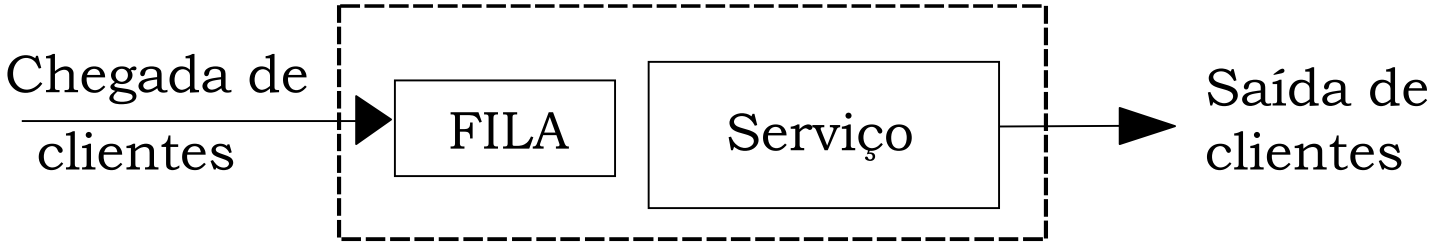
REDES DE FILAS DE ESPERA (POISSONIANAS)

Modelos Estocásticos de Investigação Operacional

Sumário

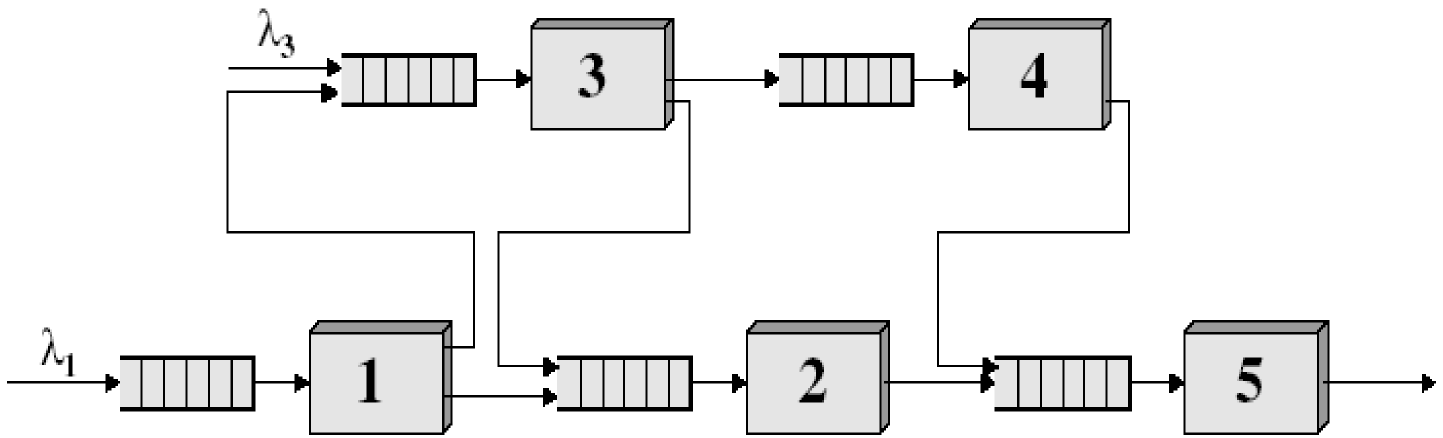
- Definição de redes de *Jackson* (filas Poissonianas)
- Equações de cálculo das taxas de chegada (internas)
- Exemplos

Sistema c/ fila de espera simples



1. Os clientes podem ser pessoas, produtos, veículos, máquinas, tarefas, etc…
2. A fila de espera pode ser algo diferente de uma "linha" observável: ex, sistema semi-automático de senhas para atendimento, documentos à espera de serem impressos, aviões a circular em redor do aeroporto, etc…

Sistema c/ filas em rede



Em variadíssimas situações, um cliente tem de passar por um conjunto de filas organizadas de acordo com uma estrutura em rede.

Rede de filas de *Jackson*

1. Todas as chegadas do exterior, a qualquer um dos serviços da rede, são processos Poissonianos.
2. Todos os tempos de serviço são exponenciais.
3. Todas as filas têm capacidade ilimitada.
4. Quando um cliente sai de um serviço, a probabilidade de o mesmo se dirigir a outro serviço é independente da sua trajectória histórica e é independente da presença/localização de qualquer outro cliente.

Essencialmente, uma rede de Jackson consiste num conjunto de filas interligadas do tipo *M*/*M*/*S*, com parâmetros conhecidos

Teorema de *Jackson*

1. Cada nodo constitui uma fila de espera independente, Poissoniana, com uma taxa de chegadas determinada pelas saídas possíveis das filas que nele desembocam.

2. Cada nodo pode ser analisado isoladamente por um modelo de um dos tipos: $M/M/1$ ou $M/M/\mathrm{S}$.

3. As médias dos tempos de espera (atrasos) nos diversos nodos pode ser somada para determinar a **média global do tempo de espera na rede**.

Determinação das taxas de chegadas

Notação:

γ_i = taxa de chegada externa ao serviço $i = 1, \ldots, m$

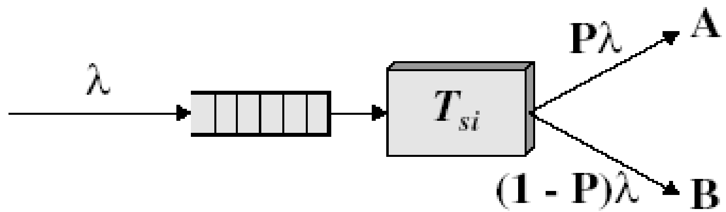
ϕ_{ki} = probabilidade de ir do serviço k para i, na rede

λ_i = taxa de chegada total (líquida) ao serviço i

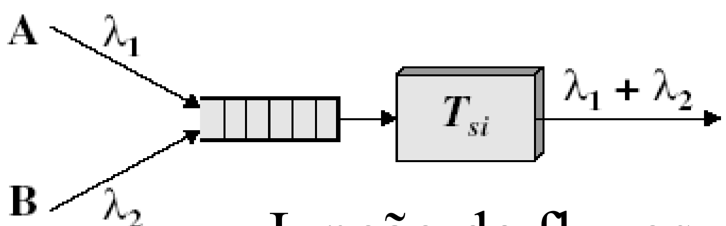
No "estado" ou fase estacionária do processo, deve prevalecer o seguinte balanço de fluxos em cada um dos serviços:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{k=1}^{m} \phi_{ki} \lambda_k \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

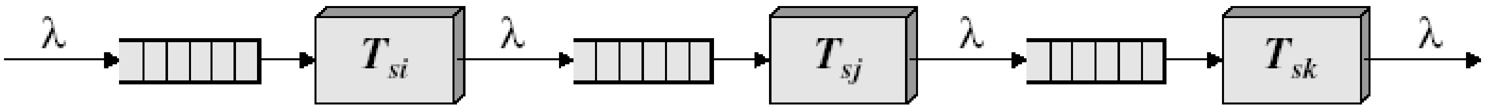
Exemplos típicos



Partição de fluxos



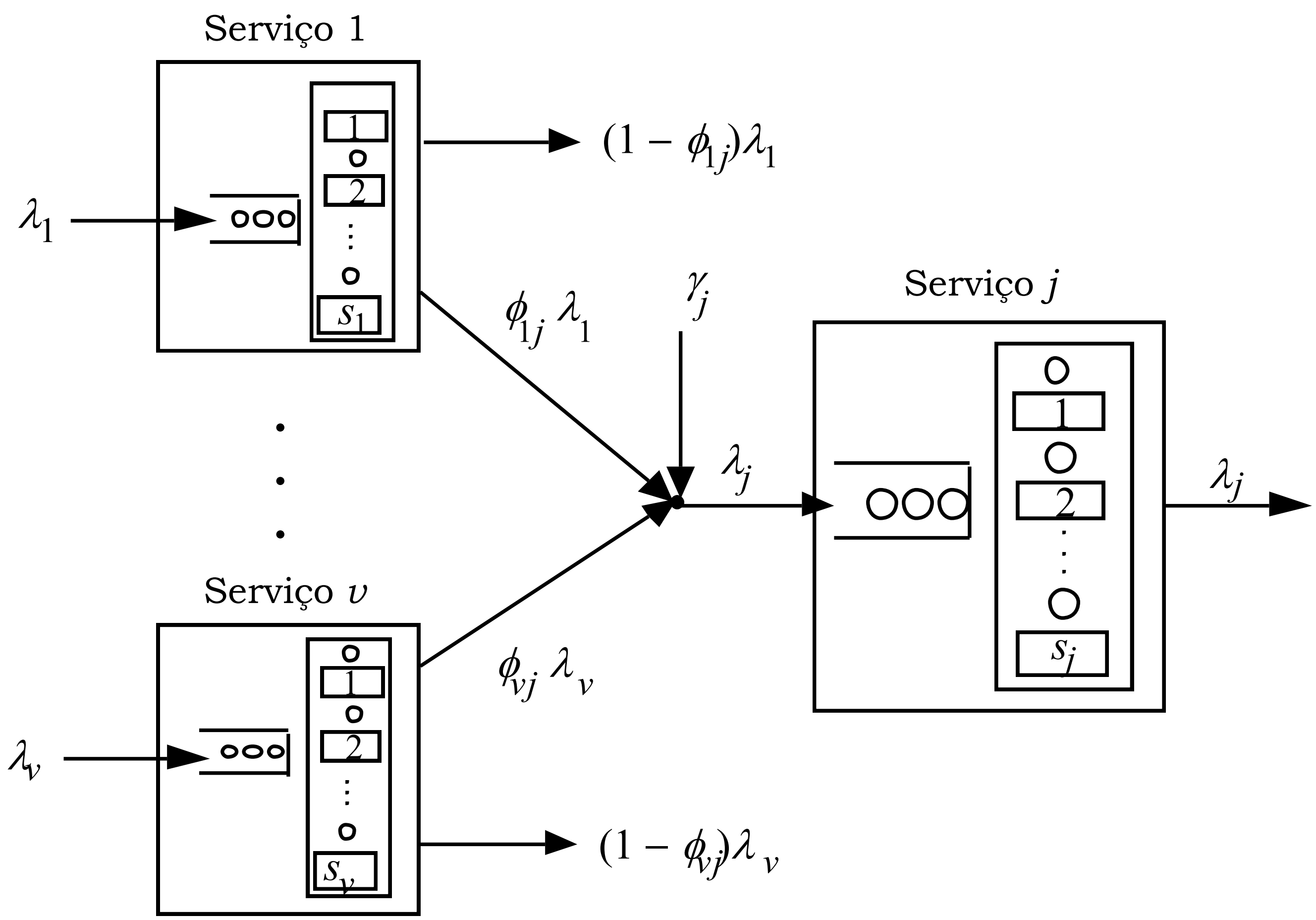
Junção de fluxos



Série de fluxos uniformes

Exemplo: rede com 2 estágios

A cada serviço corresponde uma fila *M*/*M*/S



Matriz de transição

Propriedade 1:

Seja $\mathbf{\Phi}$ a matriz de probabilidades ($m \times m$) que descreve as transições internas possíveis na rede de Jackson, e seja γ_i a taxa média de chegadas ao serviço i diretamente provenientes do exterior da rede. Então:

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{I} - \mathbf{\Phi})^{-1}$$

onde $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1,\ldots,\gamma_m)$; isto é, λ_i representa a taxa líquida de entradas no serviço i.

Obs: Ao contrário da matriz de transição de equilíbrio dos processos Markovianos, aqui as linhas da matriz $\mathbf{\Phi}$ não têm necessariamente que somar 1, i.e. $\Sigma_j\ \phi_{ij} \leq 1$

Simplificação da rede de Jackson

Após saber-se a taxa líquida de entradas em cada nodo, a rede pode ser fragmentada: cada nodo será tratado como uma fila de espera simples, Poissoniana e independente.

<u>Propriedade 2:</u>

Considere uma rede de Jackson com m nodos. Seja N_i uma variável aleatória representativa do número de tarefas no nodo i (i.e. número na fila + serviço). Então:

$$\Pr\{N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m\} = \Pr\{N_1 = n_1\} \times \cdots \times \Pr\{N_m = n_m\}$$

e

$\Pr\{N_i = n_i\}$ para ($n_i = 0, 1, \ldots$) pode ser calculada através das equações do modelo *M/M/S*.

Exemplo: Centro de Computação (1)

- Um centro de computação possui 3 *workstations* com: (1) processadores de entrada, (2) central de computadores, e (3) um centro de impressão.

- Todas as tarefas submetidas passam primeiro por um dos processadores de entrada ("*error checking*"), antes de poderem prosseguir para um processador central → 80% prosseguem e 20% são rejeitadas.

- Das tarefas que prosseguem, 40% são enviadas para uma impressora.

- As tarefas chegam aleatoriamente, segundo uma distribuição de Poisson, com uma taxa média de 10/min. Para dar resposta aos pedidos, cada serviço deverá ter vários processadores em paralelo.

Exemplo: Centro de Computação (2)

Mediram-se os diversos tempos de serviço, tendo-se chegado à conclusão de que todos eles podem ser estatisticamente representados por distribuições exponenciais com as seguintes médias:

10 segundos nos processadores de entrada

3 segundos nos processadores centrais

70 segundos nos processadores gráficos

Assume-se que as filas têm capacidades ilimitadas.

Pretende-se:

Especificar o sistema como uma rede de Jackson.
Determinar o número mínimo de processadores para cada um dos 3 tipos de serviços e estimar o tempo médio requerido para atender cada tarefa.

Cálculo das taxa de chegadas…

Usar a equação geral:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{k=1}^{m} \phi_{ki}\,\lambda_k$$

com m = 3, γ_1 = 10, ϕ_{12} = 0.8, ϕ_{23} = 0.4

Obtêm-se assim:

$$\lambda_1 = 10$$

$$\lambda_2 = 0.8\lambda_1 = 8$$

$$\lambda_3 = 0.4\lambda_2 = 3.2$$

Dados Input/Output

	Input	Central	Output
Taxa chegadas externa, γ_i	10/min	0	0
Taxa chegadas total, λ_i	10/min	8/min	3.2/min
Taxa de serviço, μ_i	6/min	20/min	0.857/min
Nº mínino canais, S_i	2	1	4
Intensidade de tráfego, ρ_i	0.833	0.400	0.933

Resultados

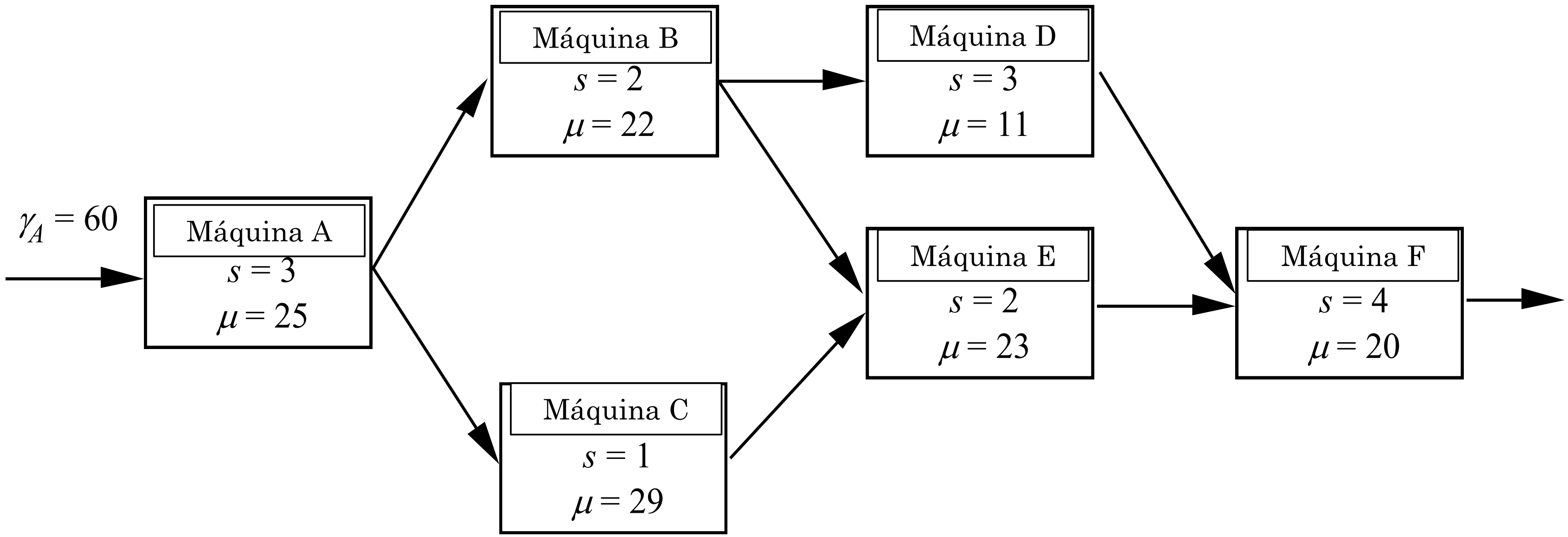
Medida	Input	Central	Output	Total
Modelo	$M/M/2$	$M/M/1$	$M/M/4$	
L_q	3.788	0.267	12.023	16.077
W_q	0.379	0.033	3.757	4.169
L	5.455	0.667	15.757	21.879
W	0.546	0.083	4.924	5.554

Exemplo de *Job Shop*

- 3 produtos
- 6 máquinas: A, B, C, D, E e F
- Cada produto requer uma rota diferente
- Dados:

Produto	Taxa	Rota
1	30/h	A B D F
2	10/h	A B E F
3	20/h	A C E F

Rede de Jackson...



Resultados para o Job Shop

Medida	A	B	C	D	E	F
γ	60	0	0	0	0	0
μ	25	22	29	11	23	20
s	3	2	1	3	2	4
Modelo	$M/M/3$	$M/M/2$	$M/M/1$	$M/M/3$	$M/M/2$	$M/M/4$
λ	60	40	20	30	30	60
ρ	0.800	0.909	0.690	0.909	0.652	0.750
L	4.989	10.476	2.222	11.059	2.270	4.528
W	0.083	0.262	0.111	0.369	0.076	0.075
L_q	2.589	8.658	1.533	8.332	0.965	1.528
W_q	0.043	0.216	0.077	0.278	0.032	0.025

Medidas de desempenho do sistema

- Prazo de entrega (*lead time*) da produção:

  =Tempo (médio) de permanência no sistema

  =Soma do tempo gasto em cada sub-sistema $M/M/S$

- Inventário (*stock*) *work-in-process* (WIP):

  – Estimar pela lei de Little, i.e.

  – WIP = (prazo de entrega) × (taxa de pedidos)

- Questão: poder-se-á obter o WIP através da soma dos valores de L das filas $M/M/S$?

Desempenho do sistema *Job Shop*

Produto	Taxa (/h)	Rota	*Lead time* (h)	Tempo na fila (h)	WIP (pedidos)
1	30	A B D F	0.789	0.563	23.67
2	10	A B E F	0.496	0.317	4.96
3	20	A C E F	0.345	0.177	6.91

Os resultados mostram que existe uma acentuada diferença entre os produtos (1 *vs*. 2 & 3) em termos do prazo de entrega e do WIP. Porquê? (Obs. o produto 1 passa por B e D!).

Outro exemplo: transações HTTP