Notes de cours Informatique théorique - Supplément
(version 1.2, 15.05.2019)

Exemple : AFD $\longrightarrow$ expression régulière

Soit $L = \{w \in \{a,b\}^* : |w| \equiv 2 \pmod 3\}$ et soit $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ l'AFD avec $\delta(q_i, x) = q_{(i+1) \pmod 3}$ pour $i \in [3]$ et $x \in \{a,b\}$. On voit facilement (preuve?) que $L = L(M)$. On va construire une expression régulière R_L telle que $L(R_L) = L$ à partir de M même si on en a une très simplement – $(a+b)^2((a+b)^3)^*$ (ici on utilise des raccourcis, la vraie expression régulière est $(((a+b)\cdot(a+b))\cdot(((a+b)\cdot(a+b))\cdot(a+b)))^*$.) Rappelons que l'on construit R_{ij}^k pour $i,j \in [3]$ et $-1 \leq k \leq 2$ par récurrence sur k, en commençant par R_{ij}^{-1}. Rappellons également qu'en général, R_{ij}^k est une expression régulière dont le langage consiste des mots qui permettent de passer de q_i à q_j en ne passant que par des états numérotés $0, \ldots, k$, i.e. $L(R_{ij}^k) = \{w = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_i, w) = q_j$ et $\hat{\delta}(q_i, a_1, \ldots, a_m) \in \{q_0, \ldots, q_k\}$ pour $1 \leq m < n\}$. Dans notre cas, la fonction δ et décrite par ce tableau :

	a	b
q_0	q_1	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_0	q_0

Les expression régulières R_{ij}^k seront construites dans le tableau suivant.

	-1	0	1	2
00				
01				
02				
10				
11				
12				
20				
21				
22				

One le remplit colonne par colonne, en mettant dans la case (ij,k) l'expression régulière $R_{ij}^k = R_{ij}^{k-1} + R_{ik}^{k-1} \cdot (R_{kk}^{k-1})^* \cdot R_{kj}^{k-1}$. Pour mieux visualiser, notons $[ij,k]$ le contenu de la case (ij,k). On a alors

$$[ij,k] = [ij,k-1] + [ik,k-1][kk,k-1]^*[kj,k-1]$$

où on a omis les paranthèses pour une meilleur lisibilité. Avec ceci, on obtient les tableaux suivants (en se rappellant que $[ij,-1] = R_{ij}^{-1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_t$ tels que $\delta(q_i, x_\ell) = q_j$ pour $\ell = 1, \ldots, t$).

Sans simplification.

	-1	0	1	2
00	ε			
01	$(a+b)$			
02	$\emptyset$			
10	$\emptyset$			
11	ε			
12	$(a+b)$			
20	$(a+b)$			
21	$\emptyset$			
22	ε			

	-1	0	1	2
00	ε	$\varepsilon + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon$		
01	$(a+b)$	$(a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)$		
02	$\emptyset$	$\emptyset + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset$		
10	$\emptyset$	$\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon$		
11	ε	$\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)$		
12	$(a+b)$	$(a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset$		
20	$(a+b)$	$(a+b) + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon$		
21	$\emptyset$	$\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)$		
22	ε	$\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset$		

	1	2
00	$(\varepsilon + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon)$	
01	$((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))$	
02	$(\emptyset + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset)$	
10	$(\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon)$	
11	$(\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))$	
12	$((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset)$	
20	$((a+b) + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon)$	
21	$(\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))$	
22	$(\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset)$	

	2
00	$((\varepsilon + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon))+$ $((\emptyset + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $(((a+b) + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon))$
01	$((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))+$ $(((\emptyset + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $(\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))$
02	$((\emptyset + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))+$ $((\emptyset + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + ((a+b) + \varepsilon \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $(\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset)$
10	$((\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon))+$ $(((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $(((a+b) + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon))$
11	$((\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)))+$ $(((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $((\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)))$
12	$(((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))+$ $(((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))$
20	$(((a+b) + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))+$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $(((a+b) + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\emptyset + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \varepsilon))$
21	$((\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))+$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $((\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)))$
22	$((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))+$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))^*\cdot$ $((\varepsilon + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset) + (\emptyset + (a+b) \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b)) \cdot (\varepsilon + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot (a+b))^* \cdot ((a+b) + \emptyset \cdot \varepsilon^* \cdot \emptyset))$

En simplifiant ($\varepsilon\varepsilon^* = \varepsilon$, $R \cdot \emptyset = \emptyset \cdot R = \emptyset$; en fait on remplace une expression régulière R par une autre R', équivalente, i.e. t.q. $L(R) = L(R')$ et ces équivalences, parfois évidentes, devraient être prouvées...) on a des tableaux un peu plus clairs. Voici le tableau après les simplifications. Conseil : essayer de le refaire vous-même.

	-1	0	1	2
00	ε	ε	ε	$((a+b)^3)^*$
01	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)((a+b)^3)^*$
02	$\emptyset$	$\emptyset$	$(a+b)^2$	$(a+b)^2((a+b)^3)^*$
10	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$(a+b)^2((a+b)^3)^*$
11	ε	ε	ε	$((a+b)^3)^*$
12	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)((a+b)^3)^*$
20	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)$	$(a+b)((a+b)^3)^*$
21	$\emptyset$	$(a+b)^2$	$(a+b)^2$	$(a+b)^2((a+b)^3)^*$
22	ε	ε	$(\varepsilon + (a+b)^2)$	$((a+b)^3)^*$

Le langage de M est donc $L(R_{02}^2) = L((a+b)^2((a+b)^3)^*)$, comme prédit au début.