IFT2105-A19 : Devoir 5

À remettre le mercredi 4 décembre à 13h30, en main propre. Vous pouvez travailler seuls ou en équipes de deux.

Problème 1 (*10 points*)

Montrez que le langage

$$L = \{\langle M \rangle \mid M \text{ est une MT telle que } L(M) \in \mathsf{P}\}$$

est indécidable.

Problème 2 (*10 points*)

Soit

$L = \{\langle M, b \rangle \mid$ si $b = 0$, alors M s'arrête sur entrée vide, et si $b = 1$ alors M boucle sur entrée vide$\}$.

Montrez que ni L, ni $\bar{L}$ n'est reconnaissable.

Problème 3

Montrez les propriétés de fermeture suivantes :

- (*5 points*) DEC est fermé sous la concaténation
- (*5 points*) REC est fermé sous l'intersection
- (*5 points*) REC est fermé sous l'union

Problème 4 (***10 points***)

Au début du cours, nous avons vu que la fonction d'Ackermann n'est pas calculable par les programmes `RÉPÉTER`, mais peut l'être par un programme `TANTQUE`. Existe-t-il une fonction qui n'est pas calculable, même par les programmes `TANTQUE` (et donc par les machines de Turing) ?

Considérons la fonction suivante :

$f(n) = \max\{x \in \mathbb{N} \mid$ il existe un programme `TANTQUE` à au plus n lignes de code qui calcule x et s'arrête$\}$.

Le but de ce problème est de prouver que $f(n)$ n'est pas calculable par un programme `TANTQUE`. Pour ce faire, supposons qu'il existe un programme `TANTQUE` $\mathtt{F}(r_1)$ à n_F lignes de code calculant f. Montrez qu'à partir du code de `F`, il est possible de construire un programme `TANTQUE` à N lignes qui produit un nombre plus grand que $f(N)$ en sortie et qui s'arrête, ce qui contredit la définition de f.

Indice : Il pourrait être utile de considérer un sous-programme `DOUBLE` qui permet de doubler son entrée.