Ganze Serie 6: Gauss-Algorithmus ohne Spaltenpivotisierung
(und ohne LR-/PLR-Zerlegung)
gemäss Vorlesung/Skript

Höhere Mathematik 1, Studiengang Informatik, ZHAW

Übungsserie 6

Abgabe: gemäss Angaben Dozent

Scannen Sie ihre manuelle Lösungen für die Aufgabe 1 in die Datei *Name_S6_Aufg1.pdf* und fassen Sie diese mit Ihrer Python-Funktion *Name_S6_Aufg2.py* sowie dem Skript *Name_S6_Aufg3.py* in einer ZIP-Datei *Name_S6.zip*. Laden Sie dieses File vor der Übungsstunde nächste Woche auf Moodle hoch.

Aufgabe 1 (ca. 30 Min.):

Eine Flugzeug-Chartergesellschaft besitzt drei Flugzeugtypen mit der folgenden Anzahl von First-Class (FC), Business-Class (BC) und Economy-Class (EC) Sitzen:

- Flugzeugtyp A: 20 FC, 50 BC, 200 EC
- Flugzeugtyp B: 10 FC, 30 BC, 150 EC
- Flugzeugtyp C: 0 FC, 20 BC, 100 EC

a) An ein Ferienziel müssen nun über einen gewissen Zeitraum 2770 Passagiere befördert werden, davon 2150 in der EC, 470 in der BC und 150 in der FC. Wieviele Flüge mit den verschiedenen Typen werden benötigt, wenn jedes Flugzeug voll ausgelastet fliegen soll? Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem auf und berechnen Sie manuell die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus.

b) Ein Jahr später sollen 2070 Passagiere mit den gleichen Flugzeugtypen befördert werden, davon 1600 in der EC, 350 in der BC und 120 in der FC. Berechnen Sie für die neuen Passagierzahlen nochmals die Anzahl benötigter Flugzeuge für jeden Typ.

Aufgabe 2 (ca. 90 Min.):

Implementieren Sie für das lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

den Gaussalgorithmus gemäss Vorlesungsskript inklusive der Berechnung der Lösung $\vec{x}$ (durch Rückwärtseinsetzen, p. 46). Zusätzlich soll die Determinante von A sowie die obere Dreiecksmatrix von A ausgegeben werden:

- [A_triangle,detA,x] = *Name_S6_Aufg2*(A,b)

Aufgabe 3 (ca. 10 Min.):

Schreiben Sie ein Skript *Name_S6_Aufg*3.py, welches Ihnen unter Verwendung Ihrer Funktion aus Aufgabe 2 die Lösungen für die linearen Gleichungssysteme in Aufgabe 4.3 im Vorlesungsskript löst und überprüfen Sie ihre Resultate für x mit der Python-Funktion *numpy.linalg.solve()*. Gibt es Unterschiede? Schreiben Sie die Antwort als Kommentar in Ihr Skript.

Aufgabe 1 (ca. 30 Min.):

Eine Flugzeug-Chartergesellschaft besitzt drei Flugzeugtypen mit der folgenden Anzahl von First-Class (FC), Business-Class (BC) und Economy-Class (EC) Sitzen:

- Flugzeugtyp A: 20 FC, 50 BC, 200 EC
- Flugzeugtyp B: 10 FC, 30 BC, 150 EC
- Flugzeugtyp C: 0 FC, 20 BC, 100 EC

a) An ein Ferienziel müssen nun über einen gewissen Zeitraum 2770 Passagiere befördert werden, davon 2150 in der EC, 470 in der BC und 150 in der FC. Wieviele Flüge mit den verschiedenen Typen werden benötigt, wenn jedes Flugzeug voll ausgelastet fliegen soll? Stellen Sie dafür das lineare Gleichungssystem auf und berechnen Sie manuell die Lösung mit dem Gauss-Algorithmus. ohne Spaltenpivotisierung.

b) Ein Jahr später sollen 2070 Passagiere mit den gleichen Flugzeugtypen befördert werden, davon 1600 in der EC, 350 in der BC und 120 in der FC. Berechnen Sie für die neuen Passagierzahlen nochmals die Anzahl benötigter Flugzeuge für jeden Typ.

x_1 = # Flugzeuge Typ A
x_2 = " Typ B
x_3 = " Typ C

a) Auslastung EC: $200x_1 + 150x_2 + 100x_3 = 2'150$
" BC: $50x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 470$
" FC: $20x_1 + 10x_2 + 0x_3 = 150$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} I: \\ II: \\ III: \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 2'150 \\ 50 & 30 & 20 & 470 \\ 20 & 10 & 0 & 150 \end{array}\right] \begin{array}{l} I \cdot \frac{1}{200} \\ II - 50 I \\ III - 20 I \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & 1/2 & 43/4 \\ 0 & -15/2 & -5 & -135/2 \\ 0 & -5 & -10 & -65 \end{array}\right]$$

$$II : -\frac{15}{2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/4 & 1/2 & 43/4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 9 \\ 0 & -5 & -10 & -65 \end{array}\right] \longrightarrow_{III - -5 \cdot II} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2/3 & 9 \\ 0 & 0 & -20/3 & -20 \end{array}\right]$$

x_3: $-20/3\, x_3 = -20 \Rightarrow x_3 = 3$

x_2: $x_2 + \frac{2}{3}\underbrace{x_3}_{=3} = 9 \Rightarrow x_2 = 7$

x_1: $x_1 = 4$

$\Rightarrow$ Der Lösungsvektor $\underline{\underline{L = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}}}$

b)

$$\cancel{\begin{aligned} 200x_1 &+ 150x_2 + 20x_3 = 1600 \\ 150x_1 &+ 30x_2 + 10x_3 = 350 \\ 100x_1 &+ 20x_2 + 0 = 120 \end{aligned}}$$

$$\cancel{\begin{aligned} 200x_1 &+ 150x_2 + 100x_3 = 1600 \\ 150x_1 &+ 30x_2 + 10x_3 = \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} 200x_1 &+ 150x_2 + 100x_3 = 1600 \\ 50x_1 &+ 30x_2 + 20x_3 = 350 \\ 20x_1 &+ 10x_2 = 120 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \\ \cdot(-10) \\ \cdot(-2.5) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 0 & \cancel{1600}\ 120 \\ 50 & 30 & 20 & 350 \\ 200 & 150 & 100 & 1600 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ -10 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 0 & 120 \\ 0 & 5 & 20 & 50 \\ 0 & 50 & 100 & 400 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 0 & 120 \\ 0 & 5 & 20 & 50 \\ 0 & 0 & -100 & -100 \end{array}\right)$$

$$x_1 = \frac{120 - 10x_2}{20} = \underline{\underline{3}}$$

$$x_2 = \frac{50 - 20x_3}{5} = \underline{\underline{6}}$$

$$x_3 = \frac{-100}{-100} = \underline{\underline{1}}$$