弦振动实验报告

2411545 邱凯锐

2025.5.12

1 实验目的

1. 掌握在弦线上形成稳定驻波的方法，观察驻波的形成过程；
2. 用两种不同的方法测定电动音叉的频率；
3. 用最小二乘原理拟合直线，验证波长与弦线张力的关系；

2 引言

一切机械波，在有限大小的物体中进行传播时会形成各式各样的驻波。驻波是常见的一种波的迭加现象，它广泛存在于自然界中，如管、弦、膜、板的振动都可形成驻波。驻波理论在声学、光学及无线电中，都有着重要的应用，如用来测定波长、波速或确定波动频率等。

一般的驻波发生在三维空间，较为复杂。为了便于掌握其基本特征，本实验研究最简单的一维空间的情况，即通过研究一根弦线的振动情况，以观察驻波的形成过程，获得稳定驻波的条件和调节方法，以及在弦的线密度基本不变的情况下，研究波长随弦线张力的变化关系，且由此还可以求出电动音叉的固有频率。

3 实验原理

设有两列波在横轴上传播，如 Figure 1 所示，其振幅、频率及振动方向均相同，但传播相反，向右的以实线表之，向左的以虚线表之。当 $t=0$ 时，两波互相重叠，其合成波如 Figure 1 (a) 中粗实线所示，此时各点位移最大。$t=T/4$ 时，两列波分别在其传播方向上向右和向左移动 1/4 波长的距离，合成波上各点的位移为零，如 Figure 1 (b)。$t=T/2$ 时两相干波又相互重叠，各点位移最大，但位移方向却与 $t=0$ 时相反 [如 Figure 1 (c)]。由此可知，上述二相干波叠加后，使横轴上某些点的振幅为零，称为波节，以“0”表示；而有些点的振幅则有最大值，且等于单个波振幅的 2 倍，称为波腹，以“+”表示。从外形看合成波波腹和波节的位置不随时间改变，波形不向前传播，故这种波称为驻波。如 Figure 2 所示。在驻波上，两个相邻的波节或波腹间的距离为半个波长，即：$\lambda/2$。因此，可以很方便地测出波长，这就是驻波的重要用途之一。

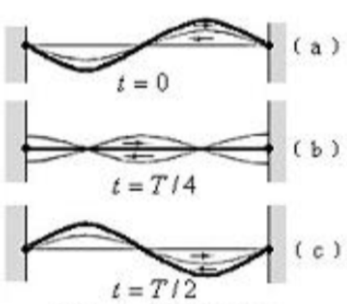

Figure 1: 驻波的形成

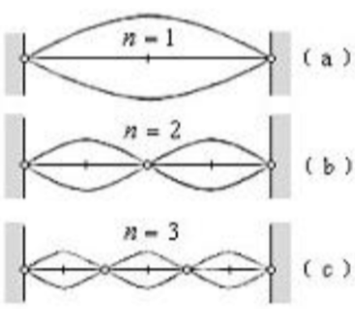

Figure 2: 弦线上的驻波

驻波的形成，通常是在入射波与反射波相互叠加的情况下发生的。如果把弦线的一端 A 固定在音叉上，另一端通过滑轮系上砝码 m，使弦线中产生一定张力 T；弦线因穿过支架 B 上的小孔而使该点不能振动。当音叉按自己的固有频率 f 振动时，入射波由 A 向 B 方向传播，并在 B 点发生反射，形成由 B 向 A 的反射波，入射波和反射波的频率、振幅和振动方向都相同，只是传播方向相反，满足驻波形成的条件。若 A、B 间的距离即弦长 l 恰为半波长的整数倍，即：

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \tag{1}$$

则可在 A、B 之间形成稳定的驻波，如图 Figure 2 所示。这是因为，当波在两种介质的分界面上发生反射时，若波从波阻较大的介质中反射回来，则反射处形成波节，而与音叉连接的 A 端振幅甚小，亦可视为“波节”。

为在弦线上获得稳定的驻波，可采取两种方法：一种是固定弦长 l，改变 T，另一种是固定张力 T，改变 l。本实验即是通过改变支架 B 的位置来获得稳定驻波的。弦线上形成稳定驻波的特点是：波节的位置不变，波腹最大且稳定。

根据弹性理论，当横波沿弦线传播时，在维持弦线张力 T 不变的情况下，波的传播速度 v 与张力及弦线的线密度 ρ 之间有如下关系：

$$v = \sqrt{T/\rho} \tag{2}$$

而波长 λ、频率 f 及波速之间的关系为：

$$v = \lambda f \tag{3}$$

因此，

$$\lambda = \frac{1}{f}\sqrt{T/\rho} \tag{4}$$

式 (4) 表示：当弦线的线密度不变时，波长与弦线的张力 T 的平方根成正比。将式 (1) 代入式 (4)，可得：

$$f = \frac{n}{2l}\sqrt{T/\rho} \tag{5}$$

式 (5) 表明，若知道 ρ 及 T，只要测出稳定驻波形成后 n 个半波长之间的距离 l，即可求出音叉的固有频率 f。本实验中为了便于测量和计算，可以只测两个半波长 $(n = 2)$ 间的距离 [如 Figure 2(b)]，即直接测定波长 λ。于是，频率可由下式计算：

$$f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{T/\rho} \tag{6}$$

4 实验仪器及调节

电动音叉、滑轮、弦线、砝码组、支架及米尺等。

调节音叉起振时，应轻缓拧动螺丝 K，当与弹片接触并产生蓝色火花时即已起振。继续拧动螺丝 K，音叉振动加强，至强度适中（以电磁铁不撞击音叉臂为宜）即可停止拧动 K。为防止火花间隙改变而使振动强度发生改变或停振，应旋紧调节螺丝上的锁紧螺母。

起振后，在一定张力 $T = mg$ 作用下，移动支架 B，适当改变弦长，即可形成稳定驻波。稳定驻波形成后，将支架 C 移至某波节下面，即可由米尺测定弦长。若取 $n = 2$，则弦长即波长 λ。

5 实验内容

5.1 测量弦线的线密度 ρ

测量弦线的总长度 L 和总质量 M，计算得到弦线的线密度 $\rho = \frac{M}{L}$。

5.2 固定张力 T，改变 l

在砝码质量为 100g（包括砝码托）的情况下，移动支架 B 使 A、B 间形成尽可能多的稳定驻波数，用米尺测出 B、C 间一个波长的距离 4 次（每次测量应重新调节）。然后根据给定弦线密度求音叉的固有频率。

5.3 固定弦长 l，改变 T

在不同张力 $T_i = 50, 70, 100, 130, 160, 200(9.8 \times 10^{-3}\text{N})$ 时，分别测出相应的驻波波长 λ_i，以验证 λ 与 $\sqrt{T}$ 的关系。并据曲线斜率求音叉的固有频率 f。

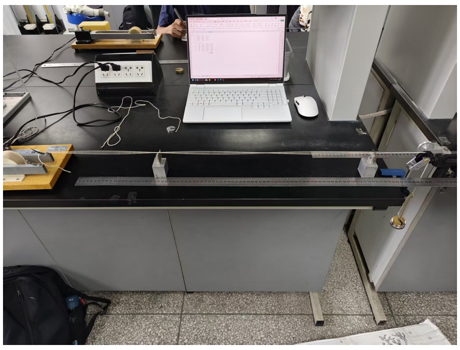

Figure 3: 实验装置

6 实验数据及分析

6.1 弦线的线密度 ρ

L/cm	M/g	$\rho/kg \cdot m^{-1}$
131	0.93	0.000709924

不确定度 u_ρ:

$$u_M = \frac{0.1g}{\sqrt{3}} = 0.057735027 \ \ g \qquad u_L = \frac{0.05cm}{3} = 0.016666667 \ \ cm$$

$$u_\rho = \rho\sqrt{(\frac{u_M}{M})^2 + (\frac{u_L}{L})^2} = 4.4 \times 10^{-5} \ \ kg/m$$

因此，$\rho = 7.10 \times 10^{-4} \pm 4.4 \times 10^{-5} \ \ kg/m$

6.2 固定张力 T，改变 l

固定 $T = 100 \times 9.8 \times 10^{-3}N$。

	1	2	3	4
λ/cm	39.38	38.23	38.44	38.26
f/Hz	94.35	97.19	96.65	97.11

计算得到：$\overline{\lambda} = 38.5775 \ \ cm$，$\overline{f} = 96.32 \ \ Hz$。

1. 不确定度 u_λ 计算：

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda_i-\overline{\lambda})^2}{n}=0.2211$$

$$S_{\lambda_i}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda_i-\overline{\lambda})^2}{n-1}}=0.5430$$

$$S_{\overline{\lambda}}=\frac{S_{\lambda_i}}{\sqrt{n}}=0.2715$$

$$u_{a\lambda}=t(0.683,3)S_{\overline{\lambda}}=0.3258\ \ cm$$

$$u_{b\lambda}=\frac{\Delta}{3}=\frac{0.05cm}{3}$$

$$u_\lambda=\sqrt{(u_{a\lambda})^2+(u_{b\lambda})^2}=0.33\ \ cm$$

2. 不确定度 $u_T=\frac{\varepsilon_r}{\sqrt{3}}=\frac{9.8\times10^{-3}N}{\sqrt{3}}$

3. 不确定度 u_f 计算：

$$u_f=\overline{f}\sqrt{(\frac{u_\lambda}{\overline{\lambda}})^2+(\frac{u_T}{T})^2+(\frac{u_\rho}{\rho})^2}=3.1\ \ Hz$$

综上，$f=\overline{f}\pm u_f=96.3\pm3.1\ \ Hz$。

6.3 固定 l，改变 T

	1	2	3	4	5	6
m/g	50	70	100	130	160	200
$\sqrt{T}/N^{\frac{1}{2}}$	0.70	0.83	0.99	1.13	1.25	1.40
λ/cm	27.97	32.52	38.66	43.82	48.71	53.93
f/Hz	93.93	95.59	96.10	96.67	96.484	97.43

计算得到：$\overline{\sqrt{T}}=1.0499\ \ N^{\frac{1}{2}}$，$\overline{\lambda}=40.935\ \ cm$，$\overline{f}=96.03\ \ Hz$

1. 使用最小二乘法拟合 $\lambda-\sqrt{T}$ 曲线，并计算 $f_{拟合}$：

$$a_1=\frac{\overline{\lambda\sqrt{T}}-\overline{\lambda}\cdot\overline{\sqrt{T}}}{\overline{T}-\overline{\sqrt{T}}^2}=37.3713\ \ cm/N^{\frac{1}{2}}$$

$$a_0=\overline{\lambda}-a_1\overline{\sqrt{T}}=1.7007\ \ cm$$

得到 $\lambda=1.7007+37.3713\sqrt{T}$，并作出 $\lambda-\sqrt{T}$ 曲线。
接着计算 $f_{拟合}$

$$f_{拟合}=\frac{1}{a_1\sqrt{\rho}}=100.43\ \ Hz$$

2. 计算最小二乘法的不确定度：

$$S_{\sqrt{T}\lambda}=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{T_i}-\overline{\sqrt{T}})(\lambda_i-\overline{\lambda})=12.8878$$

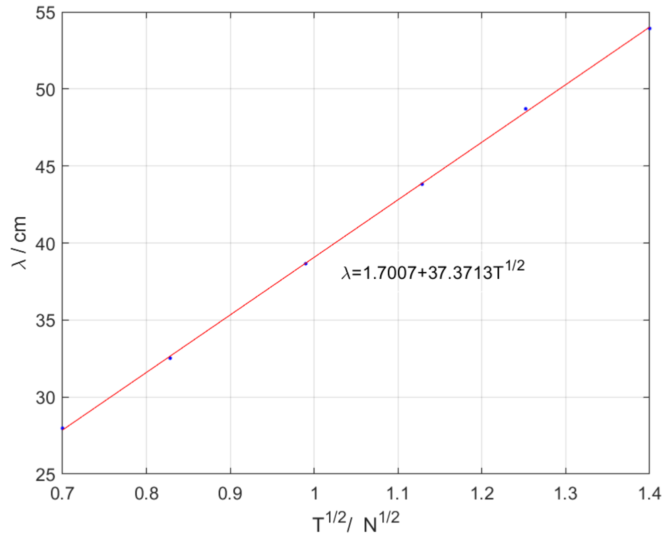

Figure 4: $\lambda-\sqrt{T}$拟合曲线

$$S_{\sqrt{T}\sqrt{T}}=\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{T_i}-\overline{\sqrt{T}})^2=0.3449$$

$$S_{\lambda\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-\overline{\lambda}^2=481.7230$$

不确定度：

$$u_{\lambda_i}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(\lambda_i-a_0-a_1\sqrt{T_i})^2}{n-2}}\ \ cm$$

$$u_{a_1}=\frac{u_{\lambda_i}}{\sqrt{S_{\sqrt{T}\sqrt{T}}}}=0.2534\ \ cm/N^{\frac{1}{2}}$$

$$u_{a_0}=\sqrt{\overline{T}}u_{a_1}=0.2729\ \ cm$$

接着转化为 f 的不确定度 u_f:

$$f_1=\frac{1}{(a_1+u_{a_1})\sqrt{\rho}}=99.75\ \ Hz\qquad f_2=\frac{1}{(a_1-u_{a_1})\sqrt{\rho}}=101.11\ \ Hz$$

$$u_{f_1}=f_{拟合}-f_1=0.68\ \ Hz\qquad u_{f_2}=f_2-f_{拟合}=0.68\ \ Hz$$

得到：$u_f=0.68\ \ Hz$

因此，音叉的固定频率 $f=f_{拟合}\pm u_f=100.4\pm0.7\ \ Hz$。

3. 相关系数

$$r_{\sqrt{T}\lambda}=\frac{S_{\sqrt{T}\lambda}}{\sqrt{S_{\sqrt{T}\sqrt{T}}S_{\lambda\lambda}}}=0.9999$$

可以看出数据的线性相关性较强。

7 误差分析

本实验中音叉的固有频率 $f_0=100\ \ Hz$，可以看出实验二比实验一测得的结果更为准确。其中两个实验都存在的误差有：

1. 测量仪器所带来的误差；
2. 波节位置的确定存在误差，无法完全精确地确定波节的位置；
3. 砝码的微小摆动带来拉力 T 的微小变化；
4. 音叉本身振动存在一定的振幅，进而影响弦线的振动。

而实验二通过最小二乘法，计算 $\lambda-\sqrt{T}$ 曲线的斜率从而得到音叉的固有频率 f，相较于实验一的结果会更加精确，同时不确定度也会更小。