# 2. Filas de espera – introdução

Uma situação de espera ocorre quando a procura de recursos/serviços excede a disponibilidade do sistema.

As situações de espera são muito comuns no nosso dia-a-dia. Eis alguns exemplos típicos:

- Bancos/supermercados – espera pelo serviço de caixa,
- Computadores – espera por uma resposta,
- Trânsito – espera em semáforos e cruzamentos,
- Transporte público – espera nas estações e apeadeiros.

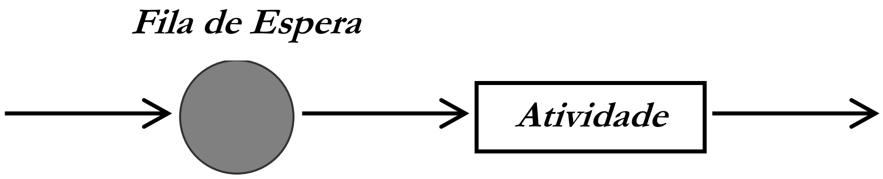
O problema consiste em encontrar uma solução que utilize um adequado nível de recursos para manter o sistema em operação económica. *»» Balanço entre o nível de serviço prestado aos clientes (“pequenas filas requerem muitos servidores”) e considerações económicas (“não demasiados servidores”).*

Exemplo: Chegada de barcos a um porto

- Cliente: Barco
- Serviço: Carga e descarga
- Facilidades: Cais de acostagem, guindastes
- Fator de variabilidade: Condições atmosféricas
- Fatores económicos: A paragem dos barcos (à espera de atendimento) é dispendiosa; o investimento em novas facilidades também pode ser volumoso.

# Elementos básicos de um sistema de espera

Essencialmente, todos os sistemas de filas de espera podem ser reduzidos a subsistemas individuais consistindo em entidades (ou clientes) à espera por determinada atividade (ou serviço):




Três elementos básicos:

(1) Processo de chegada – o modo pelo qual os clientes chegam ao sistema;

(2) Disciplina da (fila) de espera – o modo como os clientes esperam até serem atendidos/servidos, (em Quantas filas? que Tipo de prioridade?)

(3) Mecanismo de serviço.

# Processo de chegada (tipos de variações)

- Número de clientes potenciais
    - Finito ou infinito.

- Número de clientes que chegam simultaneamente
    - Único,
    - Em grupos de tamanho constante ou variável.

- Intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas
    - Constante,
    - Completamente aleatório (Poisson),
    - Outro tipo de distribuição estatística.

- Taxa média de chegadas
    - Constante,
    - Variável com o tempo,
    - Influenciada pelo estado da fila.

- Influência externa
    - Nenhuma,
    - Resultante do desempenho de um sistema a montante.

# **Disciplina da(s) fila(s)** ***(Quantas?):***

- **FIFO** (*First-In*, *First-Out*) – Os clientes são servidos pela ordem de chegada. O primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido.
  *»» Exemplo: Caixa de Supermercado.*

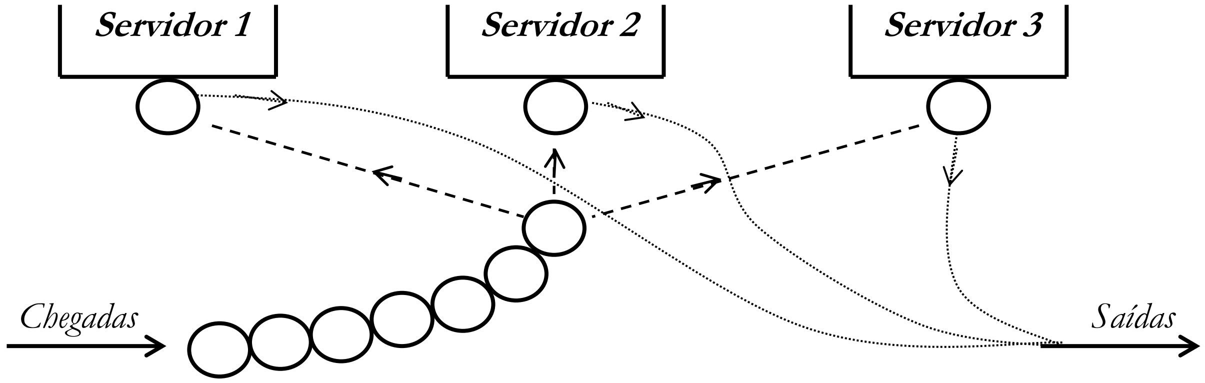
- **LIFO** (*Last-In*, *First-Out*) – Os clientes são servidos pela ordem inversa à de chegada. O último a chegar é o primeiro a ser atendido. (Conceito de "*stack*", pilha).
  *»» Exemplo: Carga no porão de um navio.*

- **Prioridade** – Cada cliente tem associada uma prioridade específica.
  *»» Exemplo: prioridade atribuída aos pacientes num serviço de urgência de um hospital.*

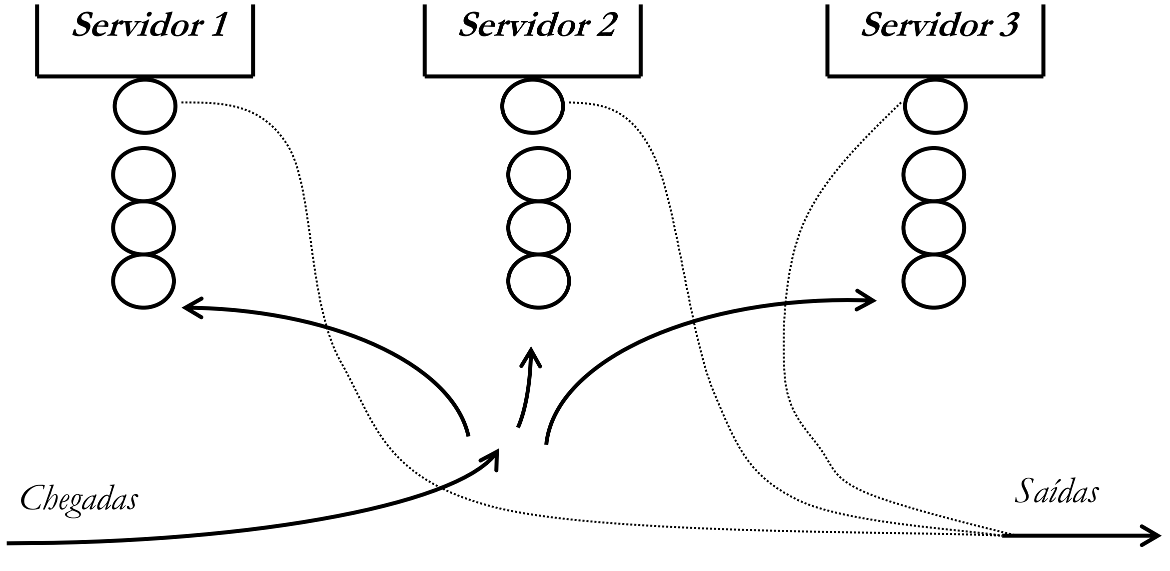
- **Remoção** ("*pre-emptive*") – O cliente que chega é colocado à frente, removendo qq cliente que lá se encontre.
  *»» Exemplo: chamada de emergência no serviço de urgência de um hospital.*

- **Prioridade aleatória**.

# Quantas filas?




***Fila de espera única***




***Três filas de espera independentes***

# Mecanismo de serviço (tipos de variações)

- Número de servidores
  - Um, vários ou variável.

- Número de clientes servidos simultaneamente
  - Um de cada vez,
  - Em grupos de tamanho constante ou variável.

- Disponibilidade do serviço
  - Permanente ou intermitente.

- Duração do serviço
  - Constante,
  - Distribuído exponencialmente (instantes de começo e finalização distribuídos independente e aleatoriamente),
  - Outras distribuições estatísticas,
  - Dependente do tempo despendido na fila.

- Taxa média de serviço
  - Constante,
  - Variável no tempo ou com o estado do sistema.

# Medidas de desempenho mais comuns

- Medidas relativas a médias:
  - Número de clientes no sistema,
  - Número de clientes na fila (comprimento da fila),
  - Tempo de espera.
- Medidas relativas a probabilidades:
  - De haver *n* clientes no sistema,
  - De haver mais do que *n* clientes no sistema,
  - De se ter um tempo de espera entre *t* e *t*+*dt*,
  - De se ter um tempo de espera maior do que *t*,
  - De os canais de serviço estarem inativos,
  - De se ter um período de ocupação de um serviço superior a *t* unidades de tempo.

# Notação de *Kendall*

$A/B/S(d\,|\,e)$

- *A* – distribuição de probabilidade relativa ao intervalo de tempo entre chegadas ao sistema,

- *B* – distribuição de probabilidade relativa às durações de serviço,

- *S* – Número de canais de serviço,

- *d* – Número máximo de clientes permitidos no sistema em qualquer instante,

- *e* – Disciplina associada à fila de espera.

Exemplos:

»» $M/M/1(\infty\,|\,FIFO)$ ou $M/M/1$

(*M* significa exponencial negativa)

»» $D/M/2$, $G/M/2(100\,|\,LIFO)$

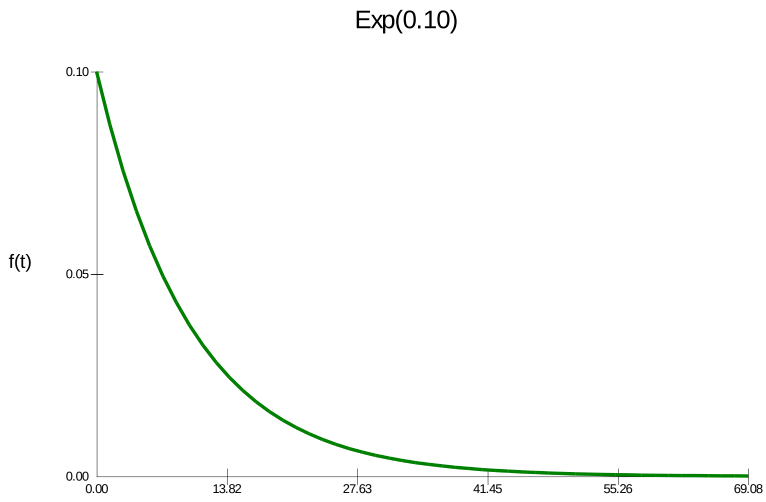
(*D* significa constante, *G* significa distribuição genérica)

# Características da distribuição Exponencial Negativa

Função densidade de probabilidade (FDP):

$$f(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha t} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

$\alpha$ é o chamado parâmetro da distribuição, ex. $\alpha = 0.10$:




Função cumulativa de probabilidade:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t} \qquad (t \geq 0)$$

Média: $E(T) = \dfrac{1}{\alpha}$

Variância: $Var(T) = \dfrac{1}{\alpha^2}$

# Características da distribuição de Poisson

Função densidade de probabilidade (FDP):

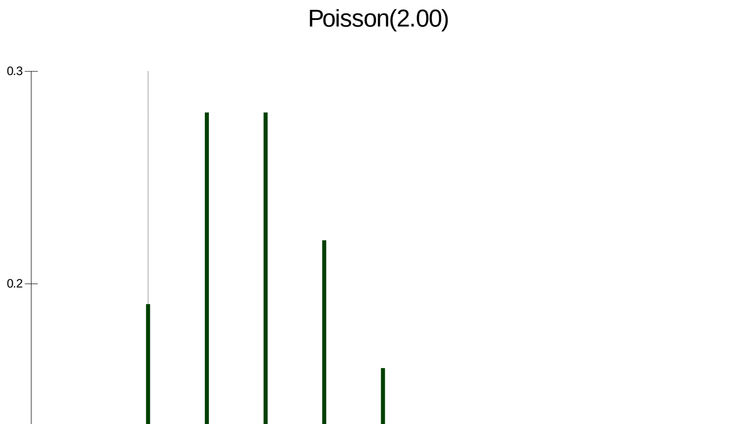
$$f(k) = \frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!} \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$\alpha$ nº médio de acontecimentos por unidade de tempo (taxa)

$t$ intervalo de tempo

$k$ nº de acontecimentos durante o intervalo $t$

$\alpha t$ é o chamado parâmetro da distribuição, por exemplo $\alpha t = 2$:




Média: $E(X) = \alpha t$

Variância: $Var(X) = \alpha t$

# Fila de espera $M/M/1$ (*"fila de espera simples"*)

*»» Definições*

Para as chegadas:

- Intervalo médio entre chegadas = *a*
- Taxa de chegada de clientes = $\lambda$ (nº de clientes / u. tempo)
- $\boxed{\lambda = 1/a}$
- Função Densidade de Probabilidade (FDP) é $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Analogamente, para os serviços:

- Duração média de serviço = *s*
- Taxa de serviço = $\mu$
- $\boxed{\mu = 1/s}$
- FDP é $g(t) = \mu e^{-\mu t}$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Taxa de chegadas*

Seja $P_n(t)$ a probabilidade de haver *n* clientes no sistema no instante *t*.

Se $n > 0$, então haverá $n-1$ clientes à espera de ser atendidos (na fila) e 1 cliente a ser atendido.

Sendo o intervalo entre chegadas ao sistema uma variável aleatória que segue uma distribuição exponencial negativa, então o número de chegadas no intervalo de tempo *dt* segue uma distribuição de Poisson de média $\lambda \cdot dt$:

$$P_n = \frac{(\lambda \cdot dt)^n}{n!} e^{\lambda dt}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= (\lambda \cdot dt) \cdot e^{\lambda dt} \\ &= (\lambda dt) \cdot \left(1 - \lambda dt + \frac{(\lambda dt)^2}{2!} + \ldots\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\approx \quad \lambda \cdot dt \qquad \text{(para } dt \text{ suficientemente pequeno)}}$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Equações de probabilidade (1)*

Considerando *dt* suficientemente curto para não haver mais do que uma chegada, nem mais do que uma saída do sistema, resulta o seguinte quadro de transições possíveis *t* → *t+dt*:

| Estado no instante *t* | $n$ <br> $P_n(t)$ | $n$ <br> $P_n(t)$ | $n+1$ <br> $P_{n+1}(t)$ | $n-1$ <br> $P_{n-1}(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| Chegadas ocorridas em *dt* | 0 <br> $1-\lambda dt$ | 1 <br> $\lambda dt$ | 0 <br> $1-\lambda dt$ | 1 <br> $\lambda dt$ |
| Serviços terminados em *dt* | 0 <br> $1-\mu dt$ | 1 <br> $\mu dt$ | 1 <br> $\mu dt$ | 0 <br> $1-\mu dt$ |

$$\begin{aligned} P_n(t+dt) = {} & P_n(t)\cdot(1-\lambda dt)\cdot(1-\mu dt) \\ & + P_n(t)\cdot\lambda dt\cdot\mu dt \\ & + P_{n+1}(t)\cdot(1-\lambda dt)\cdot\mu dt \\ & + P_{n-1}(t)\cdot\lambda dt\cdot(1-\mu dt) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n(t+dt) = {} & P_n(t)\cdot\left(1-\lambda dt-\mu dt+\lambda\cdot\mu\cdot dt^2\right) \\ & + P_n(t)\cdot\lambda\cdot\mu\cdot dt^2 \\ & + P_{n+1}(t)\cdot\left(\mu dt-\lambda\cdot\mu\cdot dt^2\right) \\ & + P_{n-1}(t)\cdot\left(\lambda dt-\lambda\cdot\mu\cdot dt^2\right) \end{aligned}$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Equações de probabilidade (2)*

Desprezando os termos em $dt^2$, obtém-se:

$$P_n(t+dt) = P_n(t)\cdot(1-\lambda dt-\mu dt) + P_{n+1}(t)\cdot\mu dt + P_{n-1}(t)\cdot\lambda dt$$

Em particular, para $n=0$, obtém-se:

$$P_0(t+dt) = P_0(t)\cdot(1-\lambda dt) + P_1(t)\cdot\mu dt$$

Podemos desenvolver a equação acima no sentido de obter:

$$\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt} = -P_n(t)\cdot(\lambda+\mu) + P_{n+1}(t)\cdot\mu + P_{n-1}(t)\cdot\lambda$$

(N.B. $\lim_{dt\to 0}\frac{P_n(t+dt)-P_n(t)}{dt} = \frac{dP_n(t)}{dt}$)

Então fica:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)\cdot P_n(t) + \mu\cdot P_{n+1}(t) + \lambda\cdot P_{n-1}(t) \qquad (n>0)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu\cdot P_1(t) - \lambda\cdot P_0(t) \qquad (n=0)$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Comportamento a longo prazo (estado estacionário) (1)*

A solução geral das equações anteriores é do tipo:

$$P_n(t) = P_n + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} e^{-C_k t}$$

sendo $P_n$, $A_{n,k}$ e $C_k$ constantes ($C_k \geq 0$ para $A_{n,k} \neq 0$).

Quando $t \to \infty$, o termo exponencial tornar-se-á desprezável, e então as probabilidades deverão convergir para a probabilidade invariante $P_n$ – diz-se que o processo atingiu o estado estacionário.

*[Contudo, o nº de clientes no sistema continuará a variar!]*

Estado estacionário: $\dfrac{dP_n(t)}{dt} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{ll} -(\lambda+\mu)\cdot P_n + \mu \cdot P_{n+1} + \lambda \cdot P_{n-1} = 0 & (n = 1, 2, \ldots, \infty) \\ \mu \cdot P_1 - \lambda \cdot P_0 = 0 & (n = 0) \end{array}}$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Comportamento a longo prazo (estado estacionário) (2)*

$$-(\lambda+\mu)\cdot P_n+\mu\cdot P_{n+1}+\lambda\cdot P_{n-1}=0 \qquad (n=1,2,\ldots,\infty)$$

$$\mu\cdot P_1-\lambda\cdot P_0=0 \qquad (n=0)$$

Da primeira equação tira-se sucessivamente que:

- $P_1=(\lambda/\mu)\cdot P_0$
- $P_2=(\lambda/\mu)^2\cdot P_0$
- ............................
- $P_n=(\lambda/\mu)^n\cdot P_0$

Ao somar todas as probabilidades, obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=P_0\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda/\mu)^n=P_0\cdot\frac{1}{1-\lambda/\mu}$$

(com o pressuposto de que $(\lambda/\mu)=\rho<1$)

Mas como $\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$, vem que $P_0\cdot\frac{1}{1-\lambda/\mu}=1 \boxed{\Leftrightarrow P_0=1-\rho}$

Finalmente, substituindo na equação acima enquadrada, fica:

$$\boxed{P_n=\rho^n\cdot(1-\rho)}$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Medidas de desempenho (1)*

- Utilização do servidor ou taxa de ocupação:

$$1-P_0 = 1-(1-\rho) = \rho$$

*(Probabilidade de o servidor estar ocupado)*

  - $\rho \geq 70\%$ são típicos de sistemas congestionados.
  - $\rho \geq 90\%$ não são geralmente aceitáveis na prática.

- Número médio de clientes no sistema ($L$):

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n = 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + \ldots$$

$$= \rho \cdot (1-\rho) + 2\rho^2 (1-\rho) + \ldots$$

$$= \rho \cdot (1-\rho)(1 + 2\rho + \ldots)$$

$$= \frac{\rho(1-\rho)}{(1-\rho)^2}$$

$$\boxed{= \frac{\rho}{(1-\rho)}}$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Medidas de desempenho (2)*

- Número médio de clientes na fila ($L_q$):

  (considerando que existe alguém no sistema)

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot P_n = 1\times P_2 + 2\times P_3 + \ldots$$

$$= \rho^2(1-\rho) + 2\rho^3(1-\rho) + \ldots$$

$$= \rho^2 \cdot (1-\rho)(1+2\rho+\ldots)$$

$$= \frac{\rho^2(1-\rho)}{(1-\rho)^2}$$

$$\boxed{= \frac{\rho^2}{(1-\rho)}}$$

- Probabilidade de haver mais do que *k* clientes no sistema:

$$P(n>k) = \sum_{n=k+1}^{\infty}(1-\rho)\cdot\rho^n$$

$$= (1-\rho)\rho^{k+1}(1+\rho+\rho^2+\ldots)$$

$$\boxed{= \rho^{k+1}}$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Medidas de desempenho (3)*

- Probabilidade de haver mais do que *k* clientes na fila:

$$
\begin{aligned}
P(n > k+1) &= \sum_{n=k+2}^{\infty} (1-\rho) \cdot \rho^n \\
&= (1-\rho)\rho^{k+2}\left(1+\rho+\rho^2+\ldots\right) \\
&\boxed{= \quad \rho^{k+2}}
\end{aligned}
$$

- Número médio na fila durante todo o tempo:

$$
(1-\rho)\times 0+\rho\left(\frac{\rho^2}{1-\rho}\right) \quad = \quad \boxed{\frac{\rho^3}{1-\rho}}
$$

# Fila de espera $M/M/1$

*»» Exemplo 1*

Uma ponte rolante tem um tempo médio de elevação de 10 minutos, seguindo uma distribuição exponencial negativa.
Este serviço é solicitado, em média, 4 vezes por hora. A procura ocorre aleatoriamente, seguindo também uma distribuição exponencial negativa.

($\lambda = 4/hora$, $\mu = 6/hora$)

a) Utilização do servidor: $\rho = \lambda/\mu = 66\%$

b) Nº médio no sistema: $\frac{\rho}{1-\rho} = 2$

c) Nº médio na fila (desde que esta exista): $\frac{\rho^2}{1-\rho} = 1.33$

d) Probabilidade de haver mais do que 5 clientes no sistema:
$\rho^{k+1} = \rho^6 = 0.088$

e) Probabilidade de haver mais do que 5 clientes na fila:
$\rho^{k+2} = \rho^7 = 0.059$

f) Nº médio na fila durante todo o tempo: $\frac{\rho^3}{1-\rho} = 0.888$

# Relações fundamentais de *Little*

Estas relações são extremamente úteis, pois permitem determinar as quatro medidas de desempenho a partir da expressão analítica de uma delas.

$L$ Número (médio) de elementos no sistema,

$L_q$ Número (médio) de elementos na fila,

$W$ Tempo (médio) de espera/permanência no sistema,

$W_q$ Tempo (médio) de espera na fila.

Admitindo uma taxa de chegadas constante ($\lambda$), as relações são:

- $L = \lambda W$ (ex, 10 clientes/h, cada demora 0.2h --> L=2 clientes em média no sistema)
- $L_q = \lambda W_q$
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ (válida qq que seja o nº de servidores, desde que a taxa de serviço seja igual para todos)
- $L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$ (deduz-se das anteriores...)

# Filas de espera com comprimento limitado (*K*)

*(ver págs. 76-77)*

Devido a fatores diversos, tais como:

- Limitações físicas (*ex.*, bomba de gasolina na via pública);
- Limitações administrativas (*ex.*, estação de serviço/oficina).

Tipicamente, a taxa de chegadas depende do estado do sistema:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{se } n = 0,1,...,K-1 \\ 0, & \text{se } n \geq K \end{cases}$$

Então, a taxa média (ponderada) é: $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_K)$

Importante: As relações fundamentais (de *Little*) mantêm-se válidas se se substituir $\lambda$ por $\bar{\lambda}$.

Neste caso, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ representa a "taxa de pressão", e o equilíbrio é possível mesmo que $\rho > 1$. (Porquê?)

- $\dfrac{\bar{\lambda}}{\mu}$ representa a taxa de ocupação, e
- $P_K$ representa também a probabilidade de desistência por falta de capacidade do sistema!

# Sistemas de filas de espera com população finita (*N*)

*(ver págs. 78-79)*

Por exemplo, situações industriais em que existe um pequeno número de máquinas sujeitas a avarias mais ou menos frequentes. Nestes casos, os clientes representam as máquinas, enquanto os servidores representam os elementos da equipa de manutenção/reparação.

A taxa de chegadas depende do estado do sistema:

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda, & \text{se } n = 0,1,\ldots,N-1 \\ 0, & \text{se } n \geq N \end{cases}$$

sendo, neste caso, $\lambda$ a taxa de chegadas "unitária" (i.e., a taxa de chegada(s) quando existe apenas uma máquina não avariada).

Então, a taxa média (ponderada) de chegadas é:

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N} (N-n)\lambda P_n = \lambda(N-L)$$

Como $\lambda_n = 0$ quando $n = N$, o sistema atingirá sempre o estado de equilíbrio qualquer que seja o valor de $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

# Processos de vida e morte (*M/M/1*)

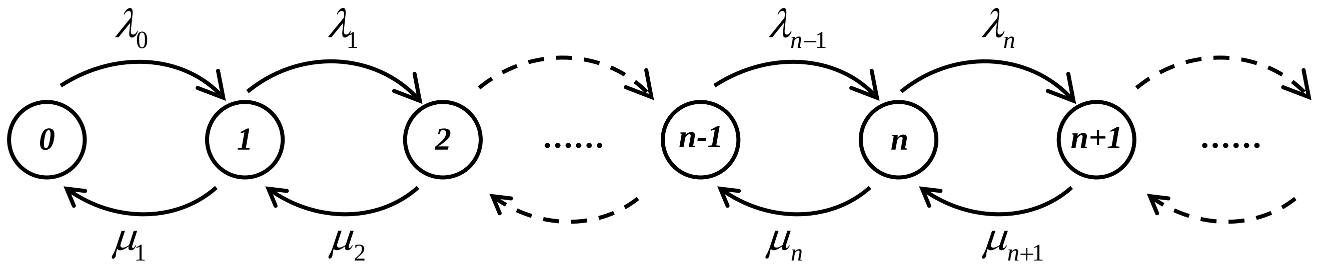



**Diagrama do processo de vida e morte (genérico)**

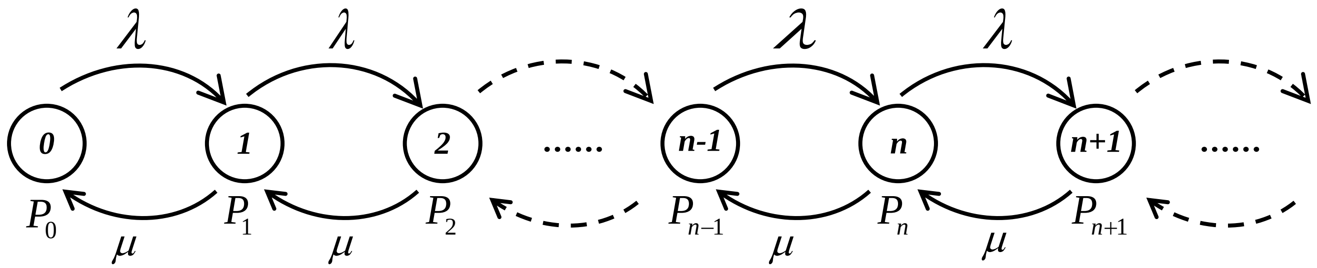



**Diagrama do processo de vida e morte p/ processo (*M/M/1*)**

# <u>Processos de vida e morte (*M/M/S*)</u>

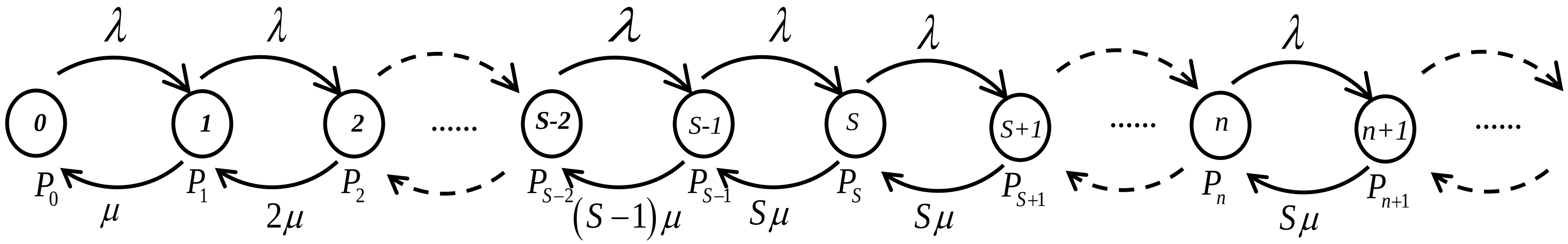



Diagrama do processo de vida e morte p/ processo (*M/M/S*)

# Características do modelo ($\underline{M/M/1}$) –> "*fila de espera simples*"

**Chegada:** Poisson

**Taxa** = $\lambda$ clientes / u. tempo

**População** = $\infty$

**Fila máxima** = $\infty$

**Tempo de atendimento**: Exponencial Negativo

**Taxa** = $\mu$ clientes / u. tempo

**Nº servidores** = 1

**Taxa de ocupação** = $\rho = (\lambda/\mu) < 1$

**Taxa de desocupação** = $1-\rho$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$P_0 = 1-\rho$ (taxa de desocupação)

$P_n = \rho^n P_0$

$P(n>k) = \rho^{k+1}$

$P(W>t) = e^{-\mu(1-\rho)t},\ t \geq 0$

$P(W_q>t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t},\ t \geq 0$

$P(W_q=0) = P_0$

*(Fonte deste resumo e dos seguintes: L.Valadares Tavares et al., Investigação Operacional, McGraw-Hill, 1996).*

## Características do modelo ($M/M/S$) –> *"fila de espera simples, com S servidores"*

**Chegada:** Poisson

**Taxa** = $\lambda$ clientes / u. tempo

**População** = $\infty$

**Fila máxima** = $\infty$

**Tempo de atendimento**: Exponencial Negativo

**Taxa** = $\mu$ clientes / u. tempo, servidor

**Nº servidores** = $S$

**Taxa de ocupação** = $\rho = \dfrac{\lambda}{S\mu} < 1$

**Taxa de desocupação** = $1-\rho$

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty}(n-S)P_n = \frac{P_0(\lambda/\mu)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$$P_0 = 1 \Bigg/ \left[\sum_{n=0}^{S-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!}\frac{1}{1-\rho}\right]$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0, & \text{se } 0 \le n \le S \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{S!S^{n-S}}P_0, & \text{se } n \ge S \end{cases}$$

$$P(W>t) = e^{-\mu t}\left[1 + \frac{P_0(\lambda/\mu)^S}{S!(1-\rho)}\left(\frac{1-e^{-\mu t(S-1-\lambda/\mu)}}{S-1-\lambda/\mu}\right)\right],\ t \ge 0$$

$$P(W_q>t) = \left[1 - P(W_q=0)\right]e^{-S\mu(1-\rho)t},\ t \ge 0$$

$$P(W_q=0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

## <u>Características do modelo</u> ($\underline{M/M/1(K)}$) –> *"<u>fila de espera c/ comprimento limitado</u>"*

**Chegada:** Poisson

**Taxa** = $\lambda$ clientes / u. tempo

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{se } n = 0,1,\ldots,K-1 \\ 0, & \text{se } n \geq K \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda\left(1 - P_K\right)$$

**População** = $\infty$

**Nº máx. no sistema =** $K$ **e Fila máxima** = $K-1$

**Tempo de atendimento**: Exponencial Negativo

**Taxa** = $\mu$ clientes / u. tempo, servidor

**Nº servidores** = 1

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

**Taxa de ocupação** = $\dfrac{\bar{\lambda}}{\mu}$

**Taxa de desocupação** = $1 - \dfrac{\bar{\lambda}}{\mu}$

---

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n-1\right)P_n = L - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\left(K+1\right)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

---

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$ (taxa de desocupação)

$$P_n = \begin{cases} \rho^n P_0, & \text{se } n = 1,\ldots,K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$$

$$P\left(W_q = 0\right) = P_0$$

**Características do modelo ($M/M/S(K)$) –> *"fila de espera c/ comprimento limitado e S servidores"***

**Chegada:** Poisson

**Taxa** = $\lambda$ clientes / u. tempo

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & \text{se } n = 0,1,\ldots,K-1 \\ 0, & \text{se } n \geq K \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{K-1} \lambda P_n = \lambda\left(1 - P_K\right)$$

**População** = $\infty$

**Nº máx. no sistema =** $K$ **e Fila máxima** $= K - S$

**Tempo de atendimento**: Exponencial Negativo

**Taxa** = $\mu$ clientes / u. tempo, servidor

**Nº servidores** = $S$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$$

**Taxa de ocupação** = $\dfrac{\bar{\lambda}}{S\mu}$

**Taxa de desocupação** = $1 - \dfrac{\bar{\lambda}}{S\mu}$

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty}(n-S)P_n = \frac{P_0(\lambda/\mu)^S \rho}{S!(1-\rho)^2}\left[1 - \rho^{K-S} - (K-S)\rho^{K-S}(1-\rho)\right]$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} \qquad W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$P_0 = 1 \Big/ \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^S}{S!} \sum_{n=S}^{K} \rho^{n-S}\right]$$

$$P(W_q = 0) = \sum_{n=0}^{S-1} P_n$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0, & \text{se } n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{S!S^{n-S}} P_0, & \text{se } n = S,\ldots,K \\ 0, & \text{se } n > K \end{cases}$$

## <u>Características do modelo</u> ($M/M/1/N$) –> *"fila de espera simples, mas população finita"*

**Chegada:** Poisson

**Taxa** = $\lambda$ clientes / u. tempo

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda, & \text{se } n = 0,1,\dots,N-1 \\ 0, & \text{se } n \geq N \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n)\lambda P_n = \lambda(N-L)$$

**População** = $N$

**Fila máxima** = $\infty$

**Tempo de atendimento**: Exponencial Negativo

**Taxa** = $\mu$ clientes / u. tempo

**Nº servidores = 1**

**Taxa de ocupação** = $\dfrac{\bar{\lambda}}{\mu}$

**Taxa de desocupação** = $1 - \dfrac{\bar{\lambda}}{\mu}$

---

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) P_n = N - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-P_0)$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

---

$$P_0 = 1 \Big/ \sum_{n=0}^{N} \left[ \frac{N!}{(N-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$ (taxa de desocupação)

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & \text{se } n = 1,\dots,N \\ 0, & \text{se } n > N \end{cases}$$

$$P(W_q = 0) = P_0$$

## <u>Características do modelo</u> ($M/M/S/N$) –> "<u>fila de espera simples c/ S servidores e população finita</u>"

**Chegada:** Poisson

**Taxa** = $\lambda$ clientes / u. tempo

$$\lambda_n = \begin{cases} (N-n)\lambda, & \text{se } n = 0,1,\ldots,N-1 \\ 0, & \text{se } n \geq N \end{cases}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{N-1} (N-n)\lambda P_n = \lambda(N-L)$$

**População** = $N$

**Fila máxima** = $\infty$

**Tempo de atendimento**: Exponencial Negativo

**Taxa** = $\mu$ clientes / u. tempo, servidor

**Nº servidores** = $S$

**Taxa de ocupação** = $\dfrac{\bar{\lambda}}{S\mu}$

**Taxa de desocupação** = $1 - \dfrac{\bar{\lambda}}{S\mu}$

---

$$L_q = \sum_{n=S}^{\infty} (n-S) P_n$$

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$P_0 = 1 \Bigg/ \left[ \sum_{n=0}^{S-1} \frac{N!}{(N-n)!n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=S}^{N} \frac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!n!} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & \text{se } n = 1,\ldots,S \\ \dfrac{N!}{(N-n)!S!S^{n-S}} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, & \text{se } n = S,\ldots,N \\ 0, & \text{se } n > N \end{cases}$$

# Características do modelo ($M/G/1$) –> *"fila de espera com distribuição genérica"*

**Chegada:** Poisson

**Taxa** = $\lambda$ clientes / u. tempo

**População** = $\infty$

**Fila máxima** = $\infty$

**Tempo de atendimento**: qualquer variável aleatória

**Média** = $\frac{1}{\mu}$

**Variância** = $\sigma^2$

**Nº servidores** = 1

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

**Taxa de ocupação** = $\rho$

**Taxa de desocupação** = $1-\rho$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_n = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$P_0 = 1-\rho$ (taxa de desocupação)

# Modelo $M/M/1$: Exemplo 2

Um armazém recebe camiões com encomendas que são descarregadas usando empilhadores.

- Os camiões chegam segundo um processo de Poisson à taxa de 16 camiões/dia;
- Os tempos médios de descarga são variáveis (seguindo uma distribuição Exponencial Negativa):

| Nº empilhadores | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tempo médio de descarga (min) | 50 | 20 | 15 | 12 | 10 |

- A operação de empilhadores custa 7.5 €/h;
- A imobilização dos camiões acarreta um custo de 15 €/h;
- 1 dia = 8 horas.

Pretende-se dimensionar a equipa de empilhadores de modo a minimizar os custos globais do sistema.

## Modelo $M/M/1$: Exemplo 2 (resolução)

Taxa de chegada, $\lambda = 2$ camiões/h

| Nº de empi-lhadores | Tempo médio de descarga [min] | Taxa de serviço [camiões/h] | Taxa de ocupação | Tempo médio no sistema por camião [h] | Tempo total dos camiões por hora [h] | Custo de imobilização dos camiões [€/h] | Custo dos empi-lhadores [€/h] | Custo total [€/h] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $1/\mu$ | $\mu$ | $\lambda/\mu$ | $W$ | $\lambda W$ | $15\lambda W$ | $7.5n$ | |
| 1 | 50 | 1.20 | 1.67 | | | | | |
| 2 | 20 | 3.00 | 0.67 | 1.00 | 2.00 | 30.00 | 15.00 | 45.00 |
| 3 | 15 | 4.00 | 0.50 | 0.50 | 1.00 | 15.00 | 22.5 | 37.50 |
| 4 | 12 | 5.00 | 0.40 | 0.33 | 0.67 | 10.00 | 30.00 | 40.00 |
| 5 | 10 | 6.00 | 0.33 | 0.25 | 0.50 | 7.50 | 37.50 | 45.00 |

## Exponencial Negativa? (teste do $\chi^2$ - Qui-Quadrado)

Será razoável admitir que, por exemplo, os intervalos de tempo entre duas chegadas consecutivas (inter-chegadas) seguem aproximadamente uma distribuição Exponencial Negativa?

Suponhamos que se observou a seguinte sequência: $t_1, t_2, ..., t_m$

Uma estimativa razoável para a taxa de chegadas é: $\hat{\lambda} = \dfrac{m}{\sum_{i=1}^{m} t_i}$

Mas será que $t_1, t_2, ..., t_m$ é consistente com a densidade de probabilidades $f(t) = \hat{\lambda} e^{-\hat{\lambda} t}$ ?

# Teste do $\chi^2$ - Qui-Quadrado

Dividindo a amostra em *k* categorias, podemos determinar o número de $t_i$ (s) que caem em cada uma delas: $e_j$ - número esperado, e $o_j$ - número observado.

Então a estatística $\chi^2(obs) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j}$ deverá seguir uma distribuição $\chi^2$ com (*k*-*r*-1) graus de liberdade (onde *r*=1).

- Se $\chi^2(obs)$ é pequeno, será razoável admitir que os $t_i$ (s) representam uma amostra da distribuição $f(t) = \hat{\lambda} e^{-\hat{\lambda} t}$.
  (N.B. idealmente todos os $e_j = o_j$).
- Se $\chi^2(obs)$ é grande, esta consideração não será razoável.

Teste do $\chi^2$: (conjeturas)

- Hipótese $H_0: t_1, t_2, ..., t_m$ é uma amostra aleatória da variável aleatória com densidade $f(t)$.
- Hipótese $H_a: t_1, t_2, ..., t_m$ não é uma amostra aleatória da variável aleatória com densidade $f(t)$.

Dado um valor de $\alpha$ (erro Tipo I), aceitar $H_0$ se $\chi^2(obs) \le \chi^2_{k-r-1}(\alpha)$

# Exemplo:

(Tempos em minutos.)

| **Obs.(s)** |
| --- |
| 0.01 |
| 0.07 |
| 0.03 |
| 0.08 |
| 0.04 |
| 0.1 |
| 0.05 |
| 0.1 |
| 0.11 |
| 1.17 |
| 1.5 |
| 0.93 |
| 0.54 |
| 0.19 |
| 0.22 |
| 0.36 |
| 0.27 |
| 0.46 |
| 0.51 |
| 0.11 |
| 0.56 |
| 0.72 |
| 0.29 |
| 0.04 |
| 0.73 |
| **T=9.19** |

*m*=25 observações.
Sum(*t*)=9.19 minutos. → $\hat{\lambda} = 25/9.19$=2.72 /minuto.

Consistente com $f(t) = 2.72e^{-2.72t}$ ?

Escolhendo *k*=5 categorias, a probabilidade de cair em cada uma delas é 0.2, logo $e_j = 0.2 \times 25 = 5$.

Determinam-se as fronteiras das categorias a partir da função acumulada $F(t) = P(A \leq t) = 1 - e^{-2.72t}$:

Cat. 1: $0 \leq t < l_1$ minutos
Cat. 2: $l_1 \leq t < l_2$ minutos
Cat. 3: $l_2 \leq t < l_3$ minutos
Cat. 4: $l_3 \leq t < l_4$ minutos
Cat. 5: $l_4 \leq t$ minutos

$F(l_1) = 0.2$, $F(l_2) = 0.4$, $F(l_3) = 0.6$ e $F(l_4) = 0.8$
Logo tiram-se: $l_1 = 0.08$, $l_2 = 0.19$, $l_3 = 0.34$, $l_4 = 0.59$
.....
Tira-se que $\chi^2(obs) = 0.4$, e escolhendo $\alpha = 0.05$, então $\chi_3^2(0.05) = 7.81$ (tabela).

**Conclusão: ACEITAR $H_0$! (erro 5%)**

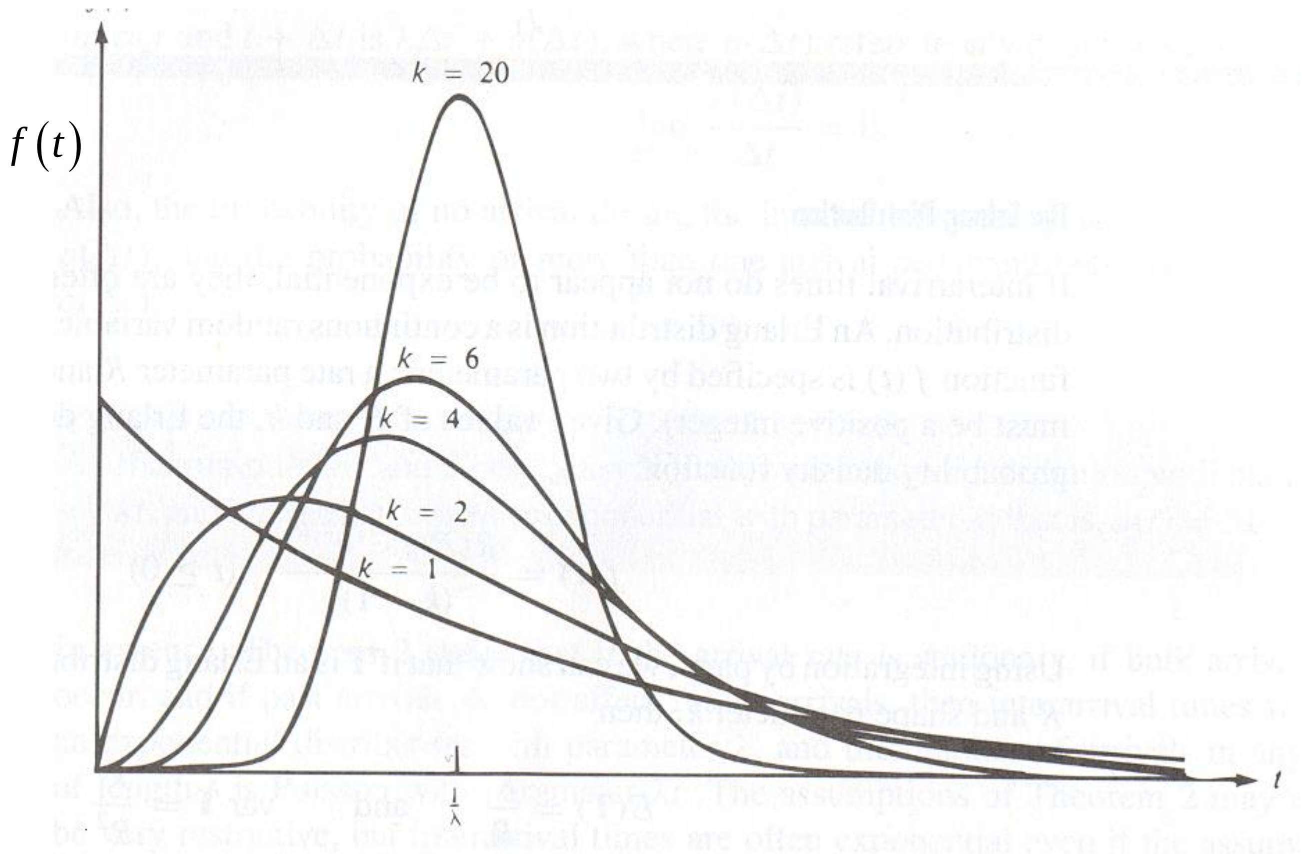
# Características da Distribuição *k*-Erlang ($E_k$)

Função densidade de probabilidade (FDP):

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha t)^{k-1}e^{-\alpha t}}{(k-1)!} & (t\geq 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}$$

Dois parâmetros: $\alpha$ é a taxa ou escala da distribuição

*k* é o parâmetro de forma (*k*>0)




Média: $E(T)=\dfrac{k}{\alpha}$ Variância: $Var(T)=\dfrac{k}{\alpha^2}$

# Características da Distribuição *k*-Erlang ($E_k$) – *cont.*

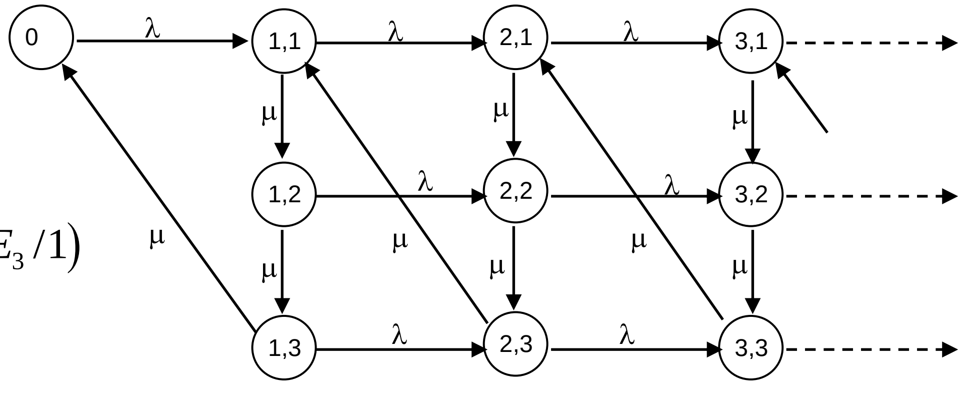
Dependendo do valor de *k*, a distribuição de Erlang pode adaptar-se a um largo espectro de formas:

- *k*=1, a Erlang coincide com a Exponencial Negativa (assimétrica, "alongada para a direita");
- à medida que *k* aumenta, a distribuição torna-se mais e mais similar à Normal;
- $k \to \infty$, a Erlang aproxima-se de uma constante (Var = 0)!

---

Se *X* é uma variável aleatória *IID* segundo uma Erlang $(k, k\alpha)$, então esta pode ser representada pela soma $X = Y_1 + Y_2 + ... + Y_k$, na qual as variáveis $Y_i$ são *IID* Exponenciais Negativas com taxa $(k\alpha)$. Diz-se que o processo (ex., de chegada) de Erlang é equivalente a um processo Exponencial com *k* fases. Exemplo:

$(M / E_3 / 1)$



## Modelos Analíticos *vs.* Técnica da Simulação

Os modelos de Filas de Espera que apresentados anteriormente, baseados em distribuições Exponenciais Negativas, foram resolvidos por via analítica. Recorrendo a manipulações matemáticas de reduzida complexidade, foi possível chegar a fórmulas sintéticas para calcular as suas medidas de desempenho fundamentais.

Em muitos casos em que não é razoável admitir uma Exponencial Negativa, pode ser, no entanto, possível admitir outro tipo de distribuição, como por exemplo a Erlang. Porém, a complexidade da via de resolução analítica frequentemente cresce severamente ou torna-se mesmo inviável. (Em alguns casos muito particulares, é possível ainda assim recorrer a tabelas estatísticas para determinar algumas medidas de desempenho em função dos parâmetros admitidos.) Em resumo, apesar da complexidade que as expressões possam aparentar, a abordagem analítica permite obter resultados rápidos e económicos, exatos ou aproximados.

Em última instância, perante um problema concreto que viola fortemente todas as hipóteses dos modelos analíticos disponíveis, recorre-se à técnica da SIMULAÇÃO. A simulação reproduz o funcionamento do sistema, é mais flexível relativamente ao modelo considerado, mas exige geralmente mais recursos computacionais, mais tempo, e um grande cuidado no tratamento estatístico e interpretação dos resultados obtidos.

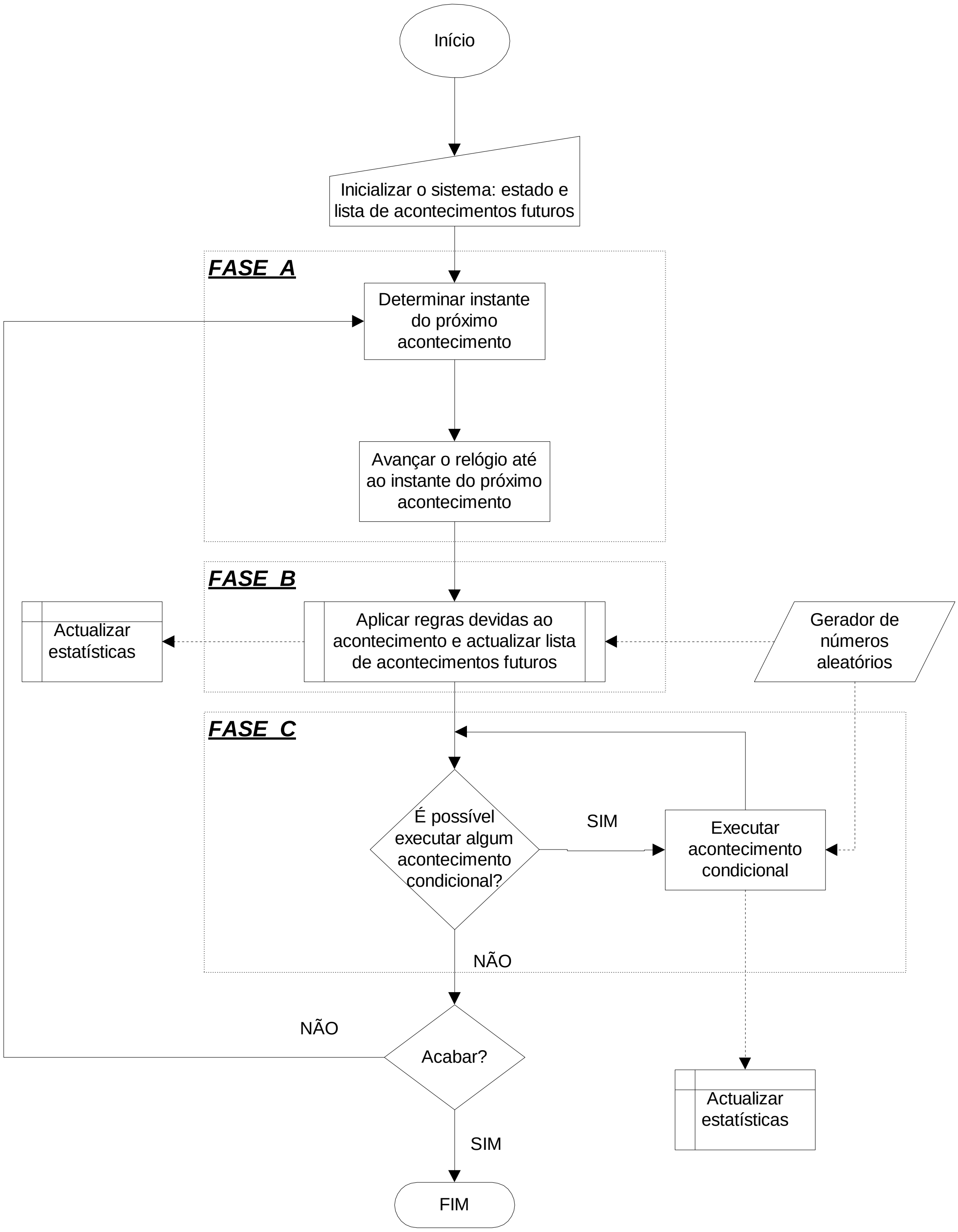
## Técnica da Simulação – Elementos principais

Um modelo de simulação “por acontecimentos” inclui os seguintes elementos principais:

- Um relógio (p/ controlo do tempo);
- Um gerador de números aleatórios;
- Entidades;
- Acontecimentos e estados;
- Um conjunto de regras (para cada acontecimento);
- Uma lista atualizada de (instantes p/ futuros) acontecimentos;
- Um processo de coleção e gravação de estatísticas; e
- Um procedimento (fluxograma) que una e dinamize os elementos anteriores, garantindo a execução do processo de funcionamento.

# Técnica da Simulação – Procedimento

O fluxograma de três fases (A-B-C) para uma simulação por acontecimentos discretos pode ser descrito da seguinte forma:



# Técnica da Simulação – Gerador de aleatoriedade

Normalmente, um gerador de números aleatórios constrói-se a partir de um gerador *standard* de valores contínuos uniformemente distribuídos entre 0 e 1 ($U \in [0,1]$). Por exemplo, no *Excel*™ temos disponível a função geradora *RAND()* – ver anexo com outras fórmulas úteis.

Como obter então um gerador de valores aleatórios (*ex*, tempo *t*) geridos por uma...

...(1) Distribuição Exponencial Negativa?

A partir da Função Cumulativa da distribuição $F(t)=1-e^{-\alpha t}$, resolvendo em ordem a *t*, tira-se que $t=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-F(t)\right)$. Como $0 \le F(t) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le \left(1-F(t)\right) \le 1$, e supondo esta quantidade como uma variável aleatória *U* uniformemente distribuída, vem que $\boxed{t=-\frac{1}{\alpha}\ln(U)}$ será uma variável aleatória distribuída segundo uma distribuição Exponencial Negativa com parâmetro $\alpha$.

...(2) Distribuição *k*-Erlang?

Como a *k*-Erlang é a soma de *k* Exponenciais ($k\alpha$), vem que:

$$t(k,k\alpha)=-\frac{1}{k\alpha}\left[\ln(U_1)+\ln(U_2)+...+\ln(U_k)\right]$$

$$\therefore \qquad \boxed{t(k,k\alpha)=-\frac{1}{k\alpha}\ln\left(\prod_{j=1}^{k}U_j\right)}$$

# Simulação discreta numa folha de cálculo (exemplo)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | **SIMULADOR M/M/1** | | **Taxa de chegadas($\lambda$) =** | | **10** | **/h** | | | | | | | | | | | | |
| **2** | | | | **Taxa de serviço ($\mu$) =** | | **15** | **/h** | | | | | | | | | | | | |
| **3** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **4** | **Acontecimento #** | | **Relógio (t)** | **$\delta$** | **q** | **n** | **Instantes Futuros** | | **Auxiliares para estatísticas** | | | | Comprimento da fila de espera | | | | | | |
| **5** | **I** | **Tipo** | **(minutos)** | **#Serviço?** | **#Fila** | **#Sistema** | **Chegada** | **Partida** | **t(n+1)-t(n)** | **$\delta * \Delta t$** | **$q * \Delta t$** | **$n * \Delta t$** | 0 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **6** | 0 | Inicialização | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 9999 | --- | --- | | --- | | | | | | | |
| **7** | 1 | Chegada | 0 | 1 | 0 | 1 | 5.8004 | 1.21404 | 1.2140377 | 1.21404 | 0 | 1.21404 | | | | | | | |
| **8** | 2 | Partida | 1.21403768 | 0 | 0 | 0 | 5.8004 | 9999 | 4.5863589 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |
| **9** | 3 | Chegada | 5.80039653 | 1 | 0 | 1 | 6.52671 | 8.7367 | 0.7263095 | 0.72631 | 0 | 0.72631 | | | | | | | |
| **10** | 4 | Chegada | 6.52670601 | 1 | 1 | 2 | 6.85263 | 8.7367 | 0.3259222 | 0.32592 | 0.32592 | 0.65184 | | | | | | | |
| **11** | 5 | Chegada | 6.85262821 | 1 | 2 | 3 | 8.44028 | 8.7367 | 1.587652 | 1.58765 | 3.1753 | 4.76296 | | | | | | | |
| **12** | 6 | Chegada | 8.44028023 | 1 | 3 | 4 | 11.7345 | 8.7367 | 0.2964217 | 0.29642 | 0.88927 | 1.18569 | | | | | | | |
| **13** | 7 | Partida | 8.73670195 | 1 | 2 | 3 | 11.7345 | 11.1911 | 2.4543521 | 2.45435 | 4.9087 | 7.36306 | | | | | | | |
| **14** | 8 | Partida | 11.191054 | 1 | 1 | 2 | 11.7345 | 14.5348 | 0.5434916 | 0.54349 | 0.54349 | 1.08698 | | | | | | | |
| **15** | 9 | Chegada | 11.7345456 | 1 | 2 | 3 | 17.1644 | 14.5348 | 2.8002518 | 2.80025 | 5.6005 | 8.40076 | | | | | | | |
| **16** | 10 | Partida | 14.5347974 | 1 | 1 | 2 | 17.1644 | 15.6229 | 1.0881243 | 1.08812 | 1.08812 | 2.17625 | | | | | | | |
| **17** | 11 | Partida | 15.6229217 | 1 | 0 | 1 | 17.1644 | 16.0271 | 0.4042235 | 0.40422 | 0 | 0.40422 | | | | | | | |
| **18** | 12 | Partida | 16.0271452 | 0 | 0 | 0 | 17.1644 | 9999 | 1.1372183 | 0 | 0 | 0 | | | | | | | |

B7 = IF(G6<H6;"Chegada";"Partida")

C7 = IF(B7="Chegada";G6;H6)

F7 = IF(B7="Chegada";F6+1;F6-1)

D7 = IF(F7>0;1;0)

E7 = IF(F7>1;F7-1;0)

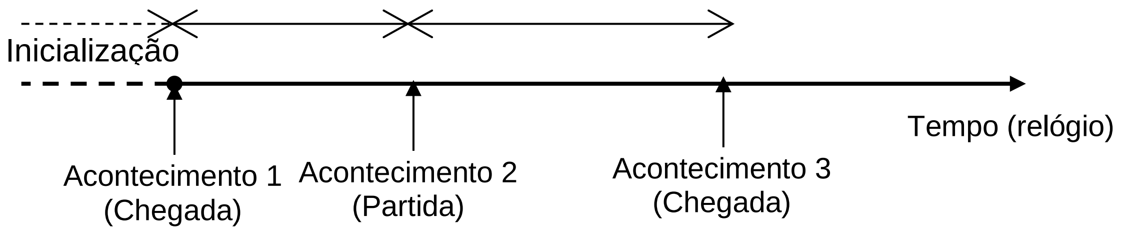
G7 = IF(B7="Chegada";C7-log(RAND())/$F$1;G6)

H7 = | H6 se aconteceu uma "Chegada";
| C7-log(RAND())/$F$2 se aconteceu uma "Partida" e *n*>0,
| ou se aconteceu uma "Chegada" e H6=9999;
| "9999" se aconteceu uma "Partida" e *n*=0 (i.e, o sistema está vazio).

## Notas sobre o exemplo de simulação

| | |
|---|---|
| Entidades: | Clientes que usam o sistema M/M/1 |
| Estado (*n*): | Nº de clientes no sistema |
| Acontecimentos: | Chegadas e Partidas (ou fins de serviço) |

O comportamento geral de um simples *"run"* (fazer F9) do modelo de simulação anterior (ver aplicativo "*io2_simulador_ee1.xls*" – folha de cálculo "*M-M-1 demo*"), pode ser esquematizado da seguinte forma:




Dado que os resultados finais de um único *"run"* podem vir influenciados pelas condições iniciais e pela própria duração da simulação, é conveniente realizar vários *"runs"* com durações razoavelmente longas, e basear as conclusões (sobre as medidas de desempenho do sistema) nos valores médios globais respectivos obtidos ao longo de todo o processo. Para isso, é aconselhável usar as outras folhas de cálculo do mesmo aplicativo.

## Qual deverá ser a duração da simulação?

Problema:

*Determinar qual a duração da simulação, para que o valor das variáveis do sistema (ex., medidas de desempenho) sejam estimadas com uma determinada acurácia, verificando um dado grau de confiança estatística.*

Procedimento normalmente proposto:

1) Executar algumas simulações curtas, utilizando diferentes séries de números aleatórios (e.g. partindo de diferentes sementes);

2) Estimar a média e a variância da variável que se pretende medir (*ex.*, o comprimento médio da fila, o tempo médio de permanência no sistema,…), e admitir para esta uma lei de distribuição Normal;

3) Sabendo que o desvio padrão dessa variável é inversamente proporcional à raiz quadrada da duração da simulação, calcular que duração deve ter uma experiência de simulação, para obter uma dada acurácia a um dado grau de confiança estatística.

## Qual deverá ser a duração da simulação? (exemplo)

Valor médio
(obtido com curtas simulações de 10 horas) = *120* unidades
Desvio padrão = *40* unidades

Qual a duração mínima de uma simulação, para que o nível médio de inventário de *120* possa ser especificado com uma acurácia de $\pm$ *5* unidades, com uma confiança estatística de *90%*?

Resposta:

Admitindo uma lei Normal: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow \sigma_D = \frac{X-\mu}{Z_{90\%}}$

tira-se que o desvio padrão a obter deve ser de:

$$\sigma_D = \frac{5}{1.6449}$$ = *3.04* unidades.

Fazendo então a proporcionalidade inversa: $\frac{\sigma_D}{40} = \sqrt{\frac{10}{D}}$

Obtém-se que a simulação deve corresponder a:

$$D = \frac{10 * 40^2}{(3.04)^2}$$ = 1732 horas (ou mais).

# Qual é a acurácia obtida com a simulação? (exemplo)

No caso do exemplo anterior, se só fosse possível executar uma simulação de duração equivalente a *1000* horas, qual seria a acurácia da estimativa, com um grau de confiança de *90%*?

Resposta:

O desvio padrão seria, proporcionalmente, de $\sigma_D = 40\sqrt{\frac{10}{1000}}$ = *4* unidades.

Logo, a acurácia conseguida na estimativa do valor médio da variável, com uma confiança estatística de *90%*, seria de $\pm$*4 * 1.6449*, ou seja de aproximadamente $\pm$*6.6* unidades.

## ***ANEXO: Algumas funções de interesse no Excel$^{TM}$***

| | | |
|---|---|---|
| Random Generation: | RAND() | 0 to 1 random generator |
| | RAND()*(b-a)+a | a to b random generator |
| | *e.g.* RAND()*100 | 0 to100 random generator |
| | *N.B.* Introducing RAND(), and then pressing F9, instead of ENTER, transforms formula into value. | |
| Normal Distribution: | NORMDIST(x; mean; std; cumulative) | |
| | Cumulative if cumulative=TRUE, mass if FALSE | |
| | *e.g.* NORMDIST(1.65; 0; 1; TRUE) = 0.9505 | |
| | NORMINV(prob; mean; std), the cumulative inverse | |
| | *e.g.* NORMINV(0.95; 0; 1) = 1.6449 | |
| Conditional: | IF(logical_test; value_if_true; value_if_false) | |
| | *N.B.* Up to 7 IFs can be nested. | |
| Logical IS functions: | ISBLANK(value), ISTEXT(value), ISERROR(value) | |
| | *e.g.* ISERROR(AVERAGE(B1:B5)) | |
| Maths/Stats: | ABS, AVERAGE, LOG, POWER, ROUND, STDEV, SQRT, SUM, SUMIF | |

Tools → Goal Seek… → Set cell … To value … By changing cell …

Adjusts the value of a cell (independent variable), so that the other cell (dependent variable or formula) equals the seek value.