Automne 2020

IFT–2505
Devoir 5

Le règlement sur le plagiat sera d'application.
Date de remise : 30 novembre 2020.

1. Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \min\ & 10x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 \\ \text{t.q. } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_3 + 2x_4 \leq 5 \\ & x_3 + x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

   (a) Montrez que la solution duale $(0, 0, 0, 0)$ est réalisable.

   (b) Résolvez le problème avec la méthode du simplexe primal-dual.

   En ajoutant une variable d'écart à la troisième contrainte, nous obtenons le problème

$$\begin{aligned} \min\ & 10x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 4x_4 \\ \text{t.q. } & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_2 = 3 \\ & x_3 + 2x_4 + x_5 = 5 \\ & x_3 + x_4 = 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

   Comme tous les coefficients de la fonction objectif sont positifs ou nul, la solution nulle est réalisable pour le primal-dual.

   L'application du simplexe primal-dual donne la suite d'itérations suivante pour le simplexe primal-dual.

2	1	2	1	0	1	0	0	0	7
1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
0	0	1	2	1	0	0	1	0	5
0	0	1	1	0	0	0	0	1	3
−3	−2	−4	−4	−1	0	0	0	0	−18
10	3	7	4	0					

$P = \{5\}$ et nous avons un coût réduit strictement négatif pour une variable associée à un indice dans P. Nous faisons entrer x_5 dans la base en l'échangeant avec y_3.

2	1	2	1	0	1	0	0	0	7
1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
0	0	1	2	1	0	0	1	0	5
0	0	1	1	0	0	0	0	1	3
-3	-2	-3	-2	0	0	0	1	0	-13
10	3	7	4	0					

Comme il n'y a plus de coût réduit négatif pour des variables dont l'indice est dans P, nous avons avons terminé l'itération primale.

Il est à noter ici que la solution primale est dégénérée vu que $x_5 = 0$. Pour autant, il ne faut pas la confondre avec une variable artificielle, puisqu'elle n'apparaît pas dans la fonction objectif du problème artificiel. Notons également que $y_3 = 0$ puisque y_3 est hors base, et il est possible de retirer y_3 de la fonction objectif artificielle, bien que ce ne soit pas nécessaire. Nous avons une solution primale en terme de x qui satisfait la troisième contrainte, et supprimer y_3 revient à imposer que chaque pivot sur le primal restreint maintiendra la faisabilité de la troisième contrainte.

Laissons toutefois y_3 dans le problème et effectuer une itération duale. Le rapport mininum entre l'opposé des éléments strictement positifs de la dernière ligne et les éléments strictement négatifs de l'avant-dernière ligne conduit à insérer l'indice 2 dans P, qui devient $P = \{2, 5\}$, menant au tableau

2	1	2	1	0	1	0	0	0	7
1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
0	0	1	2	1	0	0	1	0	5
0	0	1	1	0	0	0	0	1	3
-3	-2	-3	-2	0	0	0	1	0	-13
$\frac{11}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	0					

Les coûts réduits du primal restreint conduisent à faire entre x_2 dans la base, et en comparant la colonne de x_2 avec le terme de droite, nous voyons qu'il faut sélectionner y_2 pour sortir de la base. Le pivot mène alors au tableau

1	0	2	1	0	1	-1	0	0	4
1	1	0	0	0	0	1	0	0	3
0	0	1	2	1	0	0	1	0	5
0	0	1	1	0	0	0	0	1	3
-1	0	-3	-2	0	0	2	1	0	-7
$\frac{11}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	1	0					

Il n'y a plus de coût réduit négatif pour les variables dont l'indice est dans P, aussi nous avons terminé le minimisation du primal restreint, et nous retourner au dual. En comparant la dernière ligne et la ligne des coûts réduits, nous voyons que l'indice 4 entre dans P, pour donner

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
-1 & 0 & -3 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -7 \\
5 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}$$

Nous pouvons à présent faire entrer x_4 dans la base, en pivotant sur l'élément $(3,4)$, pour obtenir

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} \\
0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 \\
5 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}$$

L'itération primale est terminée. L'itération duale nous indique nous donne $P = \{2,3,4,5\}$, et le primal restreint nous conduit à introduire x_3 dans la base, en l'échangeant avec y_1 ou x_4. Comme nous préférons enlever les variables artificielles de la base, nous pivotons sur l'élément $(1,3)$, donnant

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
-\frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 2 \\
-\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\
5 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & &
\end{array}$$

La valeur de l'objectif vaut à présent 0. Nous avons convergé à la solution $(0,3,1,2,0)$.