1. Considere a função

$$f(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4.$$

Implemente, no máximo, duas iterações do método de segurança de Newton para determinar o máximo da função $f(x_1, x_2)$. Considere $\eta = 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$, $\varepsilon = 1$ e $x^{(1)} = (1, 1)^T$.

Resolução:

$\max \overline{f}(x_1, x_2) = -\sin(x_1 - 1) - x_2^4$

$\min f(x_1, x_2) = \sin(x_1 - 1) + x_2^4$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 - 1) \\ 4x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1 - 1) & 0 \\ 0 & 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton: $x^1 = (1, 1), \eta = 10^{-6}, \mu = 10^{-6}, \varepsilon = 1$

- **1ª iteração**

  $$x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

  Cálculo da direção d_N^1

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 12 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{sistema impossível} \Rightarrow d_{SN}^1 = -\nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

  Cálculo de α

  $\alpha = 1$

  $$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

  $$\begin{cases} f(x^1) = 1 \\ f(x^{\text{aux}}) = 80.158562 \quad \uparrow \end{cases}$$

  $\alpha = 0.5 \times 1 = 0.5$

$$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^1) = 1 \\ f(x^{\text{aux}}) = 0.520574 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha \nabla f(x^1)^T d_{SN}^1 \Leftrightarrow 0.520574 \leq 1 + 10^{-6} \times 0.5 \times (-17)$

$\Leftrightarrow 0.520574 \leq 1.0000085$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

$$\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0.877583 \\ -4 \end{pmatrix} \right\|_2 = 4.095138 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

- **2ª iteração**

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.877583 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^2) = \begin{pmatrix} 0.479426 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção d_N^2

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.479426 & 0 & -0.877583 \\ 0 & 12 & 4 \end{array}\right) \rightarrow d_N^2 = \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução única.

$$\nabla f(x^2)^T d_N^2 = \begin{pmatrix} 0.877583 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix} = -2.939736$$

$\left| \nabla f(x^2)^T d_N^2 \right| = 2.939736 > 10^{-6}$, logo d_N^2 não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(x^2)^T d_N^2 = -2.939736 > 10^{-6}$, logo d_N^2 não é ascendente.

$$d_{SN}^2 = d_N^2 = \begin{pmatrix} -1.830487 \\ 0.333333 \end{pmatrix}$$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$x^{\text{aux}} = x^2 + \alpha d_{SN}^2 = \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^2) = 0.520574 \\ f(x^{\text{aux}}) = -0.527518 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^2) + \mu\alpha\nabla f(x^2)^T d_{SN}^2 \Leftrightarrow -0.527518 \leq 0.520574 + 10^{-6} \times 1 \times (-2.939736)$ (verdadeiro), logo a descida é significativa.

$$x^3 = \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

$$\|\nabla f(x^3)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.688697 \\ -1.185187 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1.676108 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

Como o número máximo de iterações é dois,

$$x_{\max} \approx \begin{pmatrix} -1.330487 \\ -0.666667 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\max} \approx 0.527518$$

2. A soma de três números (x_1, x_2 e x_3) positivos é igual a 40. Determine esses números de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima.

   Use a relação da soma para colocar x_3 em função das outras 2 variáveis. Formule o problema como um problema de otimização sem restrições.

   A partir da aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (10, 10)$, use o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$) para calcular esses números, considerando no critério de paragem $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

   Resolução:

   a) Formular problema sem restrições

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_3 = 40 \Rightarrow x_3 = 40 - x_1 - x_2 \end{array}$$

$$\min \quad x_1^2 + x_2^2 + (40 - x_1 - x_2)^2$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2(40 - x_1 - x_2) \\ 2x_2 - 2(40 - x_1 - x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

   b) Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton: $x^1 = (10, 10), \eta = 0.00001, \mu = 0.001, \varepsilon = 0.001$

   - **1ª iteração**

$$x^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -20 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

     Cálculo da direção d_N^1

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 20 \\ 2 & 4 & | & 20 \end{pmatrix} \underset{m_{21} = -0.5}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 20 \\ 0 & 3 & | & 10 \end{pmatrix} \rightarrow d_N^1 = \begin{pmatrix} 3.333333 \\ 3.333333 \end{pmatrix}$$

     O sistema tem solução única.

$$\nabla f(x^1)^T d_N^1 = \begin{pmatrix} -20 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.333333 \\ 3.333333 \end{pmatrix} = -133.333320$$

$\left|\nabla f(x^1)^T d_N^1\right| = 133.333320 > 0.00001$ logo d_N^1 não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(x^1)^T d_N^1 = -133.333320 \leq 0.00001$ logo d_N^1 é descendente.

$$d_{SN}^1 = d_N^1 = \begin{pmatrix} 3.333333 \\ 3.333333 \end{pmatrix}$$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.333333 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^1) = 600 \\ f(x^{\text{aux}}) = 533.333333 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha\nabla f(x^1)^T d_{SN}^1 \Leftrightarrow 533.333333 \leq 600 + 0.001 \times 1 \times (-133.333320) \Leftrightarrow$
$533.333333 \leq 599.866667$ (verdadeiro), logo a descida é significativa.

$$x^2 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.3333333 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

  $$\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} -0.000002 \\ -0.000002 \end{pmatrix}\right\|_2 = 0.000003 \leq \varepsilon \quad \text{(verdadeiro)}$$

- **2ª iteração**

  $$x^2 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.333333 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -0.000002 \\ -0.000002 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

  Cálculo da direção d_N^2

  $$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0.000002 \\ 2 & 4 & 0.000002 \end{array}\right) \underset{m_{21} = -0.5}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0.000002 \\ 0 & 3 & 0.000001 \end{array}\right) \rightarrow d_N^2 = \begin{pmatrix} 0.000000 \\ 0.000000 \end{pmatrix}$$

  O sistema tem solução única.

  $$x^3 = x^2 = \begin{pmatrix} 13.333333 \\ 13.3333333 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(x^3)\|_2 = 0.000003 \leq \varepsilon \quad$ (verdadeiro)

$x_1 \approx 13.333333, x_2 \approx 13.333333, x_3 \approx 13.333334$ e $f_{\min} \approx 533.333333$

3. Uma empresa fabrica e comercializa dois tipos de computadores portáteis. O custo de fabrico de cada um deles decresce à medida que o número de unidades produzidas aumenta e é dado pelas seguintes relações empíricas:

$$c_1 = 5 + \frac{1500}{x_1} \qquad c_2 = 7 + \frac{2500}{x_2},$$

em que x_1 e x_2 são o número de unidades de cada um dos portáteis produzidos. O preço de venda dos computadores é tanto menor quanto maior for o número de unidades produzidas, de acordo com as seguintes relações:

$$p_1 = 15 - 0.001x_1 \quad \text{e} \quad p_2 = 25 - 0.0015x_2.$$

a) Formule o problema de otimização que consiste em determinar quantas unidades de cada computador a firma deve produzir de modo a maximizar os lucros.

b) Resolva o problema usando o método de Segurança de Newton (com $\eta = 0.00001$). Considere a seguinte aproximação inicial $(x_1, x_2)^{(1)} = (20, 30)$ e $\varepsilon = 0.001$. Na condição de Armijo tome $\mu = 0.001$.

c) Com base na aproximação calculada na alínea anterior ao número de computadores produzidos, a empresa terá lucro?

Resolução:

a) Formular problema

lucro = vendas - produção - reparação $= x_1p_1 + x_2p_2 - x_1c_1 - x_2c_2 - r$

$\max x_1(15 - 0.001x_1) + x_2(25 - 0.0015x_2) - x_1\left(5 + \frac{1500}{x_1}\right) - x_2\left(7 + \frac{2500}{x_2}\right) - (x_1 + x_2)\left(0.2 + 2.3 \times 10^{-5}(x_1 + x_2) + 5.3 \times 10^{-9}(x_1 + x_2)^2\right)$

b) $\min 5x_1 + 1500 + 7x_2 + 2500 - 15x_1 + 0.001x_2^2 - 25x_2 + 0.0015x_2^2 = 0.001x_1^2 + 0.0015x_2^2 - 10x_1 - 18x_2 + 4000$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0.002x_1 - 10 \\ 0.003x_2 - 18 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0.002 & 0 \\ 0 & 0.003 \end{pmatrix}$$

Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton: $x^1 = (20, 30), \eta = 0.00001, \mu = 0.001, \varepsilon = 0.001$

- **1ª iteração**

$x^1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -9.96 \\ -17.91 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x^1) = \begin{pmatrix} 0.002 & 0 \\ 0 & 0.003 \end{pmatrix}$

Cálculo da direção d_N^1

$\left(\begin{array}{cc|c} 0.002 & 0 & 9.96 \\ 0 & 0.003 & 17.91 \end{array}\right) \rightarrow d_N^1 = \begin{pmatrix} 4980 \\ 5970 \end{pmatrix}$

O sistema tem solução única.

$\nabla f(x^1)^T d_N^1 = \begin{pmatrix} -9.96 & -17.91 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4980 \\ 5970 \end{pmatrix} = -156520$

$\left| \nabla f(x^1)^T d_N^1 \right| = 156520 > 0.00001$ logo d_N^1 não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(x^1)^T d_N^1 = -156520 \leq 0.00001$ logo d_N^1 é descendente.

$d_{SN}^1 = d_N^1 = \begin{pmatrix} 4980 \\ 5970 \end{pmatrix}$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(x^1) = 3261.8 \\ f(x^{\text{aux}}) = -75000 \quad \downarrow \end{cases}$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha\nabla f(x^1)^T d_{SN}^1 \Leftrightarrow -75000 \leq 3261.8 + 0.001 \times 1 \times (-156520) \Leftrightarrow -75000 \leq 3481.3$ (verdadeiro), logo a descida é significativa.

$x^2 = \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \end{pmatrix}$

- *Critério de Paragem*

$\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0 \leq \varepsilon \quad$ (verdadeiro)

$$x_{\max} \approx \begin{pmatrix} 5000 \\ 6000 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\max} \approx 75000$$

c) Sim, o lucro é positivo.

4. Três estações elétricas vão fornecer energia a uma certa região da forma mais económica possível. Os custos individuais de operação de cada uma das estações são dados por

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.1 + 0.25x \\ f_2 &= 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 \\ f_3 &= 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \end{aligned}$$

em que x, y e z são as energias fornecidas pelas três estações (em MWatt). Determine os valores de x, y e z que minimizam o custo total, se a energia a ser fornecida for de 100 MWatt, recorrendo ao método de segurança de Newton.

Como valores iniciais use $(x, y)^{(1)} = (30, 50)$, no critério de paragem considere $\varepsilon = 0.05$ e tome $\eta = 0.0001$. Como estratégia de procura unidimensional utilize o critério de Armijo com $\mu = 0.01$. Use a relação relacionada com a energia a fornecer para eliminar uma das variáveis, por exemplo, $x = 100 - y - z$.

Resolução:

a) Formular problema sem restrições

$$\begin{array}{ll} \min & 0.1 + 0.25x + 0.08 + 0.12y + 0.00125y^2 + 0.05 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \\ \text{s.a.} & x + y + z = 100 \Rightarrow x = 100 - y - z \end{array}$$

$$\begin{aligned} \min \quad f(y,z) = \; & 0.23 + 0.25(100 - y - z) + 0.12y + 0.00125y^2 + 0.09z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \\ = \; & 25.23 - 0.13y + 0.00125y^2 - 0.16z + 0.001z^2 + 0.0001z^3 \end{aligned}$$

$$\nabla f(y,z) = \begin{pmatrix} -0.13 + 0.0025y \\ -0.16 + 0.002z + 0.0003z^2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(y,z) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.002 + 0.0006z \end{pmatrix}$$

b) Iniciar o algoritmo de Segurança de Newton: $(y^1, z^1) = (30, 50), \eta = 0.0001, \mu = 0.01, \varepsilon = 0.5$

- **1ª iteração**

$$(y^1, z^1) = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(y^1, z^1) = \begin{pmatrix} -0.055 \\ 0.69 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(y^1, z^1) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.032 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção d_N^1

$$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0 & | & 0.055 \\ 0 & 0.032 & | & -0.69 \end{pmatrix} \rightarrow d_N^1 = \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução única.

$$\nabla f(y^1, z^1)^T d_N^1 = \begin{pmatrix} -0.055 & 0.69 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix} = -16.088125$$

$\left| \nabla f(y^1, z^1)^T d_N^1 \right| = 16.088125 > 0.0001$ logo d_N^1 não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(y^1, z^1)^T d_N^1 = -16.088125 \leq 0.0001$ logo d_N^1 é descendente.

$$d_{SN}^1 = d_N^1 = \begin{pmatrix} 22 \\ -21.5625 \end{pmatrix}$$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) = (y^1, z^1) + \alpha d_{SN}^1 = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(y^1, z^1) = 29.455 \\ f((y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}})) = 20.408408 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f((y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}})) \leq f(y^1, z^1) + \mu\alpha \nabla f(y^1, z^1)^T d_{SN}^1 \Leftrightarrow 20.408408 \leq 29.455 + 0.01 \times 1 \times (-16.088125) \Leftrightarrow 20.408408 \leq 29.294119$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$$(y^2, z^2) = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(y^2, z^2)\|_2 = 0.139482 \leq \varepsilon \quad$ (falso)

- **2ª iteração**

$$(y^2, z^2) = \begin{pmatrix} 52 \\ 28.4375 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(y^2, z^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.139482 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(y^2, z^2) = \begin{pmatrix} 0.0025 & 0 \\ 0 & 0.019063 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção d_N^2

$$\begin{pmatrix} 0.0025 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0.019063 & | & -0.139482 \end{pmatrix} \rightarrow d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.316897 \end{pmatrix}$$

O sistema tem solução única.

$\nabla f(y^2, z^2)^T d_N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.139482 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -7.316897 \end{pmatrix} = -1.020575$

$\left| \nabla f(y^2, z^2)^T d_N^2 \right| = 1.020575 > 0.0001$ logo $d_N^{(2)}$ não é ortogonal ao gradiente.

$\nabla f(y^2, z^2)^T d_N^2 = -1.020575 \leq 0.0001$ logo $d_N^{(2)}$ é descendente.

$d_{SN}^{(2)} = d_N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7.316897 \end{pmatrix}$

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) = (y^2, z^2) + \alpha d_{SN}^2 = \begin{pmatrix} 52 \\ 21.120603 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(y^2, z^2) = 20.408408 \\ f(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) = 19.858931 \quad \downarrow \end{cases}$

Critério de Armijo

$f(y^{\text{aux}}, z^{\text{aux}}) \leq f(y^2, z^2) + \mu\alpha \nabla f(y^2, z^2)^T d_{SN}^{(2)} \Leftrightarrow 19.858931 \leq 20.408408 + 0.01 \times 1 \times (-1.020575) \Leftrightarrow 19.858931 \leq 20.398202$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$(y^3, z^3) = \begin{pmatrix} 52 \\ 21.120603 \end{pmatrix}$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(y^3, z^3)\|_2 = 0.016065 \leq \varepsilon \quad$ (verdadeiro)

$$(x, y, z)_{\min} \approx \begin{pmatrix} 26.879397 \\ 52 \\ 21.120603 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\min} \approx 19.858931$$

5. Numa situação monopolista, o rendimento de uma empresa face à venda de um produto ou serviço depende do nível de produção z. O rendimento é uma função crescente de z mas tende em direção a uma assímtota assim que o mercado fica saturado.

   Considere a seguinte função rendimento

   $$R(z) = z^2/(1+z^2)$$

   que depende da produção z dada por $z = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, em que x_1 representa o capital e x_2 o trabalho.

   Supondo que a função lucro é dada por

   $$\pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2$$

   calcule o lucro máximo que a empresa pode ter. Use o método quasi-Newton (com fórmula BFGS). Como aproximação inicial considere o ponto $(2,1)$. Use na paragem do processo iterativo $\varepsilon = 0.1$. No critério de Armijo use $\mu = 0.001$.

   Resolução:

   $\max \pi(x_1, x_2) = R(z) - 0.04x_1 - 0.06x_2 = \dfrac{(x_1^{1/2} x_2^{1/2})^2}{1 + (x_1^{1/2} x_2^{1/2})^2} - 0.04x_1 - 0.06x_2 = \dfrac{x_1 x_2}{1 + x_1 x_2} - 0.04x_1 - 0.06x_2$

   $\min f(x_1, x_2) = 0.04x_1 + 0.06x_2 - \dfrac{x_1 x_2}{1 + x_1 x_2}$

   $$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0.04 - \dfrac{x_2}{(1+x_1x_2)^2} \\ 0.06 - \dfrac{x_1}{(1+x_1x_2)^2} \end{pmatrix}$$

   Iniciar o algoritmo de quasi-Newton: $x^1 = (2,1), \mu = 0.001, \varepsilon = 0.1$

   - **1ª iteração**

     $x^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -0.0711 \\ -0.1622 \end{pmatrix}$

     $H^1 = I$

     Cálculo da direção d_{QN}^1

     $d_{QN}^1 = -H^1 \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}$

$\nabla f(x^1)^T d_{QN}^1 = \begin{pmatrix} -0.0711 & -0.1622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix} = -0.03114 < 0$, logo d_{QN}^1 é descendente.

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d_{QN}^1 = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} f(x^1) = -0.5267 \\ f(x^{\text{aux}}) = -0.5539 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha\nabla f(x^1)^T d_{QN}^1 \Leftrightarrow -0.5539 \leq -0.5267 + 0.001 \times 1 \times (-0.0314)$

$\Leftrightarrow -0.5539 \leq -0.5267$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$x^2 = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix}$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.1328 \leq \varepsilon \quad$ (falso)

- **2ª iteração**

  $x^2 = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix}$

  $$H^2 = \left(I - \frac{s^1 y^{1^T}}{s^{1^T} y^1}\right) H^1 \left(I - \frac{y^1 s^{1^T}}{s^{1^T} y^1}\right) + \frac{s^1 s^{1^T}}{s^{1^T} y^1}$$

  $s^1 = x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} 2.0711 \\ 1.1622 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix}$

  $y^1 = \nabla f(x^2) - \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.0711 \\ -0.1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0110 \\ 0.0438 \end{pmatrix}$

  $s^1 y^{1^T} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0110 & 0.0438 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0031 \\ 0.0018 & 0.0071 \end{pmatrix}$

$$s^{1^T} y^1 = \begin{pmatrix} 0.0711 & 0.1622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0110 \\ 0.0438 \end{pmatrix} = 0.0079$$

$$y^1 s^{1^T} = \begin{pmatrix} 0.0110 \\ 0.0438 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0711 & 0.1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0008 & 0.0018 \\ 0.0031 & 0.0071 \end{pmatrix}$$

$$s^1 s^{1^T} = \begin{pmatrix} 0.0711 \\ 0.1622 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.0711 & 0.1622 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0051 & 0.0115 \\ 0.0115 & 0.0263 \end{pmatrix}$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0.8987 & -0.3924 \\ -0.2278 & 0.1013 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8987 & -0.2278 \\ -0.3924 & 0.1013 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6456 & 1.4557 \\ 1.4557 & 3.3291 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9616 & -0.2445 \\ -0.2445 & 0.0622 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.6456 & 1.4557 \\ 1.4557 & 3.3291 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6072 & 1.2112 \\ 1.2112 & 3.3913 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direção d^2_{QN}

$$d^2_{QN} = -H^2 \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 1.6072 & 1.2112 \\ 1.2112 & 3.3913 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0601 \\ -0.1184 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2400 \\ 0.4743 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x^2)^T d^2_{QN} = \begin{pmatrix} -0.0601 & -0.1184 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2400 \\ 0.4743 \end{pmatrix} = -0.0706 < 0$, logo d^2_{QN} é descendente.

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$$x^{\text{aux}} = x^2 + \alpha d^2_{QN} = \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^2) = -0.5539 \\ f(x^{\text{aux}}) = -0.6003 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^2) + \mu\alpha \nabla f(x^2)^T d^2_{QN} \Leftrightarrow -0.6003 \leq -0.5539 + 0.001 \times 1 \times (-0.0706)$

$\Leftrightarrow -0.6003 \leq -0.5540$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

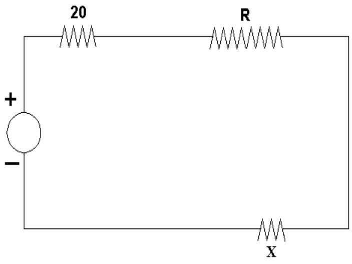
$$x^3 = \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

  $$\|\nabla f(x^3)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.0316 \\ -0.0411 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.0518 \leq \varepsilon \quad \text{(verdadeiro)}$$

$$x_{\max} \approx \begin{pmatrix} 2.3111 \\ 1.6365 \end{pmatrix} \text{ e } \pi_{\max} \approx 0.6003$$

8. Considere um circuito elétrico em que existem duas resistências variáveis, R e X. O valor médio da energia do circuito é dado por



$$P = \frac{10^4 R}{(R+20)^2 + X^2}.$$

Determine os valores de R e X para os quais se obtém uma energia de saída máxima. Use o método quasi-Newton (fórmula DFP) e os valores iniciais $(R,X)^{(1)} = (10,5)$. Considere $\mu = 0.001$ e $\varepsilon = 0.5$.

Resolução:

$\max P(R,X) = \dfrac{10^4 R}{(R+20)^2 + X^2}$

Fazendo $x_1 \leftarrow R$ e $x_2 \leftarrow X$, vem

$\min -P(x_1,x_2) = f(x_1,x_2) = -\dfrac{10^4 x_1}{(x_1+20)^2 + x_2^2}$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{10^4(x_1^2 - x_2^2 - 400)}{\left((x_1+20)^2+x_2^2\right)^2} \\ \frac{2\times 10^4 x_1 x_2}{\left((x_1+20)^2+x_2^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

Iniciar o algoritmo de quasi-Newton: $x^1 = (10,5), \mu = 0.001, \varepsilon = 0.5$

- **1ª iteração**

  $x^1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} -3.7984 \\ 1.1687 \end{pmatrix}$

  $H^1 = I$

  Cálculo da direcção d^1_{QN}

  $d^1_{QN} = -H^1 \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 3.7984 \\ -1.1687 \end{pmatrix}$

  $\nabla f(x^1)^T d^1_{QN} = \begin{pmatrix} -3.7984 & 1.1687 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.7984 \\ -1.1687 \end{pmatrix} = -15.7937 < 0$, logo d^1_{QN} é descendente.

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$x^{\text{aux}} = x^1 + \alpha d^1_{QN} = \begin{pmatrix} 13.7984 \\ 3.8313 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} f(x^1) = -108.1081 \\ f(x^{\text{aux}}) = -119.2591 \quad \leftarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^1) + \mu\alpha\nabla f(x^1)^T d^1_{QN} \Leftrightarrow -119.2591 \leq -108.1081 + 0.001 \times 1 \times (-15.7937)$

$\Leftrightarrow -119.2591 \leq -108.1239$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$x^2 = \begin{pmatrix} 13.7984 \\ 3.8313 \end{pmatrix}$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(x^2)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -1.6754 \\ 0.7898 \end{pmatrix} \right\|_2 = 1.8522 \leq \varepsilon \quad$ (falso)

- **2ª iteração**

  $x^2 = \begin{pmatrix} 13.7984 \\ 3.8313 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} -1.6754 \\ 0.7898 \end{pmatrix}$

  $$H^2 = H^1 - \frac{H^1 y^1 {y^1}^T H^1}{{y^1}^T H^1 y^1} + \frac{s^1 {s^1}^T}{{s^1}^T y^1}$$

  $s^1 = x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} 3.7984 \\ -1.1687 \end{pmatrix}$

  $y^1 = \nabla f(x^2) - \nabla f(x^1) = \begin{pmatrix} 2.1230 \\ -0.3789 \end{pmatrix}$

  $y^1 {y^1}^T = \begin{pmatrix} 4.5071 & -0.8044 \\ -0.8044 & 0.1436 \end{pmatrix}$

  ${y^1}^T y^1 = 4.6507$

$$s^1 {s^1}^T = \begin{pmatrix} 14.4278 & -4.4392 \\ -4.4392 & 1.3659 \end{pmatrix}$$

$${s^1}^T y^1 = 8.5068$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 4.5071 & -0.8044 \\ -0.8044 & 0.1436 \end{pmatrix}}{4.6507} + \frac{\begin{pmatrix} 14.4278 & -4.4392 \\ -4.4392 & 1.3659 \end{pmatrix}}{8.5068} = \begin{pmatrix} 1.7269 & -0.3489 \\ -0.3489 & 1.1297 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direcção d^2_{QN}

$$d^2_{QN} = -H^2 \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 3.1688 \\ -1.4768 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x^2)^T d^2_{QN} = -6.4754 < 0$, logo d^2_{QN} é descendente.

Cálculo de α

$$\alpha = 1$$

$$x^{\text{aux}} = x^2 + \alpha d^2_{QN} = \begin{pmatrix} 16.9672 \\ 2.3545 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f(x^2) = -119.2591 \\ f(x^{\text{aux}}) = -123.6570 \quad \downarrow \end{cases}$$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^2) + \mu\alpha \nabla f(x^2)^T d^2_{QN} \Leftrightarrow -123.6570 \leq -119.2591 + 0.001 \times 1 \times (-6.4754)$

$\Leftrightarrow -123.6570 \leq -119.2656$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$$x^3 = \begin{pmatrix} 16.9672 \\ 2.3545 \end{pmatrix}$$

- *Critério de Paragem*

$$\|\nabla f(x^3)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.6249 \\ 0.4244 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.7554 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

- **3ª iteração**

$$x^3 = \begin{pmatrix} 16.9672 \\ 2.3545 \end{pmatrix} \qquad \nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} -0.6249 \\ 0.4244 \end{pmatrix}$$

$$H^3 = H^2 - \frac{H^2 y^2 y^{2^T} H^2}{y^{2^T} H^2 y^2} + \frac{s^2 s^{2^T}}{s^{2^T} y^2}$$

$$s^2 = x^3 - x^2 = \begin{pmatrix} 3.1688 \\ -1.4768 \end{pmatrix}$$

$$y^2 = \nabla f(x^3) - \nabla f(x^2) = \begin{pmatrix} 1.0505 \\ -0.3654 \end{pmatrix}$$

$$H^2 y^2 = \begin{pmatrix} 1.9416 \\ -0.7793 \end{pmatrix}$$

$$y^{2^T} H^2 = \begin{pmatrix} 1.9416 & -0.7793 \end{pmatrix}$$

$$H^2 y^2 y^{2^T} H^2 = \begin{pmatrix} 3.7698 & -1.5131 \\ -1.5131 & 0.6073 \end{pmatrix}$$

$$y^{2^T} H^2 y^2 = 2.3244$$

$$s^2 s^{2^T} = \begin{pmatrix} 10.0413 & -4.6797 \\ -4.6797 & 2.1809 \end{pmatrix}$$

$$s^{2^T} y^2 = 3.8684$$

$$H^3 = \begin{pmatrix} 1.7269 & -0.3489 \\ -0.3489 & 1.1297 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 3.7698 & -1.5131 \\ -1.5131 & 0.6073 \end{pmatrix}}{2.3244} + \frac{\begin{pmatrix} 10.0413 & -4.6797 \\ -4.6797 & 2.1809 \end{pmatrix}}{3.8684}$$
$$= \begin{pmatrix} 2.7008 & -0.9077 \\ -0.9077 & 1.4322 \end{pmatrix}$$

Cálculo da direcção d^3_{QN}

$$d^3_{QN} = -H^3 \nabla f(x^3) = \begin{pmatrix} 2.0730 \\ -1.2282 \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x^3)^T d^3_{QN} = -1.8167 < 0$, logo d^3_{QN} é descendente.

Cálculo de α

$\alpha = 1$

$x^{\text{aux}} = x^3 + \alpha d_{QN}^3 = \begin{pmatrix} 19.0402 \\ 1.1263 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} f(x^3) = -123.6570 \\ f(x^{\text{aux}}) = -124.8206 \quad \downarrow \end{cases}$

Critério de Armijo

$f(x^{\text{aux}}) \leq f(x^3) + \mu\alpha\nabla f(x^3)^T d_{QN}^3 \Leftrightarrow -124.8206 \leq -123.6570 + 0.001 \times 1 \times (-1.8167)$

$\Leftrightarrow -124.8206 \leq -121.8413$ (verdadeiro) logo a descida é significativa.

$x^4 = \begin{pmatrix} 19.0402 \\ 1.1263 \end{pmatrix}$

- *Critério de Paragem*

  $\|\nabla f(x^3)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -0.1665 \\ 0.1843 \end{pmatrix} \right\|_2 = 0.2484 \leq \varepsilon \quad \text{(verdadeiro)}$

$R_{\max} \approx 19.0402$, $X_{\max} \approx 1.1263$ e $P_{\max} \approx 124.8206$

1. Considere um sistema de duas molas em que é aplicada uma força de deformação P com duas componentes P_1 e P_2. Pretende-se determinar os deslocamentos x_1 e x_2 das molas que minimizam a energia potencial total EP, definida pela seguinte expressão:

$$EP(x_1,x_2)=\frac{1}{2}K_1\left(\sqrt{x_1^2+(l_1-x_2)^2}-l_1\right)^2+\frac{1}{2}K_2\left(\sqrt{x_1^2+(l_2+x_2)^2}-l_2\right)^2-P_1x_1-P_2x_2.$$

Sabendo que as caraterísticas do sistema são: $l_1=10$, $l_2=10$, $K_1=8$, $K_2=1$, $P_1=5$ e $P_2=5$, resolva o problema através do método de Nelder-Mead com $\varepsilon=0.5$ (ou duas iterações). Considere os seguintes pontos iniciais: $(5,2)$, $(3.25,2.5)$ e $(0,0)$.

Resolução:

$$f\left(x_1,x_2\right)=4\left(\sqrt{x_1^2+(10-x_2)^2}-10\right)+0.5\left(\sqrt{x_1^2+(10+x_2)^2}-10\right)-5x_1-5x_2$$

Iniciar o algoritmo de Nealder-Mead ($\varepsilon=0.5$):

$$\left\langle\underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}_{-29.2185},\underbrace{\begin{pmatrix}3.25\\2.5\end{pmatrix}}_{-11.1610},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{0}\right\rangle$$

- **1ª iteração**

  $$\bar{x}=\begin{pmatrix}4.125\\2.25\end{pmatrix}$$

  Calcular x_r

  $$x_r=2\times\begin{pmatrix}4.125\\2.25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}8.25\\4.5\end{pmatrix}}_{-41.3920}$$

  $f(x_r)<f(X_2)$ *(verdadeiro)* $f(x_r)\geq f(X_1)$ *(falso), logo expandir o simplex*

  $$x_e=2\times\begin{pmatrix}8.25\\4.5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4.125\\2.25\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}12.375\\6.75\end{pmatrix}}_{-5.7885}$$

  $f(x_e)<f(X_1)$ *(falso), aceitar* x_r

  $$\left\langle\underbrace{\begin{pmatrix}8.25\\4.5\end{pmatrix}}_{-41.3920},\underbrace{\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}_{-29.2185},\underbrace{\begin{pmatrix}3.25\\2.5\end{pmatrix}}_{-11.1610}\right\rangle$$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 9.3975 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 4.1003 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 5.3852$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 9.3975$

  $\dfrac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \dfrac{5.3852}{9.3975} = 0.5730 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

- **2ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6.625 \\ 3.25 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 6.625 \\ 3.25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.25 \\ 2.5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}_{-32.9988}$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(verdadeiro), logo aceitar* x_r

  $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 8.25 \\ 4.5 \end{pmatrix}}_{-41.3920}, \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}_{-32.9988}, \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{-29.2185} \right\rangle$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 9.3975 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 1.8200 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 4.1003$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 9.3975$

  $\dfrac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \dfrac{4.1003}{9.3975} = 0.4363 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

$$x_{\min} \approx \begin{pmatrix} 8.25 \\ 4.5 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\min} \approx -41.3920$$

2. Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \max\left((x_1-1)^2, x_1^2 + 4(x_2-1)^2\right)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

Resolução:

$f\left(x_1, x_2\right) = \max\left((x_1-1)^2, x_1^2 + 4(x_2-1)^2\right)$

Iniciar o algoritmo de Nealder-Mead ($\varepsilon = 0.5$):

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{4}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{5} \right\rangle$$

- **1ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix}0.5\\0.5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{1}$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(verdadeiro), logo aceitar* x_r

  $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{4} \right\rangle$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 1.414214 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 1 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 1.4124214$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1.414214$

  $\dfrac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \dfrac{1.414214}{1.414214} = 1 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

- **2ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{5}$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

  $f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

  $x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{1.0625}$

  $f(x_c) < f(X_2)$ *(falso)*

  $f(x_c) \geq f(X_2)$ *(verdadeiro), logo encolher o simplex*

  $x_2 = \dfrac{X_2 + X_1}{2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{0.25}$

  $x_3 = \dfrac{X_3 + X_1}{2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{1.25}$

  $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{0.25}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{1.25} \right\rangle$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 1.118034 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.5 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 0.5$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1.118034$

  $\dfrac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \dfrac{0.5}{1.118034} = 0.4447213 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

- **3ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

$$x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}}_{2}$$

$f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

$f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

$$x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.75 \end{pmatrix}}_{0.640625}$$

$f(x_c) < f(X_2)$ *(verdadeiro), logo aceitar* x_c

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{0.25}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.75 \end{pmatrix}}_{0.640625}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1} \right\rangle$$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 1.118034 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.279508 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 0.5$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1.118034$

  $$\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{0.5}{1.118034} = 0.4447213 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

- **4ª iteração**

  $$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.5625 \\ 0.875 \end{pmatrix}$$

  Calcular x_r

  $$x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0.5625 \\ 0.875 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.75 \end{pmatrix}}_{0.7656}$$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

  $f(x_r) \geq f(X_3)$ *(falso), logo contrair o simplex para o exterior*

  $$\hat{x}_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.75 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.5625 \\ 0.875 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3438 \\ 0.8125 \end{pmatrix}}_{0.4307}$$

  $f(\hat{x}_c) < f(X_2)$ *(verdadeiro), logo aceitar* $\hat{x}_c$

  $$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{0.25}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3438 \\ 0.8125 \end{pmatrix}}_{0.4307}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.75 \end{pmatrix}}_{0.640625} \right\rangle$$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 0.8822 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.2441 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 0.2795$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

  $\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{0.2795}{1} = 0.2795 \leq \varepsilon \quad \text{(verdadeiro)}$

$$x_{\min} \approx \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\min} \approx 0.25$$

3. Calcule o mínimo da função $f(x)$ definida por

$$f(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|)$$

implementando o método de Nelder-Mead, tomando para conjunto inicial os vetores

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

e $\varepsilon = 0.5$.

Resolução:

$f(x_1, x_2) = \max(|x_1|, |x_2 - 1|)$

Iniciar o algoritmo de Nealder-Mead ($\varepsilon = 0.5$):

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}}_{1} \right\rangle$$

- **1ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 \\ 2 \end{pmatrix}}_{1}$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

  $f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

  $x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{0.5}$

  $f(x_c) < f(X_2)$ *(verdadeiro), logo aceitar* x_c

  $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{0.5}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1} \right\rangle$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 0.559 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.9014 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 1.3463$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

  $\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1.3463}{1} = 1.3463 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

- **2ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.75 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.75 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{2.25}$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

  $f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

  $x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.75 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix}}_{0.1875}$

  $f(x_c) < f(X_2)$ *(verdadeiro), logo aceitar* x_c

  $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix}}_{0.1875}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{0.5}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{1} \right\rangle$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 0.8949 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.5762 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 1.1941$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

  $\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1.1941}{1} = 1.1941 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

- **3ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.03125 \\ 0.6875 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0.03125 \\ 0.6875 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.9375 \\ 0.375 \end{pmatrix}}_{0.9375}$

$f(x_r) < f(X_2)$ (falso)

$f(x_r) \geq f(X_3)$ (falso), logo contrair o simplex para o exterior

$$\hat{x}_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} -0.9375 \\ 0.375 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.03125 \\ 0.6875 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.453125 \\ 0.53125 \end{pmatrix}}_{0.46875}$$

$f(\hat{x}_c) < f(X_2)$ (verdadeiro), logo aceitar $\hat{x}_c$

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix}}_{0.1875}, \underbrace{\begin{pmatrix} -0.453125 \\ 0.53125 \end{pmatrix}}_{0.46875}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{0.5} \right\rangle$$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 0.8949 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.43448 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 0.5762$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

  $$\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{0.5762}{1} = 0.5762 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

- **4ª iteração**

  $$\bar{x} = \begin{pmatrix} -0.320313 \\ 0.703125 \end{pmatrix}$$

  Calcular x_r

  $$x_r = 2 \times \begin{pmatrix} -0.320313 \\ 0.703125 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.890626 \\ 0.90625 \end{pmatrix}}_{0.890626}$$

  $f(x_r) < f(X_2)$ (falso)

  $f(x_r) \geq f(X_3)$ (falso), logo contrair o simplex para o interior

  $$x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} -0.320313 \\ 0.703125 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.035157 \\ 0.601563 \end{pmatrix}}_{0.398437}$$

  $f(x_c) < f(X_2)$ (verdadeiro), logo aceitar x_c

  $$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix}}_{0.1875}, \underbrace{\begin{pmatrix} -0.035157 \\ 0.601563 \end{pmatrix}}_{0.398437}, \underbrace{\begin{pmatrix} -0.453125 \\ 0.53125 \end{pmatrix}}_{0.46875} \right\rangle$$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 0.8949 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.3130 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 0.4344$

$$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$$
$$\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{0.4344}{1} = 0.4344 \leq \varepsilon \quad \text{(verdadeiro)}$$

$$x_{\min} \approx \begin{pmatrix} -0.1875 \\ 0.875 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\min} \approx 0.1875$$

4. Calcule o máximo da seguinte função não diferenciável

$$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$$

usando o método de Nelder-Mead. Inicie o processo iterativo com o seguinte simplex:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Para a paragem do processo iterativo use $\varepsilon = 0.5$ ou $n_{\max} = 4$.

Resolução:

$f(x_1, x_2) = -|x_1 x_2| - x_2^2$

Iniciar o algoritmo de Nealder-Mead ($\varepsilon = 0.5$):

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{2} \right\rangle$$

- **1ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{6}$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

  $f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

  $x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}}_{0.1875}$

  $f(x_c) < f(X_2)$ *(verdadeiro), logo aceita-se* x_c

  $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}, \underbrace{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix}}_{0.1875}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2} \right\rangle$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 1 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 1.5207 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 2.2361$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

  $\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{2.2361}{1} = 2.2361 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

- **2ª iteração**

  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \end{pmatrix}$

  Calcular x_r

  $x_r = 2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.5 \\ -1.25 \end{pmatrix}}_{3.4375}$

  $f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

  $f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

  $x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -0.375 \\ 0.4375 \end{pmatrix}}_{0.3555}$

  $f(x_c) < f(X_2)$ *(falso), logo encolher o simplex*

  $x_2 = 0.5 \times \left(\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.1255 \end{pmatrix}}_{0.0469}$

  $x_3 = 0.5 \times \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{0.25}$

  $\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \end{pmatrix}}_{0.0469}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{0.25} \right\rangle$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 1 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.7603 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 1.118$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

  $\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{1.118}{1} = 1.118 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$

- **3ª iteração**

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.0625 \end{pmatrix}$$

Calcular x_r

$$x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.0625 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.25 \\ -0.625 \end{pmatrix}}_{1.1719}$$

$f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

$f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

$$x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.0625 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.3125 \\ 0.2188 \end{pmatrix}}_{0.1162}$$

$f(x_c) < f(X_2)$ *(falso), logo encolher o simplex*

$$x_2 = 0.5 \times \left(\begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.125 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.0625 \end{pmatrix}}_{0.0430}$$

$$x_3 = 0.5 \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}}_{0.1875}$$

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.0625 \end{pmatrix}}_{0.0430}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix}}_{0.1875} \right\rangle$$

- *Critério de Paragem*

$\|X_1\|_2 = 1 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.3802 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 0.5590$

$\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

$$\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{0.5590}{1} = 0.5590 \leq \varepsilon \quad \text{(falso)}$$

- **4ª iteração**

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.8125 \\ -0.03125 \end{pmatrix}$$

Calcular x_r

$$x_r = 2 \times \begin{pmatrix} 0.8125 \\ -0.03125 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1.125 \\ -0.3125 \end{pmatrix}}_{0.4492}$$

$f(x_r) < f(X_2)$ *(falso)*

$f(x_r) \geq f(X_3)$ *(verdadeiro), logo contrair o simplex para o interior*

$$x_c = 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0.8125 \\ -0.03125 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.65625 \\ 0.109375 \end{pmatrix}}_{0.0837}$$

$f(x_c) < f(X_2)$ *(falso), logo encolher o simplex*

$$x_2 = 0.5 \times \left(\begin{pmatrix} 0.625 \\ -0.0625 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8125 \\ -0.03125 \end{pmatrix}}_{0.0264}$$

$$x_3 = 0.5 \times \left(\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.125 \end{pmatrix}}_{0.1094}$$

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.8125 \\ -0.03125 \end{pmatrix}}_{0.0264}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.125 \end{pmatrix}}_{0.1094} \right\rangle$$

- *Critério de Paragem*

  $\|X_1\|_2 = 1 \quad \|X_2 - X_1\|_2 = 0.1901 \quad \|X_3 - X_1\|_2 = 0.2795$

  $\Delta = \max(1, \|X_1\|_2) = 1$

  $\frac{1}{\Delta} \times \max(\|X_2 - X_1\|_2, \|X_3 - X_1\|_2) = \frac{0.2795}{1} = 0.2795 \leq \varepsilon \quad \text{(verdadeiro)}$

$$x_{\min} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } f_{\min} \approx 0$$