Automne 2020

IFT–2505
Devoir 6

Le règlement sur le plagiat sera d'application.
Date de remise : 21 décembre 2020.

1. (Question 3 Final 2019) Considérons le programme linéaire

$$\begin{aligned} &\min\ x_1 \\ &\text{t.q. } x_1 + x_2 = 1 \\ &\quad x \geq 0. \end{aligned}$$

   (a) Déterminez la solution primale et la solution duale.

   (b) Considérons la multi-fonction

$$F(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} A^T\lambda + s - c \\ Ax - b \\ XSe \end{pmatrix}$$

   où x et λ sont les variables du primal et du dual, respectivement, et s est le vecteur des variables d'écart dans les contraintes duales, en partant des formes standard

$$\begin{aligned} &\min\ c^T x \\ &\text{t.q. } Ax = b \\ &\quad x \geq 0, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\max\ b^T\lambda \\ &\text{t.q. } A^T\lambda \leq c, \end{aligned}$$

   pour le dual et le primal, respectivement, et $X = \text{diag}(x)$, $S = \text{diag}(s)$ et $e = (1\ 1\ \ldots 1)^T$. Calculez une solution du système $F(x, \lambda, s) = 0$ en posant $x_1 = 1$.

   (c) Les réponses des points (a) et (b) ne coïncident pas. Pourtant, toute solution du système $F(x, \lambda, s) = 0$ satisfait les conditions primales $Ax = b$, les conditions duales $A^T\lambda + s = c$, et les écarts de complémentarité. Comment expliquer cette différence ?

   Sachant que dans les approches de points intérieurs, nous nous concentrons sur la résolution du système

$$F(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e \end{pmatrix},$$

   avec $\mu > 0$, $\mu \to 0$, la solution du point trouvée en (b) peut-elle est atteinte ?

(d) Écrivez la forme d'une itération de la méthode de Newton appliquée à la résolution du système

$$F(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu e \end{pmatrix}, \quad \mu > 0.$$

2. (Question 6 Final 2019) Considérez le problème

$$\begin{aligned} \min \ & -5x_1 - 4x_2 \\ \text{t.q. } & 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ entiers.} \end{aligned}$$

Résolvez ce problème à l'aide de l'algorithme branch and bound.