S10 A1

Montag, 28. November 2022 13:45

a) $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$ mit Diagonaldominanz

$8 > 7$
$9 > 6$ → konvergiert
$7 > 6$

b) $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$

$A = L + D + R$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + D^{-1} \cdot b$

$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -0.33 \\ 4.571 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.940 \\ -1.202 \\ 3.667 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.210 \\ -0.621 \\ 4.378 \end{pmatrix}$

c) $\|x^{(n)} - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|$ a-posteriori Abschätzung

$B = -D^{-1}(L+R) \rightarrow B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.625 & -0.25 \\ -0.556 & 0 & -0.111 \\ -0.571 & -0.286 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \|D\|_\infty = 0.875$$

$$\frac{0.875}{0.125} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.210 \\ -0.621 \\ 4.378 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.440 \\ -1.202 \\ 3.667 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\frac{0.875}{0.125} \cdot \left\| \begin{matrix} 0.77 \\ 0.581 \\ 0.711 \end{matrix} \right\|$$

$$7 \cdot 0.771 = \underline{\underline{5.397}}$$

d) $$\|x^n - \bar{x}\|_\infty \leq \frac{\|D\|_\infty^n}{1-\|D\|_\infty} \| x^{(1)} - x^{(0)} \|$$

$$0.0001 \leq \frac{0.875^n}{0.125} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 2.25 \\ -0.333 \\ 4.571 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\leq \frac{0.875^n}{0.125} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.333 \\ 1.571 \end{pmatrix} \right\|$$

$$0.875^n \geq \frac{0.0001 \cdot 0.125}{1.571} = 7.96 \cdot 10^{-6}$$

$$n \geq \frac{\log(7.96 \cdot 10^{-6})}{\log(0.875)} = \underline{\underline{87.93}}$$