דף תרגילים : קבוצות של ממשיים

חלק 1 - קבוצות של מספרים ממשיים

לחלק זה מצורפים פתרונות בודדים לדוגמה, אפשר לפנות לשאלות נוספות לסגל בשעות ייעוץ ובשעות תמיכה

i. **טבעיים** $N=\{1,2,3,\cdots\}$

ii. **שלמים** $Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

iii. **רציונאליים** $Q=\left\{\frac{m}{n}/\ \text{שלמים } m,n \text{ וגם } n\neq 0\right\}$

iv. **אי-רציונאליים כל המספרים הממשיים שאינם ב- Q.**

הערה: בהרצאה ראינו כי $\sqrt{2}$ אינו רציונאלי.

תרגיל1: נתונה קבוצה $A=\{2n\ :\ \text{מספר שלם } n\}$. **קבוצה זו נקראת קבוצת המספרים הזוגיים**. הראה כי

(1) סכום/הפרש של כל שני איברים מתוך A גם הוא איבר בקבוצה A

(2) מכפלת שני מספרים של A גם היא איבר ב-A

(3) לכל n טבעי ואיבר a של A גם a^n איבר ב- A.

(4) קיימים שני איברים ב- A שהמנה שלהם אינה איבר ב- A.

תרגיל2: נתון כי r,q הם שני מספרים רציונאליים ואילו a מספר ממשי אי-רציונאלי. הוכח כי

(1) $r\pm q$ מספר רציונאלי

(2) $r\cdot q$ מספר רציונאלי

(3) אם $q\neq 0$ אז $\frac{r}{q}$ מספר רציונאלי

(4) $a\pm q$ מספר אי-רציונאלי

(5) אם $q\neq 0$ אז $a\cdot q$ מספר אי-רציונאלי

(6) אם $q\neq 0$ אז $\frac{r}{q}$ מספר רציונאלי

תרגיל**3**: נתונה קבוצה $A=\{n\sqrt{2}\ :\ \text{מספר טבעי } n\}$ הראה כי

(1) בקבוצה A אין מספרים רציונאליים

(2) סכום של כל שני מספרים מתוך A גם הוא איבר בקבוצה A

(3) מכפלת שני מספרים של A הינה מספר אינה איבר של הקבוצה A

תרגיל**4**: נתונה קבוצה $A=\{p+q\sqrt{2}\ :\ \text{מספים רציונאליים } p,q\}$ הראה כי

(1) סכום/הפרש של כל שני מספרים מתוך A גם איבר בקבוצה A

(2) מכפלת שני מספרים של A גם איבר בקבוצה A

(3) אם $p^2+q^2\neq 0$ אז $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ איבר של A

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים

פתרונות נבחרים של חלק א:

תרגיל 3 (1) :

נתונה קבוצה $A = \{ n\sqrt{2} \;:\; n \text{ מספר טבעי} \}$ הראה כי בקבוצה A אין מספרים רציונאליים.

פתרון:

נניח בשלילה כי קיים ב-A איבר $a = n\sqrt{2}$ $(n \in N)$ שהוא רציונאלי. אז קיימים שני מספרים שלמים m, k כך ש- $k \neq 0$ ו- $a = \frac{m}{k}$.

מסקנה: $n\sqrt{2} = \frac{m}{k}$, כלומר, $\sqrt{2} = \frac{m}{kn}$. כיוון שבמכנה המספר kn שלם , יוצא שלפי הגדרה $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונאלי (מנה של שני שלמים), בסתירה למשפט שהוכחנו (בכיתה).

לכן הנחת השלילה אינה נכונה, מה שאומר שאין בקבוצה A מספרים רציונאליים.

תרגיל 4 (3):

נתונה קבוצה $A = \{ p + q\sqrt{2} \;:\; p, q \text{ מספים רציונאליים} \}$ הראה כי אם $p^2 + q^2 \neq 0$ אז $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ איבר של A.

פתרון:

כדי להראות ש- $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ הוא איבר של A , צריך למצוא שני מספרים רציונאליים a, b כך שתתקיים המשוואה $\frac{1}{p+q\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$. נפתור את המשוואה הזו.

$$\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(p + q\sqrt{2}\right) = 1$$

$$ap + 2bq + (aq + bp)\sqrt{2} = 1$$

כיוון ש- 1 הוא מספר רציונאלי, המשוואה מתקיימת אם ורק אם

$$\begin{cases} ap + 2bq = 1 \\ aq + bp = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} apq + 2bq^2 = q \\ aqp + bp^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bq^2 - bp^2 = q \\ aq + bp = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

דף תרגילים : קבוצות של ממשיים

$$\begin{cases} b = \dfrac{q}{2q^2 - p^2} \\ a = -\dfrac{p}{q} \cdot b = -\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{q}{2q^2 - p^2} = \dfrac{-p}{2q^2 - p^2} \end{cases}$$

נתון ש– p, q מספים רציונאליים , כדי שגם a, b יהיו רציונאליים, מספיק להראות ש- המכנה $2q^2 - p^2$ הינו מספר שונה מאפס. מתי $2q^2 - p^2 = 0$? זה קורה בשני מקרים:

1. $2q^2 = p^2 = 0$ בסתירה לנתון ש- $p^2 + q^2 \neq 0$

או

2. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, כלומר $\sqrt{2}$ הוא מספר רציונאלי (לפי תרגיל 2 (3) למעלה), מה שאינו נכון (הוכחנו בכיתה).

לכן קיימים a, b רציונאליים כך ש- $a + b\sqrt{2} = \frac{1}{p+q\sqrt{2}}$, ומכאן שאם $p^2 + q^2 \neq 0$ אז $\frac{1}{p+q\sqrt{2}}$ איבר של A.