TP5 - IFT2105

par Ilan Elbaz

10 juin 2019

1. Montrez que $L \notin HC$ sur $\Sigma = \{0,1\}$

$$L = \{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \geq 0\}$$

Supposons que L soit un langage HC. Soit p la longueur donnée par le lemme du pompiste. Considérons le mot $w = 0^p 1^p 0^p 1^p$, $w \in L$ et $|w| > p$. Le lemme nous donne u, v, x, y, z tel que $w = uvxyz$, $|vy| > 0$, et $|vxy| \leq p$.
Distinguons deux cas possibles:

- Si v et y ne contiennent chacun que des 0 ou que des 1, alors $uv^0xy^0z \notin L$.
- Sinon v ou y chevauche deux sous-chaînes consécutives parmi $0^p, 1^p, 0^p, 1^p$. Dès lors, $uv^2xy^2z \notin \{0^*1^*0^*1^*\}$ et donc, $uv^2xy^2z \notin L$.

Comme ces deux cas sont exhaustifs, on conclut que L ne peut être hors-contexte.

2. Montrez que $L \notin HC$ sur $\Sigma = \{0,1\}$

$$L = \{0^i 1^j \mid j = i^2\}$$

Considérons le mot $0^p 1^{p^2}$. Soit $|vxy| = m$ un découpage quelconque de w. Si l'on a $vxy \in 0^+$ et si l'on pompe de manière avec un i positif on aura : $0^{p+(i-1)|vy|)} 1^{p^2}$ or $(p + (i-1)|vy|) \neq p^2$. De manière analogue pour le cas ou vxy ne contient que des 1. Si maintenant $vxy \in 0^+1^+$ et que l'on pompe de manière positif on sait que $w \notin L$ car $(n+i)^2 \neq n^2 + i$

3. Construisez une grammaire en forme normale de Chomsky pour la gram- maire suivante :

$$
\begin{aligned}
S &\to TST \mid aB \\
T &\to B \mid S \\
B &\to b \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

1. Ajout d'une nouvelle variable initiale

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to TST \mid aB \\
T &\to B \mid S \\
B &\to b \mid \epsilon
\end{aligned}
$$

2. Élimination de la règle nulle : $B \to \epsilon$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to S \\
S &\to TST \mid aB \mid a \mid ST \mid TS \\
T &\to B \mid S \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

3. Élimination de la règle $T \to B$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to TST \mid aB \mid a \mid ST \mid TS \\
S &\to TST \mid aB \mid a \mid ST \mid TS \\
T &\to b \mid TST \mid aB \mid a \mid ST \mid TS \\
B &\to b
\end{aligned}
$$

4. Élimination des règles $S_0 \to aB$, $S \to aB$ et $T \to aB$

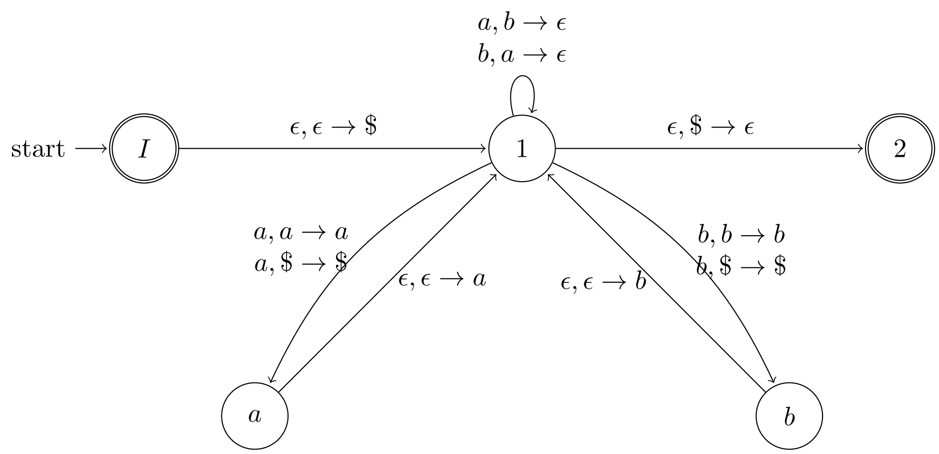
$$
\begin{aligned}
S_0 &\to TST \mid UB \mid a \mid ST \mid TS \\
S &\to TST \mid UB \mid a \mid ST \mid TS \\
T &\to b \mid TST \mid UB \mid a \mid ST \mid TS \\
B &\to b \\
U &\to a
\end{aligned}
$$

5. Élimination des règles $S_0 \to TST$, $S \to TST$ et $T \to TST$

$$
\begin{aligned}
S_0 &\to TZ \mid UB \mid a \mid ST \mid TS \\
S &\to TZ \mid UB \mid a \mid ST \mid TS \\
T &\to b \mid TZ \mid UB \mid a \mid ST \mid TS \\
B &\to b \\
U &\to a \\
Z &\to ST
\end{aligned}
$$

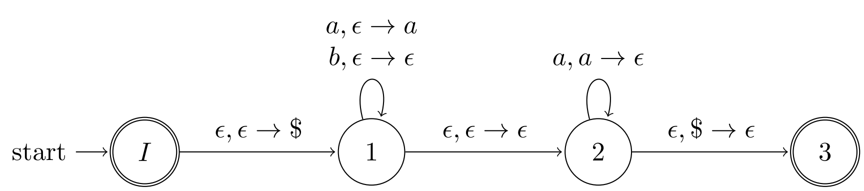
4. Pour les langages suivants, donner un automate à pile le reconnaissant

$L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$



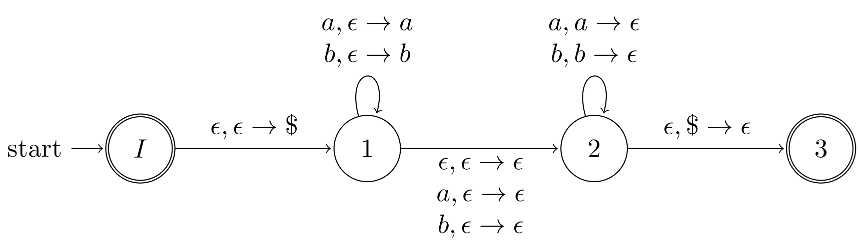
AP reconnaissant L_1

$L_2 = \{va^n \mid v \in \{a,b\}^* et |v|_a = n\}$



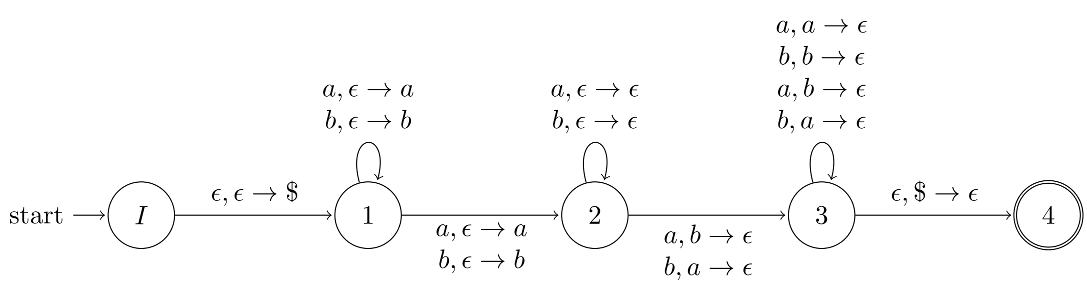
AP reconnaissant L_2

$L_3 = \{w \mid w = w^R\}$



AP reconnaissant L_3

$L_4 = \{w \mid w \neq w^R\}$



AP reconnaissant L_4