# Réduction de NP-Complétude

Par ilan Elbaz (pris de A. Tapp)

## 1 $\frac{n}{2}-$CLIQUE est NP-Complet

**Définition 1.** *Le language $\frac{n}{2}-CLIQUE$ est constitué des graphes $G$ qui contiennent une clique de taille au moins $|V(G)|/2$.*

$$\frac{n}{2} - CLIQUE := \left\{ \langle G \rangle \,\middle|\, G \text{ a une } \frac{|V(G)|}{2} - clique \right\}$$

### 1.1 $\frac{n}{2}-$CLIQUE $\in$ NP

Un certificat serait la liste des sommets de la $\frac{n}{2}-$clique. Le vérificateur s'assure que la clique contient bien $\frac{n}{2}$ sommets de $G$ et qu'il s'agit d'un sous-graphe complet en $\frac{n}{2} \times \left(\frac{n}{2} - 1\right)$ opérations.

Si un graphe n'est pas dans $n/2-$clique, aucun certificat ne satisfera le vérificateur.

### 1.2 CLIQUE $\leq_p \frac{n}{2}-$CLIQUE

À partir d'un graphe $G$ et d'un paramètre $k$ on va bâtir un graphe $G'$ en temps polynomial tel que $G$ contient une $k-$clique si et seulement si $G'$ contient une $|V(G')|/2-$clique.

(a) Si $k > n/2$. On ajoute $2k - n$ sommets isolés à $G$.

(b) Si $k < n/2$, on ajoute une clique de $(n - 2k)$ sommets et on les relie à tous les sommets de $G$.

(c) Si $k = n/2$, on ne fait rien.

Cette transformation se fait en temps polynomial, $(n/2)^2 \times n$ opérations dans le pire cas.

### 1.2.1 D'une $k-$clique à une $\frac{n}{2}-$clique

- Dans le cas (a), la $k$-clique de $G$ reste dans $G'$ qui est de taille $2k$.
- Dans le cas (b), on a ajouté $(n-2k)$ sommets reliés à tous les sommets de la $k-$clique de $G$. La clique est maintenant de taille $n-k$ qui est exactement la moitié du nombre de sommets dans $G'$.
- Dans le cas (c), on a déjà une $n/2-$clique dans le graphe initial.

### 1.2.2 D'une $\frac{n}{2}-$clique à une k-clique

- Dans le cas (a), la $k-$clique dans $G'$ doit être située dans les $n$ sommets de $G$ puisque les autres sommets ajoutés sont isolés.
- Dans le cas (b), la $(n-k)-$clique dans le graphe $G'$ doit contenir au moins $k$ éléments du graphe initial puisque la clique ajoutée contient seulement $(n-2k)$ sommets.
- Dans le cas (c), on a déjà une $k-$clique dans le graphe $G$.

# 2 Le problème du coureur ennuyeux

Un joggeur a pour objectir de partir de chez lui, courir $k$ kilomètres dans les rues de sa ville sans repasser par les mêmes rues et terminer à la maison.

On formalise ce problème avec un graphe $G$ pondéré, non-orienté, avec des boucles, des coûts positifs et un noeud spécial appelé $m$ pour maison.

Le langage PCE contient les paires $(\langle G\rangle, k)$ telles qu'il existe un $(m,m)-$chemin simple de longueur $k$ dans $G$.

## 2.1 PCE est dans NP

Un certificat serait le parcours. Le vérificateur s'assure que le chemin est simple, totalise $k$ unités et commence et termine à $m$. Toutes ces actions se font en temps polynomial en nombre d'arêtes.

Si une paire $(\langle G\rangle, k) \notin$ PCE, alors aucun certificat ne satisfera le vérificateur.

## 2.2 SUBSET-SUM $\leq_p$ PCE

**Définition 2.** *Soit $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble de $n$ entiers non-négatifs et $t$ un entier non-négatif. Le mot $(S,t)$ est dans le langage* SUBSET-SUM *si et seulement si il existe un sous ensemble $R \subseteq S$ qui a somme $t$.*

$$\textit{SUBSET-SUM} := \left\{ (S.t) \middle| \left( \exists R \subseteq S \middle| \sum_{a \in R} a = t \right) \right\}$$

À partir d'une liste d'entiers positifs $S$ et d'un paramètre $k$,on va définir en temps polynomial un graphe pondéré $G$ et un paramètre $k'$ tels que $(\langle G \rangle, k) \in$ PCE ssi $(S, k') \in$ SUBSET-SUM.

On bâtit un graphe $G$ contenant un seul sommet $m$ et $|S|$ boucles chacune de poids correspondant aux entiers de $S$. On pose $k' = k$.

### 2.2.1 D'un sous-ensemble à un parcours

Supposons qu'il existe un sous-ensemble $I$ de $S$ qui s'additionne à $k$. Il existe alors un chemin dans $G$ correspondant aux entiers de $I$ qui totalisent un coût de $k$. Ce chemin est simple et part et arrive à $m$.

### 2.2.2 D'un parcours à un sous-ensemble

Si on trouve un chemin de taille $k$ dans $G$, alors le sous-ensemble correspondant aux arêtes du chemin forme un sous-ensemble de $S$ totalisant $k$. Aucun entier n'apparait deux fois dans la somme puisque le chemin est simple.

# 3 SGI est NP-Complet

**Définition 3.** *Le langage* SGI *(SOUS-GRAPHE ISOMORPHE) contient les paires de graphes $\langle H, G \rangle$ tel que $H$ est isomorphe à un sous-graphe de $G$.*

$$\textit{SGI} := \{ \langle H, G \rangle \mid H \textit{ est isomorphe à un sous-graphe de } G \}$$

## 3.1 SGI est dans NP

Un certificat est le sous-ensemble de $V(G)$ et $E(G)$ isomorphe à $H$ et une description de l'isomorphisme. Le vérificateur s'assure qu'il s'agit bien d'un sous-ensemble de $V(G)$ et $E(G)$ et que l'isomorphisme le rend bien isomorphe à $H$. Ces deux étapes s'effectuent en temps polynomial. Il est clair que si $\langle H, G \rangle \in$ SGI alors les deux étapes sont satisfaites et le vérificateur accepte.

D'autre part, si $\langle H, G\rangle \notin$ SGI alors les étapes ne peuvent être satisfaites pour aucun certificat et le vérificateur rejette.

### 3.2 CLIQUE $\leq_p$ SGI

On donne une fonction $f$ polynomiale telle que

$$(\langle G\rangle, k) \in \text{CLIQUE} \iff f(\langle G\rangle, k) \in \text{SGI}$$

La façon naturelle de définir $f$ est la suivante : $f(\langle G\rangle, k) := \langle H, G\rangle$ où $H$ est un graphe complet avec k sommets.

#### 3.2.1 $(\langle G\rangle, k) \in$ **CLIQUE** $(\langle G, H\rangle) \in$ **SGI**

Si $G$ a une $k-$clique, alors un de ses sous-graphe est isomorphe à une clique de taille $k$.

#### 3.2.2 $(\langle G, H\rangle) \in$ **SGI** $\implies$ $(\langle G\rangle, k) \in$ **CLIQUE**

Si $G$ a un sous-graphe isomorphe à une $k-$clique, alors il a une $k-$clique.

## 4 COUVERTURE $\leq_p$ SUBSET-SUM (Supplément)

À partir d'un graphe $G$ de $n$ sommets et $m$ arêtes et d'un paramètre $k$, on va définir en temps polynomial une liste d'entiers $S$ et un paramètre $k'$ tels que $(\langle G\rangle, k) \in$ COUVERTURE ssi $(S, k') \in$ SUBSET-SUM.

On construit un tableau avec une rangée pour chaque sommet et chaque arête. La première colonne contient des 1 dans les rangées des sommets et des 0 pour les arêtes. On ajoute ensuite $m$ colonnes, une pour chaque arête. La colonne de $b_{i,j}$ contient un 1 dans la rangée $a_i$, la rangée $a_j$ et la rangée $b_{i,j}$ et des 0 ailleurs. Chaque rangée du taleau devient un élément de la liste $S$ en décimal et $k'$ est égal à $k$ suivit de $m$ deux.

Ce tableau est de taille quadratique en la taille de l'entrée et est rempli en temps polynomial.

| | | $b_{i_1,j_1}$ | $b_{i_2,j_2}$ | $\ldots$ | $b_{i_m,j_m}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 1 | | | $\ldots$ | |
| $a_2$ | 1 | | | $\ldots$ | |
| $\ldots$ | | | | | |
| $a_{i_1}$ | 1 | 1 | | $\ldots$ | |
| $\ldots$ | | | | | |
| $a_{j_1}$ | 1 | 1 | | $\ldots$ | |
| $\ldots$ | | | | | |
| $a_n$ | 1 | | | $\ldots$ | |
| $b_{i_1,j_1}$ | 0 | 1 | 0 | $\ldots$ | 0 |
| $b_{i_2,j_2}$ | 0 | 0 | 1 | $\ldots$ | 0 |
| $\ldots$ | | | | | |
| $b_{i_m,j_m}$ | 0 | 0 | 0 | $\ldots$ | 1 |
| | k | 2 | 2 | $\ldots$ | 2 |

## 4.1 $(\langle G\rangle, k) \in$ **COUVERTURE** $\implies (S, k') \in$ **SUBSET-SUM**

On montre maintenant que si le graphe a une couverture $C$ de taille $k$, alors la liste $S$ contient un sous-ensemble $I$ qui s'additionne à $k'$.

On prend tous les entiers correspondant aux rangées $a_i$ tel que $a_i \in C$ et tous les entiers correspondant aux rangées des $b_{i,j}$ tel que seulement un sommet $a_i$ ou $a_j$ est dans $C$. Quand on additionne, on va avoir des 2 partout (pour chaque colonne représentant une arête, on a un 1 vis-à vis chaque sommets auquel l'arête est incidente ou un 1 vis-à-vis un sommet indident et un 1 dans la rangée de l'arête). La première décimale contient $|C| = k$ rangées à 1, ce qui totalise $k$ suivi de $m$ deux.

## 4.2 $(S, k') \in$ **SUBSET-SUM** $\implies (\langle G\rangle, k) \in$ **COUVERTURE**

Supposons qu'on a trouvé un sous-ensemble $I$ de $S$ qui somme à $k'$. On décompose ce sous-ensemble en deux sous-ensembles $C$ et $D$. $C$ est l'ensemble des entiers correspondant à des sommets dans la première partie du tableau et $D$ est l'ensemble des entiers correspondant à des arêtes dans la deuxième partie du tableau.

D'abord, on note qu'on n'aura jamais de retenue dans les colonnes correspondant aux arêtes car ces colonnes ont exactement trois 1. $C$ contient exactement $k$ éléments car les première décimales de $k'$ doivent former $k$ et seules les rangées correspondant aux sommets ont valeur 1 à la position $m+1$.

Comme les entiers correspondant aux rangées des $b_{i,j}$ peuvent seulement ajouter un 1 à chaque décimale de $k'$, alors on doit avoir au moins un des entiers correspondant à $a_i$ ou $a_j$ dans $C$ pour avoir des 2 pour chacune des $m$ décimales les moins significatives de $k'$. Donc chaque arête est incidente à au moins un sommet de $C$. Les sommets de $C$ correspondent ainsi à une couverture.