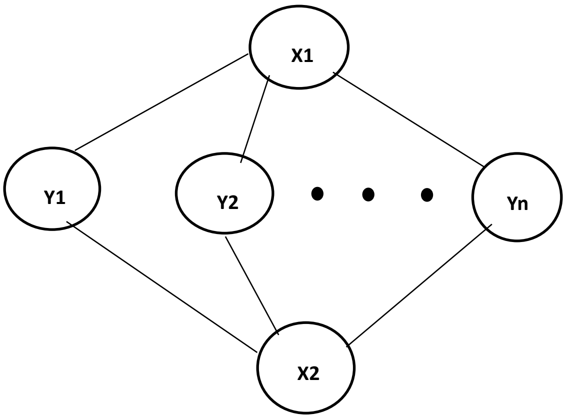
תרגיל בית 2 : מודלים גרפיים הסתברותיים- חלק ב

מגישים : אורי מצר 316198142, מיכאל אפלבאום, 209369909

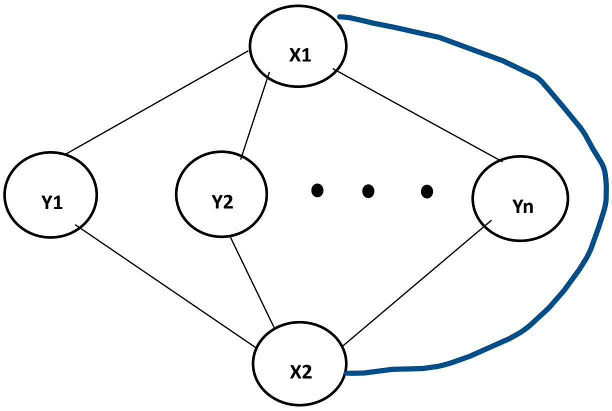
סעיף 1 :

את הגרף בנינו על ידי הגדרת Z כ-evidence והסרתו וביצוע מורליזציה :



סעיף 2 :

סדר אלימינציה אופטימלי שנציע : $Y_1, Y_2 \dots Y_n, X_1, X_2$. בצורה זו, כאשר נסיר את הצומת הראשונה נחבר קשת בין X_1 ל- X_2 שכן אלו השכנים הישירים של כל $Y_i,\ \ i \leq n$. כאשר נמשיך באלימינציה לא נצטרך להוסיף קשתות נוספות ולכן הגרף שיתקבל הוא הגרף הבא (ה- fill edge מסומנת בכחול) :



זהו סדר האלימינציה האופטימלי שכן עבור האפשרות הנוספת בה נסיר ראשית את X_1 (בלי הגבלת הכלליות, הגרף סימטרי) נקבל שבין כל שתי צמתים $(i \neq j,\ \ i,j \leq n)$ Y_i, Y_j נוסיף קשת.

סעיף 3 :

נרצה לחשב את $P(X_1|Z)$ באמצעות אלגוריתם VE שביצענו בסעיף הקודם. ראשית, אלגוריתם זה יצריך מאיתנו לסכום החוצה על ערכי Y_i מה שידרוש מאיתנו סיבוכיות של $O(NK^2)$ שכן כל Y_i מקבל K ערכים אפשריים וכן נצטרך לבצע חישוב זה עבור כל ערכי X_1 (ישנם K כאלו) וכל ערכי X_2 (ישנם N כאלו). כמו כן מכיוון שישנם N איברי Y אז על פעולה זו נצטרך לחזור N פעמים, משמע הסיבוכיות הכוללת היא $O(N^2K^2)$ מכאן ש $\alpha = \beta = 2$.

סעיף 4 :

ראשית נשים לב מהנתון כי בהינתן ש $X_2 = c$ אזי עבור כל $i \neq c$ מתקיימת האי תלות $Y_i \perp Z_i$ ולכן גם השיוויון הבא : $P_{Z|X_2}(z|c) = P_{Z|X_2,Y}(z|c,y)$

מכאן שמתקיים :

$$P_{Y,Z|X_1,X_2}(y_c, z|x_1, x_2 = c) = P_{Y|X_1}(y_c|x_1) P_{Z|Y,X_2}(z_c|y_c, x_2 = c) \prod_{i=1, i\neq c}^{N} P_{Z|X_2}(z_i|c)$$

כעת נוכל לקבל את $P_{Z|X_1,X_2}(z|x_1,c)$ מהתפלגות השולית על y, כלומר מהביטוי שייצגנו לעיל נרצה לסכום על ערכי y_c :

$$\left(\sum_{y_c} P_{Y|X_1}(y_c|x_1)P_{Z|Y,X_2}(z_c|y_c,x_2=c)\right)\left(\prod_{i=1,i\neq c}^{N} P_{Z|X_2}(z_i|c)\right) = f(x_1,c,z_c)g(c,z)$$

וקיבלנו כנדרש :

$$=> P_{Z|X_1,X_2}(z|x_1,c) = f(x_1,c,z_c)g(c,z)$$

<u>סעיף 5 :</u>

$$P_{Z,X_1}(z,x_1) = \sum_{x_2} P_{Z|X_1,X_2}(z|x_1,x_2)P(x_1,x_2)$$
$$= \sum_{x_2} P_{Z|X_1,X_2}(z|x_1,x_2)P(x_1)P(x_2) = \sum_{x_2} f(x_1,x_2,z)g(c,z)P(x_1)P(x_2)$$

כאשר השתמשנו באי תלות של X_1,X_2, וסכמנו מהתפלגות שולית על ערכי X_2.

כמו כן על מנת לחשב את $P_{X_1|Z}(x_1|z)$ נרצה לחשב את ערך הביטוי לעיל, ועבור ערך Z נתון סיבוכיות חישוב הביטוי המותנה תהיה זהה לסיבוכיות חישוב ההסתברות המשותפת. ראינו בסעיף הקודם (מהנתון) כי סיבוכיות f היא $O(K)$ וסיבוכיות g היא $O(N)$ ובנוסף נתון כי $P(x_1),P(x_2)$ מחושבים ב $O(1)$.
מכאן שאת הביטוי הפנימי אותו נסכום ייקח לחשב $O(N+K)$. מכיוון שנעבור על N ערכי X_2 אז בסה"כ נקבל $O(N^2+N^2K)$.