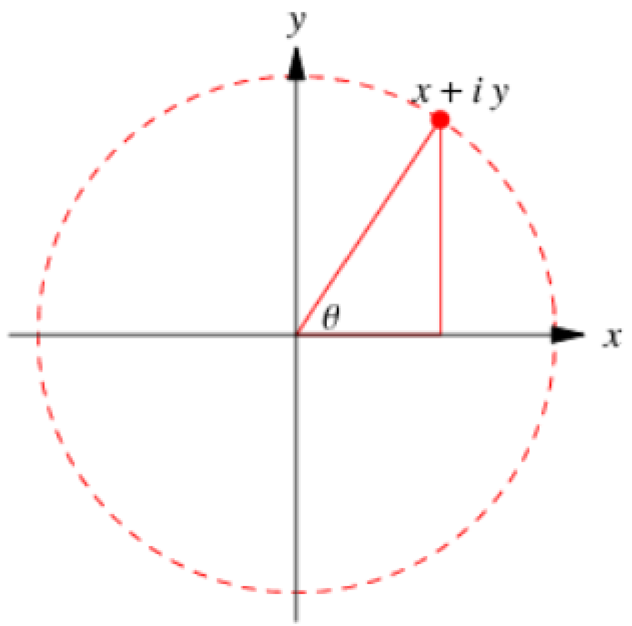
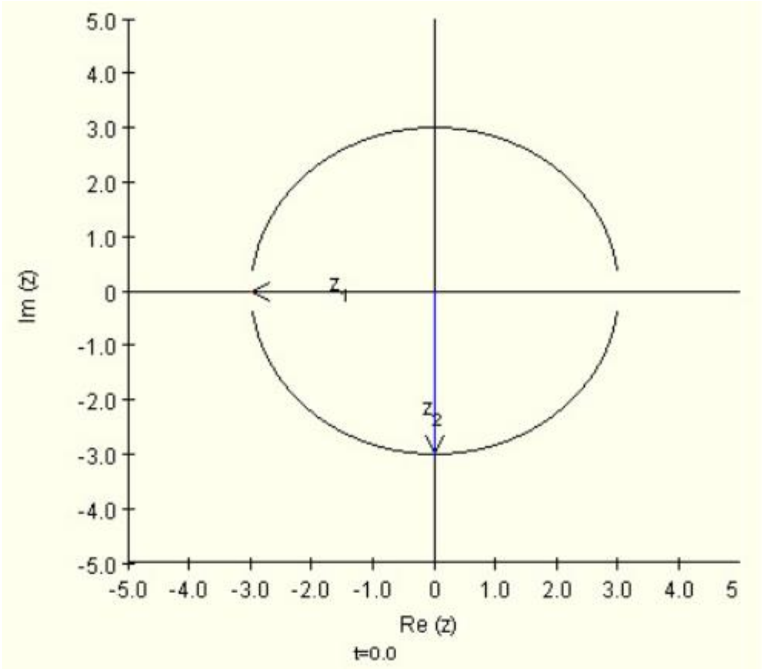
Zu Beginn: Komplexe Zahlen

Eine Besonderheit der Programmiersprache Python ist, dass sie ohne weitere Anpassungen mit komplexen Zahlen arbeiten kann.

Komplexe Zahlen spielen in der Naturwissenschaft eine wichtige Rolle. Mit ihrer Hilfe können Punkte in einer Zahlenebene leicht dargestellt werden.

Diese Zahlenebene besteht aus einer x- und einer iy-Achse. Jede komplexe Zahl besitzt dadurch zwei Anteile: Einen Realteil und einen Imaginärteil.





In unserem Beispiel nennen wir die komplexen Zahlen c und schreiben sie z.B. als c = 0.33 + 0.33j. In der Mathematik wird als Einheit für den imaginären Teil als „i" benutzt, Python nutzt dafür das „j", wie es in den Ingenieurswissenschaften üblich ist.

Somit kann eine komplexe Zahl als Summe eines Real- und eines Imaginärteils zusammengefasst werden.

Wozu dient das Programm?

- Mit Hilfe des Programms soll grafisch dargestellt werden, ob eine komplexe Zahl c zur Mandelbrot-Menge gehört oder nicht.
- Annahme: Unsere komplexe Zahl c gehört dann zur Mandelbrotmenge, wenn die Funktion des Typs von f(z):= z * z + c bei einem Startwert von z mit $z_0 = 0$ nicht divergiert.
- Divergiert bedeutet: Der Betrag eines Folgenglieds wird während der Iteration größer als r = 2.
- Bleibt der Betrag eines Folgeglieds während der Iteration kleiner als r=2, gehört die Komplexe Zahl c zur Mandelbrotmenge. Der Betrag konvergiert gegen einen Grenzwert.
- Die Mandelbrotmenge und die dazugehörige Julia-Menge werden mit Funktionen des Typs f(z):= z * z + c erzeugt:

```
def f(z):
    return  z * z + c
```

- Wir gehen davon aus, dass c = 0.33 + 0.33j zu der Mandelbrotmenge gehört. c = 0.36 + 0.36j gehört nicht zur Mandelbrotmenge.
- Die grafische Ausgabe für c = 0.33 + 0.33j erfolgt in blauer Farbe, für c = 0.36 + 0.36j in roter Farbe.

```
if isMandelbrot:
    c = 0.33 + 0.33j
    setColor("blue")

else:
    c = 0.36+ 0.36j
    setColor("red")
```

- Für c = 0.33 + 0.33j ist zu erwarten, dass z nicht größer als 2 und divergieren wird.
  - Folge: Bei der Iteration der Gleichung bleiben die Werte von z in einem beschränktem Gebiet liegen („Gefangene“).

- Für c = 0.36 + 0.36j ist zu erwarten, dass z größer als 2 wird und konvergieren wird.
  - Folge: Bei der Iteration dieser Gleichung streben einige Werte von z unter grafischer Iteration ins Unendliche.

- Der Startpunkt ist z = 0j

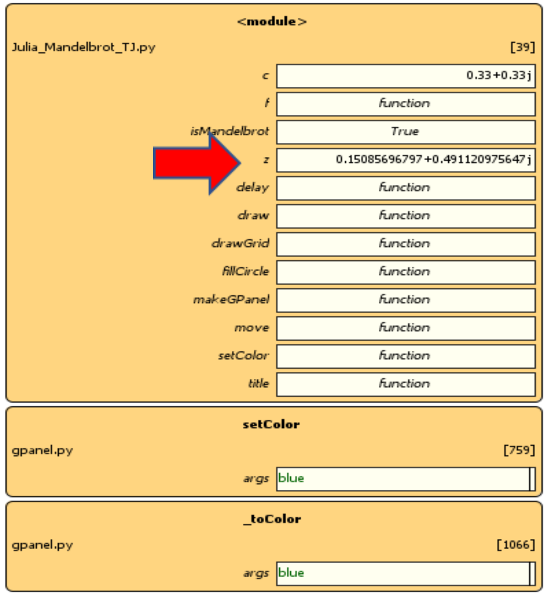
```

title("Mandelbrot-Iteration mit: c = " + str(c))

move(c)
fillCircle(0.001)

z = 0j
while True:
    if z == 0:
        move(z)
    else:
        draw(z)
    z = f(z)
    print(z)
    print(z.real)
    print(z.imag)
    delay(500)
```

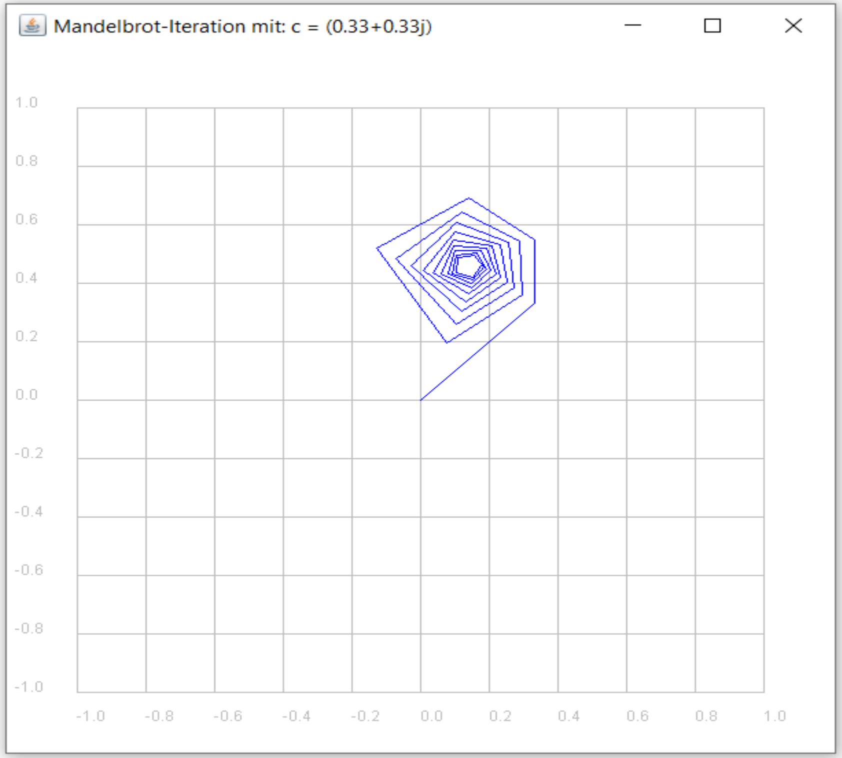
- Für jede Stufe n der Iteration wird in der Konsole der Wert von z ausgeben.

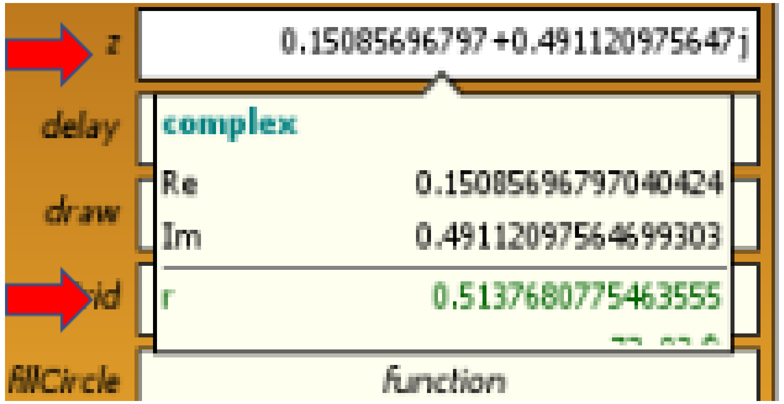
- Es wird solange iteriert, bis das Programm abgebrochen wird.

Konkretes Beispiel: Gehört c = 0.33 + 0.33j zur Mandelbrotmenge?

- Annahme: Die komplexe Zahl c = 0.33 + 0.33j gehört zur Mandelbrotmenge.
- Bedingung: Ein Folgeglied wird während der Iteration *nicht größer* als 2.
- Die eingezeichneten Punkte verlassen die Gefangenenmenge nicht, sie gehören zur Julia-Menge.
- Der Radius r= 0.513768 hat damit den Wert von r= 2 nicht überschritten: Das System konvergiert gegen einen Grenzwert.
- Es wird bei der Durchführung nach einer Iterationsdauer von 150 s folgende Grafik und Werte ausgegeben:







Ausgabe der Werte von z nach 25 Durchgängen für c = 0.33 + 0.33j:

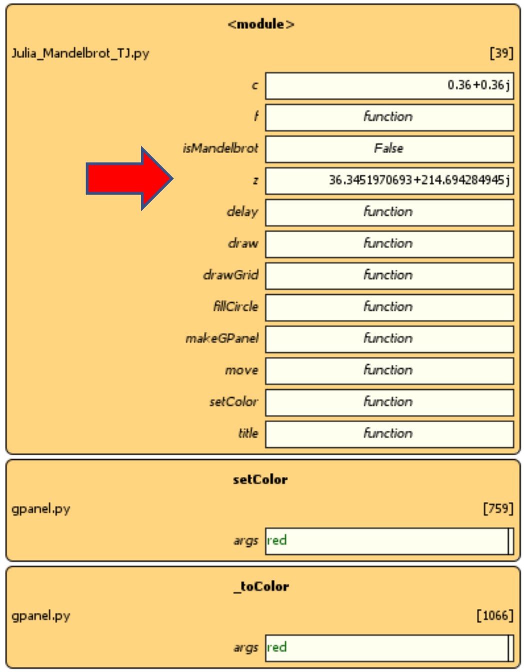
#	Werte	#	Werte
1	(0.33+0.33j)	14	(-0.0275526829731+0.458656616768j)
	0.33		-0.0275526829731
	0.33		0.458656616768
2	(0.33+0.5478j)	15	(0.120393258234+0.304725559289j)
	0.33		0.120393258234
	0.5478		0.304725559289
3	(0.13881516+0.691548j)	16	(0.251636870144+0.4033738059j)
	0.13881516		0.251636870144
	0.691548		0.4033738059
4	(-0.128968987658+0.521994692535j)	17	(0.23061068713+0.53300744403j)
	-0.128968987658		0.23061068713
	0.521994692535		0.53300744403
5	(0.0741545407425+0.195357745882j)	18	(0.0990843536274+0.575834425826j)
	0.0741545407425		0.0990843536274
	0.195357745882		0.575834425826
6	(0.297334247037+0.358973327853j)	18	(0.00823242316781+0.444112363759j)
	0.297334247037		0.00823242316781
	0.358973327853		0.444112363759
7	(0.289545804351+0.543470128287j)	19	(0.132831981148+0.337312241825j)
	0.289545804351		0.132831981148
	0.543470128287		0.337312241825
8	(0.118476992477+0.644718990871j)	20	(0.233864786731+0.419611706694j)
	0.118476992477		0.233864786731
	0.644718990871		0.419611706694
9	(-0.0716257794437+0.482768734063j)	21	(0.208618754078+0.526264804591j)
	-0.0716257794437		0.208618754078
	0.482768734063		0.526264804591
10	(0.102064601692+0.260842626263j)	22	(0.0965671400014+0.549577415698j)
	0.102064601692		0.0965671400014
	0.260842626263		0.549577415698
11	(0.272378307243+0.383245597508j)	23	(0.037289876683+0.436142238487j)
	0.272378307243		0.037289876683
	0.383245597508		0.436142238487
12	(0.257312754247+0.538775574215j)	24	(0.141170482711+0.362527380579j)
	0.257312754247		0.141170482711
	0.538775574215		0.362527380579
13	(0.105930734128+0.607267653845j)	25	(0.218503003519+0.432356330625j)
	0.105930734128		0.218503003519
	0.607267653845		0.432356330625

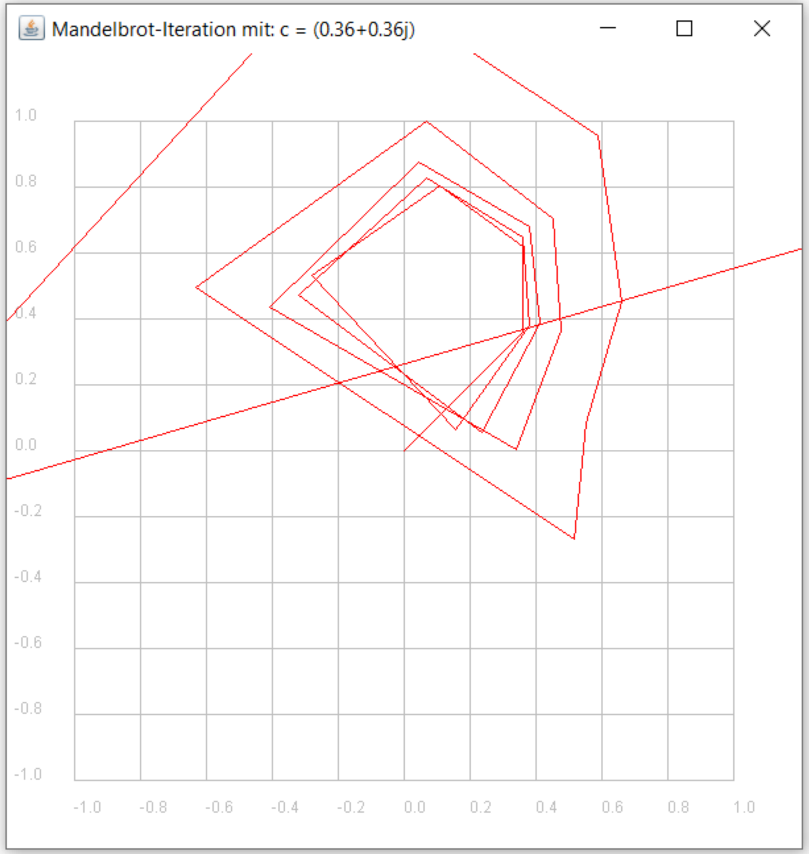
Ergebnis:
c ist Element der Mandelbrotmenge!

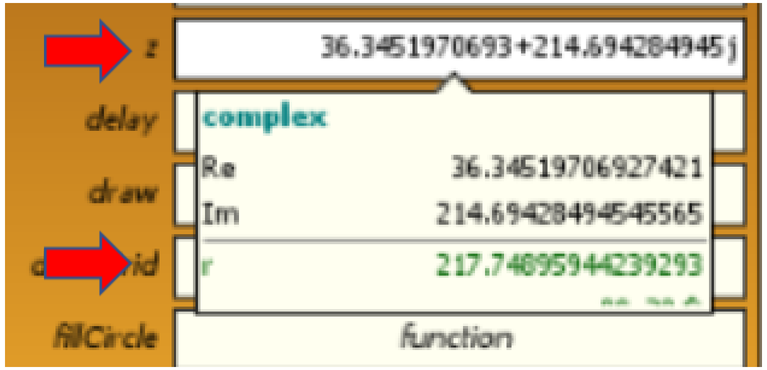
Ein Anfangspunkt z liegt innerhalb der Mandelbrotmenge („Gefangenenmenge“), wenn seine Folge von Iterierten unter Iteration der Funktion f(z):= z * z + c nicht ins Unendliche entkommt.

Konkretes Beispiel: Gehört c = 0.36 + 0.36j zur Mandelbrot-Menge?

- Annahme: Die komplexe Zahl c = 0.36 + 0.36j gehört nicht zur Mandelbrotmenge.
- Ein Folgeglied wird während der Iteration *größer* als 2.
- Die eingezeichneten Werte fliehen nach Unendlich. Die Julia-Mengen, die zu diesen Werten gehören, sind unzusammenhängend.
- Der Radius beträgt r= 217.789594 und hat damit den Wert von r= 2 überschritten. Das System divergiert.
- Es wird bei der Durchführung nach einer Iterationsdauer von 150 s folgende Grafik und Werte ausgegeben:







Ausgabe der Werte von z nach 25 Durchgängen für c = 0.36 + 0.36j

#	Werte	#	Werte
1	(0.36+0.36j)	14	(-0.408630205031+0.434135484998j)
	0.36		-0.408630205031
	0.36		0.434135484998
2	(0.36+0.6192j)	15	(0.33850502513+0.00519825550766j)
	0.36		0.33850502513
	0.6192		0.00519825550766
3	(0.10619136+0.805824j)	16	(0.474558630178+0.363519271223j)
	0.10619136		0.474558630178
	0.805824		0.363519271223
4	(-0.278075714037+0.531143092961j)	17	(0.453059632926+0.705022414789j)
	-0.278075714037		0.453059632926
	0.531143092961		0.705022414789
5	(0.155213117537+0.0646040103376j)	18	(0.068206425632+0.998834392898j)
	0.155213117537		0.068206425632
	0.0646040103376		0.998834392898
6	(0.379917433704+0.3800547797j)	18	(-0.633018027938+0.496253847476j)
	0.379917433704		-0.633018027938
	0.3800547797		0.496253847476
7	(0.359895620859+0.648778873141j)	19	(0.51444394256-0.268275263771j)
	0.359895620859		0.51444394256
	0.648778873141		-0.268275263771
8	(0.06861083168+0.826985350699j)	20	(0.552680952885+0.0839748312282j)
	0.06861083168		0.552680952885
	0.826985350699		0.0839748312282
9	(-0.319197324047+0.473480305397j)	21	(0.658404463402+0.452822579483j)
	-0.319197324047		0.658404463402
	0.473480305397		0.452822579483
10	(0.23770333208+0.0577327070565j)	22	(0.588448148938+0.956280814922j)
	0.23770333208		0.588448148938
	0.0577327070565		0.956280814922
11	(0.413169808618+0.387446513675j)	23	(-0.208201772999+1.48544335081j)
	0.413169808618		-0.208201772999
	0.387446513675		148.544.335.081
12	(0.380594489795+0.680162403809j)	24	(-1.80319397019-0.258543878657j)
	0.380594489795		-180.319.397.019
	0.680162403809		-0.258543878657
13	(0.0422312701066+0.87773212611j)	25	(3.54466355694+1.29240952605j)
	0.0422312701066		354.466.355.694
	0.87773212611		129.240.952.605

Ergebnis: c ist nicht Element der Mandelbrotmenge!

Ein Anfangspunkt z liegt außerhalb der Mandelbrotmenge („Gefangenenmenge“), wenn seine Folge von Iterierten unter Iteration der Funktion f(z):= z * z + c ins Unendliche entkommt.

Programmcode

```
from gpanel import *
def f(z):
    return  z * z + c

makeGPanel(-1.2, 1.2, -1.2, 1.2)
title("Mandelbrot-Iteration: Gehört eine komplexe Zahl c zur Mandelbrot-Menge?")

drawGrid(-1, 1.0, -1, 1.0, 10, 10, "gray")

isMandelbrot = askYesNo("Soll der Wert c ein Element der Mandelbrotmenge sein?")
if isMandelbrot:
    c = 0.33 + 0.33j
    setColor("blue")

else:
    c = 0.36+ 0.36j
    setColor("red")

title("Mandelbrot-Iteration mit: c = " + str(c))

move(c)
fillCircle(0.001)

z = 0j
while True:
    if z == 0:
        move(z)
    else:
        draw(z)
    z = f(z)
    print(z)
    print(z.real)
    print(z.imag)
    delay(500)
```