrescido de 0,20 C, ou seja, valerá 1,2 C. No segundo ano, o novo capital 1,2 C ficará acrescido de 0,2. 1,2 C, ou seja, 1,2 C + 0,24 C ou 1,44 C. Isso é o mesmo que $1{,}2^2\,C$. Seguindo essa mesma linha de raciocínio, após **t** anos, teremos que o capital inicial C será transformado no montante M, tal que: $M = 1{,}2^t C$, que recai na função exponencial. Atualmente tal equação é resolvida aplicando logaritmo, ou seja, $t = \dfrac{log(2)}{log(1,2)} \cong 3,8$ anos.

Mas os antigos babilônios não conheciam ainda os logaritmos. Entretanto, naquela época era resolvido de outra maneira. A partir de suas tabelas, já sabiam que $1{,}2^3 = 1{,}728$ e $1{,}2^4 = 2{,}0736$, logo o valor de t estaria entre 3 e 4, e aplicavam o método aproximado de interpolação linear, que significa divisão proporcional: o valor t que divide o intervalo entre 3 e 4 está na mesma proporção que 2, divide o intervalo entre 1,728 e 2,0736. Assim, chegaram ao resultado $t = 3{,}787$, que é notavelmente próxima da resposta correta. Com essas tabelas de potências criadas pelos babilônios em notação sexagesimal, de certa forma, já antecipavam o uso de logaritmos na resolução de problemas cotidianos, notadamente relativos a juros compostos.

Se generalizarmos este tipo de crescimento teremos outra revelação que nos faz recair no número e, tão utilizado em cálculo e comumente conhecido como $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Vemos que muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas. A História também revela que a ideia tinha se tornado tão bem estabelecida que já existia uma firma de banqueiros internacionais em 575 a.C, com os escritórios centrais na Babilônia. Sua renda era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso de seu dinheiro para o financiamento do comércio internacional. O juro não é apenas uma das nossas mais antigas aplicações da Matemática Financeira e Economia, mas também seus usos sofreram poucas mudanças através dos tempos. Isso deixa claro que os problemas de matemática financeira podem ser estudados via progressão geométrica ou via função exponencial.

Em outra tábua de Louvre, datando por volta de 300 a.C., foram também encontrados dois problemas sobre progressão, segundo Eve (1997, p. 62). Um deles é expresso pela sentença (em notação atual):

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

E o outro por:

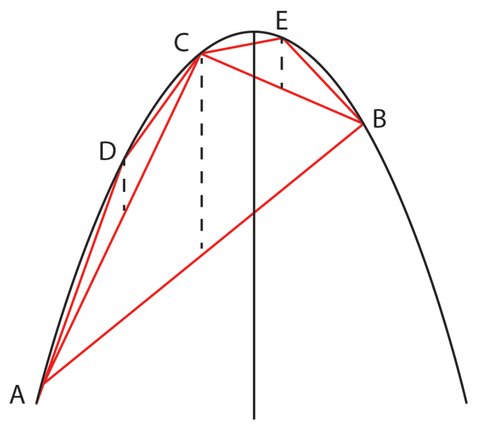
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2 = \left[1.\left(\frac{1}{3}\right) + 10\left(\frac{2}{3}\right)\right].55 = 385$$

Seria de se admirar que os babilônios conhecessem fórmulas como $\sum_0^\infty r^i = \dfrac{r^{i+1}-1}{r-1}$.

Entretanto, essa fórmula era conhecida dos gregos contemporâneos e Arquimedes encontrou resultados interessantes desse tipo.

Arquimedes, grande matemático da antiguidade, nasceu e viveu em Siracusa, uma cidade da Sicília que existe até os dias de hoje. Segundo Souza (1986), consta que ele morreu em 212 a.C. e que viveu até os 75 anos. Portanto, conclui-se que nasceu no ano 287 a.C. Siracusa era na época uma cidade-estado das muitas fundadas pelos gregos, por isso Arquimedes era um matemático grego. Mas nessa época a Grécia já tinha sido conquistada por Alexandre da Macedônia, que expandira seu império pela Ásia e Egito. Alexandre resolvera instalar a capital do império em uma cidade a ser construída na parte oeste do Delta do Nilo, o que foi feito; não por ele que morreu em 323 a.C., mas por um dos seus generais, Ptolomeu Soter, que ficou com a parte egípcia do império e iniciou uma dinastia grega no Egito. Assim, surgiu a cidade de Alexandria, centro que ficou famoso na cultura helênica, com um instituto de altos estudos e a famosa biblioteca que chegou a ter 750 mil volumes (depois destruída em 682 d.C. por um incêndio, embora nessa época já estivesse decadente por faltas de verbas públicas e em ruínas por perseguições e ações militares). Arquimedes tinha bom relacionamento com o rei Heron de Siracusa, talvez até fosse parente (daí a história sobre a coroa do rei). Siracusa nas guerras púnicas resistiu bravamente aos ataques do general Marcelo, graças, sobretudo, às máquinas de guerra inventadas por Arquimedes, mas depois de longo cerco, sucumbiu à superioridade das tropas romanas. Quanto a Arquimedes, há várias versões sobre sua morte, segundo uma delas, durante um saque da cidade em 212, ele foi morto por um sodado romano, enquanto, absorto, se ocupava de problemas matemáticos.

Foram inúmeras as descobertas de Arquimedes, entre elas uma que muito nos interessa aqui foi o aparecimento de uma série geométrica em um dos seus trabalhos, de cálculo da área de um segmento de parábola delimitado entre um arco parabólico e um segmento retilíneo determinado por dois pontos A e B.



Fonte: Ávila (1996), RPM 31, p. 8

Segundo Ávila (1996), Arquimedes procedeu da seguinte maneira: pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ traça uma paralela ao eixo da parábola, que encontra a parábola no ponto C, resultando na construção do triângulo ΔACB. Repete esse processo nos trechos AC e CB da parábola, resultando em triângulos ΔADC e ΔCEB. Repete o processo nos trechos AD, DC, CE e EB, encontrando outros 4 triângulos e, assim sucessivamente. A ideia é encontrar a área do arco da parábola como a soma de todos esses triângulos obtidos, primeiro 2 triângulos, depois 4, 8, 16, 32, 64, e assim por diante. Arquimedes prova que a soma das áreas dos triângulos em cada etapa do processo é $\frac{1}{4}$ da soma das áreas dos triângulos obtidos na etapa anterior. Assim, a soma a_1 das áreas dos dois triângulos ΔADC e ΔCEB é $\frac{1}{4}$ da área a_0 do primeiro triângulo ΔACB. A soma das áreas a_2 dos 2^2 triângulos da segunda etapa do processo é $\frac{1}{4}a_1$, e assim sucessivamente.

Desse modo, a área procurada S, sendo a_n a soma das áreas dos 2^n triângulos obtidos na n-ésima etapa do processo é:

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

$$= \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\dots\right)a_0 = \frac{a_0}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4a_0}{3}$$

Ou seja, a área do segmento de parábola delimitado pelos pontos A e B é igual a $\frac{4}{3}$ da área do triângulo nela inscrito.

Entretanto, Arquimedes não soma desta maneira todos os termos de uma série infinita. Ele teve a ideia genial de fazer a soma

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 =...+ a_n$$

E como $a_n = \frac{a_{n-1}}{4}$ temos: $a_n + \frac{a_n}{3} = \frac{4a_n}{3} = \frac{a_{n-1}}{3}$

Assim: $S_n + \frac{a_n}{3} = \left(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}\right) + \left(a_n + \frac{a_n}{3}\right) = \left(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}\right) + \frac{a_{n-1}}{3}$

Logo: $S_n + \frac{a_n}{3} = S_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{3} = S_{n-2} + \frac{a_{n-2}}{3} = \dots = a_0 + \frac{a_0}{3} = \frac{4a_0}{3}$

Atualmente, bastaria fazer $n \to \infty$, assim $S_n \to S$ e $a_n \to 0$ e obteríamos o resultado desejado $S = \frac{4a_0}{3}$. Mas estaríamos lidando com o infinito e os matemáticos gregos, em particular Arquimedes, evitavam o infinito a todo custo. Arquimedes prova este resultado mostrando que o segmento de parábola não pode ser nem maior, nem menor do que $\frac{4a_0}{3}$, tendo que ser igual. Esse procedimento é conhecido como "dupla redução ao absurdo". Isto, no entanto, não significa que Arquimedes não utilizasse métodos intuitivos, mas depois de encontrar resultados novos, ele tentava fazer demonstrações rigorosas.

Acredita-se que Pitágoras e os sábios gregos também conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmônicas e musicais. Conheciam, ainda, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença. Como consequência de várias observações, concluíram que a relação entre a altura dos sons e a largura da corda da lira seria responsável pela harmonia musical e que os intervalos musicais formavam progressões aritméticas. Aos pitagóricos se deve a teoria sobre a relação entre a música e a matemática.

O grego Euclides de Alexandria também teve grande êxito na história da matemática, produzindo a obra **Os Elementos**, uma compilação dos conhecimentos matemáticos da época. A primeira edição desse trabalho surgiu em 1482 e depois desta data já surgiram mais de mil. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado, e provavelmente exerceu grande influência no pensamento científico, afinal, por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

Da natureza de seu trabalho pode-se presumir que tenha estudado com discípulos de Platão, ou na própria Academia. Proclo (410-485 d.C.), que escreveu comentários sobre Os Elementos, foi obrigado a apresentar raciocínios de plausibilidade para afirmar que Euclides viveu durante o reinado de Ptolomeu I Sóter do Egito (304-285 a.C.). Ele ainda afirma que Euclides precedeu Arquimedes (287-212 a.C.), pois Arquimedes cita Os Elementos.

Essa obra se compõe de 465 proposições distribuídas em treze livros, e é no livro VIII que encontramos as proporções contínuas e Progressões Geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica.

O problema 21 do livro IV diz: "Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um quadrado". Segundo o autor do problema a resposta é 81/7, 144/7 e 256/7.

A proposição 35 do livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém uma fórmula para a soma de números em "progressão geométrica", expressa em termos elegantes mas poucos usuais:

> "*Se tantos números quantos quisermos estão em proporção* continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem".

Foram várias as contribuições de diversos matemáticos ao longo da história para o estudo das sequências, principalmente de progressões aritméticas e geométricas. Até na doutrina Darwiniana podemos encontrar as progressões aritméticas e geométricas. Uma referência encontrada no Darwinismo refere-se a uma influência das ideias de um famoso economista Thomas Malthus (1766-1834). Malthus escreveu dois ensaios que têm como princípio fundamental a hipótese de que as populações humanas crescem em **progressão geométrica**. Também estudou possibilidades de restringir esse crescimento, pois os meios de subsistência poderiam crescer somente em **progressão aritmética**. Suas obras exerceram influência em vários campos do pensamento e forneceram a chave para a teoria evolucionista de Darwin, que afirmou: "devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar-se-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos – seleção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros". Atualmente, sabe-se que, apesar da taxa de crescimento populacional ser maior que a taxa de produção de alimentos, não há uma desproporção tão grande quanto à comparação feita por Malthus, o que tornou a teoria malthusiana inaceitável nos dias de hoje.

Vemos, portanto, que as progressões foram desenvolvidas estabelecendo conexões entre os diversos conceitos matemáticos e ainda buscando sua relevância cultural, no que diz respeito às suas aplicações dentro e fora da Matemática. Na sociedade contemporânea as progressões apresentam diversas aplicações. Por exemplo, as progressões geométricas estão presentes em várias situações envolvendo crescimento de bactérias, aplicações financeiras, fractais, entre outros.

Introdução

Vamos ver inicialmente o que são progressões aritméticas, que por serem antes de tudo uma sequência, interessa saber o que as caracteriza como progressão aritmética, que a forma de constituição da sequência: a diferença de dois termos consecutivos ser uma constante, denominada razão da progressão aritmética e denotada por r. A partir disso, podemos deduzir as expressões de termo geral e da soma de n termos de uma progressão aritmética.

Em seguida, veremos o que são progressões geométricas, que também por serem uma sequência, interessa saber o que caracterizam as progressões geométricas: o quociente do termo subsequente pelo anterior ser uma constante, denominada razão da progressão geométrica e denotada por q. A partir disso, deduzimos as expressões do termo geral, da soma de n termos, do produto de n termos, bem como o da soma de infinitos termos, no caso da progressão geométrica convergente.

Precisamos saber todas estas expressões? É bom, mas elas podem sempre ser consultadas. Acima de tudo é muito importante compreender o seu significado, o que facilita a manipulação algébrica em uma resolução de exercícios sobre progressões.

Além disso, veremos os principais resultados dessas definições e deduções, como também alguns teoremas importantes. Não faltarão exemplos variados, evidenciando as resoluções, para mostrar o tipo de desenvolvimento e raciocínio utilizados, visando auxiliar a aprendizagem significativa desses conceitos.

Alguns exemplos foram cuidadosamente escolhidos por mostrarem aplicações úteis na prática, em situações cotidianas.

Progressões aritmética e geométrica

Progressões aritméticas e geométricas são sequências, cada uma com um tipo especial de padrão. Portanto, vão se comportar como sequências, quer sejam finitas ou infinitas, obedecendo ao padrão que as caracteriza e apresentando propriedades específicas. Vejamos:

Exemplo 1

Quando precisamos tomar um medicamento de 3 em 3 horas, e começamos às 7 horas, por exemplo, então teremos que repeti-lo ao longo do dia nos horários: 10, 13, 16, 19 e 22 horas.

Observamos que:

$$\begin{aligned} 10 &= 7 + \mathbf{3} \\ 13 &= 10 + \mathbf{3} \\ 16 &= 13 + \mathbf{3} \\ 19 &= 16 + \mathbf{3} \\ 22 &= 19 + \mathbf{3} \end{aligned}$$

A sequência finita (7, 10, 13, 16, 19, 22) forma uma **progressão aritmética**. Esse é o tipo de padrão: termos consecutivos diferem por um valor constante.

Exemplo 2

Os sons musicais são representados por sinais chamados notas.

Para indicar a duração dos sons, são dadas formas diferentes às notas musicais. Assim, as formas figuradas das notas são sete, como indica o quadro.

Semibreve	𝅝	Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯
Mínima	𝅗𝅥	Fusa	𝅘𝅥𝅰
Semínima	♩	Semifusa	𝅘𝅥𝅱
Colcheia	♪		

A unidade de valor rítmico é a semibreve. Cada nota vale a metade da precedente, na citada ordem. Podemos representar esses valores por uma sequência finita: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$

Acima de tudo observemos o padrão:

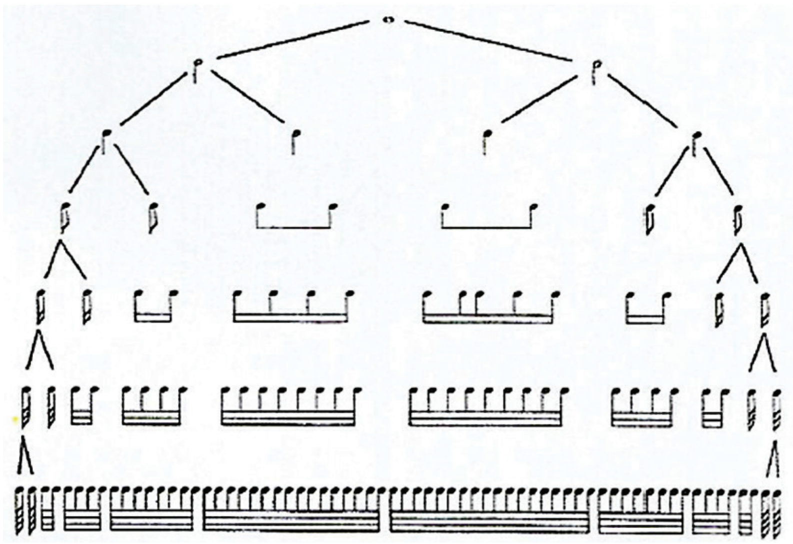
$$\frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \frac{1}{32} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \qquad \frac{1}{64} = \frac{1}{32} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

A sequência $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right)$ forma uma **progressão geométrica** e apresenta um seguinte padrão: termos consecutivos, a partir do primeiro, são obtidos multiplicando-se o anterior por um número constante.

Veja na configuração o que ocorre nesse exemplo em particular:



Fonte: Carvalho (1997, p. 31)

Vamos ver cada tipo de progressão em suas particularidades e propriedades.

Progressões aritméticas

Definição 1

A progressão aritmética (PA) é toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se um valor constante r, denominado razão.

Assim, se a é o primeiro termo, podemos definir uma PA pela fórmula de recorrência, para todo $n \geq 1$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = a \\ \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}_{n-1} + r \end{cases}$$

Mas podemos também deduzir, a exemplo do que fizemos na unidade 1, a expressão do termo geral a_n em função do número de termos. Para tal, basta verificarmos que PA segue o padrão representado na tabela a seguir:

1º Termo	a_1	a_1
2º Termo	a_2	$a_1 + r$
3º Termo	a_3	$a_1 + 2r$
4º Termo	a_4	$a_1 + 3r$
⋮	⋮	⋮
nº Termo	a_n	$a_1 + (n - 1)\, r$

Podemos concluir que: numa progressão aritmética em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o termo geral será: $a_n = a_1 + (n - 1)\, r$.

São comuns na vida real grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempos iguais, como no exemplo a seguir.

Exemplo 3

O cometa Halley "visita" a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem aqui foi em 1986. Quantas vezes ele 'visitou' a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi a sua primeira aparição na era cristã?

Os anos de passagem do cometa foram: 1986, 1910, 1834, 1758, ... que formam uma PA de razão $r = -76$. O termo de ordem n é $a_n = 1986 - 76\,(n - 1) = 2062 - 76n$.

Buscamos $a_n > 0 \Rightarrow n < \dfrac{2062}{76} \cong 27{,}1316$. Logo, os termos positivos desta progressão são os primeiros 27: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{27}$.

Portanto, o cometa Halley 'visitou' a Terra 27 vezes na era cristã e sua primeira aparição foi no ano $a_{27} = 2062 - 76.27 = 2062 - 2052 = 10$ d.C.

Obs: Segundo Lima (1999), poderíamos também ter resolvido esta questão aproveitando o fato de os termos da progressão aritmética serem inteiros positivos de razão não nula, pois nessas condições, todos os termos dão o mesmo resto quando divididos pela razão. Daí, como $\frac{1986}{76}$ deixa resto 10, a primeira visita ocorreu entre os anos 1 e 76, inclusive. Dentre estes, o único que deixa resto 10 quando dividido por 76 é o ano 10. Para concluir e encontrar a ordem deste termo, basta usar a fórmula do termo geral:

$$10 = 1986 - 76(n-1) \Rightarrow 10 = 2062 - 76n \Rightarrow 76n = 2052 \Rightarrow n = \frac{2052}{76} \Rightarrow n = 27.$$

Exemplo 4

(Unicamp-2013-fase2-adaptado) Em 14 de outubro de 2012, Felix Baumgartner quebrou o recorde de velocidade em queda livre. O salto foi monitorado oficialmente e os valores obtidos estão expressos de modo aproximado na tabela a seguir.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4
Velocidade (km/h)	0	35	70	105	140

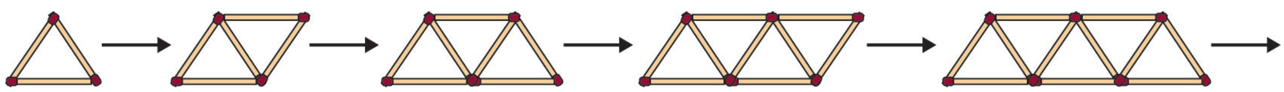
Supondo que a velocidade continuasse variando de acordo com os dados da tabela, encontre o valor da velocidade, em km/h, no 30° segundo.

Analisando a variação da velocidade descrita na segunda linha da tabela, em relação ao tempo t, vemos que seus valores formam uma PA, cujo primeiro termo $a_1 = 35$ e a razão $r = 35$. Portanto, para $t = 30s$ temos:

$$V = 35 + (30-1).35 \Rightarrow V = 35 + 29.35 \Rightarrow V = 35 + 1015 \Rightarrow V = 1050\ Km/h.$$

Exemplo 5

Observe a sequência de triângulos formada por palitos de fósforos.



Qual é a fórmula que representa a quantidade de palitos em função do número de triângulos?

Vamos observar a tabela que indica esta relação:

t	1	2	3	4	5
p	3	5	7	9	11

É possível notar que, a cada triângulo colocado a mais, aumenta em duas unidades o número de palitos. Portanto, a quantidade de palitos na sequência de triângulos caracteriza uma progressão aritmética, cujo primeiro termo é $a_1 = 3$ e a razão é $r = 2$. Portanto, temos: $a_n = 3 + 2(n-1) = 1 + 2n$, onde a_n fornece a quantidade de palitos para compor o n-ésimo triângulo t_n.

E se quisermos saber o número de palitos necessários para compor toda a sequência de triângulos: $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$? Teríamos que somar os termos da sequência $(a_n)_n$, ou seja, encontrar $S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$. Vejamos então como podemos encontrar a expressão da soma dos termos de uma PA.

Soma dos termos de uma PA finita

Em toda sequência aritmética finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, dois termos são chamados equidistantes dos extremos se o número de termos, que precedem um deles é igual ao número de termos que sucede o outro. Daí, a soma dos termos equidistantes é uma constante, como por exemplo, na sequência (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35):

5 10 15 20 25 30 35

$2 \times 20 = 40$

$15 + 25 = 40$

$10 + 30 = 40$

$5 + 35 = 40$

Portanto, a soma de quaisquer termos equidistantes é igual à soma dos termos extremos da sequência.

Podemos representar a sequência que constitui a PA da seguinte maneira:

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k,}_{k\ termos}\ a_{k+1}, \ldots,\ a_{n-k}, \underbrace{a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n}_{k\ termos}$$

E, portanto:

Teorema 1

Em toda progressão aritmética com um número finito de termos, a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos termos dos extremos.

$$a_{k+1} + a_{n-k} = a_1 + a_n,\ k < n$$

Além disso, como a_{k+1} e a_{n-k} são equidistantes dos extremos, vamos ver o que ocorre com a soma dos índices de termos equidistantes dos extremos:

$$(k + 1) + (n - k) = n + 1$$

Também em consequência deste teorema temos o seguinte:

Corolário 1

Em toda PA finita com número ímpar de termos, o termo médio é a média aritmética dos termos extremos.

Podemos ver isto claramente no exemplo anterior em que $20 = \dfrac{5+35}{2} = \dfrac{40}{2}$.

Fórmula da Soma de uma PA

Teorema 2

A soma dos n primeiros termos de uma PA, cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é r, é: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

Demonstração: Vamos escrever a soma dos n primeiros termos de uma PA.

$$\oplus \begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{cases}$$

Portanto:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots +$$
$$+ (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Como temos n parênteses cuja soma é igual à soma dos extremos (observe que a soma dos índices de cada parênteses é igual a $n + 1$, garantindo que os respectivos termos são equidistantes dos extremos), concluímos:

$$2S_n = n \,.\, (a_1 + a_n)$$

Chegamos ao que queríamos demonstrar:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Como $a_n = a_1 + (n - 1)\, r$, podemos também escrever a fórmula equivalente:

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n] = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)r] = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

Dessa forma:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

Exemplo 6

Encontre a soma dos 30 primeiros termos da seguinte sequência: 10, 17, 24, 31, 38, ...

Vemos que a sequência é uma PA cujo primeiro termos é $a_1 = 10$ e a razão é $r = 7$.

Dessa forma, $a_{30} = a_1 + 29.r = 10 + 29.7 = 10 + 203 = 213$

E a soma dos 30 primeiros termos é:

$$S_{30} = \frac{n}{2}(a_1 + a_{30}) = \frac{30}{2}(10 + 213) = 15.(223) = 3345$$

Exemplo 7

Escreva uma PA obtida quando se insere 6 números entre 7 e 42.

Nesse caso, queremos formar uma PA com 8 termos, cujos extremos são 7 e 42.

(7,_,_,_,_,_,_,42)

Esse tipo de problema é chamado de **Interpolação Aritmética**, o que significa inserir **meios aritméticos** entre os valores dados.

O que falta é descobrir a razão desta PA.

Vamos usar que:

$$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 42 = 7 + 7r \Rightarrow 7r = 42 - 7 \Rightarrow 7r = 35 \Rightarrow r = \frac{35}{7} \Rightarrow r = 5$$

A PA assim formada é: $(7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42)$

Exemplo 8

(VUNESP-adaptado) Duas fábricas de calçados, A e B, têm fabricado, respectivamente, 3000 pares e 1100 pares de sapatos por mês. Se a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a partir de que mês a produção de B superará a produção de A?

Vemos que as produções das duas fábricas, a partir de janeiro, vão formar uma PA.

Fábrica A: $a_1 = 3000$ e $r_A = 70 \Rightarrow a_n = 3000 + 70\,(n - 1) = 2930 + 70n$

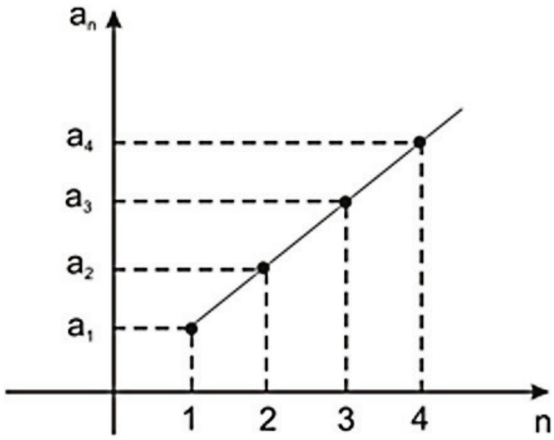
Fábrica B: $b_1 = 1100$ e $r_B = 290 \Rightarrow b_n = 1100 + 290\,(n - 1) = 810 + 290n$

Vamos encontrar n tal que $a_n = b_n$:

$$2930 + 70n = 810 + 290n \Rightarrow 220n = 2120 \Rightarrow n \cong 9{,}63$$

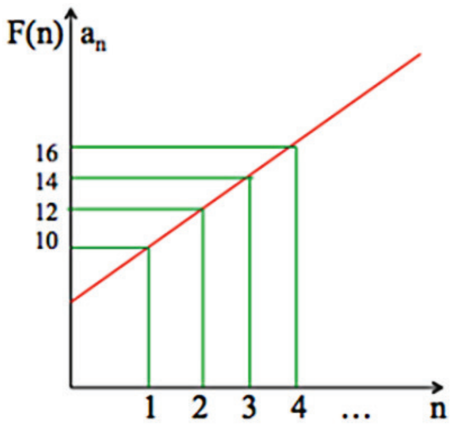
Então só no décimo mês após janeiro, ou seja, em outubro, é que a produção da fábrica B irá superar a produção da fábrica A. Atente que o mês de janeiro corresponde a $n = 1$, quando $a_1 = 3000$ e $b_1 = 1100$, logo $n = 10$ corresponde ao mês de outubro.

Essa questão poderia também ser resolvida representando graficamente num mesmo plano cartesiano as duas funções que representam as progressões aritméticas das produções das fábricas A e B e encontrando o ponto de interseção. Observe que uma PA tem como representação gráfica os pares ordenados (n, a_n) contidos no gráfico de uma função afim $y = mx + x_0$ cujo coeficiente angular $m = r$, uma vez que $m = \dfrac{a_{k+1} - a_k}{\left[\left(k + 1 - k\right)\right]} = \dfrac{a_{k+1} - a_k}{1} = r$. Ou seja, a representação gráfica de uma PA são pontos contidos em uma reta.



Veja, por exemplo, a sequência (10, 12, 14, 16, ...) que é uma PA de razão 2. Então o termo geral desta sequência é $a_n = 10 + 2(n - 1) = 2n + 8$.

Assim podemos associar essa PA com a função $F(n) = 2n + 8$, n *real* ≥ 0, cujo gráfico está a seguir. Observe que os pares ordenados (n, a_n) considerados quando n é inteiro positivo ≥ 1 representam os pontos da PA contidos na reta determinada pela função F. Essa é uma importante característica de uma PA.



Exemplo 9

Seja a PA representada por (1, 2, 3, 4, ...). Quantos termos devem ser somados para obter uma soma igual a 171.

Como é uma PA com $a_1 = 1$ e $r = 1$, queremos encontrar n tal que $S_n = 171$.

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)r\right) = \frac{n}{2}(2+n-1) = \frac{n}{2}(1+n) = 171 \Rightarrow n^2 + n = 342$$

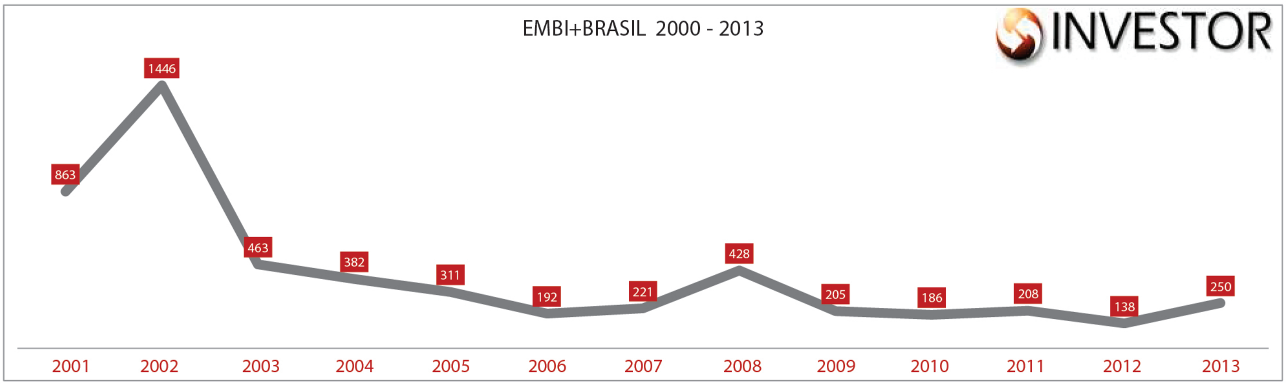
$$n^2 + n - 342 = 0 \Rightarrow n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1368}}{2} = \frac{-1 \pm 37}{2} = \begin{cases} n = 18 \\ n = -19 \end{cases}$$

Como a raiz negativa não serve, precisamos somar até o 18° termo da PA para a soma ser 171.

Exemplo 10

O gráfico a seguir indica o ‘risco- Brasil’ entre os anos 2000 e 2013. O indicador mensura o excedente que se paga em relação à rentabilidade garantida pelos bônus do governo norte-americano. A confiança ou desconfiança dos investidores estrangeiros é representada, respectivamente, se a curva decresce ou cresce no gráfico, ou seja, maior confiança-menor risco e vive versa.

INVESTOR	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
EMBI+BRASIL		863	1446	463	382	311	192	221	428	205	186	208	138	250



Fonte: investorbrasil.com

Nos dias atuais, a desconfiança no país vem aumentando e, em consequência, aumenta gradativamente o chamado ‘risco-Brasil’.

Suponha que a variação linear observada entre 2012 e 2013 (confira a seguir na parte destacada do gráfico) se repetisse nos anos subsequentes. Assim sendo, em que ano, a partir de 2012, o ‘risco-Brasil’ voltaria a atingir o valor de 1446 pontos percentuais, ocorrido em 2002?

Se considerarmos, a partir de 2012, a variação de 112 pontos percentuais ocorrida entre 2012 e 2013, termos uma PA, cujo primeiro termo é o valor ocorrido em 2012, $a_1 = 138$ e a razão é $r = 112$. Queremos saber em quantos anos atingiria o valor 1446, ou seja, para qual n o termo $a_n = 1446$.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 1446 = 138 + 112(n-1) = 26 + 112n$$

$$112n + 26 = 1446 \Rightarrow 112n = 1420 \Rightarrow n = \frac{1420}{112} \cong 12{,}67$$

Logo, só após 12 anos (no 13° ano) a contar de 2012, ou seja, no ano de 2025 o ‘risco-Brasil’ voltaria ao patamar do ano de 2002.

Exemplo 11

(UFRJ-98-adaptado) O oriental Num Ka Kay, famoso por sua inabalável paciência, deseja bater o recorde mundial de construção de castelos de cartas. Ele vai montar um castelo na forma de um prisma triangular no qual cada par de cartas inclinadas que se tocam deve estar apoiado em uma carta horizontal, excetuando-se as cartas da base, que estarão apoiadas em uma mesa. A figura a seguir apresenta um castelo em três níveis.

Fonte: iStock/Getty Images

Entretanto, Num Ka Kay quer construir um castelo com 40 níveis. Quantas cartas ele vai utilizar nessa construção?

Olhando o castelo de cartas começando de cima, para efeito de contagem, não da construção, é claro, podemos observar que no primeiro nível tem duas cartas inclinadas e uma carta na horizontal; no segundo nível, temos 4 cartas inclinadas e 2 na horizontal; no terceiro nível, temos 6 cartas inclinadas e 3 horizontais; e assim sucessivamente, sendo a única exceção a base, no nível 40, que não tem cartas horizontais. É fácil deduzir então que no nível n teremos $a_n = 2n + n = 3n$ cartas, para $1 \leq n \leq 39$ e $a_{40} = 2.40 = 80$.

Vamos verificar a razão que se mantém entre o 1° e o 39° níveis. Para tal basta verificar a diferença entre dois níveis, por exemplo, $a_2 - a_1 = 6 - 3 = 3 = r$.

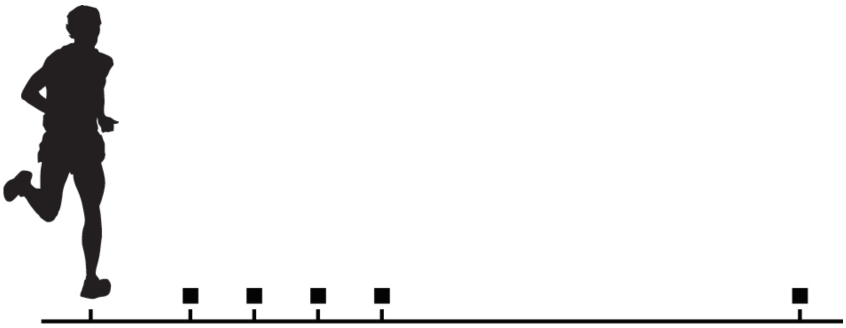
Agora precisamos encontrar a soma $S_{40} = S_{39} + a_{40}$.

$$S_{39} = \frac{39}{2}[2a_1 + 38.r] = \frac{39}{2}[2.3 + 38.3\_] = \frac{39}{2}[120] = 60.39 = 2340$$

Sendo necessárias $S_{40} = 2340 + 80 = 2420$ cartas para a construção do castelo. Exemplo 12

Exemplo 12

(UFG) Em uma gincana, 20 caixinhas estão distribuídas ao longo de uma pista retilínea, distantes 4 metros umas das outras. Um competidor, que se encontra a 5 metros da primeira caixinha, conforme figura a seguir, deve correr até esta primeira caixa, pegar um objeto e retornar ao local de partida para deixar este objeto. Em seguida, ele vai até a segunda caixinha, retira o objeto e o devolve no ponto de partida, e assim sucessivamente, até devolver o objeto da vigésima caixinha no ponto de partida. Quantos metros o competidor deverá percorrer para realizar a prova?



Fonte: Thinkstock/Getty Images

Pelas regras da prova, o competidor tem que ir e voltar do ponto de partida a cada local de uma caixinha. Esse percurso será sempre dobrado para cada caixa. O ponto de partida fica a 5 metros da primeira caixa e cada caixa dista 4 metros da seguinte. Então teremos:

$$a_1 = 2(5);\ a_2 = 2(5 + 1.4);\ a_3 = 2(5 + 2.4);\ ...\ ;\ a_n = 2(5 + 4\ (n - 1))$$

Logo: $a_1 = 10$, $a_{20} = 2(5 + 4.19) = 2(5 + 76) = 162$

e $S_{20} = \frac{20}{2}[a_1 + a_{20}] = 10(10 + 162) = 1720$ metros de percurso na prova toda.

Exemplo 13

Se $3 - x, -x, \sqrt{9 - x}$ são os três primeiros termos de uma PA, encontre o valor de x e dê o quinto termo dessa PA.

Uma das propriedades de uma PA é a diferença entre dois termos consecutivos ser uma constante r, a razão da PA. Temos:

$$-x - (3 - x) = \sqrt{9 - x} - (-x)$$

$$-x - 3 = \sqrt{9 - x} \Rightarrow (-x - 3)^2 = \left(\sqrt{9 - x}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 9 - x \Rightarrow x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -7 \end{cases}$$

Para $x = 0 \Rightarrow 3, 0, 3$ não é PA.

Para $x = -7 \Rightarrow 10,\ 7,\ 4$ é uma PA de razão $r = -3$. Logo $a_5 = -2$.

Exemplo 14

Quantos números inteiros existem, entre 84 e 719, que são múltiplos de 5?

O primeiro múltiplo de 5 , entre 84 e 719, é o 85. A partir daí temos que encontrar uma PA, com primeiro termo 85 e razão 5 e achar o número de termos desta sequência até 715, que é o último múltiplo de cinco menor que 719. Logo: $a_1 = 85$, $a_n = 715$ e $r = 5$. Como é uma PA, sabemos que $a_n = a_1 + (n-1).r$.

Portanto: $715 = 85 + 5(n-1) \Rightarrow 715 = 80 + 5n \Rightarrow 5n = 635 \Rightarrow n = 127$. Logo, existem 127 múltiplos de 5 entre os números 84 e 719.

Definição 2

Define-se para sequências o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta_{a_n} = a_{n+1} - a_n$.

Uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, Δ_{a_n} é uma constante. Isso é fácil de ver, pois:

$$(a_n) \text{ é PA} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = r,\ r\, constante \Leftrightarrow \Delta_{a_n}\ é\, constante$$

Definição 3

Uma **progressão aritmética de segunda ordem** é uma sequência (a_n) na qual as diferenças $\Delta_{a_n} = a_{n+1} - a_n$, entre cada termo e seu anterior formam uma progressão aritmética não estacionária (não nula).

Em outras palavras:

(a_n) é uma PA de segunda ordem (ou ordem 2) $\Leftrightarrow \Delta_{a_n}$ é uma PA.

De uma maneira geral:

Uma sequência (a_n) é uma PA, de ordem $k \Leftrightarrow \Delta_{a_n}$ é uma PA de ordem $(k-1)$.

Exemplo 15

Considere a sucessão (b_n) dada por (1, 5, 10, 16, 23, 31, ...). Essa sucessão é uma PA de segunda ordem, pois a sequência $\left(\Delta_{b_n}\right)$, definida por $\Delta_{b_n} = b_{n+1} - b_n$, é igual a (4, 5, 6, 7, 8, ...) que é uma PA de primeira ordem.

Exemplo 16

(Lima, 1999, p.8). Considere a sequência (a_n), definida por $a_n = n^3 - n$, e as suas diferenças $\left(\Delta_{a_n}\right)$, $\left(\Delta^2 a_n\right) = \left(\Delta\Delta_{a_n}\right)$, $\left(\Delta^3 a_n\right) = \left(\Delta\Delta^2 a_n\right)$ representadas na tabela a seguir:

n	a_n	Δ_{a_n}	$\Delta^2 a_n$	$\Delta^3 a_n$
0	0	0	6	6
1	0	6	12	6
2	6	18	18	6
3	24	36	24	6
4	60	60	30	■
5	120	90	■	
6	210	■		
7	■			

Se $\left(\Delta^3 a_n\right)$ é constante, então $\left(\Delta^2 a_n\right)$ é uma PA, $\left(\Delta_{a_n}\right)$ é uma PA de segunda ordem e (a_n) é uma PA de terceira ordem. Isto de fato ocorre, pois:

$$a_n = n^3 - n$$

$$\Delta_{a_n} = a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - (n+1) - \left[n^3 - n\right] = 3n^3 + 3n$$

$$\Delta^2 a_n = 3(n+1)^3 + 3(n+1) - \left[3n^3 + 3n\right] = 6n + 6$$

$$\Delta^3 a_n = 6(n+1) + 6 - [6n + 6] = 6$$

Obs: Os elementos assinalados por ■ que podem ser calculados, da direita para a esquerda, são iguais a: 6, 30 + 6 = 36, 90 + 36 = 126, 210 + 126 = 336. Portanto, $a_7 = 336 = 7^3 - 7$.

Agora veremos outro tipo de progressão, com suas propriedades e aplicações.

Progressões geométricas

Definição 4

Uma **progressão geométrica (PG)** é toda sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante dada.

Assim, se a é o primeiro termo e a constante dada é q, chamada razão, podemos definir a PG pela seguinte fórmula de recorrência, para todo $n \geq 1$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = a \\ \boldsymbol{a}_{n+1} = \boldsymbol{a}_n . q \end{cases}$$

Mas podemos também deduzir a expressão do termo geral a_n em função do número de termos. Para tal, basta verificarmos que uma PG segue o padrão representado na tabela a seguir:

1º Termo	a_1	a_1
2º Termo	a_2	$a_1 . q$
3º Termo	a_3	$a_1 . q^2$
4º Termo	a_4	$a_1 . q^3$
⋮	⋮	⋮
nº Termo	a_n	$a_1 . q^{n-1}$

Podemos concluir que: numa progressão geométrica em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o termo geral será:

$$a_n = a_1 . q^{n-1}$$

Podemos ainda concluir que: $\begin{cases} q > 1, \text{ a PG é crescente} \\ q < 1, \text{ a PG é decrescente} \\ q = 1, \text{ a PG é estacionária} \end{cases}$

Exemplo 17

(Telecurso 2000- Fundação Roberto Marinho)

Existem bactérias que se reproduzem de forma extremamente rápida. Um exemplo é a bactéria causadora da sífilis (chamada *treponema pallidum*): cada uma se transforma em 8 iguais, no período de 1 hora. Se uma bactéria desse tipo começa a se reproduzir, quantas serão 12 horas depois, supondo que nenhuma delas tenha morrido?

Vemos que a população de bactérias aumenta a cada hora, por reprodução assexuada, formando uma PG de razão $q = 8$. Assim, temos:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 8,\ a_3 = 8^2,\ a_4 = 8^3,\ \ldots,\ a_n = 8^{n-1}$$

Após 12 horas, teremos $a_{13} = 8^{12} = 68.719.476.736$ bactérias.

Exemplo 18

No cassino de um cruzeiro marítimo são disputadas 10 rodadas em uma noite. Na primeira, o valor do prêmio é de R$ 500,00. Sabendo que os valores dos prêmios aumentam segundo uma PG, qual será o valor da última rodada, se na quinta o prêmio é de R$ 8.000,00?

Vemos que $a_1 = 500$ e $a_5 = 8.000$ e como $a_5 = a_1 \cdot q^4$, temos:

$$500.q^4 = 8000 \Rightarrow q^4 = \frac{8000}{500} = 16 \Rightarrow q = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

Assim, $a_{10} = a_1.q^9 = 500.2^9 = 500.(512) = 256.000$

O valor do prêmio da décima rodada é R$ 256.000,00.

Interpolação geométrica

Inserir ou interpolar k termos geométricos entre dois números a e b significa obter a PG, de $k + 2$ termos de extremos a e b. Para realizar a interpolação basta determinar qual é a razão da PG:

$$a_1 = a,\ a_{k+2} = b \Rightarrow b = a \cdot q^{k+2-1} \Rightarrow \boldsymbol{q^{k+1} = \frac{b}{a}}$$

Dá para dizer que a interpolação geométrica se resume a achar a razão da PG.

Exemplo 19

Inserir 4 meios geométricos entre 2 e 486. Queremos, então, encontrar a razão q: $q^5 = \frac{486}{2} = 243 \Rightarrow q = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3.$

Logo, a PG resultante é: (2, **6**, **18**, **54**, **162**, 486)

Exemplo 20

Complete a sequência $(800, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, 25)$ de forma que seja uma PG. Vamos encontrar a razão:

$$a_6 = a_1.q^5 \Rightarrow 25 = 800.q^5 \Rightarrow q^5 = \frac{25}{800} = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Sendo assim, a PG é: (800, **400**, **200**, **100**, **50**, 25).

Fórmula do produto

O conceito de termos equidistantes dos extremos é válido para qualquer tipo de sequência finita.

Teorema 3

Em toda progressão geométrica finita, o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

$$a_{k+1} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$$

Corolário 2

Em toda PG finita com um número ímpar $(2k + 1)$ de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

$$a^2_{k+1} = a_1 \cdot a_{2k+1}$$

Exemplo 21

Considere a sequência (3, 6, 12, 24, 48). Vemos que é uma PG de razão 2. Observe que os termos equidistantes dos extremos, 6 e 24, satisfazem:

$$6.24 = 3.48 = 144$$

Além disso, como a PG tem um número ímpar de termos, vale:

$$12^2 = 6.24 = 144$$

Principais propriedades das progressões geométricas

Propriedade 1	Em toda PG, um termo é a média geométrica dos termos imediatamente anterior e posterior.
Propriedade 2	O produto de termos equidistantes dos extremos de uma PG é constante.
Propriedade 3	A sequência (a, b, c), com $a \neq 0$ é uma PG se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos, isto é, $b^2 = a \cdot c$.
Propriedade 4	A sequência (a, b, c), é uma PG de razão $q \neq 0$ se, e somente se, $a = \dfrac{b}{q}$ e $c = b \cdot q$.

Exemplo 22

Qual número deve ser somado a 1, 9 e 15 para que se tenha, nessa ordem, três números em PG?

Para que $(x + 1, x + 9, x + 15)$ seja uma PG, temos que ter:

$$\frac{x+9}{x+1} = \frac{x+15}{x+9} \Rightarrow (x+9)^2 = (x+1).(x+15)$$

$$x^2 + 18x + 81 = x^2 + 16x + 15 \Rightarrow 2x = -66 \Rightarrow x = -33$$

Teorema 4

O produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, cujo primeiro é a_1 e a razão é q é:

$$|P_n| = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$$

Demonstração

Vamos procurar a fórmula do produto dos n primeiros termos de uma PG.

$$\oplus\begin{cases} P_n = a_1.a_2.a_3 \ldots\ldots a_{n-2}.a_{n-1}.a_n \\ P_n = a_n.a_{n-1}.a_{n-2} \ldots\ldots a_3.a_2.a_1 \end{cases}$$

$$P_n^2 = (a_1.a_n).(a_2.a_{n-1}).(a_3.a_{n-2}).\ldots.(a_{n-2}.a_3).(a_{n-1}.a_2).(a_n.a_1)$$

Usando o resultado de produto de temos equidistantes dos extremos temos:

$$P_n^2 = \underbrace{(a_1.a_n).(a_1.a_n).(a_1.a_n).\ldots.(a_1.a_n).(a_1.a_n).(a_1.a_n)}_{n \text{ fatores iguais}}$$

$$P_n^2 = (a_1.a_n)^n \Rightarrow |\boldsymbol{P_n}| = \sqrt{(\boldsymbol{a_1.a_n})^{\boldsymbol{n}}}$$

Dessa fórmula podemos extrair outra se usarmos $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$|P_n| = (a_1.a_n)^{\frac{n}{2}} = \left[a_1.a_1.q^{n-1}\right]^{\frac{n}{2}} = \left[a_1^2.q^{n-1}\right]^{\frac{n}{2}} = |a_1|^n.|q|^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Ou seja:

$$|P_n| = |a_1|^n.|q|^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Falta analisarmos o sinal do produto. Claro que se algum termo for nulo, o produto é nulo. Suponhamos que todos os termos sejam não nulos, então:

a) $a_1 > 0$ e $q > 0 \Rightarrow$ todos os termos da PG são positivos $\Rightarrow P_n > 0$.

b) $a_1 < 0$ e $q > 0 \Rightarrow$ todos os termos da PG são negativos $\Rightarrow \begin{cases} P_n > 0, n\ par \\ P_n < 0, n\ ímpar \end{cases}$

c) $a_1 \neq 0$ e $q < 0 \Rightarrow$ PG é alternante e notando que cada grupo de quatro termos consecutivos dá um produto parcial positivo, temos:

$$\begin{cases} n = 4k \Rightarrow P_n > 0 \\ n = 4k+1 \Rightarrow P_n \text{ e } a_1 \text{ têm mesmo sinal} \\ n = 4k+2 \Rightarrow P_n < 0 \\ n = 4k+3 \Rightarrow P_n \text{ e } a_1 \text{ têm sinais contrários} \end{cases}$$

Exemplo 23

Calcular o produto

i) Dos 15 primeiros termos da PG (–3, –9, –27, –81, ...)

Vemos que é uma PG com $a_1 = -3 < 0$ e $q = 3 > 0$ e queremos calcular o P_{15}.

$$|P_{15}| = |a_1|^{15}.|q|^{\frac{15(15-1)}{2}} = 3^{15}.3^{105} = 3^{120}$$

Quanto ao sinal de P_n, como $a_1 < 0, q > 0$ e $n = 15$, que é ímpar, pelo item (b) concluímos que P_n é negativo, portanto, $P_{15} = -3^{120}$.

ii) Dos 21 primeiros termos da PG (3, –6, 12, –24, 48, –96, ...)

Agora temos uma PG com $a_1 = 3 > 0$ e $q = -2 < 0$ e queremos calcular o P_{21}.

$$|P_{21}| = |a_1|^{21}.|q|^{\frac{21(21-1)}{2}} = 3^{21}.2^{210}$$

É uma PG alternante e $n = 21 = 4.5 + 1$, então P_{21} tem o sinal de $a_1 > 0$. Logo, $P_{21} = 3^{21} . 2^{210}$.

Teorema 5

A sequência (b_n) é uma progressão geométrica de termos positivos se, e somente se, a sequência (a_n), definida por $a_n = log(b_n)$, é uma progressão aritmética.

Demonstração

Seja (b_n) uma PG de termos positivos, então $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, com $q \neq 1$ a razão da PG, que é uma constante. Para que a sequência (a_n) com $a_n = log(b_n)$ seja uma PA, a diferença $a_{n+1} - a_n$ tem que ser constante. Mas:

$$a_{n+1} - a_n = log(b_{n+1}) - log(b_n) = log\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = log(q),$$ com $q \neq 0$ que é uma constante.

Por outro lado, se (a_n) é uma PA, então $a_{n+1} - a_n = r$, constante. Então

$$a_{n+1} - a_n = log(b_{n+1}) - log(b_n) = r \Leftrightarrow log\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = r \Leftrightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = e^r,$$ que é constante e, portanto (b_n) é uma PG de razão $q = e^r$.

Fórmula da soma de uma PG

Teorema 6

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é a_1 e cuja razão é q, $q \neq 1$ é:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 .\ q^n}{1-q}$$

Demonstração

Vamos somar os n primeiros termos dessa PG.

$$-\begin{cases} S_n = a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + \ldots + a_1.q^{n-3} + a_1.q^{n-2} + a_1.q^{n-1} \\ q.S_n = a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \ldots + a_1.q^{n-2} + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n \end{cases}$$

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1.q^n \Rightarrow S_n.(1-q) = a_1 - a_1.q^n \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1.q^n}{1-q} = \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$$

Podemos também representar essa fórmula assim:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Ou ainda, substituindo $a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1.q^{n-1}.q}{1-q} = \frac{a_1 - a_n.q}{1-q}$

Logo, podemos também representar S_n:

$$S_n = \frac{a_1 - a_n .\ q}{1-q}$$

Exemplo 24

Determine a soma dos vinte primeiros termos da PG ($2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$)

Vemos que $a_1 = 2^{-2}$ e $q = 2$ e queremos encontrar S_{20}.

$$S_{20} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q} = \frac{2^{-2}(1-2^{20})}{1-2} = \frac{1}{2^2}(2^{20}-1) = 2^{18} - \frac{1}{4} = 262.143,75$$

Série geométrica infinita

Na unidade de séries numéricas tratamos de séries geométricas. No entanto, vamos relembrar seu principal resultado.

Teorema 7

Considere a série geométrica infinita $\sum_1^{\infty} a_n q^{n-1}$

a) Se $|q| < 1$, a série converge e sua soma é $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

b) Se $a_1 = 0$, a série converge e sua soma é zero.

c) Se $|q| \geq 1$ e $a_1 \neq 0$, a série diverge.

Demonstração

Se $a_1 = 0$ a série converge trivialmente para zero. Vamos considerar $a_1 \neq 0$.

Se $|q| = 1$, temos séries divergentes $\sum_1^{\infty} a_1$ ou $\sum_1^{\infty} (-1)^{n+1} .a_n$.

Vamos considerar $|q| \neq 1$ e $a_1 \neq 0$. Como o termo geral da sequência de somas parciais é $S_n = \dfrac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$, basta calcular o limite de S_n quando $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.\lim_{n\to\infty}(1-q^n)$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^n) = \begin{cases} 1, & se|q|<1 \\ não\, existe, & se|q|>1 \end{cases}$

Portanto, se $|q| \geq 1$ e $a_1 \neq 0$, a série diverge e se $|q| < 1$ a série converge e sua soma é $S = \dfrac{a_1}{1-q}.\lim\limits_{n\to\infty}(1-q^n) = \dfrac{a_1}{1-q}.1 = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Podemos concluir:

Uma série geométrica infinita converge se $|q| < 1$ e sua soma é:

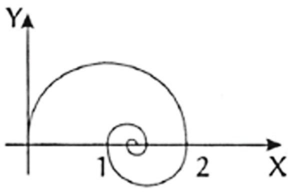
$$S = \frac{a_1}{1-q}, se|q|<1$$

Exemplo 25

Na figura a seguir temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Sabendo que o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, encontre:

a) O comprimento da espiral até o oitavo semicírculo.

b) O comprimento da espiral infinita.



Vamos lembrar que o comprimento de uma semicircunferência é $c = \pi r$. Sendo assim, a progressão geométrica que temos é formada pelos comprimentos das semicircunferências cujos raios estão em PG de razão $\frac{1}{2}$.

Então temos a sequência $\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots\right)$ que é uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$ e $c_1 = \pi$.

a) $S_8 = \dfrac{c_1.\left(1-q^8\right)}{1-q} = \dfrac{\pi.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi\left(1-\frac{1}{256}\right)}{\frac{1}{2}} = 2\pi\left(\dfrac{255}{256}\right) \cong 2\pi\left(0{,}9961\right) \cong 6{,}2587$

b) $S = \dfrac{c_1}{1-q} = \dfrac{\pi}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

Pode-se perceber nesse exemplo que as somas parciais dos comprimentos dos semicírculos da espiral vão tendendo, por valores inferiores, para o comprimento total da espiral que é 2π, exatamente o comprimento do círculo todo inicial de raio 1.

Exemplo 26

(UnB-adaptado) Conta uma lenda que o rei de certo país ficou tão impressionado ao conhecer o jogo de xadrez que quis recompensar seu inventor, dando-lhe qualquer coisa que pedisse. O inventor disse ao monarca que bastava lhe dar a quantidade de trigo suficiente para preencher as casas do tabuleiro de xadrez da seguinte forma: um grão na primeira casa, dois grãos na segunda casa, três grãos na terceira casa e assim sucessivamente, até chegar à 64ª casa do tabuleiro. O rei considerou o pedido bastante simples e ordenou aos súditos que providenciassem o pedido. Resolva:

a) Você acha que o pedido pode ser cumprido?

b) Supondo que um grão de trigo tem massa igual a 0,05g e sabendo que a produção global de trigo da safra 2014/15 prevista pelo USDA (Departamento de Agricultura dos Estados Unidos) é da ordem de 700 milhões de toneladas, compare este valor com a quantidade a ser entregue ao inventor.

Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas e a progressão dos grãos de trigo sobre o tabuleiro formam uma PG de razão 2 e $a_1 = 1$, a saber, $(2^0, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots, 2^{63})$

Temos que encontrar a soma:

$$S_{64} = \frac{a_1.\left(1-q^{64}\right)}{1-q} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

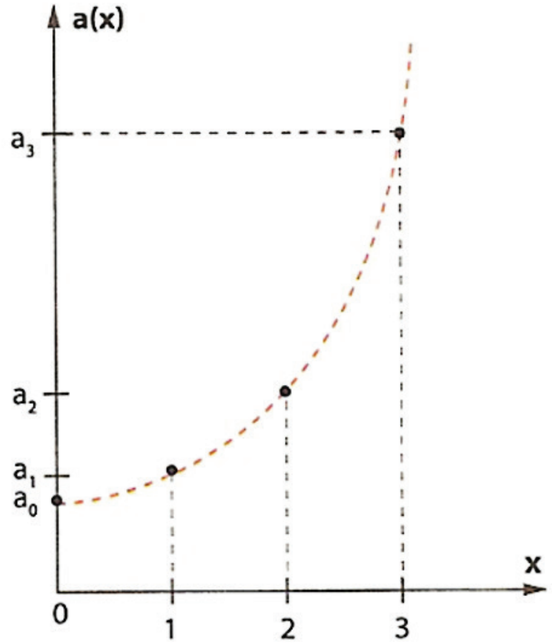
Ficaram espantados? Pois é, a exorbitante quantidade da ordem de 18 quintilhões de grãos, isto se ainda desconsiderarmos os quase 450 quadrilhões de grãos, quantia nada desprezível, não acham? Com certeza, o pedido do inventor não pode ser cumprido.

Para termos e comparação, simplificando bastante, vamos considerar a quantidade de grãos pedida pelo inventor como $18{,}4.10^{18}$ grãos e, como cada grão tem massa de 0,05g, isto corresponde a $(18{,}4.10^{18}) . (5.10^{-2}) = 92.10^{16}$ gramas.

Mas cada 1 grama equivale a 10^{-6} toneladas, portanto, a massa total seria de 92.10^{10} toneladas ou 920.10^9 toneladas. Em outras palavras, 902 bilhões de toneladas, logo, mais de mil vezes a produção mundial de trigo prevista para a safra de 2014/15.

É interessante trabalharmos com esses números muito grandes para vermos o efeito de uma progressão geométrica de razão maior do que 1. E notem que a razão nesse caso era apenas 2.

Podemos pensar uma PG como essa em que $a_n = a_0 \cdot q^n$ como os pontos de uma função a $(x) = a_0 \cdot q^x$ quando restringimos seu domínio aos números naturais, portanto, os pares ordenados (n, a_n), com $n \geq 0$ estarão contidos no gráfico dessa função, como podemos ver na representação gráfica a seguir, para $q > 1$.



Claro que se $q < 1$ a função é decrescente, mas de qualquer forma, funções exponenciais crescem ou decrescem muito rapidamente.

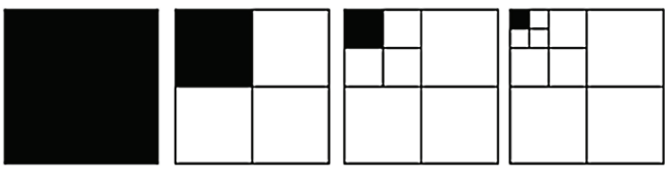
Importante!

Uma PA tem como representação gráfica os pares ordenados, correspondentes às abscissas naturais, contidos em uma função afim, ou seja, em uma reta.

Uma PG tem como representação gráfica os pares ordenados, correspondentes às abscissas naturais, contidos em uma função exponencial.

Exemplo 27

(UFPEL) O lado do primeiro quadrado mede **L**. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtêm-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme indica a figura, que mostra parte de uma sequência infinita. Encontre a soma dos perímetros de todos os infinitos quadrados escuros da sequência.



Observemos que o lado de um quadrado em uma determinada posição é sempre igual à metade do lado do quadrado na posição imediatamente anterior. Logo, está em PG de razão $\frac{1}{2}$. Como o perímetro de um polígono é a soma das medidas dos seus lados, os perímetros desses quadrados estão em PG também de razão $\frac{1}{2}$ da forma: $\left(4L, 2L, L, \frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{8}, \ldots\right)$. Na verdade, o termo geral da PG é $p_n = \frac{4L}{2^n}$, $n \geq 1$.

Queremos encontrar a soma dessa PG infinita de razão $q = \frac{1}{2} < 1$, então temos:

$$S = \frac{p_0}{1-q} = \frac{4L}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4L}{\frac{1}{2}} = 8L$$

Exemplo 28

(Unesp 2011-adaptado). Após o nascimento do filho, o pai comprometeu-se a depositar mensalmente, em uma caderneta de poupança, os valores de R\$ 1,00, R\$ 2,00, R\$ 4,00, R\$ 8,00 e assim sucessivamente até o depósito atingir o valor de R\$ 2.048,00. No mês seguinte, o pai recomeçaria os depósitos como do início e assim o faria até o 21° aniversário do filho. Não tendo ocorrido falha de depósito ao longo do período, calcule o montante dos depósitos, em reais, feitos pelo pai na caderneta de poupança para o filho.

Vamos analisar primeiro quanto tempo levou para o pai interromper o processo inicial para depois retomar da mesma maneira a cada intervalo de mesmo período de tempo. Os depósitos neste período compuseram a seguinte PG de razão 2.

$$(1, 2, 4, 8, \ldots, 2048)$$

Temos, então que $a_1 = 1$, $a_n = 2048$ e $q = 2$ e queremos encontrar n.

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2048 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^{11} = 2^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 11 \Rightarrow n = 12$ meses, ou seja, 1 ano. Então a cada ano o pai depositava um montante igual a:

$$S_{12} = \frac{a_1.\left(1-q^{12}\right)}{1-q} = \frac{1-2^{12}}{1-2} = 2^{12} - 1 = 4.095,00$$

Portanto, a cada ano o pai depositava um montante de R\$ 4.095,00.

Como fez esse tipo de depósito durante 21 anos, o montante total de depósitos foi de: 21.(4095) = 85995, ou seja, de R\$ 85.995,00

Exemplo 29

Resolva a equação:

$$x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{64} + \ldots = \frac{4}{3}$$

Observe que as parcelas da soma infinita do primeiro membro da equação formam uma PG de razão $q = -\frac{x}{2^2}$ e para que tenha soma $\frac{4}{3}$, $|q| = \frac{|x|}{4} < 1$, ou $|x| < 4$.

Mas como $S = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{x}{1+\dfrac{x}{4}} = \dfrac{4x}{4+x} \Rightarrow \dfrac{4x}{4+x} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow 12x = 4x + 16 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2.$

Veremos a seguir alguns exemplos que mostram aplicações práticas do conteúdo de progressões.

Algumas aplicações de progressões

Exemplo 30

No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R$ 600 mil e uma despesa de R$ 800 mil. Para voltar a ter lucro, a empresa pretende manter constante a receita, e reduzir suas despesas, mensalmente, em exatos R$ 45 mil. Escreva a expressão que fornece o valor da despesa em função do número de meses transcorridos, considerando como inicial o mês corrente. Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.

No mês corrente, a empresa descobriu que a despesa ultrapassou a receita e decidiu reduzir as despesas, mensalmente, em 45 mil reais, a partir desse mês corrente. Como a redução mensal é uma constante, isto forma uma PA de razão $r = -45$ (em mil reais) com termo inicial $d_1 = 800$. Portanto, a expressão que fornece o valor da despesa da empresa, após n meses, é:

$$d_n = d_1 + (n-1).r = 800 - 45(n-1) = 845 - 45n$$

Queremos saber em quantos meses a despesa será inferior à receita mantida constante no valor de 600 mil reais. Basta substituir na equação acima colocando $d_n = 600$ para encontrar n.

$$600 = 845 - 45n \Rightarrow 45n = 245 \Rightarrow n \cong 5{,}4$$

Só depois de 6 meses a despesa será inferior à receita.

Esta é uma questão simples, que facilmente poderia ser calculada; entretanto, a intenção aqui é mostrar que tal situação se configura como uma progressão aritmética.

Exemplo 31

(McCallum et al, 2011) **Saldo bancário**

Uma pessoa para poupar dinheiro para sua aposentadoria deposita R$ 5.000,00 por ano em uma caderneta de poupança que rende juros de 6% ao ano, capitalizando anualmente. Depois do primeiro depósito, mas antes de receber qualquer juro, o saldo da conta, em reais, é $b_1 = 5000$.

Depois de um ano, o primeiro depósito do novo ano recebe juros, e o saldo fica:

$$b_2 = \underbrace{5000}_{2^\circ\ depótito} + \underbrace{5000(1{,}06)}_{juros\ do\ 1^\circ\ depósito} \Rightarrow b_2 = 5000 + 5000\,(1{,}06)$$

Depois do segundo ano, é feito o terceiro depósito, e o saldo fica sendo:

$$b_3 = \underbrace{5000}_{3^\circ\ depósito} + \underbrace{5000(1,06)}_{juro\ do\ 2^\circ\ depósito} + \underbrace{5000(1,06)^2}_{juros\ do\ 1^\circ\ depósito} \Rightarrow$$

$$b_3 = 5000 + 5000(1,06) + 5000\ (1,06)^2$$

E assim sucessivamente. Seja b_n o saldo, em reais, depois de n depósitos. Então:

$$b_n = 5000 + 5000\ (1,06) + 5000\ (1,06)^2 + \ldots + 5000\ (1,06)^{n-1}$$

Quanto terá na conta essa pessoa no início do sexto ano?

$$b_6 = 5000 + 5000\ (1,06) + 5000\ (1,06)^2 + 5000\ (1,06)^3 + 5000\ (1,06)^4 + 5000\ (1,06)^5$$

$$b_6 \cong 5000\ (1 + 1,06 + 1,1236 + 1,19102 + 1,2625 + 1,3382) \cong 34.876,59$$

Exemplo 32

(McCallum et al, 2011) **Níveis de remédio no corpo**

É aplicada uma injeção de 250 mg de determinado remédio em um paciente. O corpo do paciente metaboliza 20% do remédio, de modo que, depois de 1 dia, só permanecem 80%, ou $\frac{4}{5}$, da quantidade original; depois de 2 dias, permanecem $\frac{16}{25}$, e assim por diante. É aplicada uma injeção de 250 mg todos os dias à mesma hora. Escreva uma série geométrica que fornece o nível de remédio no corpo do paciente logo após a n-ésima injeção.

Vejamos o que temos nos dados da questão:

Imediatamente após a primeira injeção, o nível do remédio no corpo é $Q_1 = 250$.

Um dia depois, esses 250 mg ficaram reduzidos a $\frac{4}{5} . 250 = 200$ mg e é aplicada a segunda injeção de 250 mg. Logo após a aplicação da segunda injeção, o nível do remédio no corpo do paciente é:

$$Q_2 = \underbrace{250}_{2^a\ injeção} + \underbrace{\frac{4}{5} . 250}_{resíduo\ da\ 1^a\ injeção}$$

$$Q_2 = 250 + 200 = 450\ \text{mg}$$

Dois dias depois, os 250 mg originais caíram para $\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5} . 250\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^2 . 250 = 160$ mg, os 250 mg da segunda injeção caíram para $\frac{4}{5} . 250 = 200$ mg, e é aplicada a terceira injeção. Daí o nível do medicamento no organismo do paciente é:

$$Q_3 = \underbrace{250}_{3^a\ injeção} + \underbrace{\frac{4}{5} . 250}_{resíduo\ da\ 2^a\ injeção} + \underbrace{\left(\frac{4}{5}\right)^2 . 250}_{resíduo\ da\ 1^a\ injeção}$$

$$Q_3 = 25 + \frac{4}{5}.250 + \left(\frac{4}{5}\right)^2.250 = 250 + 200 + 160 = 610 \text{ mg}$$

Continuando o processo, vemos que, logo após a aplicação da n-ésima injeção, a quantidade do medicamento no organismo do paciente é:

$$Q_n = 250 + \left(\frac{4}{5}\right).\ 250 + \left(\frac{4}{5}\right)^2.\ 250 + \left(\frac{4}{5}\right)^2.\ 250 + \ldots + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}.\ 250$$

Portanto configura uma série geométrica, cujo primeiro termo é 250 e cuja razão é $q = \frac{4}{5}$.

Se quisermos saber qual a quantidade do medicamento, após 15 dias de tratamento, basta calcular:

$$Q_{15} = \frac{250\left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{15}\right)}{1 - \frac{4}{5}} = 1250\left(1 - 0,0352\right) \cong 1206,02 \text{ mg}$$

E como $q < 1$, a série geométrica converge e sua soma, quando o tratamento se prologa muito, Q_n tende para:

$$Q = \frac{250}{1 - \frac{4}{5}} = 5.250 = 1250 \text{ mg}$$

Exemplo 33

Usa-se a técnica do Carbono-14 para determinar a idade de espécimes arqueológicos. Este método se baseia no fato de o C-14, isótopo instável, estar presente no CO_2 da atmosfera. Os organismos vivos assimilam carbono da atmosfera e, quando morrem, o C-14 acumulado começa a decair, com meia-vida (período de tempo para reduzir à metade a quantidade anterior) de, aproximadamente, 5.700 anos. Medindo-se a quantidade de C-14 que resta em um espécime, é possível determinar quando o organismo morreu. Suponha que um osso fóssil acuse 20% da quantidade de C-14 presente em um osso dos dias atuais. Qual é a idade aproximada desse fóssil?

A cada período de 5.700 anos a quantidade de C-14 se reduz à metade, então, se a quantidade original era Q_0 e se n representa o número de períodos de 5.700 anos, temos uma PG de razão $q = \frac{1}{2}$. Portanto, medimos a quantidade de C-14 após n períodos pela expressão: $Q_n = Q_0 \cdot q^n$ (observe que iniciamos com $n = 0$)

$$Q_n = 0,2Q_0 \Rightarrow 0,2Q_0 = Q_0.\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow 0,2 = 2^{-n} \Rightarrow ln(0,2) = -n.ln(2)$$

$$n = -\frac{ln(0,2)}{ln(2)} \cong -\frac{-1,6094}{0,6931} \cong 2,32$$

Assim, o fóssil tem aproximadamente (2,32) . 5700 ≅ 13224, ou seja, cerca de 13.200 anos.

Exemplo 34

Segundo dados do IBGE, de julho de 2014, a população da cidade de São Paulo é de 11.895.893 habitantes e a taxa de crescimento geométrico anual é de 0,86%. Por simplicidade nos cálculos, consideremos a população da capital paulista em 12 milhões, em janeiro de 2015, e suponhamos que a taxa geométrica anual de crescimento se mantenha em 0,84% pelos próximos anos. Dessa forma, se isto se confirmar, qual o número inteiro mínimo de anos para que a população da capital paulista ultrapasse o dobro de sua população de janeiro de 2015?

Pelos dados da questão, vemos que a população, em milhões de habitantes, a partir de 2015, vai compor uma sequência $(P_n)_{n \geq 0}$ cujo termo geral é:

$$P_n = 12.(1+0,0084)^n \Rightarrow P_n = 12.(1,0084)^n, n \geq 0$$

Queremos encontrar n (anos) tal que $P_n = 24$ milhões. Então temos:

$$12.(1,0084)^n = 24 \Rightarrow 1,0084^n = 2 \Rightarrow \ln 1,0084^n = \ln 2 \Rightarrow n.\ln 1,0084 = \ln 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n = \frac{\ln 2}{lm1,0084} \Rightarrow n \cong \frac{0,69315}{0,00836} \Rightarrow n \cong 82,91$$

Se a taxa geométrica permanecer conforme previsto, daqui a 83 anos a população da capital paulista terá ultrapassado os 24 milhões de habitantes.

Concluindo

Assim chegamos ao fim dessa unidade, a última da disciplina. Abordamos progressões que são um tipo especial de sequências numéricas: a progressão aritmética se caracteriza pela soma de uma constante, a razão da PA, ao termo imediatamente anterior da sequência; e a progressão geométrica pelo produto de uma constante não nula, a razão da PG, pelo termo imediatamente anterior da sequência. Vimos também as expressões do termo geral e da soma de n termos de uma PA e de uma PG e ainda tratamos de encontrar o produto de n termos de uma PG, bem como a soma de infinitos termos de uma PG convergente. Mostramos resultados fundamentais, como propriedades e teoremas, e uma diversidade de exemplos evidenciando as resoluções e o raciocínio utilizados, bem como algumas aplicações, visando contribuir com a aprendizagem significativa do conteúdo sobre progressões.

Esperando que tenham aproveitado bem, recomendo rever os exemplos e resultados mais importantes para se prepararem para resolver as atividades da unidade.

Bom estudo!

Material Complementar

I) Dobre um papel 42 vezes e ele chegará à Lua

Pode parecer absurdo, mas tem toda uma lógica matemática por trás dessa afirmação, à primeira vista impossível. Você alguma vez na vida tentou dobrar uma folha de papel várias vezes? Certamente não conseguiu dobrá-la muitas vezes. Para constar, parece que o recorde de dobras atual é de 12 dobras sucessivas. Mas hipoteticamente se a folha for grande o suficiente e usando grande energia, é possível dobrá-la quantas vezes quiser.

Mas como é possível um papel de 0,1 mm de espessura se tonar tão grosso? A resposta é o **crescimento exponencial**.

Segundo Nikola Slavkovic, autor do vídeo a seguir, após 12 dobras, um pedaço de papel não ultrapassaria a altura de uma mesa. Mas à medida que, teoricamente, o papel é dobrado, ele vai crescendo exponencialmente. Ao ser dobrado 42 vezes, ele se estenderia até a Lua. Claro que é uma ideia puramente matemática – como dissemos, fisicamente é impossível. Acontece que nossas mentes tendem a pensar linearmente, e não de forma exponencial.

Ele cria mais algumas associações curiosas: com 3 dobras, o papel tem a espessura de um prego; com 10 dobras, a largura de sua mão; com 30 dobras, o papel se estenderia por 100 km de comprimento, capaz de atingir o espaço. Com 51 dobras, ele se estenderia por 150 milhões de km, o suficiente para chegar ao Sol. E, com 103 dobras, seu crescimento exponencial seria o suficiente para englobar todo o universo observável. Não é incrível, mesmo que incompreensível pela maioria das pessoas? Veja o vídeo (em inglês) no link:

https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=AAwabyyqWK0
Acesso em 25 de maio de 2016.

II) A Lei de Weber

O físico e filósofo alemão Gustav Theodor Fechner (1801-1887) propôs um método de construção de escalas baseado na Lei de Weber. Propôs que enquanto os estímulos variassem em progressão geométrica, as medidas das respostas variariam em progressão aritmética. Dessa forma, as medidas da resposta y e do estímulo x se relacionam por $y = a + b \cdot log\,(x)$. Uma das mais conhecidas escalas de Fechner é a que mede a sensação de ruído, definida por $L = 120 + 10 \cdot log\,(l)$, em que L é a medida da sensação de ruído em decibéis (dB) e l é a intensidade sonora, medida em W/m^2.

A lei de Weber, em homenagem ao fisiologista alemão Ernest Heinrich Weber (1795-1878), para respostas de seres humanos a estímulos físicos, afirma que diferenças marcantes na resposta a um estímulo ocorrem para variações de intensidade do estímulo proporcionais ao estímulo. Por exemplo, uma pessoa que sai de um ambiente iluminado para outro, só percebe uma variação de luminosidade se esta for superior a 2%, ou só distingue entre soluções salinas se a variação da salinidade for superior a 25%.

Weber foi um médico alemão, considerado um dos fundadores da psicologia experimental. Estudou medicina na Universidade de Wittenberg, e em 1818 foi nomeado professor adjunto de anatomia comparada na Univerdade de Leipzig.

Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887), apesar de ter sido um filósofo alemão e professor em Leipzig, era um brilhante matemático e físico. Quando em 1839 foi ameaçado pela cegueira, entrou numa crise pessoal e passou a interessar-se mais por questões religiosas e psicológicas. Fechner considerava a realidade física e a psíquica aspectos de uma mesma realidade essencial e não realidades opostas.

Por volta de 1860, Weber trabalhou com Fechner aplicando os princípios da Psicofísica, quando formulou a Lei que leva seu nome, realizando estudos pioneiros capazes de quantificar um fenômeno psicológico, que serviam para mapear a sensibilidade táctil em vários pontos da pele através de uma técnica chamada de limiar de dois pontos. Porém o principal experimento que resultou na descoberta da primeira relação matemática entre um fenômeno psicológico (a consciência ou sensação de um estímulo) e um evento físico (a intensidade física de um estímulo) ocorreu através de estudos de julgamento de pesos. Nestes experimentos, Weber colocava um determinado peso na mão de uma pessoa, em seguida ele ia gradualmente aumentando esse peso até que a pessoa notasse que o peso havia aumentado.

A Lei de Weber mais tarde foi complementada por Fechner, que propôs um método de construção de escalas baseado na Lei de Weber. Propôs que, enquanto os estímulos variassem em **progressão geométrica**, as medidas das respostas variariam em **progressão aritmética**. Dessa forma, as medidas da resposta y e do estímulo x se relacionam por $y = a + b \,.\, log\,(x)$. Uma das mais conhecidas escalas de Fechner é a que mede a sensação de ruído, definida por uma equação logarítmica.

A unidade de medida do ruído é dada em *bels* (designação em homenagem a Alexander Graham Bell, físico escocês inventor do telefone). No Brasil, utilizamos um submúltiplo do *bel*, o decibel (dB).

Uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir uma grande faixa de sons de intensidade bem diferentes. O som pode ser classificado como fraco ou forte quanto à sua intensidade, que é representado por I, medida em ${}^{W}\!/_{m^2}$ (watts por metro quadrado). Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo da qual é impossível ouvir algo. À essa intensidade damos o nome de limiar de audibilidade. Com base nos valores de intensidade de som, podemos definir o nível de intensidade β medindo em decibéis (dB): $\beta = 10.\, log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, onde I é a intensidade correspondente ao nível β; I_0 é uma constante que representa o nível de referência tomado como limiar de audição, $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$.

De acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), sons de até 55 dB são aceitáveis.

Vejam na tabela a seguir os níveis de intensidade de alguns tipos de som.

Nível de Ruído em Decibels					
Conforto Acústico	Muito baixo	0 *dB*		Limiar do som	
		5 *dB*	Passarinho		
		10 *dB*	Cochicho		
		15 *dB*	Torneira		
		20 *dB*	Conversa		
	Baixo	25 *dB*	Relógio		
		30 *dB*	Biblioteca	Limite para o sono	
		35 *dB*	Enfermaria		
		40 *dB*			
	Moderado	45 *dB*			
		50 *dB*	Aspirador de pó		
	Moderado	55 *dB*	Bebê chorando	Irritação	
	Moderado Alto	60 *dB*		Irritação aumenta consideravelmente	
Riscos de Danos à Saúde	Moderado Alto	65 *dB*	Cachorro latindo		
		70 *dB*			
		75 *dB*	Sala de aula		
		80 *dB*	Piano		
	Alto	85 *dB*	Telefone tocando	Tolerâncias diárias de exposição	8h
		90 *dB*	Secador de cabelos		4h
		95 *dB*	Moto		2h
		100 *dB*	Cortador de grama		1h
	Muito alto	105 *dB*	Caminhão		30 min
		110 *dB*	Pátio no intervalo das aulas		15 min
		115 *dB*	Banda tocando		7 min
		120 *dB*	Tiro		
		125 *dB*	Auto-falante		
		130 *dB*	Britadeira		
		135 *dB*	Avião		
		140 *dB*			

Fonte: http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/11/logaritmos-os-sons-e-audicao-humana.html.

Por exemplo, para calcular a intensidade correspondente ao nível de 130 dB (britadeira) fazemos assim:

$$130 = 10\ .\ log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \Rightarrow 13 = log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = log\left(10^{12}.\ I\right) \Rightarrow 10^{13} = 10^{12}.\ I \Rightarrow$$

$$I = 10W / m^2$$

Para o nível de 50 dB (aspirador de pó), você pode fazer o mesmo cálculo e encontrará $I = 10^{-7}\ W / m^2$

Por outro lado, se tivermos a intensidade sonora é possível encontrarmos os respectivos decibéis (níveis de intensidade). Por exemplo, nos metrôs antigos estima-se que a intensidade sonora seja de $10^{-2}\ W / m^2$. O nível de intensidade é:

$$\beta = 10\ .\ log\left(\frac{10^{-2}}{10^{-12}}\right) = 10\ .\ log\left(10^{10}\right) = 100\ .\ log\left(10\right) = 100\ \text{dB}$$

Outro exemplo é a intensidade da onda correspondente à fala humana, a um metro de distância é de $4\ .\ 10^{-6}\ W / m^2$. A quantidade de decibéis é:

$$\beta = 10\ .\ log\left(\frac{4.10^{6}}{10^{-12}}\right) = 10.\left(log4 + log\left(10^{-6}\right) - log\left(10^{-12}\right)\right)$$

Como $\log 4 = \log(2^2) = 2\ .\ \log 2 \cong 2.0{,}3 = 0{,}6$, temos:

$$\beta \cong 10.\ (0{,}6 - 6 + 12) = 66\ \text{dB}$$

III) Matemática financeira

1) Se certo capital C for aplicado por seis meses a uma determinada taxa de juros i mensal, em qual das modalidades de juros, simples ou composta, se obterá o maior rendimento?

Modalidade de juros simples.

Nessa modalidade o montante M pode ser assim obtido:

$M = C + j$, em que j é o juros, $j = C\ .\ i\ .\ n$, então $M = C + C\ .\ i\ .\ n$, portanto:

$$M = C\ (1 + i\ .\ n)$$

Para $n = 6$, temos: $M = C\ (1 + 6i)$

Modalidade de juros composta:

$$M = C\ (1 + i\ )^n$$

Para $n = 6$, temos: $M = C\ (1 + i\ )^6$

É claro que, para uma mesma taxa i, para o mesmo período $n > 1$, o montante M será maior na modalidade de juros composta. Isto porque, na modalidade de juros simples estamos tratando de uma progressão aritmética e, na modalidade de juros composta, estamos tratando de uma progressão geométrica.

2) Se R$ 10.000,00 forem aplicados por 1 ano a uma taxa de juros simples de 3% ao mês para produzir o mesmo montante, na modalidade de juros composto, em uma aplicação com a mesma duração, a que taxa mensal deverá ser aplicado?

Como na modalidade de juros simples $M = C\,(1 + i\,.\,n)$ temos:

$$M = 10000\,(1 + 12\,.\,(0{,}03)) = 10000\,(1 + 0{,}36) = 10000\,(1{,}36) = 13.600{,}00$$

Agora que já sabemos o montante, vamos calcular a taxa mensal de juros composto que produziria esse mesmo montante, para o capital inicial de R$ 10,000,00, pelo prazo de seis meses.

Como, na modalidade juros composto, $M = C\,(1 + i\,)^n$ temos:

$$13600 = 10000.(1+i)^{12} \Rightarrow (1+i)^{12} = \frac{13600}{10000} \Rightarrow (1+i)^{12} = 1{,}36 \Rightarrow 1+i = \sqrt[12]{1{,}36} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1+i \cong 1{,}02595 \Rightarrow i \cong 1{,}02595 - 1 \Rightarrow i \cong 0{,}02595$$

$i = 0{,}02595 \cong 2{,}5957\%$ ao mês para produzir o mesmo montante.

Esperamos ter mostrado algumas aplicações envolvendo as noções relacionadas às progressões, bem como evidenciado as diferenças entre progressões aritméticas e geométricas.

Sites:

http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2012/07/lei-de-weber-e-as-escalas-de-fechner.html

http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/11/logaritmos-os-sons-e-audicao-humana.html

http://estudospercepcao.blogspot.com.br/p/ernst-heinrich-weber.html

Acessos em 25 de maio de 2016.

Referências

Referências Bibliográficas

BOULOS, P. **Exercícios resolvidos e propostos de sequências e séries de números e de funções**. São Paulo: Edgard Blucher, 1986.

GUELLI, C. A.; IEZZI, G.; DOLCE, O. **Álgebra I: sequências, progressões, logaritmos**. São Paulo: Moderna, 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

Referências Complementares

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. v. 2., 8 ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

CARVALHO, M. C. C. S. **Padrões numéricos e sequências**. São Paulo: Moderna, 1997.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1982. 2 v.

LIMA, E. L. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 2. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 1999.

MACHADO, A. S. **Matemática: temas e metas: trigonometria e progressões**. São Paulo: Atual, 2004.

McCALLUM, W. G., *et al*. **Álgebra: forma e função**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. v 2. São Paulo: Addison Wesley, 2003.

Anotações

Cruzeiro do Sul Virtual
Educação a Distância

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo - SP - Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000

Cruzeiro do Sul
Educacional