第 18 章 均匀传输线

18.1 知识框图及重点和难点

本章重点掌握以下内容

(1)分布参数电路、均匀传输线和无损耗均匀传输线的定义与概念。

(2)均匀传输线的电压,电流关系方程,均匀传输线方程的正弦稳态解,均匀传输线上的行波。

(3)无损耗均匀传输线上的驻波,无损耗均匀传输线的负载效应,特别是终端开路和短路的无损耗均匀传输线的特性与应用。

(4)求正弦稳态时无损线的输入阻抗（终端开路、短路或接任意负载）

(5)用柏德生法则或者方程法求无损传输线暂态的电压电流。

- 传输线
  - 正弦稳态
    - 均匀传输线的参数
    - 微积分方程
    - 相量方程及其通解
    - 正弦稳态解
    - 行波
    - 无损均匀传输线的特性
      - 电压电流相量
      - 终端开路
      - 终端短路
      - 长$\frac{\lambda}{4}$无损线的阻抗变换
  - 暂态分析
    - 波过程
      - 无限长无损耗线
      - 有限长无损线终端开路
    - 波的反射
      - 反射系数
        - 始端
        - 终端
      - 柏德生法则
      - 方程法
    - 两线连接处波的折射与反射

18.2 内容提要及学习指导

18.2.1 均匀传输线的基本方程

在分布参数电路中，由于考虑了电路参数的分布性，此时电路的基本变量u、i不仅是时间t的函数，而且还与距离x有关。均匀传输线的基本方程为

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x}=R_0 i+L_0\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x}=G_0 u+C_0\dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \tag{18-1}$$

式中，R_0、L_0、C_0和G_0为均匀传输线的单位长度的电阻、电感、电容和电导。称为均匀传输线的原始参数。

18.2.2 均匀传输线的正弦稳态解

（1）行波

如果传输线在正弦交流激励作用下，u、i分别用相量$\dot{U}$、$\dot{I}$来描述，上述偏微分方程的通解为

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = A_1 e^{-\gamma x} + A_2 e^{\gamma x} = \dot{U}^+(x) + \dot{U}^-(x) \\ \dot{I}(x) = \dfrac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x} - \dfrac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x} = \dot{I}^+(x) - \dot{I}^-(x) \end{cases} \tag{18-2}$$

式中，$\gamma = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta$称为传播常数，$\alpha$为传输线的衰减系数，$\beta$为相位系数；$Z_c = \sqrt{\dfrac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$为均匀传输线的特波阻抗；$\dot{U}^+(x)$、$\dot{I}^+(x)$为电压、电流的正向行波；$\dot{U}^-(x)$、$\dot{I}^-(x)$为电压、电流的反向行波。

传输线上各处电压或电流，都可以看成是由两个向相反方向前进的行波（即正向行波和反向行波）叠加而成。

行波的波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \tag{18-3}$$

行波的波速

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \tag{18-4}$$

反射系数。反向电压行波与正向电压行波相量之比或反向电流行波与正向电流行波相量之比称为反射系数N

$$N = \frac{\dot{U}^-(x)}{\dot{U}^+(x)} = \frac{\dot{I}^-(x)}{\dot{I}^+(x)} \tag{18-5}$$

若终端接负载Z_L，终端反射系数N_2为

$$N_2 = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c} \tag{18-6}$$

（2）均匀传输线的正弦稳态方程

在正弦稳态情况下，若已知始端电压相量$\dot{U}_1$、电流相量$\dot{I}_1$，距始端x处电压相量$\dot{U}$和电流相量$\dot{I}$为

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 \cosh\gamma x - \dot{I}_1 Z_c \sinh\gamma x \\ \dot{I} = -\dfrac{\dot{U}_1}{Z_c} \sinh\gamma x + \dot{I}_1 \cosh\gamma x \end{cases} \tag{18-7}$$

若终端电压相量$\dot{U}_2$、电流相量$\dot{I}_2$已知，距终端x'处的$\dot{U}$和$\dot{I}$为

$$\begin{cases}\dot{U}=\dot{U}_2\cosh\gamma x'+\dot{I}_2 Z_c\sinh\gamma x'\\ \dot{I}=\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sinh\gamma x'+\dot{I}_2\cosh\gamma x'\end{cases} \tag{18-8}$$

匹配线。当终端负载阻抗Z_L等于特性阻抗Z_c时，传输线处于匹配工作状态，此时传输线上任意一点的输入阻抗都等于特性阻抗。在传输线上无反向行波，只有正向行波。在匹配状态下，传输线上传输的功率称为自然功率，传输线方程简化为

$$\begin{cases}\dot{U}(x)=\dot{U}_1 e^{-\gamma x}\\ \dot{I}(x)=\dot{I}_1 e^{-\gamma x}\end{cases} \tag{18-9}$$

（3）无损耗传输线

如果传输线的单位长度电阻R_0和单位长度电导G_0等于零，则称之为无损耗传输线，简称无损线。

传播系数

$$\gamma=j\omega\sqrt{L_0C_0}=j\beta \tag{18-10}$$

特性阻抗

$$Z_c=\sqrt{L_0/C_0} \tag{18-11}$$

波速

$$v=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{L_0C_0}} \tag{18-12}$$

若已知始端电压相量$\dot{U}_1$、电流相量$\dot{I}_1$，距始端x处电压相量$\dot{U}$和电流相量$\dot{I}$为

$$\begin{cases}\dot{U}=\dot{U}_1\cos\beta x-j\dot{I}_1 Z_c\sin\beta x\\ \dot{I}=-j\dfrac{\dot{U}_1}{Z_c}\sin\beta x+\dot{I}_1\cos\beta x\end{cases} \tag{18-13}$$

若已知终端电压相量$\dot{U}_2$、电流相量$\dot{I}_2$，距终端x'处的$\dot{U}$和$\dot{I}$为

$$\begin{cases}\dot{U}=\dot{U}_2\cos\beta x'+j\dot{I}_2 Z_c\sin\beta x'\\ \dot{I}=j\dfrac{\dot{U}_2}{Z_c}\sin\beta x'+\dot{I}_2\cos\beta x'\end{cases} \tag{18-14}$$

始端的输入阻抗为

$$Z_i=\frac{\dot{U}(l)}{\dot{I}(l)}=Z_c\frac{Z_L\cos\beta l+jZ_c\sin\beta l}{jZ_L\sin\beta l+Z_c\cos\beta l} \tag{18-15}$$

当终端负载阻抗Z_L等于特性阻抗Z_c时，始端输入阻抗为$Z_i=Z_c$。

当线路长度$l=\lambda/4$时

$$\beta l=\pi/2 \tag{18-16}$$

始端输入阻抗为

$$Z_i=\frac{Z_c^2}{Z_L} \tag{18-17}$$

当终端开路时

$$Z_L\to\infty,\quad \dot{I}_2=0,\quad \dot{U}_1=\dot{U}_2\cos\beta l,\quad \dot{I}=j\frac{\dot{U}_2}{Z_c}\sin\beta l \tag{18-18}$$

始端输入阻抗为

$$Z_i = -jZ_c \cot\beta l = -jX \tag{18-19}$$

当终端开路时，电压和电流也形成驻波。在距终端 $x' = \dfrac{2k+1}{4}\lambda$ 处，电压的幅值恒为零，为驻波的波节；电流的幅值为最大，为驻波的波腹。在 $x' = k\lambda/2$ 处，电压的幅值为最大，为波腹；电流的幅值恒为零，为波节。长度满足 $l < \lambda/4$ 的终端开路线可以等效为电容。

当终端短路时

$$Z_L = 0，\ \dot{U}_2 = 0，\ \dot{U}_1 = j\dot{I}_2 Z_c \sin\beta l，\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos\beta l \tag{18-20}$$

始端输入阻抗为

$$Z_i = jZ_c \tan\beta l = jX \tag{18-21}$$

终端短路时，电压和电流也形成驻波。在距终端 $x' = \dfrac{2k+1}{4}\lambda$ 处，电压的幅值为最大，电流的幅值恒为零。在 $x' = k\lambda/2$ 处，电流的幅值为最大，电压的幅值恒为零。长度满足 $l < \lambda/4$ 的终端短路线可以等效为电感。

18.2.3 均匀无损线的暂态过程

（1）无损线上波的多次反射

当无损线始端和终端接电阻性负载且不匹配时，电压和电流行波在传输线上进行无数次反射。在终端（始端）的电压（电流）反射波等于入射电压（电流）乘以终端（始端）反射系数。在某一时刻传输线上的电压（电流）等于在此时刻存在的所有入射和反射电压（电流）的叠加。电压叠加为正向电压行波和反向电压行波相加，而电流叠加为正向电流行波减反向电流行波。

（2）求反射波的一般方法—柏德生法则

当无损耗线终端接有一般性负载（R、L、C 及其组合），正向行波电压 u^+ 到达终端时，既有反射产生，又有透射产生。从终端向始端看，相当于接通一个源电压为 $2u^+$、内阻为 Z_c 的电压源，其等效电路如图 18-1 所示。可依据集中参数的求解方法求出终端处电压 $2u$ 和电流 i_2。再由终端处电压、电流关系 $u_2 = u^+ + u^-$、$i_2 = i^+ - i^-$ 求出反射电压 u^- 和电流 i^-。

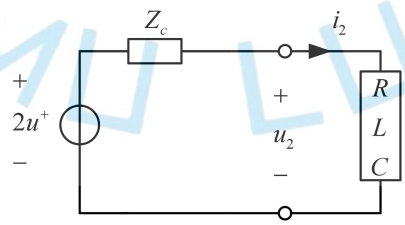


图 18-1　柏德生法则等效电路

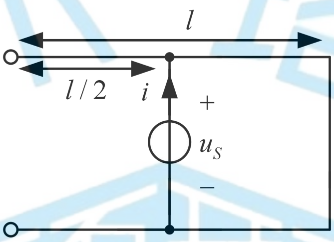
第 18 章习题 均匀传输线

习题【1】

无损架空线的波阻抗为400Ω（终端开路），电源频率为 100MHz，若要使输入端相当于 100pF 的电容，问线长l最短应为多少?

习题【2】

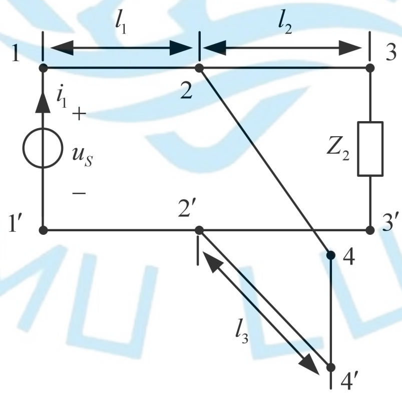
习题【2】图所示为无损传输线，长度为$l = 50m$，特性阻抗为$Z_c = 100\sqrt{3}\Omega$，传输线一端开路，一端短路，线路中点处接一电压源$u_S(t) = 3\sqrt{2}\cos(\omega t + 30^\circ)V$，工作波长$\lambda = 300m$，求流过电压源的电流$i(t)$。



习题【2】图

习题【3】

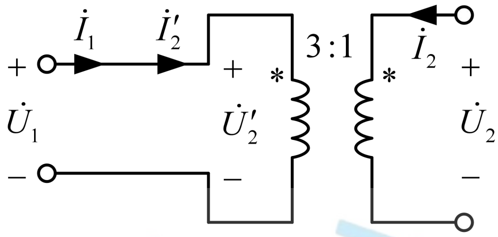
习题【3】图所示电路中无损均匀传输线l_1、l_2、l_3，其长度均为 0.75m，特性阻抗$Z_c = 100\Omega$，$u_S = 10\cos(2\pi\times 10^8 t)V$，相位速度$v = 3\times 10^8 m/s$，终端$3-3'$接负载$Z_2 = 10\Omega$，终端$4-4'$短路，求电源端的电流$i_1(t)$



习题【3】图

习题【4】

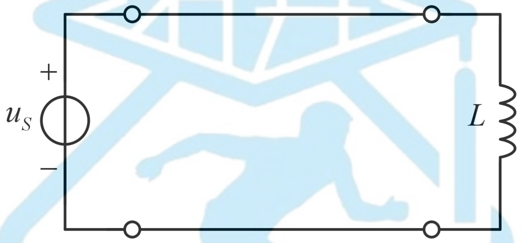
习题【4】图中无损线的波阻抗为$Z_C=300\Omega$，线长l为$\dfrac{1}{4}$波长。求由传输线和理想变压器级联构成的二端口网络的传输参数矩阵。



习题【4】图

习题【5】

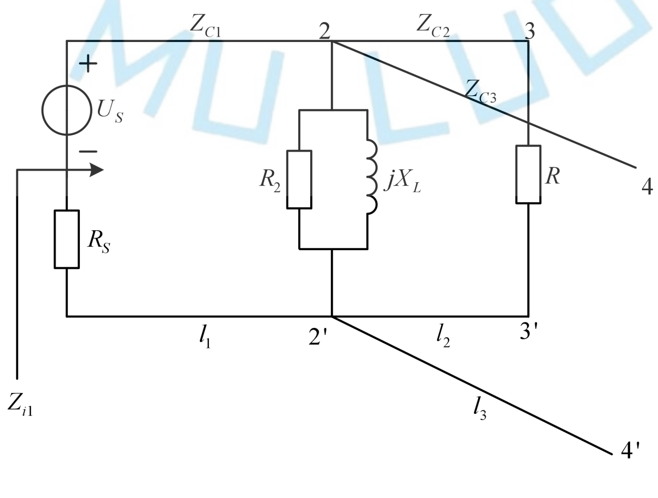
习题【5】图所示无损线长为$18m$，波阻抗$Z_C=100\Omega$，u_S为正弦电压源。传输线上的行波波长$\lambda=8m$，终端接集中参数电感，电感的感抗$X_L=100\sqrt{3}\Omega$。试求传输线上电压始终为零的点距终端的距离。



习题【5】图

习题【6】

习题【6】图中，已知$\dot{U}_S=100\angle0^\circ\text{V}$，$R_S=100\Omega$，$Z_{C1}=Z_{C2}=200\Omega$，$Z_{C3}=100\Omega$，$R=200\Omega$，$R_2=200\Omega$，$X_L=100\Omega$，$f=7.5\times10^7\text{Hz}$，$l_1=1\text{m}$，$l_2=2\text{m}$，$l_3=0.5\text{m}$，求$Z_{i1}$、$U_{4-4'}$



习题【6】图

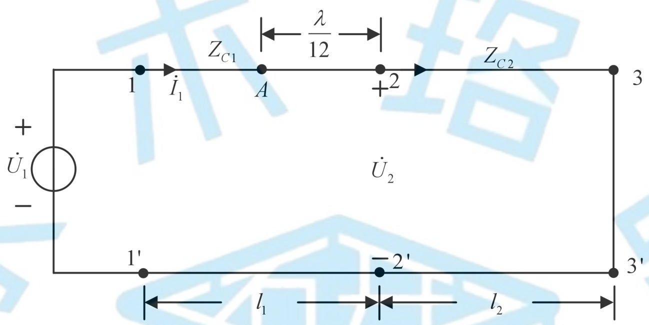
习题【7】

习题【7】图所示，两段均匀无损传输线的波阻抗分别为$Z_{C1}=100\Omega$，$Z_{C2}=200\Omega$，始端电压源电压$\dot{U}_1=100\angle 0^\circ$，电磁波波长为$\lambda$，传输线长度分别为$l_1=\dfrac{\lambda}{6}$，$l_2=\dfrac{\lambda}{4}$。传输线上 A 点距$l_1$末端$\dfrac{\lambda}{12}$，传输线$l_2$末端$3-3'$处短路，求：

（1）第一段线始端电流$\dot{I}_1$和终端电压$\dot{U}_2$；

（2）A 点电压有效值U_A和电流有效值I_A；

（3）第二段线始端电流有效值I_2和终端短路电流有效值I_3；



习题【7】图

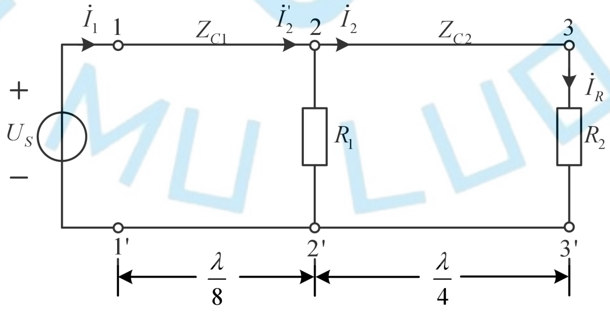
习题【8】

习题【8】图中两条无损均匀传输线的长度为别为$l_1=\dfrac{1}{8}\lambda$，$l_2=\dfrac{1}{4}\lambda$，第一段传输线接正弦电源$\dot{U}_S=100\angle 0^\circ\,\mathrm{V}$，已知 Z_{c1}=200Ω，集总元件 R_1=400Ω，R_2=100Ω，求：

（1）若从 1-1'端看进去的输入阻抗为 200Ω，求第二段线的波阻抗 Z_{c2}；

（2）电流$\dot{I}_2$；

（3）电流$\dot{I}_R$。



习题【8】图

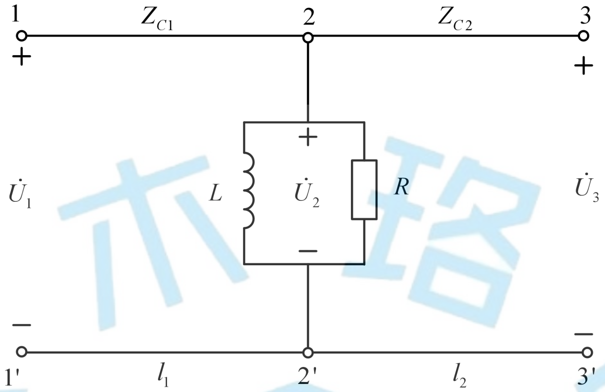
习题【9】

电路如图习题【9】图所示，两条均匀无损线通过集中参数电感与电阻相连。其中波阻抗 Z_{C1}=200Ω，Z_{C2} 未知，l_1=λ/8，l_2=λ/8，X_L=400Ω，R=200Ω，$\dot{U}_1=600\angle 0^{\circ}\text{V}$ 。

求：

（1）若从 11'看进去的入端阻抗 Z_{in}=200Ω，求波阻抗 Z_{C2}

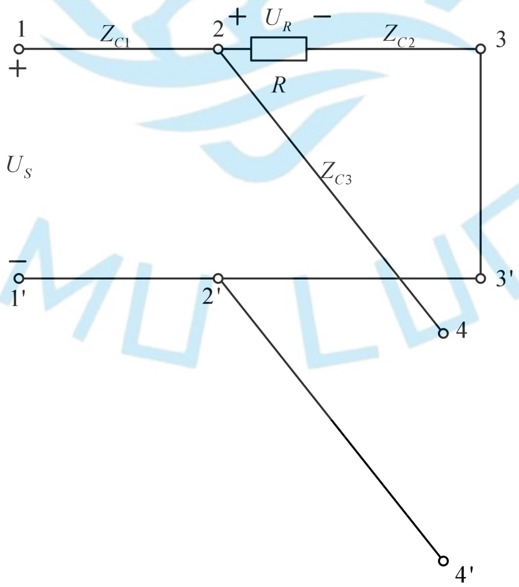
（2）电压 $\dot{U}_2$（3）电压 $\dot{U}_3$



习题【9】图

习题【10】

无损均匀传输线稳态电路如习题【10】图所示，三条无损传输线的波阻抗和长度分别为 Z_{C1}=100Ω，Z_{C2}= 50Ω，Z_{C3}= 100Ω，l_1 未知，l_2= l_3=λ/8。始端 1-1'接正弦电压源 $\dot{U}_S$，终端 3-3'短路，4-4'开路。第一段和第二段传输线间接有集总参数电阻 R=50Ω，当 $\dot{U}_S=600\angle 0^{\circ}\text{V}$ 时，$\dot{U}_R=300\sqrt{2}\angle -75^{\circ}\text{V}$，求 l_1 的最小长度。



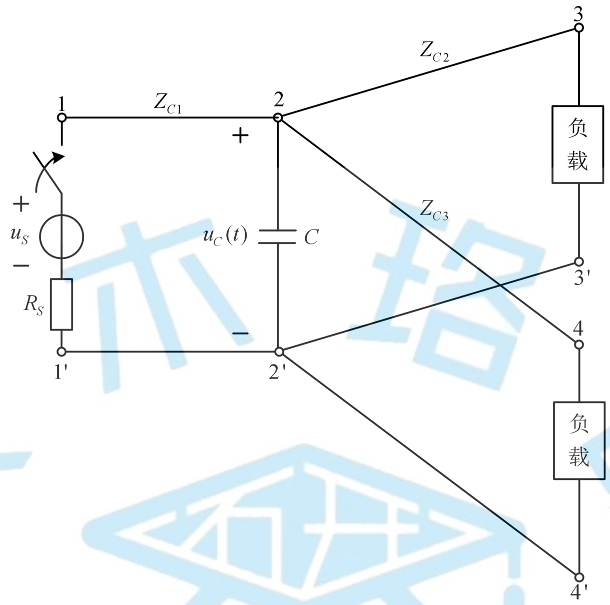
习题【10】图

习题【11】

无损传输线如习题【11】图所示，已知 Z_{C1}=400Ω，Z_{C2}= Z_{C3}=800Ω，C=5μF（无初始储能），u_S=42V，R_S=20Ω ，以入射波到达 22’为计时起点，求：

（1）第二段线路的入射波电流

（2）求第一段线路上的反射波电压电流。



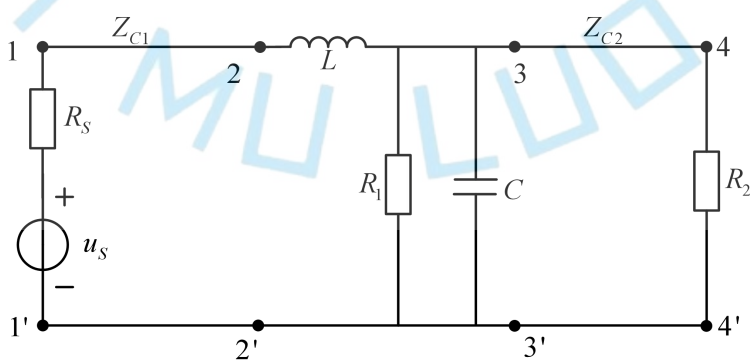
习题【11】图

习题【12】

如习题【12】图，两端长度均为l的无损均匀传输线，阻值分别为Z_{C1}和Z_{C2}，其中$Z_{C1}=750\Omega$，$Z_{C2}=400\Omega$，第一段线始端接一电压源$u_S=38\text{kV}$，$R_S=250\Omega$，两段线路均接有集中参数电路元件，$R_1=400\Omega$，$L=1\text{H}$，$C=1\mu\text{F}$，电容和电感处于零状态，记第一段入射波达到$2-2'$端的时刻为开始计时的起点，求：

（1）第一次到达$2-2'$端的入射波电压和电流。

（2）第二段线路始端$3-3'$的第一次透射波电压和电流。



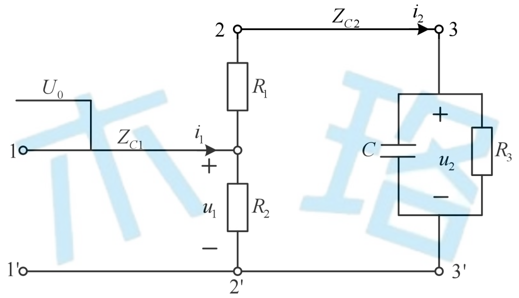
习题【12】图

习题【13】

习题【13】图所示，两条无损均匀传输线的波阻抗相同，$Z_{c1}=Z_{c2}=200\Omega$，长度均为l，电磁波在无损线上的传播速度均为v，两传输线之间接有两个集总参数电阻，如图所示，$R_1=100\Omega$，$R_2=600\Omega$，第二段线终端接有集总参数电阻和零状态电容，$R_3=100\Omega$，$C=1\mu F$，现由1-1'传来一矩形电压波$U_0=9kV$，以电磁波到达3-3'端为计时起点（即$t=0$），在$0<t<l$期间，求：

（1）第一段线终端处的电压u_1和电流i_1；

（2）第二段线终端处的电压u_2和电流i_2。



习题【13】图

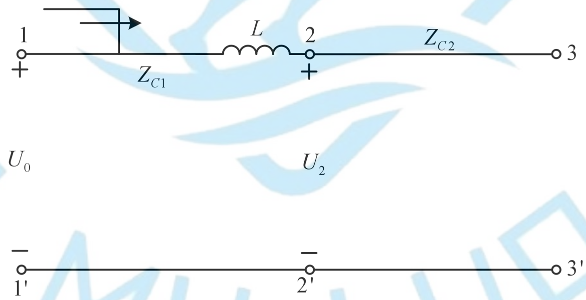
习题【14】

电路如习题【3】图，两条均匀无损传输线通过集中参数元件相连，已知波阻抗：$Z_{C1}=100\Omega$，$Z_{C2}=200\Omega$，集中参数电感$L=0.6H$，现由始端传来一波前为矩形的入射波$U_0=15kV$，以入射波到达22'时为计时起点，设入射波尚未到达33'。求：

（1）电压$u_2(t)$

（2）第一条无损线的反射波电压

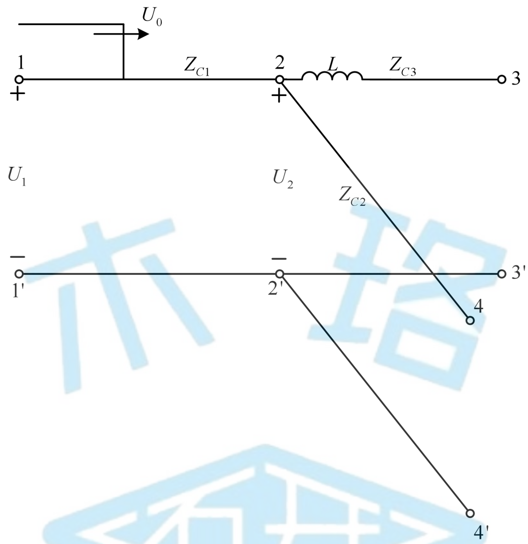
（3）第二条无损线的透射波电压



习题【14】图

习题【15】

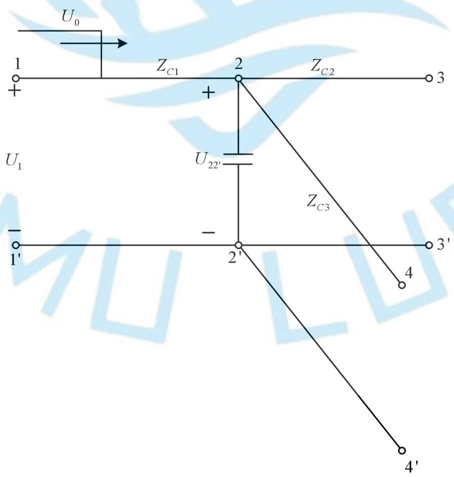
三条均匀无损传输线的连接如习题【15】图所示，波阻抗分别为：Z_{C1}=100Ω，Z_{C2}=300Ω，Z_{C3}=300Ω，集中参数电感 L=0.5H，现由始端传来一波前为矩形的电压波 U_0=20kV，设该矩形波到达 22'端的瞬间为计时时刻，求电压 u_2 及第三条传输线的透射波电压 $u_{\varphi3}$。（设矩形波未到达 33'和 44'）



习题【15】图

习题【16】

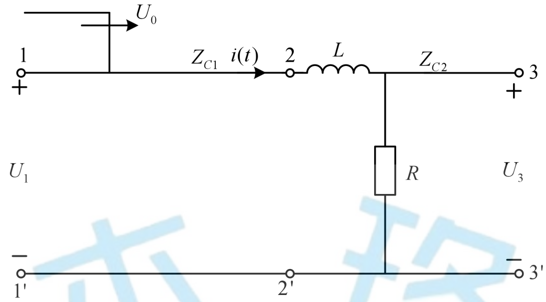
习题【16】图所示的无损均匀传输线经集中参数电容 C 与两条并联的无损传输线相连，已知 C=3μF，Z_{C1}=100Ω，Z_{C2}=Z_{C3}=400Ω。现由始端 11'传来一波前为矩形的电压波 U_0=15kV。求波到达连接处 22'后的电压 $u_{22'}(t)$、第一条线路上反射波电压 $u_{1-}(t)$及第二条线路上的透射波电流 $i_{2+}(t)$。



习题【16】图

习题【17】

习题【17】图所示，一无损均匀传输线经集中参数电感 L 和集中参数电阻 R 与另一无损均匀传输线相连，如图所示。已知 Z_{C1}=300Ω，Z_{C2}=600Ω，L=0.5H，R=300Ω。现由始端传来一波前为矩形的电压波 U_0=15kV，求波到达连接处 22’后的电流 i(t)、反射波电流 i_{1-}(t)和透射波电流 $i_{2+}(t)$



习题【17】图

习题答案

第 18 章解答 均匀传输线

解答【1】

终端开路($i_2=0$)的无损线方程为

$$\lambda=\frac{3\times10^8}{f}=\frac{3\times10^8}{100\times10^6}=3\text{m}$$

输入阻抗

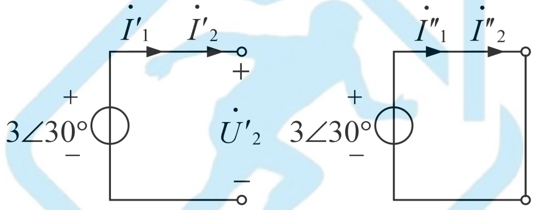
$$Z_i=\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}=-jZ_C\cot\frac{2\pi}{\lambda}L$$

按题中输入端相当于100pF的电容, $Z_i=\dfrac{1}{j\omega C}=-j\dfrac{1}{2\pi\times10^8\times10^{-10}}=-j\dfrac{50}{\pi}\Omega$

则 $$Z_C\cot\frac{2\pi}{\lambda}L=\frac{50}{\pi},\cot\frac{2\pi}{\lambda}L=\frac{50}{\pi\cdot Z_C}=\frac{50}{\pi\cdot400}=\frac{1}{8\pi}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}L=arc\cot\frac{1}{2\pi}=87.72°\cdot\frac{\pi}{180°}\therefore L=\frac{3}{2}\cdot\frac{87.72°}{180°}=0.731\text{m}$$

解答【2】



$$\lambda=\frac{2\pi}{\beta},\quad \beta=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\pi}{150},\quad \frac{\beta L}{2}=\frac{\pi}{150}\cdot\frac{50}{2}=\frac{\pi}{6}$$

(1) 终端开路时，$\dot{I}'_2=0$，$\dot{U}_1=\dot{U}_2\cos\dfrac{\pi}{6}$，则

$$\dot{U}_2=2\sqrt{3}\angle30°\text{V}，\quad \dot{I}'_1=j\frac{\dot{U}_2}{Z_C}\sin\beta L=0.01\angle120°\text{A}$$

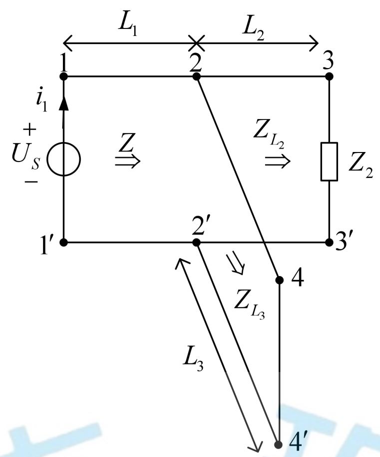
(2)终端短路时，$\dot{U}''_2=0$，$\dot{U}_1=jZ_C\dot{I}''_2\sin\dfrac{\pi}{6}$，则

$$\dot{I}''_2=\frac{\sqrt{3}}{50}\angle-60°\text{A}，\quad \dot{I}''_1=\dot{I}''_2\cos\frac{\pi}{6}=0.03\angle-60°\text{A}$$

综上

$$\dot{I}=\dot{I}'_1+\dot{I}''_1=0.02\angle-60°\text{A}，\quad i(t)=0.02\sqrt{2}\cos(\omega t-60°)\text{A}$$

解答【3】



由$U=\dfrac{\omega}{\beta}$可得，相位系数

$$\beta=\frac{\omega}{U}=\frac{2\pi\times10^8}{3\times10^8}=\frac{2\pi}{3}$$

又$L_2=Z_C\dfrac{Z_2+jZ_C\tan\beta L_2}{Z_C+jZ_L\tan\beta L_2}$，　$\beta L_2=\dfrac{2}{3}\pi\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，　$\tan\beta L_2\to\infty$

对无损耗线L_2从$2-2'$端向终端看进去的入端阻抗为

$$Z_{L_2}=\frac{{Z_C}^2}{Z_L}=\frac{{Z_C}^2}{Z_2}=\frac{100^2}{10}=1000\Omega$$

对无损耗线L_3从$2-2'$端向终端看进去的入端阻抗为

$$Z_{L_3}=jZ_C\tan\beta L_3，\quad \beta L_3=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{\pi}{2}，\quad \tan\beta L_3\to\infty$$

从$1-1'$端看进去的入端阻抗为

$$Z=Z_C\frac{Z_{L_2}+jZ_C\tan\beta L_1}{Z_C+jZ_{L_2}\tan\beta L_1}=\frac{{Z_C}^2}{Z_{L_2}}=\frac{100^2}{1000}=10\Omega$$

而$U_S=10\cos(2\pi\times10^8t)\text{V}$，则

$$i_1(t)=\frac{U_S(t)}{Z}=\cos(2\pi\times10^8t)\text{A}$$

解答【4】

无损线的传输方程为

$$\dot U_1=\dot U_2'\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right)+j300\dot I_2'\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right)=j300\dot I_2'$$

$$\dot I_1=\dot I_2'\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right)+j\frac{\dot U_2'}{300}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{\lambda}{4}\right)=j\frac{\dot U_2'}{300}$$

所以传输线的传输参数矩阵为

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & j300\Omega\\ \dfrac{j}{300}S & 0\end{bmatrix}$$

理想变压器的传输参数矩阵为

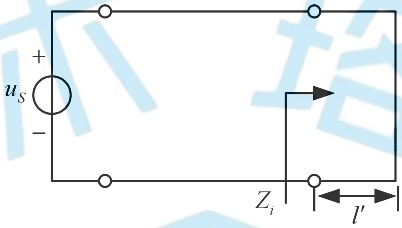
$$A_2=\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

传输线和理想变压器为级联，总的传输参数矩阵为

$$A=A_1A_2=\begin{bmatrix} 0 & j300\Omega \\ \dfrac{j}{300}S & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & j100\Omega \\ \dfrac{j}{100}S & 0 \end{bmatrix}$$

解答【5】

将电感L用一段长度为l'且终端短路的无损线等效。如下图所示。当新增加的一段无损线的长度l'为某一数值时，存在$Z_i=jX_L$。



从终端看新增加的无损线的输入阻抗为

$$Z_i=jZ_C\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times l'\right)$$

所以

$$j100\tan\left(\frac{2\pi}{8}\times l'\right)=j100\sqrt{3}$$

解得

$$l'=\frac{4}{3}m$$

这样相当于无损线增加了$\frac{4}{3}m$。等效终端短路，等效终端电压为零，距等效终端$x'=k\frac{\lambda}{2}$处，电压为零。电压为零的点距终端的距离为

$$x=x'-l'=k\frac{\lambda}{2}-\frac{4}{3}=4k-\frac{4}{3}\qquad (k=1,2,3,4)$$

当线长为$18m$时，传输线上电流始终为零的点距终端的距离为

$$x=2.667m,6.667m,10.667m,14.667m$$

解答【6】

先计算第二段线路的输入阻抗：$\alpha x=\frac{2\pi}{\lambda}l_2=\frac{2\pi f}{c}l_2=\pi$，可得第二段线路的二端口矩阵：

$$\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha x & jZ_{C2}\sin\alpha x \\ j\dfrac{\sin\alpha x}{Z_{C2}} & \cos\alpha x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ 200\dot{I}_3 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{I} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200\dot{I}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}\rightarrow Z_{eq}=200\Omega$$

再计算第三段线路的输入阻抗：$\alpha x=\frac{2\pi}{\lambda}l_3=\frac{2\pi f}{c}l_3=\frac{\pi}{4}$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}\\ \dot{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha x & jZ_{C3}\sin\alpha x\\ j\dfrac{\sin\alpha x}{Z_{C3}} & \cos\alpha x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_{44'}\\ 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\dot{U}\\ \dot{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & j100\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ j\dfrac{\sqrt{2}/2}{100} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_{44'}\\ 0\end{bmatrix}\to Z_{eq}=-j100\Omega$$

因此$2-2'$处的入端阻抗

$$Z=200//200//(j100)//(-j100)=100\Omega$$

最后求第一段线路

$$\alpha x=\frac{2\pi}{\lambda}l_1=\frac{2\pi f}{c}l_1=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{U}_{11'}\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha x & jZ_{C1}\sin\alpha x\\ j\dfrac{\sin\alpha x}{Z_{C1}} & \cos\alpha x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_{22'}\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}100-100\dot{I}_1\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & j200\\ j\dfrac{1}{200} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\dot{I}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{cases}Z_{i1}=400\Omega\\ \dot{U}_{22'}=-40j\end{cases}$$

再计算第三段线路：

$$\begin{bmatrix}-40j\\ 0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt{2}}{2} & j100\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ j\dfrac{\sqrt{2}/2}{100} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_{44'}\\ 0\end{bmatrix}\to\dot{U}_{44'}=-40\sqrt{2}j$$

解答【7】

（1）稳态传输线本质是一二端口问题，先求从$2-2'$向右侧看进去的等效阻抗：

$$\beta x=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\pi}{2}\to\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & jZ_C\sin\beta x\\ \dfrac{j\sin\beta x}{Z_C} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_3\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & j200\\ \dfrac{j}{200} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot{I}_3\end{bmatrix}$$

$$\to Z_{eq}=\infty$$

再求第一段传输线的传输参数矩阵：

$$\beta x=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{6}=\frac{\pi}{3}\to\begin{bmatrix}100\angle0^\circ\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & jZ_C\sin\beta x\\ \dfrac{j\sin\beta x}{Z_C} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ \dot{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & j100\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \dfrac{j\sqrt{3}/2}{100} & \dfrac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{U}_2\\ 0\end{bmatrix}$$

解得

$$\begin{cases}\dot{U}_2=200\\ \dot{I}_1=\sqrt{3}j\end{cases}$$

（2）$A-2$这一段传输线的二端口矩阵为：

$$\beta x=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{12}=\frac{\pi}{6}\rightarrow\begin{bmatrix}\dot U_A\\ \dot I_A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & jZ_C\sin\beta x\\ \dfrac{j\sin\beta x}{Z_C} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_2\\ \dot I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt3}{2} & j100\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{j1/2}{100} & \dfrac{\sqrt3}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\dot U_A=100\sqrt3\\ \dot I_A=j\end{cases}$$

（3）由于从 $2-2'$ 向右侧看进去的等效阻抗为无穷大，因此 $I_2=0$，根据第二段传输线的二端口矩阵可得

$$\begin{bmatrix}200\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & j200\\ \dfrac{j}{200} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot I_3\end{bmatrix}\rightarrow\dot I_3=-j\rightarrow I_3=1\text{A}$$

解答【8】

对于第一段线路：$\alpha x=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}=\frac{\pi}{4}$，根据稳态传输线的 T 参数矩阵可得：

$$\begin{bmatrix}100\angle0^\circ\\ \dot I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha x & jZ_{C1}\sin\alpha x\\ j\dfrac{\sin\alpha x}{Z_{C1}} & \cos\alpha x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot I_2^{'}R\\ \dot I_2^{'}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}100\angle0^\circ\\ \dfrac{100\angle0^\circ}{200}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt2}{2} & j200\dfrac{\sqrt2}{2}\\ j\dfrac{\sqrt2/2}{200} & \dfrac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot I_2^{'}R\\ \dot I_2^{'}\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{cases}R=200\Omega\\ \dot I_2^{'}=0.5\angle-45^\circ\\ \dot I_2=0.25\angle-45^\circ\end{cases}$$

可知，从 22’向右侧看进去的输入电阻为：400Ω，现在分析第二段线路，

$$\alpha x=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}=\frac{\pi}{2}$$

根据第二段线路的 T 参数矩阵可得：

$$\begin{bmatrix}100\angle-45^\circ\\ 0.25\angle-45^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha x & jZ_{C2}\sin\alpha x\\ j\dfrac{\sin\alpha x}{Z_{C2}} & \cos\alpha x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot I_R R_2\\ \dot I_R\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}100\angle-45^\circ\\ 0.25\angle-45^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & jZ_{C2}\\ j\dfrac{1}{Z_{C2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot I_R 100\\ \dot I_R\end{bmatrix}\rightarrow\begin{cases}Z_{C2}=200\Omega\\ \dot I_R=0.5\angle-135^\circ\end{cases}$$

解答【9】

（1）先求从 22’向右侧端口看进去的输入阻抗：

$$\beta x=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}=\frac{\pi}{4}\rightarrow\begin{bmatrix}\dot U_2\\ \dot I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & jZ_{C2}\sin\beta x\\ j\dfrac{\sin\beta x}{Z_{C2}} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_3\\ 0\end{bmatrix}$$

从 11’向右看进去的输入阻抗：

$$\beta x=\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{8}=\frac{\pi}{4}\to\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & jZ_{C1}\sin\beta x\\ j\dfrac{\sin\beta x}{Z_{C1}} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_2\\ \dot I_4\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}\dot U_1\\ \dot I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt2}{2} & j100\sqrt2\\ j\dfrac{\sqrt2}{400} & \dfrac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_2\\ \dot I_4\end{bmatrix}\to Z_{eq}=\frac{\dot U_1}{\dot I_1}=\frac{\dfrac{\sqrt2}{2}\dot U_2+j100\sqrt2\dot I_4}{j\dfrac{\sqrt2}{400}\dot U_2+\dfrac{\sqrt2}{2}\dot I_4}=200\to\frac{\dot U_2}{\dot I_4}=200$$

因此，可知

$$Z_{C2}=X_L=400\Omega$$

（2）对于第一段线路：

$$\begin{bmatrix}600\\ \dot I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt2}{2} & j100\sqrt2\\ j\dfrac{\sqrt2}{400} & \dfrac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}200\dot I_4\\ \dot I_4\end{bmatrix}\to\begin{cases}\dot I_4=3\angle-45^\circ\\ \dot U_2=200\dot I_4=600\angle-45^\circ\end{cases}$$

（3）对于第二段线路：

$$\begin{bmatrix}600\angle-45^\circ\\ \dot I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt2}{2} & j200\sqrt2\\ j\dfrac{\sqrt2}{800} & \dfrac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_3\\ 0\end{bmatrix}\to\dot U_3=600\sqrt2\angle-45^\circ$$

解答【10】

（1）先求从端口 xy 向右侧看进去的输入阻抗，如下：

$$\begin{cases}\beta x=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{8}=\dfrac{\pi}{4}\\ \begin{bmatrix}\dot U_{xy}\\ \dot I_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & jZ_C\sin\beta x\\ j\dfrac{\sin\beta x}{Z_C} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_{33'}\\ \dot I_{33'}\end{bmatrix}\end{cases}\to\begin{bmatrix}\dot U_{xy}\\ \dot I_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt2}{2} & j50\dfrac{\sqrt2}{2}\\ j\dfrac{\sqrt2/2}{50} & \dfrac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot I_{33'}\end{bmatrix}$$

$$\to Z_{eq}=\frac{j50\dfrac{\sqrt2}{2}}{\dfrac{\sqrt2}{2}}=j50$$

（2）再求从 22'向 2 号线路看进去的输入阻抗：

$$\begin{cases}\beta x=\dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{8}=\dfrac{\pi}{4}\\ \begin{bmatrix}\dot U_{22'}\\ \dot I_{22'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & jZ_C\sin\beta x\\ j\dfrac{\sin\beta x}{Z_C} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_{44'}\\ \dot I_{44'}\end{bmatrix}\end{cases}\to\begin{bmatrix}\dot U_{22'}\\ \dot I_{22'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\sqrt2}{2} & j100\dfrac{\sqrt2}{2}\\ j\dfrac{\sqrt2/2}{100} & \dfrac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot U_{44'}\\ 0\end{bmatrix}\to Z_{eq}=-j100$$

（3）从 22'向右侧看进去的等效电路可等效为如图（b）所示电路，可求得：

$$\begin{cases}\dot{U}_{22'}=\dfrac{300\sqrt{2}\angle\text{-}75^\circ}{50}\cdot(50+j50)=600\angle-30^\circ\\ \dot{I}_2=\dfrac{300\sqrt{2}\angle\text{-}75^\circ}{50}+\dfrac{\dot{U}_{22'}}{-j100}=6\angle-30^\circ\end{cases}$$

（4）对于第 1 段线路，列写其二端口方程如下：

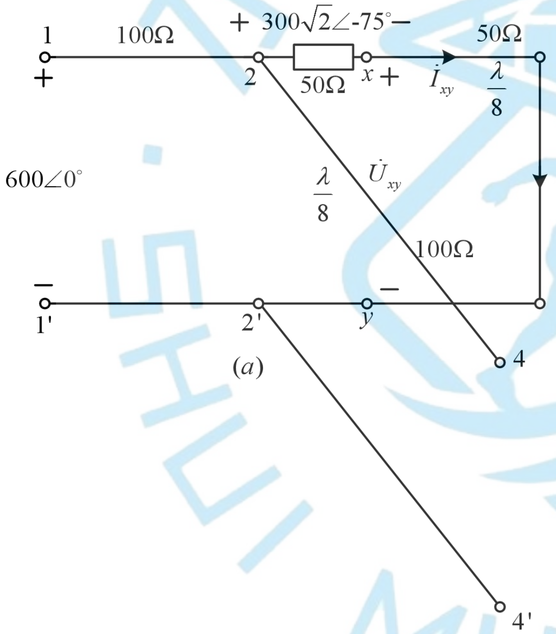
$$\begin{bmatrix}600\angle0^\circ\\ \dot{I}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta x & j100\sin\beta x\\ j\dfrac{\sin\beta x}{100} & \cos\beta x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}600\angle-30^\circ\\ 6\angle-30^\circ\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow 600\angle0^\circ=600\angle-30^\circ\cdot\cos\beta x+6\angle-30^\circ\cdot j100\sin\beta x$$

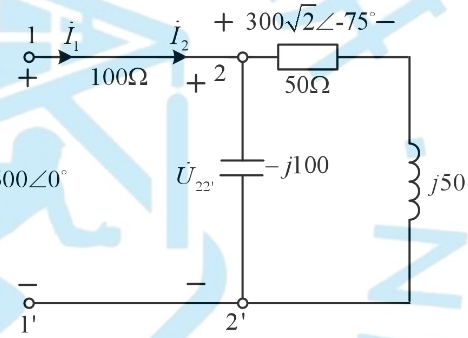
$$\rightarrow 1=\cos\beta x\angle-30^\circ+\sin\beta x\angle60^\circ$$

（5）可通过相量图求解此方程，如图（c）所示：

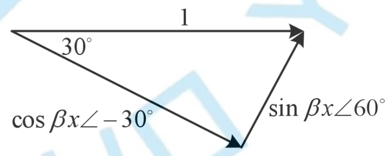
$$\begin{cases}\sin\beta x=\dfrac{1}{2}\\ \cos\beta x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\rightarrow\beta x=\frac{\pi}{6}+2k\pi=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot l_1\rightarrow l_1=\frac{\lambda}{12}+k\lambda\rightarrow l_{1\min}=\frac{\lambda}{12}$$



(a)



(b)



(c)

解答【11】

先求入射波电压：

$$u_{1+}=u_S\frac{Z_{C1}}{R_S+Z_{C1}}=40\text{V}$$

当入射波到达 22’时，做出其柏德生电路如图（b）所示，根据三要素可求得电容电压为：

$$\begin{cases}u_C(0+)=0\text{V}\\ u_C(\infty)=40\text{V}\\ \tau=RC=200\cdot5\cdot10^{-6}=10^{-3}s\end{cases}\rightarrow u_C(t)=40(1-e^{-1000t})\text{V}\ \ (t>0)$$

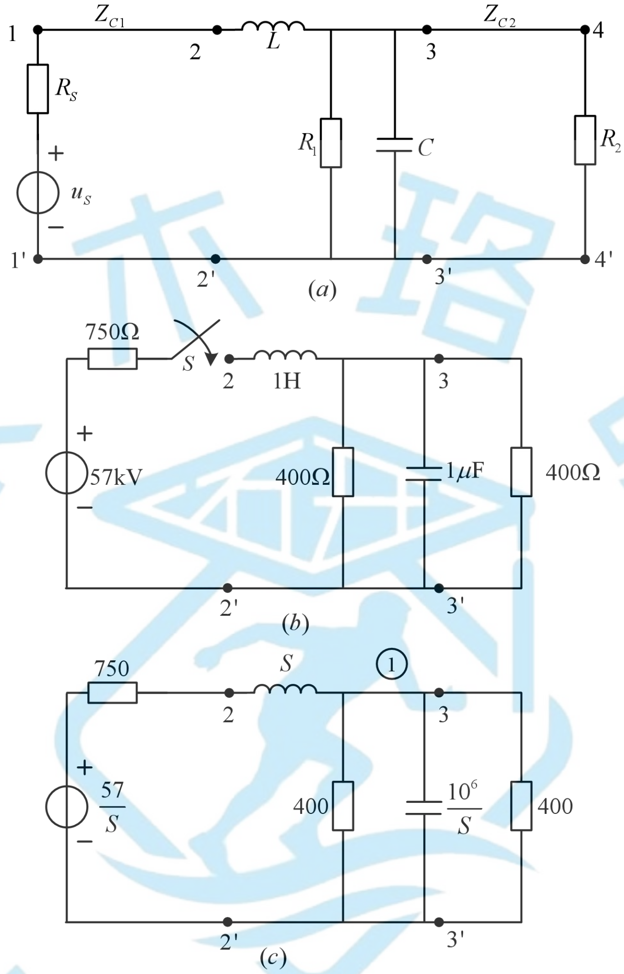
则透射波电流为：

$$i_{2+}=\frac{u_C}{800}=0.05(1-e^{-1000t})\text{A}\ \ (t>0)$$

根据入射波与反射波电压之间的关系可得：

$$u_{1+}+u_{1-}=u_C\rightarrow\begin{cases}u_{1-}=u_C-u_{1+}=-40e^{-1000t}\text{V}\ \ (t>0)\\ i_{1-}=\dfrac{u_{1-}}{Z_{C1}}=-0.1e^{-1000t}\text{A}\ \ (t>0)\end{cases}$$

解答【12】



(a) (b) (c)

线路一上的入射行波电压幅值为

$$u_{1+}=u_S\frac{Z_{C1}}{R_S+Z_{C1}}=28.5\text{kV}$$

第一段线路的入射波电

$$i_{1+}=\frac{u_{1+}}{Z_{C1}}=38\text{A}\text{。}$$

根据柏德生法则可绘制第一段线路末端的等效电路，如图（b）所示：此图为一二阶电路，应采用拉氏变换求解，列写节点方程可得

$$U_1\left(\frac{1}{S+750}+\frac{1}{400}+\frac{S}{10^6}+\frac{1}{400}\right)=\frac{57/S}{S+750}$$

$$\rightarrow U_1=\frac{57\times10^6}{S(S+1000)(S+4750)}=\frac{12}{S}-\frac{15.2}{S+1000}+\frac{3.2}{S+4750}$$

拉氏逆变换可得透射波电压

$$u_{3+}=(12-15.2e^{-1000t}+3.2e^{-4750t})\text{kV}$$

透射波电流

$$i_{3+}=\frac{u_{3+}}{Z_{C2}}=(30-38e^{-1000t}+8e^{-4750t})\text{A}$$

解答【13】

当入射波到达两段线路交界处时，入射波会发生反射与投射，做出柏德生电路如图（b）所示，可求得

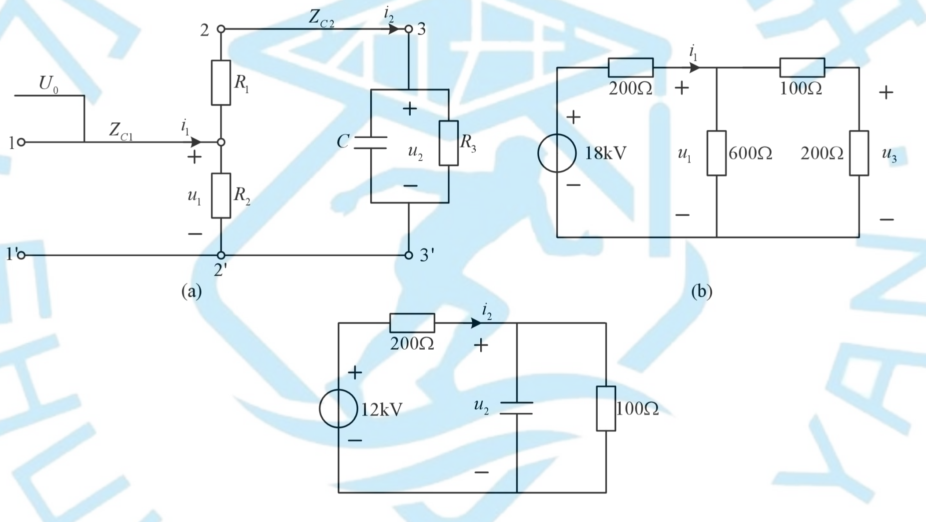
$$u_1=18\times\frac{200}{200+200}=9\text{kV}，\ i_1=\frac{18000}{400}=45\text{A}$$

第二段线路的透射波电压为

$$u_3=u_1\times\frac{200}{100+200}=6\text{kV}$$

为了求第二段线路末端的电压与电流，再次做出柏德生等效电路，如图（c）所示，此电路为一阶暂态电路，可根据三要素计算其电路响应：

$$\begin{cases}u_C(\infty)=4\text{kV}\\ \tau=RC=\dfrac{200}{3}\times10^{-6}=\dfrac{2}{3}\times10^{-4}s\end{cases}\rightarrow\begin{cases}u_2=u_C(t)=4\times(1-e^{-1.5\times10^4t})\text{kV}\\ i_2=(12-u_2)/200=(40+20e^{-1.5\times10^4t})\text{A}\end{cases}$$



(a) (b)

(c)

解答【14】

（1）在连接点处，根据柏德生法则可得图（a）所示电路：

$$i_L(\infty)=\frac{30000}{300}=100\text{A}，R_{eq}=300\Omega，\ \tau=\frac{L}{R_{eq}}=\frac{0.6}{300}s$$

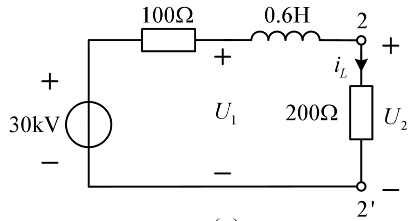
$$\rightarrow i_L(t)=100(1-e^{-500t})\text{A}，u_2(t)=200i_L(t)=20(1-e^{-500t})\text{kV}$$

（2）图（a）中，可知：

$$u_1(t)=30-100i_L(t)=20+10e^{-500t}=u_{1-}(t)+u_{1+}(t)\rightarrow u_{1-}(t)=5+10e^{-500t}\text{kV}$$

（3）第（1）问求的电压就是透射波电压：

$$u_{2+}(t)=20(1-e^{-500t})\text{kV}$$



(a)

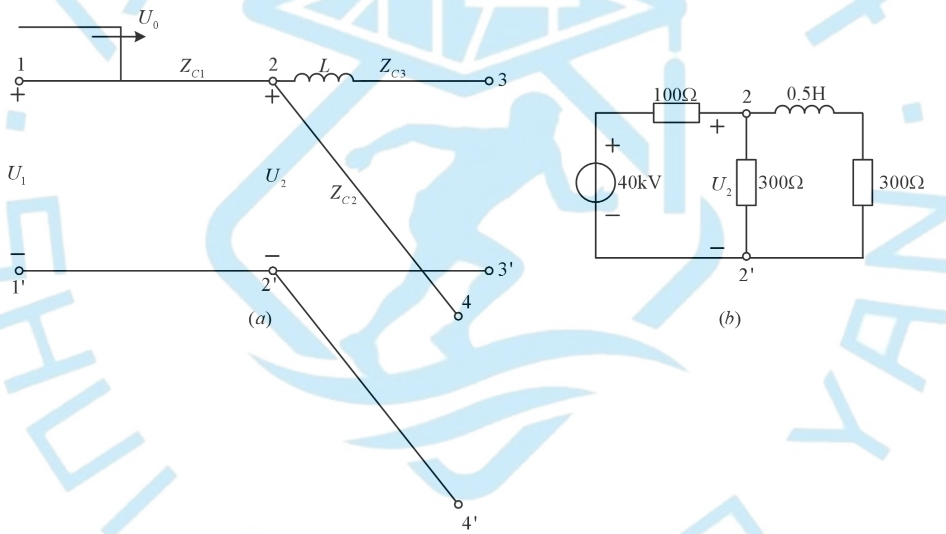
解答【15】

根据柏德生法则可知，当入射波到达连接点处，可得图（b）所示电路，易知：

$$\begin{cases} i_L(\infty)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{40000}{100+300//300}=80\text{A} \\ R_{eq}=300//100+300=375\Omega \qquad \rightarrow i_L(t)=80(1-e^{-750t})\text{A} \\ \tau=\dfrac{L}{R_{eq}}=\dfrac{1}{750}s \end{cases}$$

进而可得：

$$\begin{cases} u_2(t)=u_L+300i_L=24+6e^{-750t}\text{kV} \\ u_{\varphi 3}(t)=300i_L=24(1-e^{-750t})\text{kV} \end{cases}$$



解答【16】

当入射波到达连接点 22’处时，根据柏德生法则可得如图（b）所示电路：

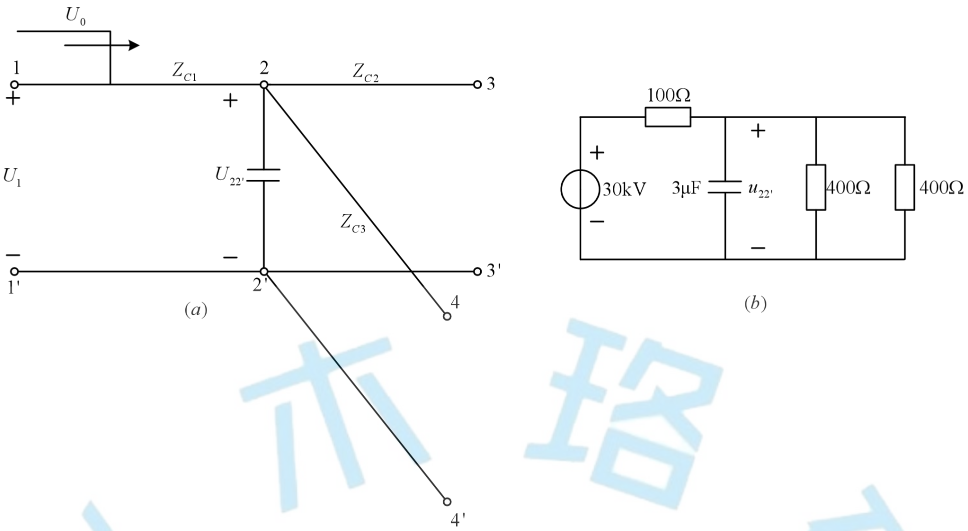
$$\begin{cases} u_C(\infty)=30\cdot\dfrac{200}{100+200}=20\text{kV} \\ R_{eq}=400//400//100=\dfrac{200}{3}\Omega \rightarrow u_C(t)=u_{22'}(t)=20(1-e^{-5000t})\text{kV} \\ \tau=R_{eq}C=2\cdot 10^{-4}s \end{cases}$$

进而可得：

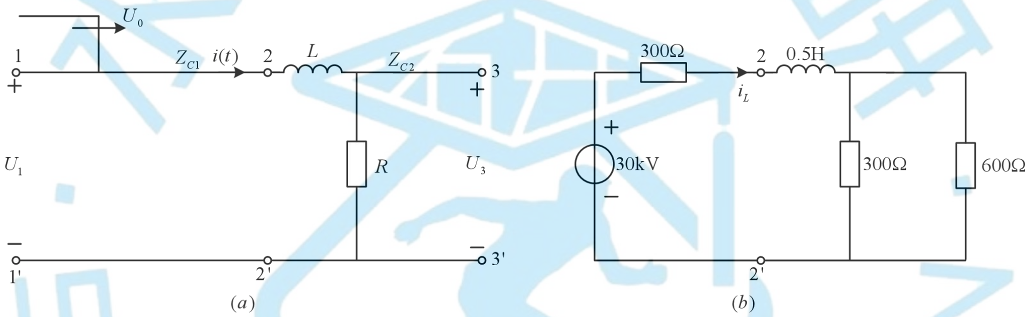
$$u_{1+}(t)+u_{1-}(t)=u_{22'}(t)\rightarrow u_{1-}(t)=u_{22'}(t)-u_{1+}(t)=5-20e^{-5000t}\text{kV}$$

进而可得：

$$i_{2+}(t)=\frac{u_{22'}(t)}{Z_{C2}}=50(1-e^{-5000t})\text{A}$$



解答【17】



根据柏德生法则可知，当入射波到达22'时，可得图（b）所示电路：

$$\begin{cases} i_L(\infty)=\dfrac{30000}{300+300//600}=60\text{A} \\ R_{eq}=300+300//600=500\Omega \\ \tau=\dfrac{L}{R_{eq}}=\dfrac{0.5}{500}=\dfrac{1}{1000}s \end{cases} \rightarrow i_L(t)=60(1-e^{-1000t})\text{A}$$

进而可得反射波电流：

$$i_{1+}-i_{1-}=i\rightarrow i_{1-}=i_{1+}-i=\frac{15000}{300}-60(1-e^{-1000t})=-10+60e^{-1000t}\text{A}$$

通过图（b）求透射波电流：

$$i_{2+}(t)=i_L(t)\cdot\frac{300}{300+600}=20(1-e^{-1000t})\text{A}$$