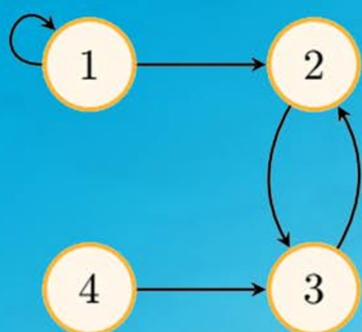
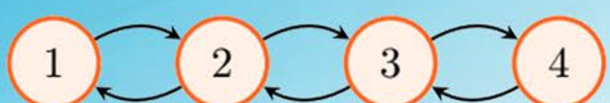
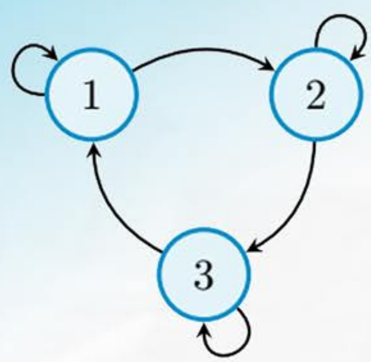
Procesos Estocásticos







Proceso Poisson

Se dice que el proceso a tiempo continuo $\{N_t : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson de parámetro λ tal que cumple

1) $N_0 = 0$
2) Tiene incrementos independientes
3) Tiene incrementos estacionarios
4) Si $s < t$, entonces $N_t - N_s \sim Poisson(\lambda \cdot (t - s))$

Considerando $s = 0$ en el último inciso, se tiene que $N_t \sim Poisson(\lambda \cdot t)$.

Además, recordemos que una variable $X \sim Poisson(\lambda)$ tiene como función de densidad

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

Ejercicio 1

Los arribos de la linea 1 del camión forman un proceso de Poisson de tasa 1 por hora y los de la linea 7 forman un proceso de Poisson independiente de tasa 7 camiones por hora.

1) ¿Cuál es la probabilidad que exactamente pasen 3 camiones en una hora?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen exactamente 3 camiones de la linea 7 mientras espero al de la linea 1 en una hora?
3) Cuando el equipo de mantenimiento realiza una huelga, la mitad de los camiones no llegan a mi parada. ¿Cuál es entonces la probabilidad de no ver ningún camión durante 30 minutos?

Solución

Consideremos a X como los arribos de la linea 1 y Y los arribos de la linea 7.
Por lo tanto, tenemos que $X \sim Poisson(1)$ y $Y \sim Poisson(7)$.

Además, por Probabilidad 2, sabemos que si $X \perp Y$ entonces $X + Y = Z \sim Poisson(8)$ cada hora.

La probabilidad de que pasen exactamente 3 camiones en una hora, sin importar la linea, es

$$\mathbb{P}[Z = 3] = e^{-8} \cdot \frac{8^3}{3!} \approx 0.02862614$$

La probabilidad de que pasen exactamente 3 camiones de la linea 7 mientras se espera al de la linea 1 en una hora, significa que no ha llegado algún camión de la linea 1 en una hora. Nos piden que ambos eventos ocurran simultaneamente

$$\mathbb{P}[X = 0, Y = 3] = \mathbb{P}[X = 0] \cdot \mathbb{P}[Y = 3] \approx 0.01917728$$

El que la mitad de los camiones no llegan a la parada, implica que la tasa de arribos se ha dividido entre 2.
Lo que significa que ahora $X \sim Poisson(1/2)$ y $Y \sim Poisson(7/2)$ cada hora.

Más aún, el arribo de todos los camiones sin importar la linea, se tiene que $Z \sim Poisson(4)$ cada hora.

Sin embargo, el único detalle es que estamos pensando aún en que los parámetros (λ's) están en horas.
El ejercicio nos pide intervalos de tiempo de 30 minutos.
Por las propiedades del Proceso Poisson, se tiene que $Z \sim Poisson(2)$ cada 30 minutos.

Por lo tanto, la probabilidad de no ver ningún camión durante 30 minutos es

$$\mathbb{P}[Z = 0] = e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} \approx 0.1353353$$

Alguien podría interpretar la pregunta anterior de la siguiente manera,
¿Cuál es la probabilidad de que el intervalo de tiempo entre un camión y otro supere los 30 minutos?
Sin embargo, es una pregunta que se relaciona con el tiempo transcurrido entre un evento y otro, no con el conteo.
Sabemos que el tiempo interarribo tiene una distribución $T \sim Exponencial(2)$
Por lo que la respuesta a la pregunta anterior podría pensarse como

$$\mathbb{P}(T \geq 30) = 1 - \mathbb{P}(T < 30) = 1 - F_T(30) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 30}) \approx 0$$

Ejercicio 2

Un peatón desea cruzar una calle de un sólo sentido. Suponga que la cantidad de vehículos que han pasado hasta el tiempo t forman un proceso de Poisson de intensidad λ y que toma a unidades de tiempo cruzar la calle.

Asumiendo que el peatón no cruza hasta estar seguro de que no lo atropellan,
¿Cuanto tarda en promedio en cruzar la calle?

Responda la misma pregunta pero ahora considerando si debe cruzar dos calles sucesivas cuando hay un camellón en medio y el caso cuando no hay ningún camellón.

Solución

Consideremos a X el tiempo transcurrido entre el paso de un vehículo y otro, esto es el tiempo inter-arribo.

Recordemos que si $X \sim Exponencial(\lambda)$, entonces tenemos que $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$

Finalmente, el tiempo promedio que tarda en cruzar la calle es justamente $\mathbb{E}[X|X > a]$ donde $X \sim Exponencial(\lambda)$

No es muy complicado de demostrar que $\mathbb{E}[X|X > a] = a + 1/\lambda$

En el caso de que exista un camellón en medio de dos calles consecutivas, es $2 \cdot \mathbb{E}[X|X > a] = 2\,(a + 1/\lambda)$.

Lo anterior ocurre debido a que cuando llega al camellón, el tiempo en el que pasa un auto y otro sigue siendo una distribución exponencial, además de que sabemos que la distribución tiene pérdida de memoria, por lo que $P(X > t + s|X > s) = P(X > t)$.

El proceso se reinicia sin importar el tiempo que le haya tomado llegar al camellón. Por lo que el tiempo promedio para cruzar 2 calles con un camellón es sumar el tiempo promedio de cruzar dos calles de manera individual.

En el caso de que no exista un camellón, el problema es muy similar, porque ahora consideremos que es una sola calle pero el doble de ancha. Esto implica que el tiempo que toma en cruzar la calle se duplica, esto es $2a$.

El tiempo promedio que tarda en cruzar dos calles sin camellón es $\mathbb{E}[X|X > 2a]$ donde $X \sim Exponencial(\lambda)$

Ejercicio 3

Suponga que las familias de México emigran a Estados unidos a una tasa de $\lambda = 2$ por día y que las llegadas a EU forman un proceso de Poisson de tasa λ. Si el número de miembros de cada familia puede tomar los valores 1,2,3 y 4 con probabilidades 1/6, 1/3, 1/3, 1/6 respectivamente y además supongamos que las familias son independientes, entonces ¿Cuál es el valor esperado y la varianza de la cantidad de individuos que llegan a EU en semanas?

Realice un programa en R que permita observar la cantidad de individuos que llegan a EU durante 2 semanas.

Solución

El valor esperado y varianza (en semanas) corresponden a la esperanza y varianza de una distribución $Poisson(14)$ La esperanza y varianza de una distribución $Poisson(\lambda)$ es su parámetro λ, en este caso 14 sería la respuesta.

A continuación se muestra el código de R donde también se añade una simulación de esta primer parte.

```
#######################################################################################################
# Parámetros Globales
set.seed(1)        # Semilla de números pseudo-aleatorios
lambda   <- 2      # Num. Promedio de Eventos por Unidad de Tiempo (Días en este caso)
tiempo_t <- 7      # Tiempo que "observaremos" el Proceso Poisson en Días (7 días = 1 Semana)
num_sims <- 50000  # Número de simulaciones para estimar la media y varianza

# ::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
# Primera Parte :: Estimación de la Esperanza y Varianza
# Se simulan la cantidad de "eventos" en el total de tiempo y se estima la media y varianza
vector_simulaciones <- vector(mode = "numeric", length = num_sims)
for( sim in seq(num_sims) ){
  vector_simulaciones[ sim ] <- rpois(n = 1, lambda = lambda*tiempo_t)
}
media_estimada    <- mean(vector_simulaciones) # 14.02228
varianza_estimada <- var(vector_simulaciones)  # 14.04742

# ::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
# Segunda Parte :: Modelación la cantidad de individuos en EEUU en 2 semanas
set.seed(1)        # Semilla de números pseudo-aleatorios
lambda   <- 2      # Num. Promedio de Eventos por Unidad de Tiempo (Días en este caso)
tiempo_t <- 7*2    # Tiempo que "observaremos" el Proceso Poisson en Días (14 días = 2 Semanas)

# Se simulan la cantidad de "eventos" en el total de tiempo
num_simulaciones <- rpois(n = 1, lambda = lambda*tiempo_t)

# Se simulan los tiempos "inter-arrivo" de cada evento
# Los cuales se suman para obtener los tiempos en los que se presentan los eventos
simulaciones_exp <- rexp(n = num_simulaciones, rate = lambda)
tiempos_llegada  <- cumsum(simulaciones_exp)

# Se simulan los tamaños de las familias de cada evento
# Los cuales se suman para obtener la altura de la función
simulaciones_fam    <- sample(x = c(1,2,3,4), size = num_simulaciones, replace = TRUE,
                              prob = c(1/6,1/3,1/3,1/6) )
cantidad_individuos <- cumsum(simulaciones_fam)

# Generamos los vectores que representen las coordenadas de los puntos y graficamos
valores_x <- tiempos_llegada
valores_y <- c( 0 , cantidad_individuos )  # (se añade la altura 'inicial')
function_a_trozos <- stepfun(x = valores_x, y = valores_y, f = 0)
plot(function_a_trozos, main="Inmigrantes a EU", verticals = FALSE, pch=19, col.points ="red",
     lwd=1.5, cex.points=1.1, xlim=c(0, tiempo_t), xlab = "Días", ylab = "Individuos")
#######################################################################################################
```

Ejercicio 4

Un cable submarino tiene defectos de acuerdo a un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 0.1$ por km.

1) ¿Cuál es la probabilidad de que no haya defectos en los primeros dos kilómetros de cable?
2) Si no hay defectos en los primeros dos kilómetros, ¿cuál es la probabilidad de que tampoco los haya en el tercer kilómetro?

Solución

Sea entonces nuestro proceso Poisson $N_1 \sim Poisson(0.1)$

Como el parámetro están en km y la pregunta está hecha para 2 km, debemos transformar nuestra tasa λ. Por lo tanto, nuestro proceso Poisson para 2 km es $N_2 \sim Poisson(0.2)$

Con lo que la probabilidad de que no haya defectos en los primeros 2 kilómetros es

$$\mathbb{P}(N = 0) = e^{-0.2} \approx 0.8187$$

Nos piden calcular

$$\mathbb{P}(N_3 - N_2 = 0 | N_2 = 0)$$

Sabemos que el proceso tiene incrementos independientes, por lo tanto el número de defectos entre el segundo y tercer kilómetro es independiente del número de defectos que hay entre el kilómetro cero y el segundo. Esto es que $N_3 - N_2 \perp N_2 - N_0$

De modo que nos queda

$$\mathbb{P}(N_3 - N_2 = 0 | N_2 = 0) = \mathbb{P}(N_3 - N_2 = 0) = \mathbb{P}(N_1 = 0) = e^{-0.1} \approx 0.9048$$

Ejercicio 5

Los clientes llegan a una tienda de acuerdo con un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 4$ por hora.
Si la tienda abre a las 9 a.m. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente un cliente haya entrado antes de las 9:30 a.m. y que un total de cinco hayan entrado antes de las 11: 30 a.m.?

Solución

Medimos el tiempo t en horas a partir de las 9 a.m. Queremos hallar $\mathbb{P}(N_{1/2} = 1, N_{5/2} = 5)$, y para esto usaremos la independencia de los incrementos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{1/2} = 1, N_{5/2} = 5) &= \mathbb{P}(N_{1/2} = 1, N_{5/2} - N_{1/2} = 4) \\ &= \mathbb{P}(N_{1/2} = 1) \cdot \mathbb{P}(N_{5/2} - N_{1/2} = 4) \\ &= \mathbb{P}(N_{1/2} = 1) \cdot \mathbb{P}(N_2 = 4) \end{aligned}$$

Ahora, tenemos que $N_{1/2} \sim Poisson(2)$ y $N_2 \sim Poisson(8)$. Por lo que

$$\mathbb{P}(N_{1/2} = 1, N_{5/2} = 5) = \left(e^{-2} \cdot \frac{2^1}{1!}\right)\left(e^{-8} \cdot \frac{8^4}{4!}\right) \approx 0.0154965155$$

Proceso de Poisson Compuesto

Asociamos ahora una variable aleatoria Y_k a cada evento de un proceso de Poisson.
Suponemos que las variables Y_k con $k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ son i.i.d y también son independientes del proceso Poisson.

Algunos ejemplos que se pueden modelar con estos procesos son los carros que llegan a un centro comercial y las variables asociadas Y_k son el número de pasajeros que hay en cada auto; o modelar los mensajes que llegan a un servidor para ser transmitidos via internet y las variables Y_k representan el tamaño de los mensajes.

Es natural considerar la suma de las variables Y_i como una variable de interés:

$$S(t) = Y_1 + \cdots + Y_{N(t)} = \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k$$

Además, si $N(t) = 0$ entonces $S(t) = 0$ debido a que no hay nada que sumar.

Realizando algunas operaciones se pueden demostrar las siguientes igualdades

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[N(t)] \cdot \mathbb{E}[Y_k] \qquad \mathrm{Var}[S(t)] = \mathbb{E}[N(t)] \cdot \mathrm{Var}\left[Y_k\right] + \mathrm{Var}[N(t)] \cdot \left(\mathbb{E}\left[Y_k\right]\right)^2$$

En nuestro caso tenemos $N(t) \sim Poisson(\lambda t)$. Por lo tanto $\mathbb{E}[N(t)] = \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t$

Ejercicio 6

El número de clientes de una tienda durante el día tiene distribución de Poisson de media 30 y el gasto que cada cliente realiza sigue una distribución Gamma con media \$150 y desviación típica de \$50.

Indice el gasto esperado de lo que se gasta en dicha tienda en un día. También proporcione su desviación estandar.

Solución

Por los cálculos anteriores sabemos que el ingreso medio por día es $30 \cdot \$150 = \$\ 4.500 \quad$ (pesos)

La varianza del ingreso total es (en unidades cuadradas) es la siguiente

$$30 \cdot (\$50)^2 + 30 \cdot (\$150)^2 = \$^2 \ \ 750.000 \quad (\text{pesos}^2)$$

Sacando la raíz cuadrada de la varianza obtenemos una desviación típica que es de $\$866,02$.

Genere un código en R que simule el problema anterior y verifique los resultados encontrados.
A continuación se presenta una solución compacta en R al problema anterior

```r
##########################################################################################
set.seed(1)
num_simulaciones  <- 500000
poisson_compuesto <- function() sum( rgamma(n = rpois(n = 1, lambda = 30), shape = 9, rate = 3/50 ) )
simulaciones      <- replicate(n = num_simulaciones, poisson_compuesto() )
mean(simulaciones) # 4499.316
var(simulaciones)  # 752060.5
##########################################################################################
```

Ejercicio moral
¿Podría usted proporcionar un intervalo de confianza para el gasto esperado?

Proceso Poisson No Homogéneo

A menudo son más realistas los modelos basados en procesos de Poisson no Homogéneos, en los que la tasa de llegadas es una función del parámetro de tiempo, $\Lambda(t)$.
Formalmente esto significa que un proceso de Poisson no homogéneo es un proceso de contar que satisface:

1) $N_0 = 0$
2) Tiene incrementos independientes (en intervalos ajenos).
3) $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 1) = \lambda(t) \cdot h + o(h)$ para $t \geq 0, h \to 0$
4) $\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h)$ para $t \geq 0, h \to 0$

Notemos que no necesariamente tiene incrementos estacionarios, además $N_t \sim Poisson(\ \Lambda(t)\ )$ donde

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(x)\ dx \qquad\qquad t \geq 0$$

Más generalmente, si consideramos dos tiempos $0 \leq s \leq t$ del proceso, entonces $N_t - N_s \sim Poisson(\ \Lambda(t) - \Lambda(s)\ )$

$$\Lambda(t) - \Lambda(s) = \int_0^t \lambda(x)\ dx - \int_0^s \lambda(x)\ dx = \int_s^t \lambda(x)\ dx$$

Además, recordemos que una variable $X \sim Poisson(\lambda)$ tiene como función de densidad

$$f_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^x}{x!}$$

Observemos que si $\lambda(x) = \lambda$, se obtiene el proceso Poisson Homogéneo con tasa constante en todo momento.

Ejercicio 1

Consideremos a una farmacia que abre las 24 horas del día, además supongamos que la tasa con la que llegan los clientes tiene un comportamiento Poisson no Homogéneo tal que $\lambda(x) = -\dfrac{x(x-24)}{10} = \dfrac{1}{10}\left(24x - x^2\right) \quad x \in [0, 24]$
Considere el parámetro t como la hora del día (entre 00:00 horas y 24:00 horas). Responda lo siguiente

1) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 3 personas entre las 9:00 y 10:00 horas?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 3 personas entre las 14:00 y 15:00 horas?
3) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 3 personas entre las 23:00 y 24:00 horas?
4) De los 3 eventos anteriores, ¿Cuál es el más probable?
5) ¿Cuál es la probabilidad de que llegen a lo más 20 personas antes de las 6:00 horas?
6) ¿Cuál es la probabilidad de que llegen almenos 100 personas entre las 9:00 y 18:00 horas?
7) ¿Cuál es la cantidad de arribos esperados en un día completo (entre 00:00 horas y 24:00 horas)?

Solución

Lo primero que necesitamos es determinar la tasa de arriba, para la cual usaremos $\Lambda(b) - \Lambda(a)$.
Lo calcularemos de manera general, esto nos ayudará a determinar la tasa de arribo de cualquier intervalo.

$$\begin{aligned}\Lambda(b) - \Lambda(a) &= \int_a^b \lambda(x)\ dx = \frac{1}{10}\int_a^b 24x - x^2\ dx = \frac{1}{10}\left(12x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{1}{30}\left(36x^2 - x^3\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{30}\cdot\left(36b^3 - 36a^2 + a^3 - b^3\right)\end{aligned}$$

Finalmente tenemos que $\Lambda(b) - \Lambda(a) = \dfrac{1}{30} \cdot \left(36\, b^3 - 36\, a^2 + a^3 - b^3\right)$

Evaluemos lo anterior para determinar la tasa de arriba en cada intervalo de los incisos.

$$\Lambda(10) - \Lambda(9) = \frac{413}{30} \approx 13.767 \qquad \Lambda(15) - \Lambda(14) = \frac{413}{30} \approx 13.767 \qquad \Lambda(24) - \Lambda(23) = \frac{7}{6} \approx 1.167$$

Las variables aleatorias asociadas a los 3 primeros incisos son los siguientes

$$X_a \sim Poisson(413/30) \qquad X_b \sim Poisson(413/30) \qquad X_c \sim Poisson(7/6)$$

Por lo que nos queda que

$$\mathbb{P}(X_a = 3) = \exp(-4130/3) \cdot \frac{(413/30)^3}{3!} = 0.0004566125$$

Notemos que la tasa con la que llegan las personas entre las 9:00 y 10:00 es la misma que para las 14:00 y 15:00

$$\mathbb{P}(X_b = 3) = \exp(-4130/3) \cdot \frac{(413/30)^3}{3!} = 0.0004566125$$

También tenemos que

$$\mathbb{P}(X_c = 3) = \exp(-7/6) \cdot \frac{(7/6)^3}{3!} = 0.08241613$$

De los 3 eventos anteriores, es más probable que llegen exactamente 3 personas de 23:00 a 24:00.

Para los ejercicios siguientes, tenemos que

$$\Lambda(6) - \Lambda(0) = \frac{155}{6} = 25.833 \qquad \Lambda(18) - \Lambda(9) = \frac{243}{2} = 121.5 \qquad \Lambda(24) - \Lambda(0) = \frac{1152}{4} = 230.5$$

Las variables aleatorias asociadas a los 3 últimos incisos son los siguientes

$$X_e \sim Poisson(155/6) \qquad X_f \sim Poisson(243/2) \qquad X_g \sim Poisson(1152/4)$$

Lo que nos lleva a

$$\mathbb{P}(X_e \leq 20) = \sum_{k=0}^{20} \exp(-155/6) \cdot \frac{(155/6)^k}{k!} = 0.1457796$$

Notemos que la tasa con la que llegan las personas entre las 9:00 y 10:00 es la misma que para las 14:00 y 15:00

$$\mathbb{P}(X_f \geq 100) = \sum_{k=100}^{\infty} \exp(-243/2) \cdot \frac{(243/2)^k}{k!} = 0.979599$$

Por último, tenemos que

$$\mathbb{E}(X_f) = 1152/4 = 230.5$$

Ejercicio moral

El gerente desea que la tienda tenga un horario de 9 horas (sin interrumpir) como las demás farmacias. ¿En qué horario le conviene abrir y cerrar la farmacia de tal manera que maximice la cantidad de personas esperadas? ¿Cuánto valdría dicha esperanza?

A continuación se presenta un ejemplo de simulación del proceso Poisson no Homogéneo

```r
##########################################################################################
# EJEMPLO DE PROCESO POISSON NO HOMOGENEO
##########################################################################################

# Parámetros Globales
set.seed(1)
lambda  <- function(t) 1 * ( sin( t*2*pi/48 - pi/2 ) + 1 ) / 2
tiempos <- seq(from=0, to=24*3, by = 1)
plot(tiempos, lambda(tiempos), type="l", col="red", main="lambda(x)", xlab="x", ylab="Lambda(x)" )
plot(tiempos, cumsum(lambda(tiempos)), type="l", col="red", main="Lambda(t)", xlab="t", ylab="Tasa" )

# Se simulan los eventos en cada sub intervalo de tiempo
num_periodos     <- length(tiempos)-1
num_simulaciones <- vector(mode = "numeric",length = num_periodos)
simulaciones_exp <- NULL
for( t in seq( num_periodos ) ){
  tasa_t <- integrate( f = lambda, lower = tiempos[t], upper = tiempos[t+1] )[["value"]]
  # Se simulan la cantidad de "eventos" en el total de tiempo
  num_simulaciones[t] <- rpois(n = 1, lambda = tasa_t )
  # Se simulan los tiempos "inter-arrivo" de cada evento
  simulaciones_exp <- c(simulaciones_exp, rexp(n = num_simulaciones[t], rate = tasa_t ) + (t-1) )
}
simulaciones_exp <- sort( simulaciones_exp )

# Generamos los vectores que representen las coordenadas de los puntos
valores_x <- simulaciones_exp                       # Tiempos en los que se presentan los eventos
valores_y <- c( 0 , seq( sum(num_simulaciones) ) )  # Altura de la función
function_a_trozos <- stepfun(x = valores_x, y = valores_y, f = 0 )
# Gráfica del proceso
plot(function_a_trozos, main="Proceso Poisson No Homogéneo", verticals = FALSE,
     pch=19, col.points ="red", xlim=c(0, max(tiempos)), xlab = "Tiempo", ylab = "Eventos")
lines(tiempos, cumsum(lambda(tiempos)), type="l", col="purple", lwd=2)
##########################################################################################
# FIN DEL ARCHIVO
##########################################################################################
```

Proceso de Wiener (Movimiento Browniano)

Se dice que el proceso a tiempo continuo $\{W_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Wiener (también llamado Movimiento Browniano) con parámetro σ^2 que toma valores en $\mathbb{R}$ y además cumple lo siguiente

1) $W_0 = 0$
2) Tiene trayectorias continuas
3) Tiene incrementos independientes
4) Para $0 \leq s < t$ se tiene que $W_t - W_s \sim Normal(0, \sigma^2 \cdot (t - s))$

Observación: *También se suele denotar como $\{B_t : t \geq 0\}$ para énfatizar que es un Movimiento Browniano*

Por lo anterior, $W_t \sim Normal(0, \sigma^2 \cdot t)$ debido a que $W_t = W_t - 0 = W_t - W_0$.

El Proceso de Wiener Estándar (Movimiento Browniano Estándar) se obtiene sustituyendo $\sigma^2 = 1$ en la expresión anterior, por lo que quedaría de la forma $W_t \sim Normal(0, t)$

Ejercicio 1

Sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano Estándar. Calcula lo siguiente$\mathbb{P}(W_5 < 2)$

1) $\mathbb{P}(W_5 < 2)$
2) $\mathbb{P}(4 < W_3)$
3) $\mathbb{P}(-4 < W_9 < 6)$

Solución

Tenemos que $W_5 \sim Normal(\mu = 0, \sigma^2 = 5)$, $W_3 \sim Normal(\mu = 0, \sigma^2 = 3)$ y $W_9 \sim Normal(\mu = 0, \sigma^2 = 9)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W_5 < 2) &= F_{W_5}(2) \approx 0.8144533 \\
\mathbb{P}(4 < W_3) &= 1 - \mathbb{P}(W_3 \geq 4) = 1 - F_{W_3}(4) \approx 0.01046067 \\
\mathbb{P}(-4 < W_9 < 6) &= F_{W_9}(6) - F_{W_9}(-4) \approx 0.8860386
\end{aligned}$$

Ejercicio 2

Calcule la $\{W_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano Estándar. Calcula $\text{Cov}(W_s, W_t)$

Solución

Sin pérdida de generalidad, supongamos $s < t$

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(W_s, W_t) &= \mathbb{E}(W_s \cdot W_t) - \mathbb{E}(W_s) \cdot \mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(W_s \cdot W_t) \\
&= \mathbb{E}(W_s \cdot (W_t - W_s + W_s)) \\
&= \mathbb{E}(W_s \cdot (W_t - W_s)) + \mathbb{E}(W_s^2) \\
&= \mathbb{E}(W_s) \cdot \mathbb{E}(W_t - W_s) + \mathbb{E}(W_s^2) = \mathbb{E}(W_s^2) \\
&= \text{Var}(W_s) + \mathbb{E}(W_s)^2 = s
\end{aligned}$$

En caso de que $t < s$, se llegaría a que $\text{Cov}(W_s, W_t) = t$.

Notemos además que en el caso $s = t$, implicaría que $\text{Cov}(W_s, W_t) = \text{Cov}(W_t, W_t) = \text{Var}(W_t) = t$.

Por lo tanto, la solución sería

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \begin{cases} s & \text{Si } s < t \\ t & \text{Si } t < s \\ t & \text{Si } s = t \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Cov}(W_s, W_t) = \min\{s, t\}$$

Ejercicio 3

Sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano Estándar. Calcula lo siguiente $\mathbb{P}(W_1 + W_2 > 2)$

Consideremos $X = W_1 + W_2$, entonces $X \sim Normal$, pero ¿Con qué parámetros?

$$\mathbb{E}(W_1 + W_2) = \mathbb{E}(W_1) + \mathbb{E}(W_2) = 0$$

$$\text{Var}(W_1 + W_2) = \text{Var}(W_1) + \text{Var}(W_2) + 2 \cdot \text{Cov}(W_1, W_2) = 1 + 2 + 2 \cdot 1 = 5$$

Por lo que $X \sim Normal(\mu = 0, \sigma^2 = 5)$ y finalmente, $\mathbb{P}(W_1 + W_2 > 2) = \mathbb{P}(X > 2) \approx 0.186$

Ejercicio 4

Sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano Estándar.
Encuentre la distribución condicional de $W_s | W_t = a$ suponiendo $s < t$

Solución

Para resolverlo, recordemos un resultado sobre la distribución conjunta de dos variables normales.

Sean X y Y son variables aleatorias conjuntamente normales con parámetros $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$ y ρ
Entonces la variable $Y|X = x$ se distribuye normal con los siguientes parámetros

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \mu_Y + \rho \cdot \sigma_Y \cdot \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \qquad \text{Var}(Y|X = x) = \left(1 - \rho^2\right) \sigma_Y^2$$

Ahora, si nosotros hacemos que $X = W_t$ y $Y = W_s$, nosotros tenemos que $X \sim N(0, t)$ y $Y \sim N(0, s)$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_Y} = \frac{\min(s, t)}{\sqrt{t}\sqrt{s}} = \frac{s}{\sqrt{t}\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{s}{t}}$$

Por lo que concluimos que

$$\mathbb{E}(Y|X = a) = 0 + \sqrt{\frac{s}{t}} \cdot \sqrt{s} \cdot \frac{a}{\sqrt{t}} = \frac{s}{t} \cdot a$$

$$\text{Var}(Y|X = a) = \left(1 - \frac{s}{t}\right) \cdot s$$

Por lo tanto

$$W_s | W_t = a \ \sim Normal \left(\mu = \frac{s}{t} \cdot a,\ \sigma^2 = \left(1 - \frac{s}{t}\right) \cdot s\right)$$

Ejercicio 5

Sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano Estándar. Calcula $\mathbb{P}(W_2 < 3 | W_4 = 6)$

Por el ejercicio anterior, tenemos que $W_2 | W_4 = 6 \sim Normal(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, por lo tanto

$$\mathbb{P}(W_2 < 3 | W_4 = 6) = \Phi\left(\frac{3 - 3}{1}\right) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

Donde $\Phi(\cdot)$ es la función de distribución de una normal estándar.

Ejercicio moral
Ahora calcula $\mathbb{P}(W_2 < 3 | W_1 = 1)$.
Observa que no se puede usar directamente el resultado del ejericio 4, por el supuesto $s < t$

Movimiento Browniano Geométrico

Sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano. Se define al Movimiento Browniano Geométrico como

$$X_t = \exp(\sigma W_t + \mu t) \qquad \text{para } \sigma > 0,\ \mu \in \mathbb{R}$$

El Movimiento Browniano Geométrico resuelve el modelo de precios de activos financieras propuesto por Black, Scholes y Merton. Se trata de la exponencial de un movimiento browniano con derivada lineal.

Si reemplazamos los valores $\sigma = 1$ y $\mu = 0$ en la ecuación anterior, entonces la expresión obtenida se conoce como Movimiento Browniano Geométrico Estándar, esto es $X_t = \exp(W_t)$
(Notemos que al considerar $\sigma = 1$, entonces estamos indicando que W_t es un Movimiento Browniano Estándar)

Ejercicios

Sea $\{X_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano Geométrico Estándar.

1) Encuentre $\mathbb{E}(X_t)$
2) Encuentre $\text{Var}(X_t)$
3) Encuentre $\text{Cov}(X_s, X_t)$ considerando $0 \leq s \leq t$

Solución

Para estos ejercicios, es útil recordar la función generadora de momentos de una distribución normal.

La función generadora de momentos de una variable aleatoria normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ es la siguiente

$$\text{M}_X(k) = \mathbb{E}\left(e^{kX}\right) = \exp\left(k\mu + \frac{\sigma^2 k^2}{2}\right) \qquad \text{para toda } \ k \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= \mathbb{E}\left(e^{W_t}\right) = \text{M}_{W_t}(1) = \exp(t/2) \\ \mathbb{E}(X_t^2) &= \mathbb{E}\left(e^{2 \cdot W_t}\right) = \text{M}_{W_t}(2) = \exp(2t) \\ \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}(X_t^2) - \mathbb{E}^2(X_t) = \exp(2t) - \exp(t/2) \end{aligned}$$

Por último, calculemos $\text{Cov}(X_s, X_t)$

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X_s \cdot X_t) - \mathbb{E}(X_s) \cdot \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_s \cdot X_t) - \exp\left(\frac{s+t}{2}\right)$$

Para encontrar $\mathbb{E}(X_s \cdot X_t)$, lo podemos reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s \cdot X_t) &= \mathbb{E}\left[\exp(W_s) \cdot \exp(W_t)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(W_s) \cdot \exp(W_s + W_t - W_s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp(2W_s) \cdot \exp(W_t - W_s)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(2W_s)\right] \cdot \mathbb{E}\left[\exp(W_t - W_s)\right] \\ &= \text{M}_{W_s}(2) \cdot \text{M}_{W_t - W_s}(1) = \exp(2s) \cdot \exp\left(\frac{t-s}{2}\right) = \exp\left(\frac{3s+t}{2}\right) \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que para $0 \leq s \leq t$ tenemos

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = \exp\left(\frac{3s+t}{2}\right) - \exp\left(\frac{s+t}{2}\right)$$

Martingala

Se dice que un proceso a tiempo discreto $\{X_n : n \geq 0\}$ es una martingala si cumple que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_0, X_1, \cdots, X_n) = X_n$$

Existen más condiciones para definirla de manera estricta, pero consideremosla como una defınción simple y válida.

Ejercicio

Demuestre que el Movimiento Browniano Estándar es una martíngala considerando tiempos discretos.

Solución

Lo anterior nos pide demostrar que se cumple lo siguiente $\mathbb{E}(W_{n+1}|W_0, W_1, \cdots, W_n) = W_n$

Recordemos que la esperanza condicional es una transformación de una variable aleatoria y para encontrarla, primero se le asigna un valor a las variables que se condicionan, se resuelve y hasta el final se sustituye los valores previamente asignados por las variables aleatorias.

El ejercicio se deemuestra a continuación haciendo uso de la propiedad de incrementos independientes.

$$\mathbb{E}(W_{n+1}|W_0 = w_0, W_1 = w_1, \cdots, W_n = w_n) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{W_{n+1}|W_0,W_1,\cdots,W_n}(y|w_0, w_1, \cdots, w_n)\ dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f_{W_{n+1},W_0,W_1,\cdots,W_n}(y, w_0, w_1, \cdots, w_n)}{f_{W_0,W_1,\cdots,W_n}(w_0, w_1, \cdots, w_n)}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f_{W_0,W_1-W_0,\cdots,W_{n+1}-W_n}(w_0, w_1 - w_0, \cdots, y - w_n)}{f_{W_0,W_1-W_0,\cdots,W_n-W_{n-1}}(w_0, w_1 - w_0, \cdots, w_n - w_{n-1})}\ dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f_{W_0}(w_0) \cdots f_{W_{n+1}-W_n}(y - w_n)}{f_{W_0}(w_0) \cdots f_{W_n-W_{n-1}}(w_n - w_{n-1})}\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{W_{n+1}-W_n}(y - w_n)\ dy$$

Notemos que lo siguiente es válido por incrementos estacionarios

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{W_{n+1}-W_n}(y - w_n)\ dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{W_1}(y - w_n)\ dy$$

Resolviendo la integral se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{W_1}(y - w_n)\ dy &= \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(y - w_n)^2\right)\ dy \qquad \text{Tomamos } u = y - w_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (u + w_n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)\ du \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du}_{\text{Esperanza de una Normal(0,1)}} \quad + \quad w_n \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du}_{\text{Función de Densidad de una Normal(0,1)}} \\
&= 0 + w_n \cdot 1 = w_n
\end{aligned}$$

En resumen, se tiene que

$$\mathbb{E}(W_{n+1}|W_0 = w_0, W_1 = w_1, \cdots, W_n = w_n) = w_n \ \Rightarrow\ \mathbb{E}(W_{n+1}|W_0, W_1, \cdots, W_n) = W_n$$

En consecuencia, $\{W_n : n \geq 0\}$ es una martingala (considerando tiempos discretos).

Ejercicio moral

Ahora demuestre el ejercicio considerando tiempos continuos

Ejercicio

Sea $\{N_n : n \geq 0\}$ un Proceso Poisson con tasa λ. Demuestre que el proceso $\{N_n - n\lambda : n \geq 0\}$ es una martingala.

Solución

Consideremos $\{Z_n : n \geq 0\} = \{N_n - n\lambda : n \geq 0\}$ al proceso que estamos estudiando.

Para demostrar que es una martingala, debemos demostrar que

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_0, Z_1, \cdots, Z_n) = Z_n$$

Primero demostraremos que el proceso $\{Z_n : n \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios. Recordemos que si un proceso $\{X_n\}$ tiene incrementos independientes, implica que $X_0 \perp X_1 - X_0 \perp \cdots \perp X_n - X_{n-1}$.

Notemos que

$$Z_1 - Z_0 = (N_1 - \lambda) - (N_0) = N_1 - N_0 - \lambda \qquad Z_2 - Z_1 = (N_2 - 2\lambda) - (N_1 - \lambda) = N_2 - N_1 - \lambda$$

En general

$$Z_{n+1} - Z_n = (N_{n+1} - (n+1)\lambda) - (N_n - n\lambda) = N_{n+1} - N_n - \lambda$$

Como el proceso $\{N_n : n \geq 0\}$ tiene incrementos independientes, y el sumar o restar un escalar no afecta la independencia de dichos incrementos, se tiene entonces que el proceso $\{Z_n : n \geq 0\}$ también los tiene.

Por último, el proceso $\{N_n : n \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios, esto implica que $N_n - N_{n-1} = N_1 - N_0$.
Por este motivo, $Z_{n+1} - Z_n = N_{n+1} - N_n - \lambda = N_1 - N_0 - \lambda$ lo que implica que el proceso $\{Z_n\}$ también.

Hasta el momento hemos demostrado que el proceso $\{Z_n : n \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_0 = z_0, \cdots, Z_n = z_n) &= \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot \frac{f_{Z_0,\cdots,Z_n,Z_{n+1}}(z_0, \cdots, z_n, y)}{f_{Z_0,\cdots,Z_n}(z_0, \cdots, z_n)} \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot \frac{f_{Z_0,\cdots,Z_{n+1}-Z_n}(z_0, \cdots, y - z_n)}{f_{Z_0,\cdots,Z_n-Z_{n-1}}(z_0, \cdots, z_n - z_{n-1})} && \text{Incrementos Independientes} \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot f_{Z_{n+1}-Z_n}(y - z_n) && \text{Incrementos Estacionarios} \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot f_{Z_1-Z_0}(y - z_n) = \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot f_{N_1-N_0-\lambda}(y - z_n)
\end{aligned}$$

Si $N_1 - N_0 \sim Poisson(\lambda)$, entonces $N_1 - N_0 - \lambda$ se sigue distribuyendo Poisson pero trasladada $-\lambda$ unidades.

Variable Aleatoria Trasladada
Lo anterior es un ejemplo de una distribución trasladada/desplazada (random variable shifted). Al evaluar una distribución trasladada se debe agregar un término que "corriga" la traslación y verificar el nuevo dominio de la variable aleatoria pues esta se ve modificada por la traslación. Veamos un ejemplo.
Sea $X \sim Poisson(\lambda)$, y definamos a $Z := X + k$, entonces Z es una variable Poisson trasladada con densidad

$$f_Z(z) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^{z-k}}{(z-k)!} \qquad \text{Para } z - k \geq 0 \Rightarrow z \geq k$$

Regresando a nuestro ejercicio, tenemos entonces que

$$\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_0 = z_0, Z_1 = z_1, \cdots, Z_n = z_n) = \sum_{y=0}^{\infty} y \cdot f_{N_1 - N_0 - \lambda}(y - z_n) = \sum_{y=z_n-\lambda}^{\infty} y \cdot \exp(-\lambda) \frac{\lambda^{(y-z_n+\lambda)}}{(y - z_n + \lambda)!}$$

Notemos que en la última expresión, la suma inicia en $y = z_n - \lambda$ porque la densidad de Poisson trasladada resulta cero cuando $y - z_n + \lambda < 0$, por lo cual, solo nos quedamos con los valores $y - z_n + \lambda \geq 0 \Rightarrow y \geq z_n - \lambda$

Haciendo el cambio $u = y - z_n + \lambda$, se tiene que $y = u + z_n - \lambda$

$$\sum_{u=0}^{\infty} (u + z_n - \lambda) \cdot \exp(-\lambda) \frac{\lambda^u}{u!} = \underbrace{\sum_{u=0}^{\infty} u \cdot \exp(-\lambda) \frac{\lambda^u}{u!}}_{\text{Esperanza de una Poisson}(\lambda)} + (z_n - \lambda) \underbrace{\sum_{u=0}^{\infty} \exp(-\lambda) \frac{\lambda^u}{u!}}_{\text{Densidad de una Poisson}(\lambda)} = \lambda + (z_n - \lambda) \cdot 1 = z_n$$

En resumen, $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_0 = z_0, Z_1 = z_1, \cdots, Z_n = z_n) = z_n$, lo que implica que $\mathbb{E}(Z_{n+1}|Z_0, Z_1, \cdots, Z_n) = Z_n$

Esto demuestra que el proceso $\{Z_n : n \geq 0\} = \{N_n - n\lambda : n \geq 0\}$ es una martingala.

Práctica

Sea $\{W_t : t \geq 0\}$ un Movimiento Browniano Estándar. Realiza un script en R que calcule $\mathbb{P}(W_5 < 2)$

La solución a teórica es $\mathbb{P}(W_5 < 2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 5}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{5}\right) dx$

A continuación se presenta una script en R cuya solución vía simulación es $\mathbb{P}(W_5 < 2) \approx 0.81428$
Comparándola con la solución teórica $\mathbb{P}(W_5 < 2) \approx 0.8144533$ podemos argumentar que es una buena aproximación.

```r
##################################################################################################
# CALCULO DE PROBABILIDADES DEL MOVIMIENTO BROWNIANO
##################################################################################################
# Función para simular una posible trayectoria de un browniano estándar por medio de uniformes
simula_browniano <- function(tiempo, delta_t){
  particion_t <- seq( from = 0 , to = tiempo, by = delta_t )
  num_pasos   <- length(particion_t)
  vars_auxs   <- sqrt(delta_t) * sample(x = c(-1,1), size = num_pasos-1, replace = TRUE)
  mov_brown   <- c(0, cumsum( vars_auxs ) )
  return( mov_brown )
}
# Primero simularemos suficientes trayectorias del browniano con una delta "pequeña"
# Las simulaciones se guardarán en una matriz y guardamos en un vector solo las simulaciones
# del tiempo = 5 que es el tiempo que nos interesa para este ejercicio
set.seed(3)
num_sims    <- 50000
matriz_sims <- replicate(n = num_sims, expr = simula_browniano(tiempo = 5, delta_t = 0.001) )
vector_sims <- matriz_sims[nrow(matriz_sims),]
# Graficamos ha distribución del browniano en el tiempo que nos interesa
# (Sobreescribimos una curva de la distribución teórica para revisar convergencia)
hist(vector_sims, breaks = 50, probability = TRUE, main="Simulaciones de Browniano Estándar W(5)",
     xlab="Valor del W(t)", ylab="Probabilidad", col="#1CACDB")
curve( dnorm(x, 0, sqrt(5) ),add=TRUE, col="red", lwd=3)
cat(paste0("La probabilidad es ", mean( vector_sims < 2 ) ))
# La probabilidad es 0.81428
##################################################################################################
```