TP4 - IFT2105

par Ilan Elbaz

3 juin 2019

Lemme du pompiste hors-contexte - Rappel

Soit $L \in HC$. Le lemme du pompiste dit la chose suivante :
Il existe une longueur de pompage $p \geq 1$ telle que pour tout mot $w \in L$ avec $|w| \geq p$ peut être écrit par $w = uvxyz$ ou

1. $|vy| > 0$
2. $|vxy| \leq p$
3. $\forall i \geq 0,\ uv^ixy^iz \in L$

1. Montrez que $L \notin HC$ sur $\Sigma = \{a, b, c\}$

$$L = \{a^ib^jc^k \mid i < j < k\}$$

Supposons que L soit un langage HC. Alors le lemme du pompiste HC tient. Soit p la longueur donnée par le lemme du pompiste. Considérons le mot $w = a^pb^{p+1}c^{p+2}$, $w \in L$ et $|w| > p$. Le lemme nous donne u, v, x, y, z tel que $w = uvxyz$, $|vy| > 0$, et $|vxy| \leq p$.
Distinguons cinq cas possibles:

1. $vxy \in a^+$
2. $vxy \in a^+b^+$
3. $vxy \in b^+$
4. $vxy \in b^+c^+$
5. $vxy \in c^+$

Il est facile de voir que pour les trois premiers cas que pour un pompage positif i, $w = uv^ixy^iz$ ne sera pas dans L. Pour les deux dernier cas il suffit de prendre un pompage nul.

2. Montrez que $L \notin HC$ sur $\Sigma = \{a, b, c\}$

$$L = \{a^n b^n c^i \mid i \leq n\}$$

Supposons que L soit un langage HC. Alors le lemme du pompiste HC tient. Soit p la longueur donnée par le lemme du pompiste. Considérons le mot $w = a^p b^p c^p$, $w \in L$ et $|w| > p$. On sait que peut importe le découpage vxy que l'on choisit, il ne pourra pas contenir les a,b,c en même temps. Ainsi pour tout pompage il y aura une lettre qui apparaîtra moins que les autres, le mot pompé $\notin L$, $L \notin HC$.

3. Montrez que $L \notin HC$ sur $\Sigma = \{0, 1\}$

$$L = \{ww^R w\}$$

Considérons le mot $0^p 1 1 0^p 0^p 1$. Soit $|vxy| = m$ un découpage quelquonque de w. Peut importe le découpage on voit que les trois blocs de 0 ne pourrons pas tous être en même temps dans vxy. Ainsi il y aura des 0 qui seront plus présent que d'autre $\notin L$. L n'est donc pas hors contexte.

4. Montrez que $L \notin HC$ sur $\Sigma = \{0, 1, \#\}$

$$L = \{w\#x \mid w \text{ est une sous-chaîne de } x \text{ avec } w, x \in \{0, 1\}^*\}$$

Supposons que L soit un langage HC. Alors le lemme du pompiste HC tient. Soit p la longueur donnée par le lemme du pompiste. Considérons le mot $w = 0^p 1^p \# 0^p 1^p$, $w \in L$ et $|w| > p$. Le lemme nous donne u, v, x, y, z tel que $w = uvxyz$, $|vy| > 0$, et $|vxy| \leq p$.
Distinguons quatre cas possibles:

1. vy et y contient un # alors $uv^0 xy^0 z \notin L$.
2. v et y sont situés à gauche du #, alors $uv^2 xy^2 z \notin L$ puisque la partie à gauche est plus longue que la partie à droite.
3. v et y sont situés à droite du #, alors $uv^0 xy^0 z \notin L$ puisque la partie à gauche est plus longue que la partie à droite.

4. v et y sont situés de part et d'autre du $\#$, alors $v = 1^\alpha$ et $y = 0^\beta$. Si $\alpha > 0$, $uv^2xy^2z \notin L$ car la partie droite ne contient pas assez de 1 à la fin. Si $\beta > 0$, $uv^0xy^0z \notin L$ car la partie droite ne contient pas assez de 0 au début.

Comme ces deux cas sont exhaustifs, on conclut que L ne peut être hors-contexte.

Forme normale de Chomsky

Une grammaire $G = (V, \Sigma, R, S)$ est sous sa forme normale de Chomsky si toutes ses règles sont d'une des formes :

$$
\begin{aligned}
A &\to BC \\
B &\to x
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
A, B, C &\in V \\
B &\neq S \\
C &\neq S \\
x &\in \Sigma
\end{aligned}
$$

En permettant aussi:

$$S \to \epsilon$$

1. Ajouter S_0 à V (qui sera la nouvelle variable initiale) et ajouter la règle $S_0 \to S$ à R.
2. Éliminer de R toutes les règles de la forme $A \to \epsilon$ (sauf $S_0 \to \epsilon$):
   (a) Enlever $A \to \epsilon$
   (b) $\forall (B \to uAv) \in R$, ajouter $B \to uv$ si cette règle n'a pas déjà été éliminée.
3. Eliminer de R toutes les règles de la forme $A \to B$ où $B \in V$:
   (a) Enlever $A \to B$.
   (b) $\forall (B \to w) \in R$, ajouter $A \to w$ si cette règle n'a pas déjà été éliminée.
4. Eliminer de R toutes les règles de la forme $A \to u_1 u_2 \cdots u_k$ où $k \geq 3$ et $u_1, u_2, \cdots, u_k \in V \cup \Sigma$:
   (a) Enlever $A \to u_1 u_2 \cdots u_k$.
   (b) Ajouter $A_1, A_2, \cdots, A_{k-2}$ à V.

(c) Ajouter $A \rightarrow u_1 A_1, A_1 \rightarrow u_2 A_2, \cdots, A_{k-2} \rightarrow u_{k-1} u_k$ à R.

5. Éliminer de R toutes les règles de la forme $A \rightarrow xB$ où $x \in \sigma$ et $B \in V$:
   - Enlever $A \rightarrow xB$
   - Ajouter A' à V.
   - Ajouter $A \rightarrow A'B$ et $A' \rightarrow x$ à R.
6. Éliminer de R toutes les règles de la forme $A \rightarrow Bx$ où $x \in \Sigma$ et $B \in V$ de la même façon.

5. Construisez une grammaire en forme normale de Chomsky pour la gram- maire suivante :

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \\
B &\rightarrow 00 \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

1. Ajout d'une nouvelle variable initiale

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \\
A &\rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \\
B &\rightarrow 00 \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

2. Élimination de la règle $B \rightarrow \epsilon$

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow A \\
A &\rightarrow BAB \mid B \mid \epsilon \mid AB \mid BA \mid A \\
B &\rightarrow 00
\end{aligned}
$$

3. Élimination de la règle $A \to \epsilon$

$$
\begin{aligned}
&S \to A \mid \epsilon \\
&A \to BAB \mid BB \mid B \mid AB \mid BA \mid A \\
&B \to 00
\end{aligned}
$$

4. Élimination des règles $A \to B$ et $A \to A$

$$
\begin{aligned}
&S \to A \mid \epsilon \\
&A \to BAB \mid BB \mid 00 \mid AB \mid BA \\
&B \to 00
\end{aligned}
$$

5. Élimination de la règle $S \to A$

$$
\begin{aligned}
&S \to BAB \mid BB \mid 00 \mid AB \mid BA \mid \epsilon \\
&A \to BAB \mid BB \mid 00 \mid AB \mid BA \\
&B \to 00
\end{aligned}
$$

6. Élimination de BAB

$$
\begin{aligned}
&S \to BU \mid BB \mid 00 \mid AB \mid BA \mid \epsilon \\
&A \to BU \mid BB \mid 00 \mid AB \mid BA \\
&B \to 00 \\
&U \to AB
\end{aligned}
$$

7. Élimination de 00

$$
\begin{aligned}
&S \to BU \mid BB \mid ZZ \mid AB \mid BA \mid \epsilon \\
&A \to BU \mid BB \mid ZZ \mid AB \mid BA \\
&B \to ZZ \\
&U \to AB \\
&Z \to 0
\end{aligned}
$$