S08 A3)

Sonntag, 20. November 2022 12:54

a) $20'000 \cdot x_1 + 30'000 \cdot x_2 + 10'000 x_3 = 5.720 \cdot 10^6 \pm 0.1 \cdot 10^6$

$10'000 x_1 + 17000 x_2 + 6000 x_3 = 3.300 \cdot 10^6 \pm 0.1 \cdot 10^6$

$2000 x_1 + 3000 x_2 + 2000 x_3 = 0.836 \cdot 10^6 \pm 0.1 \cdot 10^6$

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{pmatrix} \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 5820 \\ 3400 \\ 936 \end{pmatrix}$$

$Ax = b$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 20 & 30 & 10 & 5720 \\ 10 & 17 & 6 & 3300 \\ 2 & 3 & 2 & 836 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 836 \\ 10 & 17 & 6 & 3300 \\ 20 & 30 & 10 & 5720 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 836 \\ 0 & 2 & -4 & -880 \\ 0 & 0 & -10 & -2640 \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{-2640}{-10} = 264$$

$$x = \begin{pmatrix} 22 \\ 88 \\ 264 \end{pmatrix} \leftarrow \quad x_2 = \frac{-880 + 4(264)}{2} = 88$$

$$x_1 = \frac{836 - 3(88) - 2(264)}{2} = 22$$

$A\tilde{x} = \tilde{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 936 \\ 10 & 17 & 6 & 3400 \\ 20 & 30 & 10 & 5820 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 936 \\ 0 & 2 & -4 & -1280 \\ 0 & 0 & -10 & -3540 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{-3540}{-10} = 354$$

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 68 \\ 354 \end{pmatrix} \quad \tilde{x}_2 = \frac{-1280 + 4(354)}{2} = 68$$

$$\tilde{x}_3 = \frac{936 - 3(68) - 2(354)}{2} = 12$$

∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} = x_{max}$

$\|A\|_\infty = \max\{|A_{11}| + |A_{12}|, |A_{21}| + |A_{22}|\} = A_{max}$

Tatsächlicher absoluter und relativer Lösungsfehler

$$\|\tilde{x} - x\|_{max} = \begin{pmatrix} 12-22 \\ 68-88 \\ 354-264 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 90 \end{pmatrix} \rightarrow 90, \quad \frac{90}{264} = 0.34 \approx \underline{\underline{34\%}}$$

Abgeschätzter absoluter und relativer Lösungsfehler bezüglich ∞-Norm

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.75 & 0.25 \\ -0.2 & 0.50 & -0.50 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \|\tilde{b}-b\|_\infty = \begin{pmatrix} 5820-5720 \\ 3400-3300 \\ 536-836 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{100}{5720} = 0.01748$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 60$$

$$\frac{\|\tilde{x}-x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty \cdot \frac{\|\tilde{b}-b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

$$= 0.34 \leq 60 \cdot 1.4 \cdot 0.01718 = \underline{\underline{1.46832}} \rightarrow \text{relative Fehler}$$

$$\operatorname{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 84$$

A ist schlecht konditioniert

b) fehlerbehaftete Matrix:

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \cdot \left(\frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \frac{\|b-\tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right)$$

$$\operatorname{cond}(A) = 84$$

$$\frac{\|A-\tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} = \frac{0.3}{60} = 0.005$$

$$= \frac{84}{1-84 \cdot 0.005} \cdot (0.005 + 0.01748)$$

$$\frac{\|x-\tilde{x}\|}{\|x\|} \leq 3.2557 = \underline{\underline{325.7\,\%}}$$