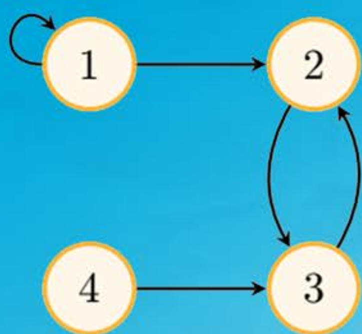
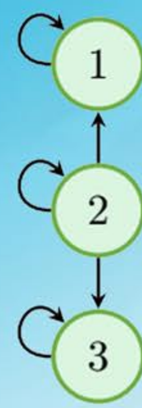
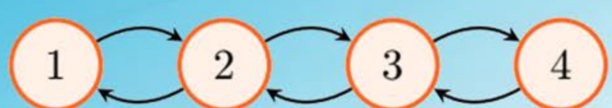
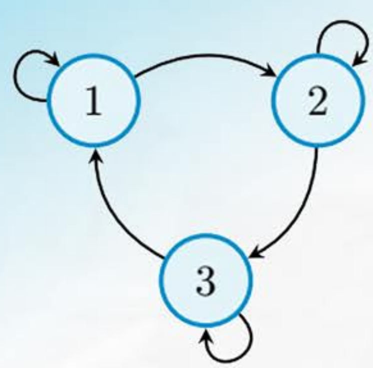
Procesos Estocásticos









Introducción

Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo.
El conjunto de valores que puede tomar las variables aleatorias es llamado *espacio de estados*, mientras que los valores que puede tomar el "tiempo" es llamado *espacio parametral*

La manera de representar un proceso estocástico es la siguiente

$$\{X_t : t \in T\}$$

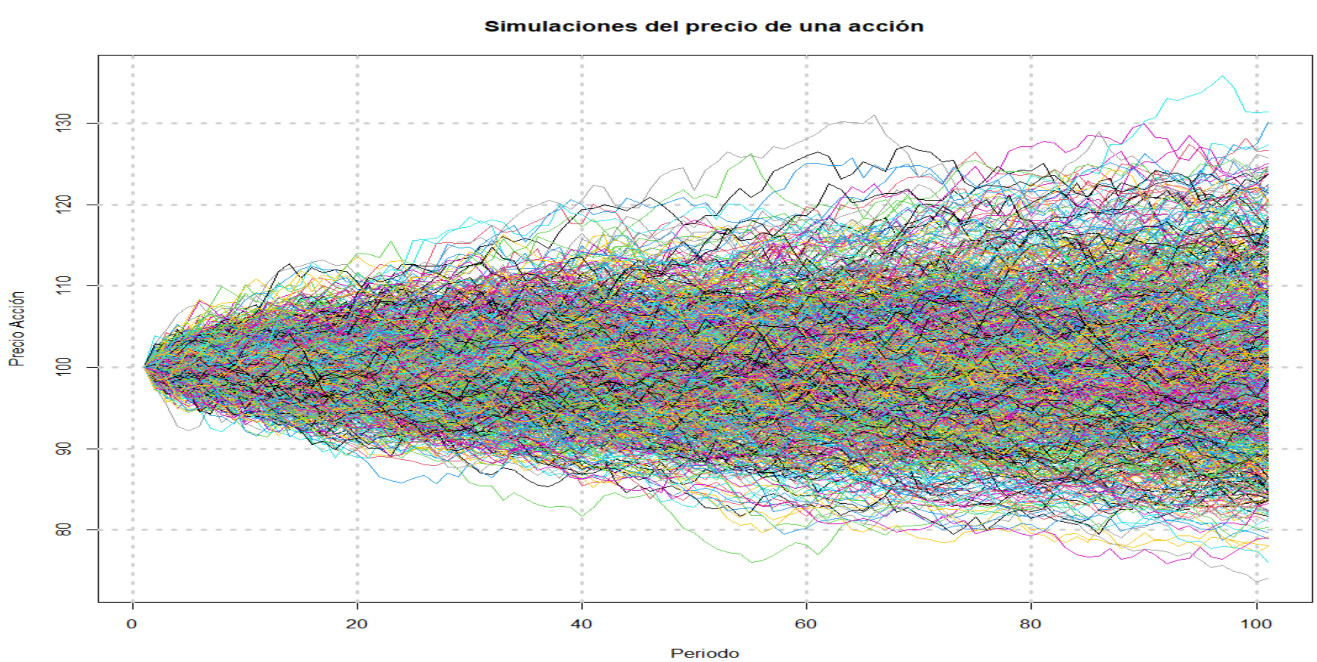
En el caso anterior no se indica si el tiempo es continuo o discreto. Abajo encontrarán dos notaciones más

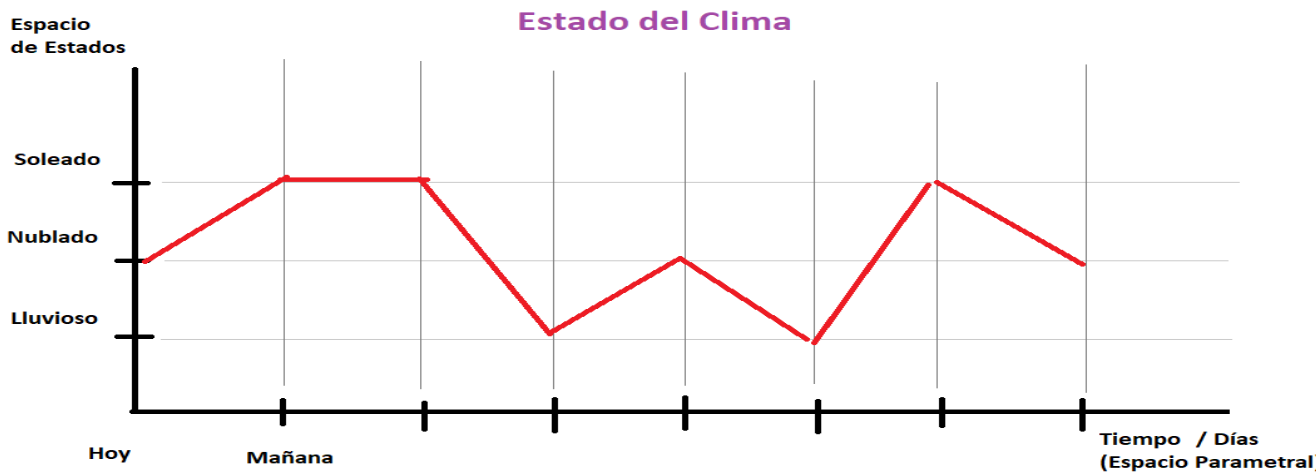
$$\{X_n : n = 0, 1, 2, 3, \ldots\} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\} \qquad \{X_t : t \geq 0\}$$

Del lado izquierdo se usa para expresar un tiempo discreto, mientras que del lado derecho el tiempo continuo.
Es importante mencionar que también existen *espacio de estados* discretos y continuos.

Ejemplos

a) El número de personas que entran a una plaza comercial.
b) El número de operaciones que se realizan en un cajero automático al mes.
c) El número de usuarios que visitan una página en internet.
d) El número de siniestros que debe pagar una aseguradora.
e) El número de infectados por una enfermedad en un periodo.
f) El número de asaltados en la ciudad.
g) El estado del clima.
h) El tiempo que permanece un electrodoméstico sin descomponerse.
i) La suma asegurada que debe pagar una aseguradora por siniestro.
j) El precio de una acción a lo largo del día.



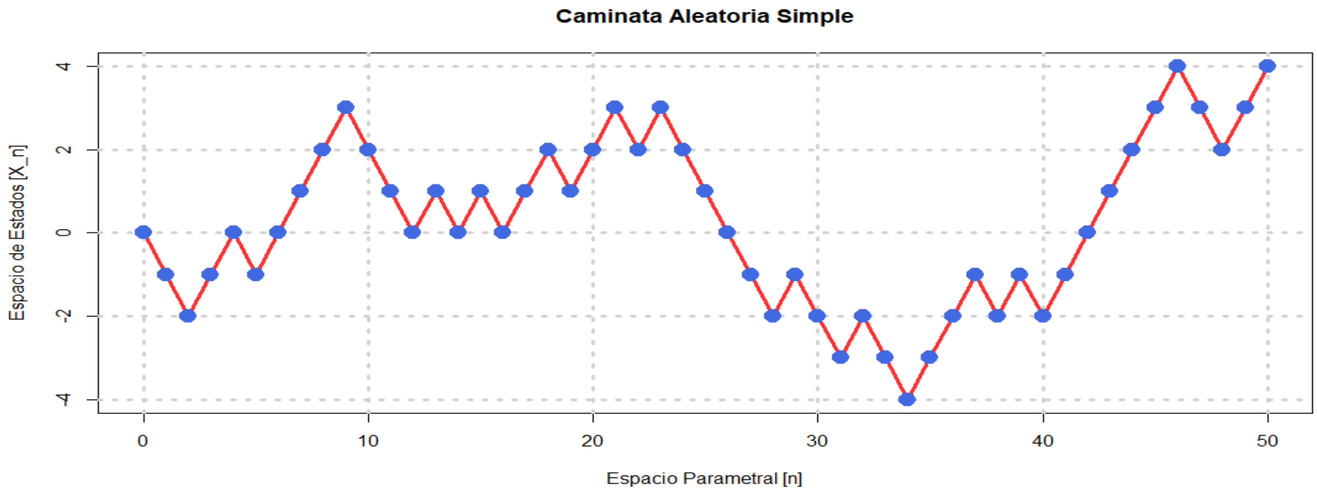


Aplicaciones

Las aplicaciones que tienen estos procesos son enormes, sin embargo, se enlistan algunas de ellas

a) Finanzas (con la ecuación de Black-Scholes-Merton)
b) Fiabilidad de sistemas / control de calidad
c) Problemas de optimización
d) Epidemiología, dinámica de poblaciones y genética
e) Producción, logística e inventarios
f) Telecomunicaciones
g) En general, en la simulación de fenómenos aleatorios

Caminata Aleatoria Simple



A continuación se muestra un codigo en lenguaje R para realizar una simulación de una caminata aleatoria simple.

```
# DESCRIPCION ###########################################################################
# Función que simula una trayectoria para una caminata aleatoria simple
# ARGUMENTOS ############################################################################
# num_pasos    := Número de pasos
# probabilidad := Probabilidad de ir hacia arriba
# inicio       := Posicion inicial
#########################################################################################
caminata_simple <- function(num_pasos, probabilidad = 1/2, inicio = 0){
  saltos     <- sample(x = c(1,-1), size = num_pasos, replace = TRUE,
                       prob = c(probabilidad, 1-probabilidad) )
  posiciones <- c(inicio, inicio + cumsum(saltos) )
  plot(seq(from=0, to=num_pasos),posiciones,type='n',main="Caminata Aleatoria Simple",
       xlab="Espacio Parametral [n]", ylab="Espacio de Estados [X_n]" ); grid(lwd = 3)
  lines(seq(from=0, to=num_pasos),posiciones,col="firebrick1",pch=19,lwd=3)
  points(seq(from=0, to=num_pasos),posiciones,col="royalblue",pch=19,cex=2)
}
# EJEMPLO  ##############################################################################
set.seed(1)
caminata_simple(num_pasos = 50, probabilidad = 1/2, inicio = 0)
#########################################################################################
```

Repaso de Probabilidad

Sea X, Y, Z variables aleatorias sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Sean $a, b \in \mathbb{R}$.
Sea $h(\cdot)$ una función cualquiera y $\varphi(\cdot)$ una función convexa.

Propiedades Básicas de la Esperanza

a) Si $x \geq 0$ $\forall x \in X$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$ (Positividad)
b) Si $x \leq y$ $\forall x \in X$ $y \in Y$, entonces $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ (Monotonía)
c) $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ (Linealidad de la esperanza)
d) $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$ (Desigualdad de Jensen)

Propiedades Básicas de la Varianza

a) $\text{Var}(X) \geq 0$ (No negatividad)
b) $\text{Var}(a) = 0$ (La varianza de una constante es cero)
c) $\text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ (Por las propiedades anteriores)
d) $\text{Var}(X + a) = \text{Var}(X)$ (Invariante ante traslaciones)
e) $\text{Var}(aX) = a^2\text{Var}(X)$ (Escalamiento)
f) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$ (Otra manera de escribir la varianza)
g) $\text{Var}(aX \pm bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) \pm 2ab\text{Cov}(X, Y)$ (Varianza de la suma/resta)

Propiedades de la Esperanza y Varianza Condicional

a) Si $x \geq 0$ $\forall x \in X$, entonces $\mathbb{E}(X|Z) \geq 0$ (Positividad)
b) Si $x \leq y$ $\forall x \in X$ $y \in Y$, entonces $\mathbb{E}(X|Z) \leq \mathbb{E}(Y|Z)$ (Monotonía)
c) $\mathbb{E}(aX + bY|Z) = a\mathbb{E}(X|Z) + b\mathbb{E}(Y|Z)$ (Linealidad de la esperanza)
d) Si $X \perp Y$, entonces $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$ (Aplicando definición)
e) $\varphi(\mathbb{E}(X|Z)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|Z)$ (Desigualdad de Jensen Condicionada)
f) $\mathbb{E}(h(X)Y|X) = h(X)\mathbb{E}(Y|X)$ (Estabilidad de la esperanza)
g) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z))$ (Ley de la Esperanza Total)
h) $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(\text{Var}(X|Z)) + \text{Var}(\mathbb{E}(X|Z))$ (Ley de la Varianza Total)
i) $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(\text{Cov}(X|Z, Y|Z)) + \text{Cov}(\mathbb{E}(X|Z), \mathbb{E}(Y|Z))$ (Ley de la Covarianza Total)

Ejercicio 1
Supongamos que el número de personas Y que suben a un elevador en la planta baja de un edificio tiene distribución $Poisson(\lambda)$. Además, cada persona deja el elevador en cualquiera de los n pisos, independientemente de donde bajen los demás. Encuentra el número esperado de paradas que hace el elevador.

SOLUCIÓN

Definamos X el número de paradas que realiza el elevador. Definamos $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de la siguiente manera:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el elevador se detiene en el piso } i \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De lo anterior, podemos concluir que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Observemos que $\mathbb{P}(X_i = 0|Y = k) = \mathbb{P}($ de k personas, ninguna persona baja en el piso i $) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$

por lo tanto $\mathbb{P}(X_i = 1|Y = k) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$

Lo anterior nos está indicando que $X_i|Y \sim Ber\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^Y\right)$

Además, $X|Y \sim Binom\left(n, 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^Y\right)$, por lo que $\mathbb{E}(X|Y) = n\left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^Y\right]$

Utilizando la Ley de Probabilidad Total,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X|Y = k)\mathbb{P}(Y = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} n\left[1 - (1 - 1/N)^k\right] \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= ne^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[1 - (1 - 1/n)^k\right] \lambda^k}{k!} \\
&= ne^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k - [\lambda(1 - 1/n)]^k}{k!} \\
&= ne^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1 - 1/n)]^k}{k!}\right] \\
&= ne^{-\lambda} \left[e^{\lambda} - e^{\lambda(1-1/n)}\right] \\
&= n\left(1 - e^{-\lambda/n}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 2
Una gallina pone X huevos, donde $X \sim Poisson(\lambda)$. Cada huevo es fecundado con probabilidad p, independientemente de los otros, produciendo asi Y pollos. Demuestre que $\mathrm{Cor}(X,Y) = \rho(X,Y) = \sqrt{p}$

SOLUCIÓN

Primero recordemos la definición de $\rho(X,Y)$.

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

Primero calculemos lo que involucra a la variable X. Debido a que $X \sim Poisson(\lambda)$ tenemos que

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \qquad\qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda$$

Como segundo paso, veámos el comportamiento de la variable Y.
Observemos que si $X = n$ un valor fijo, implicaría que $Y \sim Bin(n,p)$.
Esto quiere decir que $Y|X \sim Bin(X,p)$, cuya esperanza $\mathbb{E}(Y|X) = Xp$.

Enfaticemos el hecho de que $\mathbb{E}(Y|X)$ es una variable aleatoria que depende de X. Por lo tanto, podemos obtener la esperanza y varianza de esta variable aleatoria.

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}(Xp) = p\mathbb{E}(X) = p\lambda$$

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathrm{Var}(Xp) = p^2\mathrm{Var}(X) = p^2\lambda$$

Utilicemos la Ley de la Esperanza Total para calcular $\mathbb{E}(Y)$.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = p\lambda$$

Utilicemos la Ley de la Varianza Total para calcular $\mathrm{Var}(Y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y) &= \mathbb{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) \\
&= \mathbb{E}(Xp(1-p)) + \mathrm{Var}(Xp) \\
&= p(1-p)\mathbb{E}(X) + p^2\mathrm{Var}(X) \\
&= p(1-p)\lambda + p^2\lambda \\
&= p\lambda - p^2\lambda + p^2\lambda \\
&= p\lambda
\end{aligned}$$

El único ingrediente que nos hace falta es calcular $\mathbb{E}(XY)$. Para hacerlo, aplicamos nuevamente la Ley de la Esperanza Total y Estabilidad de la Esperanza.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) \\
&= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) \\
&= \mathbb{E}(X \cdot Xp) \\
&= p\mathbb{E}(X^2) \\
&= p(\lambda + \lambda^2) \\
&= p\lambda + p\lambda^2
\end{aligned}$$

Uniendo cada uno de los resultados anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} \\
&= \frac{(p\lambda + p\lambda^2) - (\lambda)(p\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p\lambda}} \\
&= \frac{(p\lambda + p\lambda^2) - (\lambda)(p\lambda)}{\sqrt{\lambda}\sqrt{p\lambda}} \\
&= \frac{p\lambda}{\lambda p^{\frac{1}{2}}} \\
&= \sqrt{p}
\end{aligned}$$

NOTA

Veamos que hay varias maneras de obtener $\mathrm{Var}(Y)$. Se recomienda utilizar otras propiedades de la esperanza y varianza condicional para llegar al mismo resultado. Por ejemplo.

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y)$$

Ejercicio 3 - Extra

Supongamos que alguien juega $n \geq 1$ partidas en un casino, cada una independiente de las demás. La probabilidad de ganar cada partida P tiene distribución $Beta(1,1)$ y sea X el número de juegos ganados.

Primera parte, caso particular

a) Encuentre el número esperado de juegos ganados
b) Demuestre que $\rho(X,P)$ es positiva
c) Demuestre que $\rho(X,P) \geq \sqrt{\frac{1}{3}}$

Segunda parte, caso general

a) Generalice el problema para el caso $P \sim Beta(\alpha,\beta)$
b) Demuestre que $\rho(X,P) \geq \sqrt{\frac{1}{1+\alpha+\beta}}$
c) Concluya que $\rho(X,P)$ crece a medida que n aumenta (manteniendo α y β constantes).
Tip: Piense a $\rho(X,P)$ como función de n, posteriormente derive y concluya.

Procesos de Markov

Existen ciertos procesos donde conociendo el estado actual del proceso, los estados anteriores no afectan el estado futuro del proceso. A esta "condición" de los particular se le conoce como la propiedad de Markov.

Si consideramos $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ un proceso estocástico a tiempo discreto, la propiedad de Markov es la siguiente

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$$

La igualdad anterior nos indica que para calcular la probabilidad del siguiente estado del proceso, sabiendo todos los valores que ha tomado hasta el momento, solo basta tomar en cuenta el último estado del proceso.
Esta propiedad es la versión de la "pérdida de memoria" en variables aleatorias, pero para un proceso estocástico.

Probabilidades de la cadena de dos estados

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}(X_0 = 0) = 0.3 \qquad \mathbb{P}(X_0 = 1) = 0.7$$

Primero calculamos las propabilidades de X_1

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0 | X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) \\ &= (0.9)(0.3) + (0.5)(0.7) \\ &= 0.27 + 0.35 = 0.62 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1 | X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) \\ &= (0.1)(0.3) + (0.5)(0.7) \\ &= 0.03 + 0.35 = 0.38 \end{aligned}$$

También podríamos haber realizado $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.38$

Ahora calculamos las probabilidades de X_2

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0 | X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= (0.9)(0.62) + (0.5)(0.38) \\ &= 0.558 + 0.19 = 0.748 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) \\ &= (0.1)(0.62) + (0.5)(0.38) \\ &= 0.062 + 0.19 = 0.252 \end{aligned}$$

Cadena de tres estados

¿Qué sucedería si tenemos la siguiente matríz de transición de 3 estados?
Realicemos un ejemplo sobre las probabilidades de transición.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.7 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}(X_0 = 0) = 0.3 \qquad \mathbb{P}(X_0 = 1) = 0.5 \qquad \mathbb{P}(X_0 = 2) = 0.2$$

Primero calculamos las propabilidades de X_1

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = 0|X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 0|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 0|X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) \\
&= (0.3)(0.3) + (0.1)(0.5) + (0.7)(0.2) \\
&= 0.09 + 0.05 + 0.14 = 0.28
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1|X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) \\
&= (0.5)(0.3) + (0.3)(0.5) + (0.1)(0.2) \\
&= 0.15 + 0.15 + 0.02 = 0.32
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 2) &= \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2|X_0 = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2) \\
&= (0.2)(0.3) + (0.6)(0.5) + (0.2)(0.2) \\
&= 0.06 + 0.30 + 0.04 = 0.4
\end{aligned}$$

Debemos comprobar que la suma de sus probabilidades sea igual a 1.

$$\sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_1 = k) = 0.28 + 0.32 + 0.4 = 1$$

Ahora calculamos las probabilidades de X_2

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 0) &= \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 0|X_1 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 2) \\
&= (0.3)(0.28) + (0.1)(0.32) + (0.7)(0.4) \\
&= 0.084 + 0.032 + 0.28 = 0.396
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 1) &= \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 2) \\
&= (0.5)(0.28) + (0.3)(0.32) + (0.1)(0.4) \\
&= 0.14 + 0.096 + 0.04 = 0.276
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_2 = 2) &= \mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0) + \mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 2|X_1 = 2)\mathbb{P}(X_1 = 2) \\
&= (0.2)(0.28) + (0.6)(0.32) + (0.2)(0.4) \\
&= 0.056 + 0.192 + 0.08 = 0.328
\end{aligned}$$

Comprobamos

$$\sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X_2 = k) = 0.396 + 0.276 + 0.328 = 1$$

Primeras Visitas y Tiempos de Llegada

Sea la cadena de Markov de 2 estados vista en clase

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Probabilidad de Primera Visita

Definimos $f^n(x,y)$ como la probabilidad de pasar del estado x al estado y en n pasos por primera vez.

$$f^n(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y, X_{n-1} \neq y, X_{n-2} \neq y, \cdots | X_0 = x)$$

Pensando en la matriz de 2 estados, tenemos lo siguiente:

$$f^n(0,0) = \begin{cases} 1-a & \text{Si } n = 1 \\ a(1-b)^{n-2}b & \text{Si } n \geq 2 \end{cases} \qquad f^n(0,1) = (1-a)^{n-1}a$$

$$f^n(1,0) = (1-b)^{n-1}b \qquad f^n(1,1) = \begin{cases} 1-b & \text{Si } n = 1 \\ b(1-a)^{n-2}a & \text{Si } n \geq 2 \end{cases}$$

Una igualdad que se verá más adelante es la siguiente

$$P^n(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} f^k(x,y)\ p^{n-k}(y,y)$$

Lo anterior nos dice que la probabilidad de pasar del estado x al estado y en n pasos es la misma que la probabilidad de llegar por primera vez al estado y desde el estado x en k pasos multiplicada por la probabilidad de permanecer en el estado y los $n-k$ tiempos restantes sumando todas los posibles valores de k.

Tiempo de llegada

Definimos el tiempo de llegada T_y como

$$T_y = \begin{cases} \min\{n > 0 | X_n = y\} & \text{Si} \min\{n > 0 : X_n = y\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{Si} \min\{n > 0 : X_n = y\} = \emptyset \end{cases}$$

Es decir, el tiempo de llegada T_y es el mínimo tiempo en el que se puede llegar al estado y.

Veamos que $P_x(T_y = n)$ nos indica la probabilidad de que lleguemos por primera vez al estado y desde el estado x en n pasos. Retomando la notación del apartado anterior, tenemos que $P_x(T_y = n) = f^n(x,y)$

Además, denotemos a $\mathbb{E}_x(T_y)$ como el tiempo mínimo esperado de llegar al estado y empezando desde el estado x.

Para practicar, veámos un ejemplo de cómo calcularlo para la cadena de dos estados.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_0(T_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}_0(T_1 = k) \\
&= 1\mathbb{P}_0(T_1 = 1) + 2\mathbb{P}_0(T_1 = 2) + 3\mathbb{P}_0(T_1 = 3) + 4\mathbb{P}_0(T_1 = 4) + \cdots \\
&= a + 2(1-a)a + 3(1-a)^2 a + +4(1-a)^3 a + \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ka(1-a)^{k-1} = a\sum_{k=1}^{\infty} k(1-a)^{k-1} \\
&\overset{*}{=} a\frac{1}{(1-(1-a))^2} = \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

Se puede proceder de manera análoga para calcular $\mathbb{E}_1(T_0)$ obteniendo que $\mathbb{E}_1(T_0) = \frac{1}{b}$
Se invita al alumno a cálcular $\mathbb{E}_0(T_0)$ y $\mathbb{E}_1(T_1)$.

En el ejercicio anterior, se utilizó el hecho de que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\ x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{Si } |x| < 1$$

Existen varias formas de demostrarlo y se invita al alumno a realizar dicha demostración.

En este documento realizaremos 2 demostraciones algo diferentes.

Demostración 1

Una de las más rápidas y elegantes consiste en derivar la serie geométrica.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} k\ x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Demostración 2

Otra manera es utilizar recursividad. Llamemos $y = \sum_{k=1}^{\infty} k\ x^{k-1}$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} k\ x^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = 1 + x\,(2 + 3x + 4x^2 + \cdots)$$

$$= 1 + x\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)x^{k-1} = 1 + x\left[\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k\ x^{k-1}}_{y} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right] = 1 + x\left[y + \frac{1}{1-x}\right] = xy + \frac{1}{1-x}$$

Finalmente resolvemos la ecuación

$$y = xy + \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y - xy = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y(1-x) = \frac{1}{1-x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Probabilidad de llegada, recurrencia y transitoriedad

Sea la cadena de Markov de 2 estados vista en clase.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Probabilidad de Llegada

Definamos $\rho_{x,y}$ como la probabilidad de llegar alguna vez al estado y partiendo desde el estado x como sigue

$$\rho_{x,y} := \mathbb{P}_x(T_y < +\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P_x(T_y = k)$$

Practiquemos esta definición calculado $\rho_{0,0}$ de la cadena de 2 estados de la parte superior.

$$\begin{aligned}
\rho_{0,0} &= \mathbb{P}_0(T_0 < +\infty) \\
&= (1-a) + ab + a(1-b)b + a(1-b)^2 b + a(1-b)^3 b + \cdots \\
&= (1-a) + ab[1 + (1-b) + (1-b)^2 + (1-b)^3 + \cdots] \\
&= (1-a) + ab[\frac{1}{b}] \qquad\qquad \text{Si } b > 0 \\
&= (1-a) + a = 1
\end{aligned}$$

Esto nos dice que la probabilidad de regresar alguna vez al estado 0, empezando en el estado 0 es 1.
En otras palabras, es seguro que alguna vez regresaremos al estado donde empezamos.

¿Qué ocurre si $b = 0$? Es fácil ver que si eso sucede, implicaría que $\rho_{0,0} = 1 - a$

$$\rho_{0,0} = \begin{cases} 1 & \text{Si } b > 0 \\ 1-a & \text{Si } b = 0 \end{cases}$$

Fijemonos que aún cuando $b = 0$, si ocurre que $a = 0$ entonces es seguro que alguna vez regresemos al estado 0.
Y eso tiene sentido, porque si $a = 0$ entonces el estado 0 es un estado absobente por lo que no podremos salir (y por consecuencia es seguro que alguna vez regresemos).

Sin embargo, un caso interesante será cuando $a > 0$, lo cual implicaría que $\rho_{0,0} < 1$.
Nos dice que no hay certeza de que regresemos al estado 0, empezando en el estado 0.

Análogamente, se puede demostrar que

$$\rho_{1,1} = \begin{cases} 1 & \text{Si } a > 0 \\ 1-b & \text{Si } a = 0 \end{cases}$$

Recurrencia y Transitoriedad

La idea de ahora, es clasificar los estados con la finalidad de caracterizarlos e identificar propiedades útiles.

Dirémos que el estado x es **recurrente** si $\rho_{x,x} = 1$, si por el contrario, sucede que $\rho_{x,x} < 1$ dirémos que es **transitorio**

Veámos algunas ejemplos de una cadena de Markov de 2 estados y determinemos si sus estados son recurrentes o transitorios.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$$

Notemos que para determinar si un estado es recurrente basta con encontrar una $n < +\infty$ tal que $P^n(x,x) = 1$.
Esto quiere decir que, es seguro que regresemos en n pasos al estado x iniciando en x.
(No hace falta revisar más valores de n, ya que cada n pasos regresaremos con seguridad al mismo estado)

Matriz $\mathbf{P}_1$
Veámos que estamos en el caso más agradable por el hecho de que $a > 0$ y $b > 0$.
Por los resultados a los que encontramos, el estado 0 es recurrente. Análogamente para el estado 1.

Matriz $\mathbf{P}_2$
Notemos que $P^2(0,0) = P(0,0)^2 + P(0,1)P(1,0) = P(0,1)P(1,0) = 1$.
Con probabilidad 1 tenemos de que en 2 pasos estamos de regreso en el estado 0, lo cual nos implica que el estado 0 es recurrente.
Análogamente para el estado 1.

Matriz $\mathbf{P}_3$
Veamos que el estado 0 es absorbente, es decir, $P(0,0) = 1$, lo cual nos implica que el estado 0 es recurrente. Análogamente para el estado 1.

Por lo tanto, notemos que cualquier estado que sea absorbente es un estado recurrente.

Matriz $\mathbf{P}_4$
Por el argumento del inciso anterior, el estado 0 es recurrente.

Sin embargo, el estado es transitorio (utilizando los resultados encontrados en el caso general). Lo cual nos dice que empezando en el estado 1 **no** es seguro que regresemos al estado 1 alguna vez.

El ejemplo más simple es cuando en el primer paso nos movemos del estado 1 al estado 0, y como el estado 0 es un estado absorbente, entonces nos quedamos ahí para siempre.
En otras palabras, si me muevo al estado 0, ya no es posible regresar al estado 1.

Accesibilidad y Comunicación

Dirémos que un estado y es **accesible** desde x si existe $n < +\infty$ tal que $P^n(x, y) > 0$ denotado como

$$x \longmapsto y$$

Además, dirémos que x se **comunica** con y si se cumple que ambos sean accesibles desde el otro. Es decir,

$$x \longmapsto y \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad y \longmapsto x$$

La comunicación entre el estado x y el estado y se denota como $x \longleftrightarrow y$

Veamos un ejemplo de una cadena de Markov de espacio de estados 1,2,3 para consolidar los conceptos anteriores.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $P(1, 1) > 0$ y $P(1, 2) > 0$, entonces $1 \longmapsto 1$ y $1 \longmapsto 2$
Notemos que a pesar de que $P(1, 3) = 0$, el estado 3 es accesible desde el estado 1.
Un ejemplo de la trayectoria sería $P(1, 2)P(2, 3) > 0$, por lo que en $n = 2$ la cadena pasó del estado 1 al estado 3, lo que implica que $1 \longmapsto 3$

Observemos que todos los estados pueden ser visitados desde el estado 2, es decir, $2 \longmapsto x \ \forall x$

Finalmente notemos que partiendo del estado 3 sólo nos podemos ir nuevamente el estado 3, es decir, $3 \longmapsto 3$

¿Qué estados se comunican?

Con lo anterior, es posible identificar que el estado 1 se comunica con 2 ($1 \longleftrightarrow 2$).
Esto es lo mismo que decir que 2 se comunica con 1 ($2 \longleftrightarrow 1$).

Además, el estado 3 se comunica consigo mismo ($3 \longleftrightarrow 3$).

Afirmación

Si un estado x es absorbente, entonces x se comunica consigo mismo

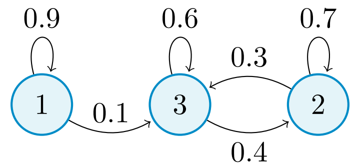
Sea la cadena de Markov de 2 estados vista en clase.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Es evidente que si $0 < a$ y $0 < b$, entonces ambos estados se comunican ($0 \longleftrightarrow 1$)
Además, si $a = 0$ o $b = 0$, entonces sucede que $0 \longleftrightarrow 0$ y $1 \longleftrightarrow 1$

Sea X_n una cadena de markov (homogénea) con la siguiente matriz estocástica $\mathbf{P}$ con espacio de estados $S = \{1, 2, 3\}$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$



Clases de comunicación

Veamos primero qué estados se comunican entre si. Sin mucha dificultad, podemos afirmar que $1 \longleftrightarrow 1$ debido a que $P(1,1) > 0$. Además, ocurre que $2 \longrightarrow 3$ y $3 \longrightarrow 2$ por lo que $2 \longleftrightarrow 3$.

Por lo tanto, podemos decir que existen 2 clases cerradas

$$\mathcal{C}_1 = \{1\} \qquad\qquad \mathcal{C}_2 = \{2, 3\}$$

Recurrencia y transitoriedad

$$\rho_{1,1} = P_1(T_1 < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} P_1(T_1 = k) = 0.9 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 0.9 < 1$$

$$\begin{aligned}
\rho_{2,2} = P_2(T_2 < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_2(T_2 = k) \\
&= (0.7) + (0.3)(0.4) + (0.3)(0.6)(0.4) + (0.3)(0.6)^2(0.4) + (0.3)(0.6)^3(0.4) + (0.3)(0.6)^4(0.4) + \cdots \\
&= (0.7) + (0.3)(0.4)[1 + (0.6) + (0.6) + (0.6) + (0.6)^4 + \cdots] \\
&= (0.7) + (0.3)(0.4)\left[\frac{1}{1 - 0.6}\right] \\
&= (0.7) + \frac{(0.3)(0.4)}{0.4} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{3,3} = P_3(T_3 < \infty) &= \sum_{k=1}^{\infty} P_3(T_3 = k) \\
&= (0.6) + (0.4)(0.3) + (0.4)(0.7)(0.3) + (0.4)(0.7)^2(0.3) + (0.4)(0.7)^3(0.3) + (0.4)(0.7)^4(0.3) + \cdots \\
&= (0.6) + (0.4)(0.3)[1 + (0.7) + (0.7) + (0.7) + (0.7)^4 + \cdots] \\
&= (0.6) + (0.4)(0.3)\left[\frac{1}{1 - 0.7}\right] \\
&= (0.6) + \frac{(0.4)(0.3)}{0.3} = 1
\end{aligned}$$

Por lo anterior, tenemos que el estado 1 es transitorio, mientras que los estados 2 y 3 son recurrentes.

Número de visita

Recordemos que

$$G(x,y) := \mathbb{E}_x(N(y)) = \sum_{k=1}^{\infty} P^k(x,y)$$

Lo anterior nos regresa el número de visitas al estado y iniciando desde el estado x. Otra forma para identificar si un estado es recurrente o transitorio, es justamente contar el número de visita.

Dirémos que el estado x es recurrente si $G(x,x) = \infty$, y en caso de que $G(x,x) < \infty$ entonces será transitorio.

Para lograr lo anterior, notemos que debemos elevar a la matriz $\mathbf{P}$ a la potencia n. Sin embargo, tenemos un resultado útil que se demostrará al final del documento.

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{y,y}} & \text{Si } \rho_{y,y} < 1 \\ \infty & \text{Si } \rho_{y,y} = 1 \end{cases}$$

Esto indica que si un estado z es recurrente, entonces lo visitará una cantidad infinita veces. Calculemos $G(x,x)$ para $x \in \{1,2,3\}$.

$$G(1,1) = \mathbb{E}_1(N(1)) = \frac{\rho_{1,1}}{1-\rho_{1,1}} = \frac{0.9}{1-0.9} = \frac{0.9}{0.1} = 9$$

$$G(2,2) = \infty \qquad\qquad G(3,3) = \infty$$

Por último notemos que $\rho_{2,1} = 0$ y $\rho_{3,1} = 0$, lo que implica que $G(2,1) = 0$ y $G(3,1) = 0$

Este resultado es útil para nosotros debido a que $\rho_{x,x}$ es en general complicado, aunque podríamos hacerlo por la primera definición.
Sin embargo, necesitarémos más resultados posteriores y algunos otros de álgebra lineal.

La siguiente pregunta se queda al alumno a modo de ejercicio.
¿Cuánto valdría $G(2,3)$ y $G(3,2)$?

Demostración

A continuación se mostrará que

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{y,y}} & \text{Si } \rho_{y,y} < 1 \\ \infty & \text{Si } \rho_{y,y} = 1 \end{cases}$$

Por resultados anteriores, tenemos que

$$P_x(N(y) \geq 1) = P_x(T_y < \infty) \qquad P_x(N(y) \geq 2) = \rho_{x,y}\rho_{y,y} \qquad P_x(N(y) \geq 3) = \rho_{x,y}\rho_{y,y}^2$$

y en general

$$P_x(N(y) \geq n) = \rho_{x,y}\rho_{y,y}^{n-1} \qquad \text{Para } n \geq 1$$

Además,

$$\begin{aligned} P_x(N(y) = n) &= P_x(N(y) \geq n) - P_x(N(y) \geq n+1) \\ &= \rho_{x,y}\rho_{y,y}^{n-1} - \rho_{x,y}\rho_{y,y}^{n} \\ &= \rho_{x,y}\rho_{y,y}^{n-1}(1-\rho_{y,y}) \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \mathbb{E}_x(N(y)) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} kP_x(N(y) = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k\rho_{x,y}\rho_{y,y}^{k-1}(1-\rho_{y,y}) \\ &= \rho_{x,y}(1-\rho_{y,y})\sum_{k=1}^{\infty} k\rho_{y,y}^{k-1} \\ &= \rho_{x,y}(1-\rho_{y,y})\frac{1}{(1-\rho_{y,y})^2} \qquad \text{Si } \rho_{y,y} < 1 \\ &= \frac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{y,y}} \end{aligned}$$

Es decir, $G(x,y) = \dfrac{\rho_{x,y}}{1-\rho_{y,y}}$ siempre que $\rho_{y,y} < 1$.

En caso de que $\rho_{y,y} = 1$ la serie anterior diverge y por lo tanto, $G(x,y) = \infty$

Clases de Comunicación

Recordemos que dos estados x y y se comunican si $\exists\, n \geq 0$, $m \geq 0$ tal que $P^n(x,y) > 0$ y $P^m(y,x) > 0$.

Observemos que estamos considerando el caso cuando el número de pasos es igual a 0, lo cual implica que un estado siempre se comunica consigo mismo.

Se dice que una cadena de Markov es **irreducible** si todos sus estados se comunican entre si.
En caso contrario, la cadena es **reducible**.

Afirmación

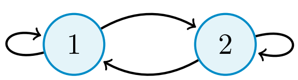
Una cadena es irreducible si tiene únicamente una clase de comunicación.

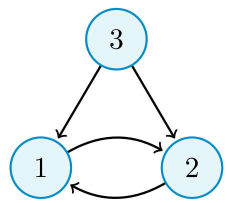
Clases Cerradas

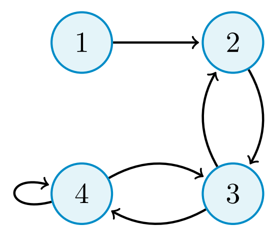
Como se comentó anteriormente, la comunicación induce una partición sobre el espacio de estados S.
Mas aún, las clases de equivalencia de la relación de comunicación $S/\longleftrightarrow$ se denominan clases cerradas.

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con espacio de estados S y C una colección de estados no vacía.
Se dice que C es **cerrada** si ningún estado fuera de C es accesible desde algún estado dentro de C.

Observemos los siguientes diagramas. Sin mucha dificultad, se pueden ver la comunicación entre estados.







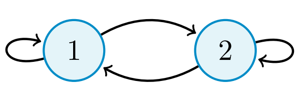
Notemos que la primer cadena tiene una clase de comunicación, la segunda cadena tiene 2 clases de comunicación, mientras que la tercera tiene 3 clases de comunicación.

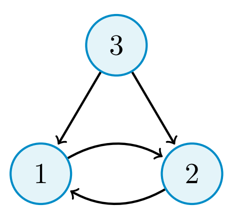
Proposición

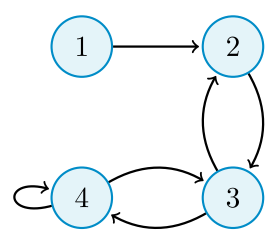
Toda clase cerrada e irreducible es una clase de comunicación.

Matrices de signos

Retomemos los diagramas anteriores







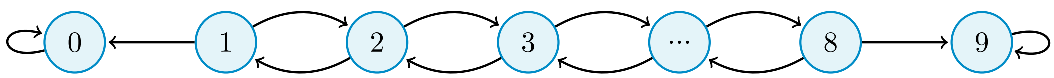
Otra manera de visualizar las clases de comunicación, es realizar una matriz de signos.
Esta es una matriz de $n \times n$ donde n es la cantidad de estados cuyas entradas son únicamente los signos $+$ y $-$.

Los signos representan la comunicación de un estado con otro.
Si un estado x se comunica con el estado y, entonces se colocará un signo $+$ en la entrada de la matriz $M(x, y)$.
En caso de que no se comuniquen, se procederá a colocar un signo $-$.

Veamos las matrices de signos de los diagramas anteriores.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} + & + & - \\ + & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} + & - & - & - \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \\ - & + & + & + \end{pmatrix}$$

Veamos un ejemplo más, en este caso, la Cadena de la Ruina del Jugador con $N = 9$.



Observemos ambas matrices y determine cuál de ellas es la matriz de signos correcta.

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} + & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & - & - & - & - & - \\ - & + & - & + & - & - & - & - & - & - \\ - & - & + & - & + & - & - & - & - & - \\ - & - & - & + & - & + & - & - & - & - \\ - & - & - & - & + & - & + & - & - & - \\ - & - & - & - & - & + & - & + & - & - \\ - & - & - & - & - & - & + & - & + & - \\ - & - & - & - & - & - & - & + & - & + \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & + \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} + & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & + & + & + & + & + & + & + & + & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & + \end{pmatrix}$$

Notemos que esta cadena tiene 3 una clases de comunicación.
Se puede probar, sin mucha dificultad, que 2 de ellas son recurrentes y 1 de ellas es transitoria.

Realicemos las siguientes observaciones sobre las matrices de signos

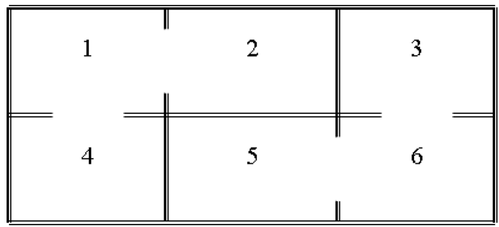
a) Siempre existirá un signo $+$ sobre la diagonal
b) La matriz de signos es simétrica
c) Los signos indican que existe algún $n \geq 0$ tal que pasan de un estado a otro, no necesariamente en un paso

Se le recomienda al alumno que realice los diagramas y matrices de signo de las siguientes cadenas de markov

a) Caminata Aleatoria
b) Cadena de Rachas
c) Cadena de la Ruina del Jugador (donde cada apuesta es de \$3)
d) Cadena de Ehrenfest
e) Cadena del ejercicio 4 de la tarea 1 (Sacar dos pelotas, una de cada urna diferente e intercambiarlas)
f) Cadena del ejercicio 6 de la tarea 1 (Algoritmo de búsqueda del estado 0)

Ratón en el laberinto

Imagine que en cierto laboratorio, se está estudiando el comportamiento de un ratón.
Para ello, se introduce el ratón dentro de un laberinto como el siguiente



Consideremos lo siguiente

- El ratón se mueve a otra celda en un intervalo de tiempo constante.
- La probabilidad de ir a otra celda es uniforme al número de celdas a las que puede acceder en ese momento.
- La cadena de Markov anterior es homogénea.

Además, considere dos posibles situaciones

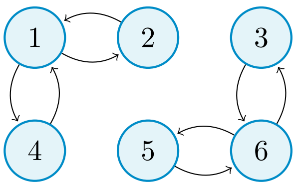
a) Suponga que **NO** puede quedarse en la celda donde se encuentra.
b) Suponga que **SI** puede quedarse en la celda donde se encuentra.

Finalmente, realice lo siguiente para cada uno de las siguientes situaciones-

a) Realice el diagrama de la cadena.
b) Determine la matriz de transición en un paso **P**
c) Determine la matriz de signos **M**
d) Concluya cuántas clases de comunicación existen y si la cadena de Markov es irreducible.
e) ¿Cuántos estados son recurrentes y cuántos de ellos transitorios?
f) ¿Puede dar una forma general de $\mathbf{P}^n$?

Situación 1

Para este caso, el diagrama, matriz de transición y matriz de signos es la siguiente.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & - & + & - & - \\ + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & - & + & + \\ + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & - & + & + \\ - & - & + & - & + & + \end{pmatrix}$$

Visualizando la matriz $\mathbf{M}$ es inmediato percatarse que existen 2 clases de comunicación

$$\mathcal{C}_1 = \{1, 2, 4\} \qquad \mathcal{C}_2 = \{3, 5, 6\}$$

Con esto, podemos concluir que la cadena de Markov no es irreducible.

Afirmamos que todos los estados son recurrentes. Por lo que hay 6 estados recurrentes y 0 estados transitorios.

A continuación se muestra la demostración de que dos de esos estados son recurrentes.

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} &= \mathbb{P}_1(T_1 < \infty) = \mathbb{P}_1(T_1 = 1) + \mathbb{P}_1(T_1 = 2) + \mathbb{P}_1(T_1 = 3) + \mathbb{P}_1(T_1 = 4) + \mathbb{P}_1(T_2 = 5) + \mathbb{P}_1(T_2 = 6) + \cdots \\ &= [0] + \left[\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1\right] + [0] + [0] + [0] + [0] + \cdots = 1 \end{aligned}$$

Veamos también que $\rho_{2,2} = 1$.

$$\begin{aligned} \rho_{2,2} &= \mathbb{P}_2(T_2 < \infty) = \mathbb{P}_2(T_2 = 1) + \mathbb{P}_2(T_2 = 2) + \mathbb{P}_2(T_2 = 3) + \mathbb{P}_2(T_2 = 4) + \mathbb{P}_2(T_2 = 5) + \mathbb{P}_2(T_2 = 6) + \cdots \\ &= [0] + \left[1 \cdot \frac{1}{2}\right] + [0] + \left[1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right] + [0] + \left[1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right] + [0] + \left[1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right] + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1 \end{aligned}$$

Veamos que esos son todos los casos necesarios, ya que estos procedimientos son similares para los demás estados.
Por ejemplo, calcular $\rho_{6,6}$ es análogo $\rho_{1,1}$ debido a que las probabilidades son las mismas.
Todos los demás ($\rho_{3,3}$, $\rho_{4,4}$, $\rho_{5,5}$) son análogos a $\rho_{2,2}$.

Calculemos las primeras potencias de $\mathbf{P}$ para hayar una forma exacta para $\mathbf{P}^n$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pareciera que

$$\mathbf{P}^n \text{ con n par} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^n \text{ con n impar} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero para dar una demostración formal, no basta con calcular las primeras potencias.
Realicemos la demostración por inducción.

NOTA

Podríamos demostrar que $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^{2n+1}$ y que $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
Sin embargo, demostrarémos que $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.
Con esto, demostramos las dos igualdades anteriores en un sólo paso, sin importar si n es par o impar.

Con los ejemplos anterior, ya tenemos la base de inducción. En otras palabras, tenemos que

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^3 \qquad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^4 \qquad \mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^5$$

Supongamos que $\mathbf{P}^{2n} = \mathbf{P}^{2n+2}$

Hay que demostrar que $\mathbf{P}^{2(n+1)} = \mathbf{P}^{2(n+1)+2}$

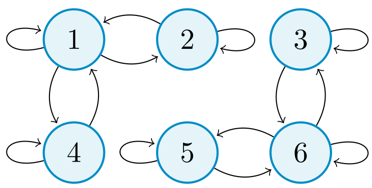
$$\mathbf{P}^{2(n+1)} = \mathbf{P}^{2n+2} = \mathbf{P}^{2n} \cdot \mathbf{P}^2 \overset{\text{H.I.}}{=} \mathbf{P}^{2n+2} \cdot \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^{2n+4} = \mathbf{P}^{2(n+1)+2}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\mathbf{P}^n = \begin{cases} \mathbf{P}^1 & \text{Si } n \in \{1, 3, 5, 7, 9, \cdots\} \\ \mathbf{P}^2 & \text{Si } n \in \{2, 4, 4, 6, 8, \cdots\} \end{cases}$$

Situación 2

Para este caso, el diagrama, matriz de transición y matriz de signos es la siguiente.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & - & + & - & - \\ + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & - & + & + \\ + & + & - & + & - & - \\ - & - & + & - & + & + \\ - & - & + & - & + & + \end{pmatrix}$$

Visualizando la matriz $\mathbf{M}$ es inmediato percatarse que existen 2 clases de comunicación

$$\mathcal{C}_1 = \{1, 2, 4\} \qquad \mathcal{C}_2 = \{3, 5, 6\}$$

Con esto, podemos concluir que la cadena de Markov no es irreducible.

Afirmamos que todos los estados son recurrentes. Por lo que hay 6 estados recurrentes y 0 estados transitorios.

Notemos que las clases de comunicación anteriores son clases cerradas, esto quiere decir que una vez estando dentro de alguno de los estados de la clase la probabilidad de salir es 0. Por otro lado, toda clase cerrada la podemos considerar como otra cadena de markov más pequeña.
Además, sabemos que cada cadena de markov con espacio de estados finito tiene al menos un estado recurrente, por lo que ambas clases cerradas tienen al menos un estado recurrente.
Más aún, sabemos que la propiedad de recurrencia es una propiedad de clase, por lo que si dos estados están dentro de la misma clase y uno de ellos es recurrente, necesariamente el otro estado también es recurrente.

Uniendo los argumentos anteriores, podemos concluir que todos los estados de la cadena de markov son estados recurrentes. Sin embargo, a continuación se muestra la demostración de que dos de esos estados son recurrentes.

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} &= \mathbb{P}_1(T_1 < \infty) = \mathbb{P}_1(T_1 = 1) + \mathbb{P}_1(T_1 = 2) + \mathbb{P}_1(T_1 = 3) + \mathbb{P}_1(T_1 = 4)\cdots \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\right] + 2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + 2\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] + \cdots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(2) = 1 \end{aligned}$$

Este mismo procedimiento sirve para calcular $\rho_{6,6}$, debido a que las probabilidades son las mismas.

$$\begin{aligned} \rho_{6,6} &= \mathbb{P}_6(T_6 < \infty) = \mathbb{P}_6(T_6 = 1) + \mathbb{P}_6(T_6 = 2) + \mathbb{P}_6(T_6 = 3) + \mathbb{P}_6(T_6 = 4)\cdots \\ &= \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \cdots = 1 \end{aligned}$$

Hasta este punto, hemos demostrado que tanto el estado 1 como el estado 6 son recurrentes. Es posible demostrar que los demás estados son recurrentes usando la definición y realizando las operaciones correspondientes.

Lo anterior queda en manos del estudiante usando $\rho_{x,x}$, aunado a dar una forma exacta para $\mathbf{P}^n$

Ejercicios

Instrucciones

A continuación mostraremos algunas cadenas de markov y realizaremos lo siguiente para cada una de ellas.

a) Diagrama de la cadena de Markov.
b) Determinar la matriz de transición en un paso $\mathbf{P}$
c) Determinar la matriz de signos $\mathbf{M}$
d) Determinar el número de clases de comunicación
e) Determinar el número de clases cerradas
f) Determinar si la cadena de Markov es irreducible.
g) ¿Cuántos estados son recurrentes y cuántos de ellos transitorios?
h) ¿Puede dar una forma general de $\mathbf{P}^n$?

Ejercicio 1

Sea X_n una cadena de Markov con espacio de estados discreta y homogénea con la siguiente matriz de transición:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend right] & 3 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

La cadena anterior tiene 1 clase de comunicación, por ende la cadena es irreducible.
Además, la clase de comunicación anterior es una clase cerrada.

Podemos demostrar, sin mucha dificultad, que todos los estados son recurrentes (3 recurrentes y 0 transitorios) Nos podemos apoyar de los enunciados vistos que nos afirman que en cada cadena con espacio de estados finito tiene al menos un estado recurrente y del hecho de que la recurrencia es una propiedad de clase. Al estar todos los estados comunicados, todos los estados son recurrentes.

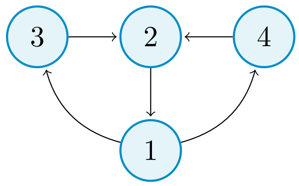
$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1-p & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar por inducción que

$$\mathbf{P}^n = \begin{cases} \mathbf{P}^1 & \text{Si } n \in \{1,3,5,7,9,\cdots\} \\ \mathbf{P}^2 & \text{Si } n \in \{2,4,6,8,10,\cdots\} \end{cases}$$

Ejercicio 2

Sea X_n una cadena de Markov con espacio de estados discreta y homogénea con la siguiente matriz de transición:



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{pmatrix}$$

La cadena anterior tiene 1 clase de comunicación, por ende la cadena es irreducible.
Además, la clase de comunicación anterior es una clase cerrada.

Podemos demostrar, sin mucha dificultad, que todos los estados son recurrentes (4 recurrentes y 0 transitorios) Nos podemos apoyar de los enunciados vistos que nos afirman que en cada cadena con espacio de estados finito tiene al menos un estado recurrente y del hecho de que la recurrencia es una propiedad de clase. Al estar todos los estados comunicados, todos los estados son recurrentes.

$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

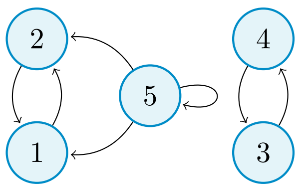
$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar por inducción que

$$\mathbf{P}^n = \begin{cases} \mathbf{P}^1 & \text{Si } n \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16, \cdots\} \\ \mathbf{P}^2 & \text{Si } n \in \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \cdots\} \\ \mathbf{P}^3 & \text{Si } n \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, \cdots\} \end{cases}$$

Ejercicio 3

Sea X_n una cadena de Markov con espacio de estados discreta y homogénea con la siguiente matriz de transición:



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & - & - & - \\ + & + & - & - & - \\ - & - & + & + & - \\ - & - & + & + & - \\ - & - & - & - & + \end{pmatrix}$$

La cadena anterior tiene 3 clase de comunicación, por ende la cadena es irreducible.
Sin embargo, existen solamente existen 2 clases cerradas. Podemos decir, informalmente, que la clase que contiene al estado 5 es abierta.

Podemos demostrar, sin mucha dificultad, que hay 4 recurrentes y 1 transitorio.
Donde el estado 5 es el estado transitorio, y el resto son los recurrentes.

$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 3/8 & 3/8 & 0 & 0 & 2/8 \end{pmatrix} \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 7/16 & 7/16 & 0 & 0 & 2/16 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 15/32 & 15/32 & 0 & 0 & 2/32 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 31/64 & 31/64 & 0 & 0 & 2/64 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar por inducción que

$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ (2^n-1)/(2^{n+1}) & (2^n-1)/(2^{n+1}) & 0 & 0 & 2/(2^{n+1}) \end{pmatrix}$$

Más importante, veamos que sucede en el estado 5.
¿Que ocurre con $(2^n-1)/(2^{n+1})$ y con $2/(2^{n+1})$ cuando $n \to \infty$.?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2^{n+1}} = 0$$

Entonces, ¿Qué ocurre sin queremos calcular $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$? ¿Qué significado le pueden dar a la matriz siguiente?

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Probabilidades de Absorción

Sea C una clase cerrada de estados recurrentes y sea $\rho_C(x) = \mathbb{P}_x(T_C < \infty)$ la probabilidad de que la cadena de Markov llegue al conjunto C en un tiempo finito de pasos empezando desde el estado x.

Una vez que la cadena llega a C no podrá escapar, debido a que C es una clase cerrada. Por lo tanto, podemos pensar a $\rho_C(x)$ como la probabilidad de que la cadena sea **absorbida** por el conjunto C empezando en el estado x.

Denotemos como S_T al conjunto de estados transitorios ($S_T \subseteq S$ el espacio de estados)
Claramente $\rho_C(x) = 1$ si $x \in C$, y también $\rho_C(x) = 0$ si x es un estado recurrente con $x \notin C$

Para entender el razonamiento de la fórmula, pensemos que puede suceder con la cadena si empezamos en $x \in S_T$.
En el primer paso, la cadena puede estar en C, o puede continuar en S_T y llegar a C en pasos más adelante.
El primer evento tiene probabilidad $\sum_{y \in C} P(x,y)$ y el segundo evento tiene probabilidad $\sum_{y \in S_T} P(x,y) \cdot \rho_C(y)$.

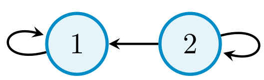
Por lo tanto, la fórmula queda de la siguiente manera

$$\rho_C(x) = \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in S_T} P(x,y) \cdot \rho_C(y) \qquad\qquad \forall\ x \in S_T$$

No siempre es fácil calcular $\rho_C(x)$ para x estados transitorios, pero si el número de estados transitorios es finito, siempre es posible calcular $\rho_C(x)$ resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

La fórmula funciona para S_T finito o infinito, pero en el caso infinto puede que la solución no sea única.

Ejemplo 1



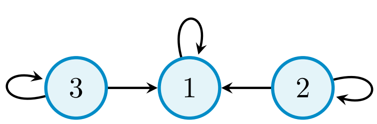
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/10 & 9/10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & - \\ - & + \end{pmatrix}$$

Tenemos que $C = \{1\}$ y $S_T = \{2\}$ para este ejemplo.

$$\begin{aligned} \rho_{\{1\}}(2) &= P(2,1) + P(2,2) \cdot \rho_{\{1\}}(2) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \rho_{\{1\}}(2) \end{aligned}$$

Lo anterior nos da una ecuación con una incógnita. Aplicando álgebra obtenemos que $\rho_{\{1\}}(2) = 1$

Ejemplo 2



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & - & - \\ - & +- & \\ - & - & + \end{pmatrix}$$

Tenemos que $C = \{1\}$ y $S_T = \{2, 3\}$ para este ejemplo.

Calculemos $\rho_{\{1\}}(2)$

$$\begin{aligned} \rho_{\{1\}}(2) &= P(2,1) + P(2,2) \cdot \rho_{\{1\}}(2) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \rho_{\{1\}}(2) \end{aligned}$$

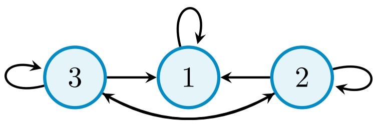
Calculemos $\rho_{\{1\}}(3)$

$$\begin{aligned} \rho_{\{1\}}(3) &= P(3,1) + P(3,3) \cdot \rho_{\{1\}}(3) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \rho_{\{1\}}(3) \end{aligned}$$

Nuevamente, cada una de ellas se puede resolver sin problema alguna.
Por lo que la probabilidad de ser absorbido por el estado 1 es igual a 1.

Ejemplo 3

Veamos que sucede si el estado 2 y el estado 3 se comunican.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{pmatrix}$$

Tenemos que $C = \{1\}$ y $S_T = \{2,3\}$ para este ejemplo.

Calculemos $\rho_{\{1\}}(2)$

$$\rho_{\{1\}}(2) = P(2,1) + \left[P(2,2)\cdot\rho_{\{1\}}(2) + P(2,3)\cdot\rho_{\{1\}}(3)\right]$$
$$\rho_{\{1\}}(2) = \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(2) + \frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(3)\right]$$

Calculemos $\rho_{\{1\}}(3)$

$$\rho_{\{1\}}(3) = P(3,1) + \left[P(3,3)\cdot\rho_{\{1\}}(3) + P(3,2)\cdot\rho_{\{1\}}(2)\right]$$
$$\rho_{\{1\}}(3) = \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(3) + \frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(2)\right]$$

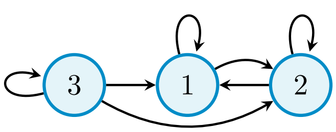
Para resolver ambos, debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned}\rho_{\{1\}}(2) &= \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(2) + \frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(3)\right]\\ \rho_{\{1\}}(3) &= \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(3) + \frac{1}{3}\cdot\rho_{\{1\}}(2)\right]\end{aligned}$$

Sin mucha dificultad, podemos confirmar que la solución a este sistema es $\rho_{\{1\}}(2) = \rho_{\{1\}}(3) = 1$

Ejemplo 4

Veamos que sucede si la clase cerrada tiene más de un estado.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/10 & 3/10 & 6/10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix}$$

Tenemos que $C = \{1,2\}$ y $S_T = \{3\}$ para este ejemplo.

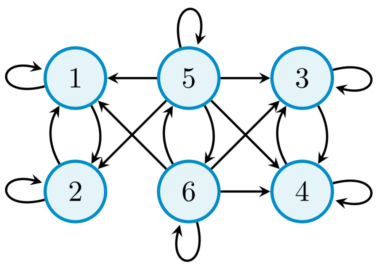
Calculemos $\rho_{\{1,2\}}(3)$

$$\begin{aligned}\rho_C(3) &= [P(3,1) + P(3,2)] + [P(3,3)\cdot\rho_C(3)]\\ &= \left[\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\right] + \left[\frac{6}{10}\cdot\rho_C(3)\right]\\ &= \frac{4}{10} + \frac{6}{10}\cdot\rho_C(3)\end{aligned}$$

El cual es similar a los ejemplos anteriores, y concluimos que $\rho_C(3) = 1$

Ejemplo 5

Veamos que ocurre con el siguiente ejemplo.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/7 & 2/7 & 0 & 0 \\ 1/9 & 2/9 & 1/9 & 3/9 & 1/9 & 1/9 \\ 2/8 & 0 & 1/8 & 2/8 & 2/8 & 1/8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - \\ - & - & + & + & - & - \\ - & - & + & + & - & - \\ - & - & - & - & + & - \\ - & - & - & - & - & + \end{pmatrix}$$

Observemos que ahora tenemos 2 clases cerradas, digamos $C_1 = \{1, 2\}, C_2 = \{3, 4\}$ y $S_T = \{5, 6\}$ para este ejemplo.

Calculemos la probabilidad de absorción de la clase C_1

Calculemos $\rho_{C_1}(5)$

$$\begin{aligned} \rho_{C_1}(5) &= [P(5,1) + P(5,2)] + [P(5,5) \cdot \rho_{C_1}(5) + P(5,6) \cdot \rho_{C_1}(6)] \\ &= \left[\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right] + \left[\frac{1}{9} \cdot \rho_{C_1}(5) + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_1}(6)\right] \\ &= \frac{3}{9} + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_1}(5) + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_1}(6) \end{aligned}$$

Calculemos $\rho_{C_1}(6)$

$$\begin{aligned} \rho_{C_1}(6) &= [P(6,1) + P(6,2)] + [P(6,5) \cdot \rho_{C_1}(5) + P(6,6) \cdot \rho_{C_1}(6)] \\ &= \left[\frac{2}{8} + 0\right] + \left[\frac{2}{8} \cdot \rho_{C_1}(5) + \frac{1}{8} \cdot \rho_{C_1}(6)\right] \\ &= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \cdot \rho_{C_1}(5) + \frac{1}{8} \cdot \rho_{C_1}(6) \end{aligned}$$

Lo que produce el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \rho_{C_1}(5) &= \frac{3}{9} + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_1}(5) + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_1}(6) \\ \rho_{C_1}(6) &= \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \cdot \rho_{C_1}(5) + \frac{1}{8} \cdot \rho_{C_1}(6) \end{aligned}$$

Si resolvemos el sistema llegaremos a la solución $\rho_{C_1}(5) = \dfrac{23}{54} \qquad \rho_{C_1}(6) = \dfrac{11}{27}$

Ahora calculemos la probabilidad de absorción de la clase C_2

Calculemos $\rho_{C_2}(5)$

$$\begin{aligned} \rho_{C_2}(5) &= [P(5,3) + P(5,4)] + [P(5,5) \cdot \rho_{C_2}(5) + P(5,6) \cdot \rho_{C_2}(6)] \\ &= \left[\frac{1}{9} + \frac{3}{9}\right] + \left[\frac{1}{9} \cdot \rho_{C_2}(5) + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_2}(6)\right] \\ &= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_2}(5) + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_2}(6) \end{aligned}$$

Calculemos $\rho_{C_2}(6)$

$$\begin{aligned}\rho_{C_2}(6) &= [P(6,3) + P(6,4)] + [P(6,5) \cdot \rho_{C_2}(5) + P(6,6) \cdot \rho_{C_2}(6)] \\ &= \left[\frac{1}{8} + \frac{2}{8}\right] + \left[\frac{2}{8} \cdot \rho_{C_2}(5) + \frac{1}{8} \cdot \rho_{C_2}(6)\right] \\ &= \frac{3}{8} + \frac{2}{8} \cdot \rho_{C_2}(5) + \frac{1}{8} \cdot \rho_{C_2}(6)\end{aligned}$$

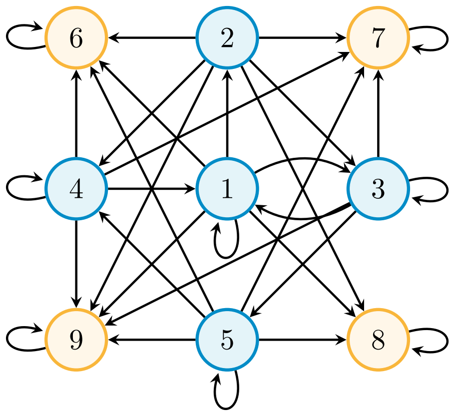
Lo que produce el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\rho_{C_2}(5) &= \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_2}(5) + \frac{1}{9} \cdot \rho_{C_2}(6) \\ \rho_{C_2}(6) &= \frac{3}{8} + \frac{2}{8} \cdot \rho_{C_2}(5) + \frac{1}{8} \cdot \rho_{C_2}(6)\end{aligned}$$

Si resolvemos el sistema llegaremos a la solución $\rho_{C_2}(5) = \dfrac{31}{54}$ y $\rho_{C_2}(6) = \dfrac{16}{27}$

Ejemplo 6

Veamos este último cuyos estados azules son estados transitorios y los estados amarillos son absorbentes.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/12 & 2/12 & 4/12 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 0 & 5/16 & 1/16 & 0 & 2/16 & 2/16 & 1/16 & 5/16 \\ 1/9 & 0 & 1/9 & 0 & 4/9 & 0 & 1/9 & 0 & 2/9 \\ 5/17 & 0 & 0 & 5/17 & 0 & 2/17 & 3/17 & 0 & 2/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tengamos 4 clases cerradas, cada una con un estado absorbente y 5 estados transitorios.

Calculemos la probabilidad de absorción por el estado 6

$$\begin{aligned} \rho_6(1) &= [P(1,6)] + [P(1,1)\cdot\rho_6(1) + P(1,2)\cdot\rho_6(2) + P(1,3)\cdot\rho_6(3) + P(1,4)\cdot\rho_6(4) + P(1,5)\cdot\rho_6(5)] \\ &= \frac{1}{12} + \frac{3}{12}\cdot\rho_6(1) + \frac{2}{12}\cdot\rho_6(2) + \frac{4}{12}\cdot\rho_6(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_6(2) &= [P(2,6)] + [P(2,1)\cdot\rho_6(1) + P(2,2)\cdot\rho_6(2) + P(2,3)\cdot\rho_6(3) + P(2,4)\cdot\rho_6(4) + P(1,5)\cdot\rho_6(5)] \\ &= \frac{2}{6} + \frac{5}{16}\cdot\rho_6(3) + \frac{1}{16}\cdot\rho_6(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_6(3) &= [P(3,6)] + [P(3,1)\cdot\rho_6(1) + P(3,2)\cdot\rho_6(2) + P(3,3)\cdot\rho_6(3) + P(3,4)\cdot\rho_6(4) + P(3,5)\cdot\rho_6(5)] \\ &= \frac{1}{9}\cdot\rho_6(1) + \frac{1}{9}\cdot\rho_6(3) + \frac{4}{9}\cdot\rho_6(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_6(4) &= [P(4,6)] + [P(4,1)\cdot\rho_6(1) + P(4,2)\cdot\rho_6(2) + P(4,3)\cdot\rho_6(3) + P(4,4)\cdot\rho_6(4) + P(4,5)\cdot\rho_6(5)] \\ &= \frac{2}{17} + \frac{5}{17}\cdot\rho_6(1) + \frac{5}{17}\cdot\rho_6(4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_6(5) &= [P(5,6)] + [P(5,1)\cdot\rho_6(1) + P(5,2)\cdot\rho_6(2) + P(5,3)\cdot\rho_6(3) + P(5,4)\cdot\rho_6(4) + P(5,5)\cdot\rho_6(5)] \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\rho_6(4) + \frac{1}{6}\cdot\rho_6(5) \end{aligned}$$

Lo que produce el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho_6(1) &= \frac{1}{12} + \frac{3}{12}\cdot\rho_6(1) + \frac{2}{12}\cdot\rho_6(2) + \frac{4}{12}\cdot\rho_6(3) \\ \rho_6(2) &= \frac{2}{6} + \frac{5}{16}\cdot\rho_6(3) + \frac{1}{16}\cdot\rho_6(4) \\ \rho_6(3) &= \frac{1}{9}\cdot\rho_6(1) + \frac{1}{9}\cdot\rho_6(3) + \frac{4}{9}\cdot\rho_6(5) \\ \rho_6(4) &= \frac{2}{17} + \frac{5}{17}\cdot\rho_6(1) + \frac{5}{17}\cdot\rho_6(4) \\ \rho_6(5) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\rho_6(4) + \frac{1}{6}\cdot\rho_6(5) \end{aligned}$$

Cuya solución es

$$\rho_6(1) = \frac{869}{3925} \qquad \rho_6(2) = \frac{297}{1570} \qquad \rho_6(3) = \frac{2411}{15700} \qquad \rho_6(4) = \frac{813}{3140} \qquad \rho_6(5) = \frac{3953}{15700}$$

Si repetimos el mismo procedimiento para generar los sistemas de ecuacioness, al resolverlos tendríamos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc}
\rho_7(1) = \frac{138}{785} & \rho_7(2) = \frac{73}{314} & \rho_7(3) = \frac{877}{3140} & \rho_7(4) = \frac{203}{628} & \rho_7(5) = \frac{831}{3140} \\
\rho_8(1) = \frac{762}{3925} & \rho_8(2) = \frac{171}{1570} & \rho_8(3) = \frac{1039}{7850} & \rho_8(4) = \frac{127}{1570} & \rho_8(5) = \frac{1697}{7850} \\
\rho_9(1) = \frac{1604}{3925} & \rho_9(2) = \frac{737}{1570} & \rho_9(3) = \frac{3413}{7850} & \rho_9(4) = \frac{529}{1570} & \rho_9(5) = \frac{2099}{7850}
\end{array}$$

Debemos observar que las $\rho_6(1)+\rho_6(2)+\rho_6(3)+\rho_6(4)+\rho_6(5) \neq 1$. Sin embargo, $\rho_6(1)+\rho_7(1)+\rho_8(1)+\rho_9(1) = 1$.

La probabilidad de absorción debe pensarse como una función de densidad que depende del estado actual.

En otras palabras, la probabilidad de absorción debe pensarse como, *sabiendo que estás en un estado ¿Cuál es la probabilidad de que seas absorbido por alguna clase cerrada?* Que no debe confundirse con, *sabiendo que estoy absorbido por la clase cerrada, ¿Cuál es la probabilidad de haber llegado por el estado x?*

Se le encomienda al lector que realice los sistemas de ecuaciones restantes y los resuelva. En el script de R que se encuentra en la página encontrarán la solución por métodos numéricos que coincide con la solución aquí mostrada.

Distribución Estacionaria

Sea X_n una cadena de Markov con espacio de estados $\{1,2,3,4,\cdots\}$, matriz de transición $\mathbf{P}$ y distribución inicial $\pi_0 = (\pi_0(1), \pi_0(2), \pi_0(3), \cdots)$. La distribución de X_1 está dada por $\pi_1 = (\pi_0(1), \pi_0(2), \pi_0(3), \cdots)$ en donde

$$\pi_1(k) = \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) = \sum_{i=1}^{n} \pi_0(i) P(i,k)$$

O bien

$$(\pi_1(1), \pi_1(2), \pi_1(3), \cdots) = (\pi_0(1), \pi_0(2), \pi_0(3), \cdots) \cdot \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Que puede ser expresado en forma vectorial como $\pi_1 = \pi_0 \cdot \mathbf{P}$. Y en general $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot \mathbf{P}$

Sin mucha dificultad, puede mostrarse que $\pi_{n+1} = \pi_0 \cdot \mathbf{P}^{n+1}$

Tenemos entonces, una sucesión distribuciones $\{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \cdots\}$.
Una pregunta natural que podemos hacernos es ¿Esta sucesión converge? En general, la respuesta es no.
Sin embargo, existen condiciones para que esto sea afirmativo.

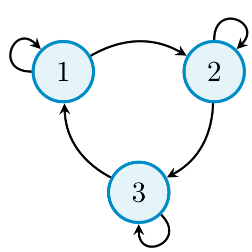
Definición
Una distribución de probabilidad π es estacionaria o invariante si para la cadena con matriz $\mathbf{P}$ se cumple que $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$

Observaciones

Una cadena puede

a) Tener una única distribución estacionaria
b) No tener ninguna distribución estacionaria
c) Tener una infinidad de distribuciones estacionarias

Ejemplo 1



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

Podemos resolver el sistema de ecuaciones $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$

$$(\pi(1), \pi(2), \pi(3)) = (\pi(1), \pi(2), \pi(3)) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

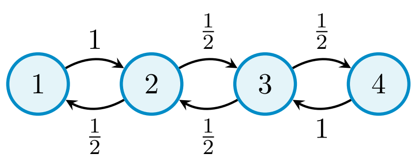
$$\pi(1) = \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{2}\pi(3)$$
$$\pi(2) = \frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{2}\pi(2)$$
$$\pi(3) = \frac{1}{2}\pi(3) + \frac{1}{2}\pi(3)$$

Al resolverlo, nos queda $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3)$.
Sin embargo recordemos que al ser una distribución de probabilidad, debe de cumplirse que $\pi(1)+\pi(2)+\pi(3) = 1$.

Por lo tanto, tenemos que $(\ \pi(1), \pi(2), \pi(3)\ ) = (\ 1/3, 1/3, 1/3\ )$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, 3\}$ con los estados 3 y 4 reflejantes.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{pmatrix}$$

Para encontrar una posible distribución estacionaria habría que resolver el sistema $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$

$$\pi(0) = \frac{1}{2}\pi(1) \qquad \pi(2) = \frac{1}{2}\pi(1) + \pi(3)$$
$$\pi(1) = \pi(0) + \frac{1}{2}\pi(2) \qquad \pi(3) = \frac{1}{2}\pi(2)$$

Considerando además que $\pi(k) \geq 0$ y que $\sum_{k=1}^{n} \pi(k) = 1$, obtenemos que

$$(\ \pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3)\ ) = (\ 1/6, 2/6, 2/6, 1/6\ )$$

Ejemplo 3

Consideremos la matriz de 2 estados vista en clase. Supongamos que a ni b son iguales a cero ni uno.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Para encontrar una posible distribución estacionaria habría que resolver el sistema $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$

$$\pi(0) = \pi(0) \cdot (1-a) + \pi(1) \cdot b$$
$$\pi(1) = \pi(0) \cdot a + \pi(1) \cdot (1-b)$$

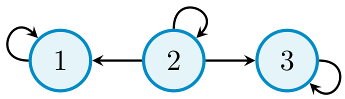
Por la primer ecuación se obtiene que $\pi(1) = \dfrac{a}{b} \cdot \pi(0)$. Debido a que $\pi(0) + \pi(1) = 1$, entonces

$$1 = \pi(0) + \pi(1) = \pi(0) + \frac{a}{b} \cdot \pi(0) = \frac{a+b}{b} \cdot \pi(0) \quad \Rightarrow \quad \pi(0) = \frac{b}{a+b} \quad \Rightarrow \quad \pi(1) = \frac{a}{a+b}$$

Donde obtenemos que $(\ \pi(0), \pi(1)\ ) = \left(\dfrac{b}{a+b}, \dfrac{a}{a+b} \right)$ siempre que $a + b > 0$

Ejemplo 4

Consideremos la siguiente cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2, 3\}$



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix}$$

Observemos que existen 3 clases de comunicación, de las cuales 2 de ellas son cerradas.

Resolvamos el sistema $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$ considerando $\pi(k) \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{n} \pi(k) = 1$

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(1) + \frac{1}{3} \cdot \pi(2) \\ \pi(2) &= \frac{1}{3} \cdot \pi(2) \\ \pi(3) &= \frac{1}{3} \cdot \pi(2) + \pi(3) \end{aligned}$$

De (2) tenemos que $\pi(2) = 0$, por lo que el sistema se reduce al siguiente

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(1) \\ \pi(3) &= \pi(3) \end{aligned}$$

Como debe cumplirse que $\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) = 1$, entonces tenemos que

$$(\ \pi(1), \pi(2), \pi(3)\ ) = (\ \alpha, 0, 1 - \alpha\ )$$

es una distribución estacionaria para $\alpha \in [0, 1]$

Por lo tanto, esta cadena de Markov tiene una cantidad infinita de distribuciones estacionarias.

Ejemplo 5

Queda al lector demostrar que la caminata aleatoria simple vista en clase no tiene ninguna distribución estacionaria.

Resultados de distribuciones estacionarias

Sean π y π' dos distribuciones estacionarias distintas para una cadena de Markov, entonces se cumplen los siguientes resultados

a) $\alpha \cdot \pi + (1 - \alpha) \cdot \pi'$ también es una distribución estacionaria ($\alpha \in [0, 1]$)

b) Si el estado k es un estado transitorio o recurrente nulo, entonces $\pi(k) = 0$

Distribución Límite

Recordemos que π_k es la distribución que tiene la cadena en el tiempo k (esto es X_k) con π_0 la distribución inicial. La distribución límite de una cadena de Markov se define como $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$ y se denota como π_∞.
Esta distribución tiene sentido definirla cuando la cadena de Markov tiene una única clase cerrada.

En clases anteriores, logramos obtener la igualdad $\pi_n = \pi_0 \cdot \mathbf{P}^n$. Si la distribución límite existe, y apoyándonos del Teorema de Convergencia Dominada, podemos decir que

$$\pi_n = \pi_0 \cdot \mathbf{P}^n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \pi_n = \pi_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$$

Propiedades de la distribución límite

Sea $\{X_n\}$ una cadena de Markov con probabilidades de transición $P(i,j)$ tales que el límite $\pi_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} P^n(i,j)$ existe para todo estado j y no depende del estado i, entonces se cumple lo siguiente

Si la cadena tiene espacio de estados **finito**

a) $\sum_{k=1}^{n} \pi_\infty(k) = 1$
b) $\pi_\infty(k) = \sum_{i=1}^{n} \pi_\infty(i) \cdot P(i,k)$

Si la cadena tiene espacio de estados **infinito**

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_\infty(k) \leq 1$
b) $\pi_\infty(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_\infty(i) \cdot P(i,k)$

La primer propiedad nos indica si la distribución límite es una distribución de probabilidad, mientras que la segunda propiedad nos indica que la distribución límite es una distribución estacionaria.

Observemos que la distribución límite podría no ser una distribución de probabilidad al no sumar 1.

Además, Si el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ existe, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \lim_{n\to\infty} P^n(0,0) & \lim_{n\to\infty} P^n(0,1) & \cdots \\ \lim_{n\to\infty} P^n(1,0) & \lim_{n\to\infty} P^n(1,1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_\infty(0) & \pi_\infty(1) & \cdots \\ \pi_\infty(0) & \pi_\infty(1) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Consideremos la matriz de 2 estados vista en clase. Supongamos que a ni b son iguales a cero ni uno.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Calculemos la distribución límite encontrando $\mathbf{P}^n$. Primero calculemos $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) \cdot P(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) \cdot P(X_n = 1) \\ &= (1-a) \cdot P(X_n = 0) + b \cdot P(X_n = 1) \\ &= (1-a) \cdot P(X_n = 0) + b \cdot [1 - P(X_n = 0)] \\ &= (1-a-b) \cdot P(X_n = 0) + b \end{aligned}$$

Veamos para los primeros valores de n

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 0) &= (1-a-b)\cdot P(X_0 = 0) + b \\
&= (1-a-b)\cdot \pi_0(0) + b \\
\mathbb{P}(X_2 = 0) &= (1-a-b)\cdot P(X_1 = 0) + b \\
&= (1-a-b)\cdot [(1-a-b)\cdot \pi_0(0) + b] + b \\
&= (1-a-b)^2\cdot \pi_0(0) + b + b\cdot(1-a-b) \\
\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) &= (1-a-b)^n\cdot \pi_0(0) + b\sum_{k=1}^{n-1}(1-a-b)^k
\end{aligned}$$

Sabemos además que

$$\sum_{k=1}^{n-1}(1-a-b)^k = \frac{1-(1-a-b)^n}{a+b}$$

Por lo que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = (1-a-b)^n\cdot \pi_0(0) + b\cdot\frac{1-(1-a-b)^n}{a+b}$$

Y reacomodando, finalmente nos queda

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{b}{a+b} + (1-a-b)^n\cdot\left(\pi_0(0) - \frac{b}{a+b}\right) \tag{1}$$

De manera similar, podemos obtener que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{a}{a+b} + (1-a-b)^n\cdot\left(\pi_0(1) - \frac{a}{a+b}\right) \tag{2}$$

Como supusimos que a ni b son iguales a cero ni uno, tenemos que

$$0 < a+b < 2 \quad\Rightarrow\quad 0 > -a-b > -2 \quad\Rightarrow\quad 1 > 1-a-b > -1 \quad\Rightarrow\quad |1-a-b| < 1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}(1-a-b)^n = 0$$

Lo que nos lleva a concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{b}{a+b} \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{a}{a+b}$$

Además, podemos calcular $\mathbb{P}^n(x,y)$ considerando las ecuaciones (1) y (2).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^n(0,0) &= \frac{b}{a+b} + (1-a-b)^n\cdot\frac{a}{a+b} & \qquad \mathbb{P}^n(0,1) &= \frac{a}{a+b} - (1-a-b)^n\cdot\frac{a}{a+b} \\
\mathbb{P}^n(1,0) &= \frac{b}{a+b} - (1-a-b)^n\cdot\frac{b}{a+b} & \qquad \mathbb{P}^n(1,1) &= \frac{a}{a+b} + (1-a-b)^n\cdot\frac{b}{a+b}
\end{aligned}$$

Finalmente, esto implica que

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \qquad\Rightarrow\qquad \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$$

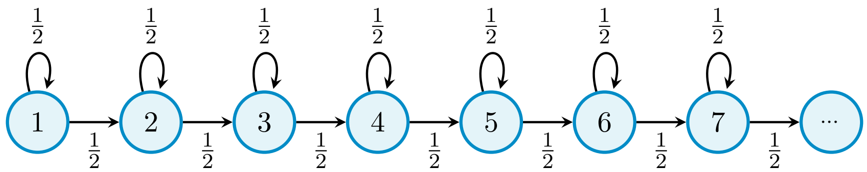
A la matriz $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n$ se le conoce como la matriz límite.

Por lo tanto, tenemos que

$$\pi_\infty = (\pi_\infty(0), \pi_\infty(1)) = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$$

Ejemplo 2

Consideremos la siguiente cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}$



Podemos mostrar una parte de la función de transición, así como la matriz de signos

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & - & - & - & - & - & \cdots \\ - & + & - & - & - & - & \cdots \\ - & - & + & - & - & - & \cdots \\ - & - & - & + & - & - & \cdots \\ - & - & - & - & + & - & \cdots \\ - & - & - & - & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Intentemos calcular las primeras potencias de $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} (1/2)^2 & 2(1/2)^2 & (1/2)^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & (1/2)^2 & 2(1/2)^2 & (1/2)^2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & (1/2)^2 & 2(1/2)^2 & (1/2)^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & (1/2)^2 & 2(1/2)^2 & (1/2)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)^2 & 2(1/2)^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)^2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} (1/2)^3 & 3(1/2)^3 & 3(1/2)^3 & (1/2)^3 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & (1/2)^3 & 3(1/2)^3 & 3(1/2)^3 & (1/2)^3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & (1/2)^3 & 3(1/2)^3 & 3(1/2)^3 & (1/2)^3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & (1/2)^3 & 3(1/2)^3 & 3(1/2)^3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)^3 & 3(1/2)^3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/2)^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Se puede mostrar sin mucha dificultad que $\lim\limits_{n\to\infty} P^n(i,j) = 0 \quad \forall\ i, j \in S$

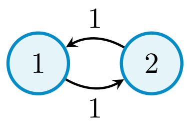
Por lo tanto, tenemos que

$$\pi_\infty = (\ \pi_\infty(1), \pi_\infty(2), \pi_\infty(3), \pi_\infty(4), \pi_\infty(5), \cdots\ ) = (\ 0, 0, 0, 0, 0, \cdots\ )$$

Hemos llegado al ejemplo en el que la distribución límite existe, pero no es una distribución de probabilidad.

Ejemplo 3

Consideremos la siguiente cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2\}$



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces que

$$\mathbf{P}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede demostrar por inducción que

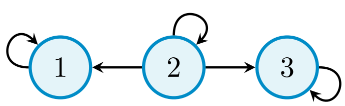
$$\mathbf{P}^n = \begin{cases} \mathbf{P}^1 & \text{Si } n \in \{1, 3, 5, 7, \cdots\} \\ \mathbf{P}^2 & \text{Si } n \in \{2, 4, 6, 8, \cdots\} \end{cases}$$

Con esto podemos afirmar que las probabilidades $P^n(i, j)$ toman valores alternadamente entre 0 y 1, por lo que sus límites no existen.

Conclusión, la distribución límite no existe en este caso.

Ejemplo 4

Consideremos la siguiente cadena de Markov con espacio de estados $\{1, 2, 3\}$ que vimos más arriba.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{pmatrix}$$

Veamos que

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1/9 & 4/9 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 13/27 & 1/27 & 13/27 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 40/81 & 1/81 & 40/81 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No es muy complicado de observar que

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1 - 1/3^n}{2} & 1/3^n & \dfrac{1 - 1/3^n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{P}^\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando la diagonal nos queda que $\pi_\infty = (\ \pi_\infty(1), \pi_\infty(2), \pi_\infty(3)\ ) = (\ 1, 0, 1\ )$
¿Qué ha sucedido? Esa distribución claramente no es de probabilidad, sin embargo, si es estacionaria.

De hecho, se puede demostrar que cualquier vector de la forma $(a, 0, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ es un vector estacionario.
Se omite la connotación de "distribución" pues no necesariamente son entradas en [0,1] tales que sumen 1.

Esta distribución límite tiene más sentido cuando se le aplica a Cadenas de Markov irreducibles.
Más particularmente a las clases cerradas, que está intimamente relacionado con el tiempo esperado promedio que pasa la cadena en un estado (μ_k)

Tiempo medio de recurrencia

Sea $\{X_n\}$ una Cadena de Markov, y j un estado recurrente de dicha cadena.
¿Cuánto tiempo tarda la cadena en regresar al estado j?

El tiempo que tarda en regresar al estado j es una variable aleatoria con valores en $\{1,2,\cdots\}$ y función de densidad las probabilidades de primeras visitas. A la media de esta distribución se le llama **tiempo medio de recurrencia**.

Definición
El tiempo medio de recurrencia de un estado recurrente j es

$$\mu_j = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot f^n(j,j)$$

Donde $f^n(j,j)$ denota la probabilidad de primera visita del estado j partiendo del estado j en n pasos.

Más generalmente, si i es un estado cualquiera y j un estado recurrente.
Se define el tiempo medio de recurrencia del estado j partiendo del estado i como

$$\mu_{i,j} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot f^n(i,j)$$

Ejemplo

Sea la cadena de Markov de 2 estados vista en clase ($0 < a, b < 1$)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Recordemos que $f^n(x,y)$ es la probabilidad de pasar del estado x al estado y en n pasos por primera vez.

$$f^n(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y, X_{n-1} \neq y, X_{n-2} \neq y, \cdots | X_0 = x)$$

En clases anteriores llegamos a que en la matriz de 2 estados se tiene lo siguiente:

$$f^n(0,0) = \begin{cases} 1-a & \text{Si } n=1 \\ a(1-b)^{n-2}b & \text{Si } n \geq 2 \end{cases} \qquad f^n(0,1) = (1-a)^{n-1}a$$

$$f^n(1,0) = (1-b)^{n-1}b \qquad f^n(1,1) = \begin{cases} 1-b & \text{Si } n=1 \\ b(1-a)^{n-2}a & \text{Si } n \geq 2 \end{cases}$$

Calculemos μ_0

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f^n(0,0) = (1-a) + \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot a(1-b)^{n-2}b \\ &= (1-a) + ab\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (1-b)^{n-2} = (1-a) + ab \cdot \frac{(b+1)}{b^2} \\ &= \frac{(1-a)b}{b} + \frac{a(b+1)}{b} = \frac{a+b}{b} \end{aligned}$$

De manera análoga, obtenemos que $\mu_1 = \dfrac{a+b}{a}$. Se le recomienda calcular al alumno $\mu_{0,1}$ y $\mu_{1,0}$

Comentarios Generales

Estas cantidades son el número de pasos promedio que le toma a la cadena para regresar al estado recurrente.

En general los tiempos medios de recurrencia serán dificiles de calcular, pero en ocasiones podrémos calcularlos de manera indirecta utilizando otros resultados que verémos en el curso.
Uno de esos resultados está relacionado con la siguiente observación. ¿Les recuerda a algo?

$$\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_1} = 1$$

Recurrencia positiva y nula

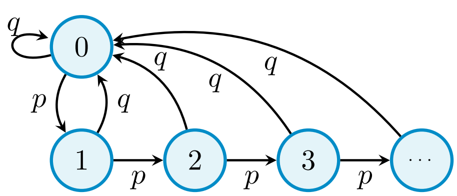
Definición
Sea $\{X_n\}$ una Cadena de Markov. Sea i un estado recurrente con tiempo medio de recurrencia μ_i.
El estado i es recurrente positivo si $\mu_i < \infty$, y decimos que es recurrente nulo en el caso $\mu_i = \infty$.

A continuación se harán algunas afirmaciones que no se demostrarán por el momento.

a) La recurrencia positiva y recurrencia nula son propiedades de clase.
b) No existen estados recurrentes nulos en cadenas de Markov finitas.

Ejemplo

Consideremos la cadena de Racha de Éxitos con $0 < p < 1$.



$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ q & 0 & 0 & p & \cdots \\ q & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Demostraremos que todos los estados son recurrentes positivos empezando por el estado cero.

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f^n(0,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^{n-1}(1-p) \\ &= (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p^{n-1} = (1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= \frac{1}{1-p} < \infty \end{aligned}$$

Además, sabemos que la cadena es irreducible (tiene una única clase de comunicación) y debido a que la recurrencia positiva es una propiedad de clase, tenemos que todos los estados son recurrentes positivos.

Periodicidad

Definición

Sea $\{X_n\}$ una Cadena de Markov, y sea x un estado de esa cadena.
El periodo del estado x es un número entero tal que

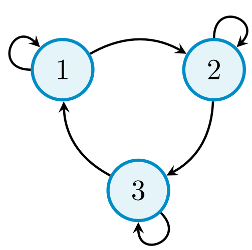
$$d_x = \begin{cases} \text{mcd}\{\ n \geq 1 |\ P^n(x,x) > 0\ \} & \text{Si el conjunto es no vacío} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

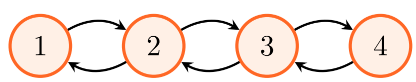
Donde $P^n(x,x)$ denota la probabilidad de transición del estado x al estado x en n pasos.

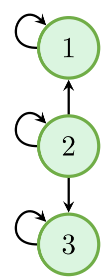
De lo anterior, el periodo de un estado x puede tomar valores en $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$.
Si $d_x = 1$ decimos que el estado x es aperiódico. Si $d_x = k \geq 2$, decimos que es periódico con periodo k.

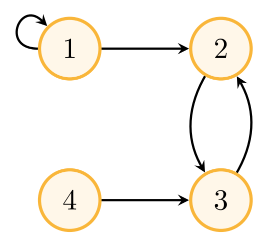
Ejemplos

Calculemos el periodo de los siguientes cuatro ejemplos.









Cadena Azul

Notemos que

$$d(1) = \text{mcd}\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} = 1$$

$$d(2) = \text{mcd}\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} = 1$$

$$d(3) = \text{mcd}\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} = 1$$

Cadena Naranja

De manera análoga, tenemos que

$$d(1) = \text{mcd}\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\} = 2 = d(2) = d(3) = d(4)$$

Cadena Verde

Observemos que es un caso similar a la primer cadena

$$d(1) = \text{mcd}\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} = 1 = d(2) = d(3)$$

Cadena Amarilla

Finalmente, tenemos que

$$d(1) = \text{mcd}\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\} = 1$$

$$d(2) = \text{mcd}\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\} = 2 = d(3)$$

$$d(4) = \text{mcd}\varnothing \Rightarrow d_4 = 0$$

Resultados Importantes

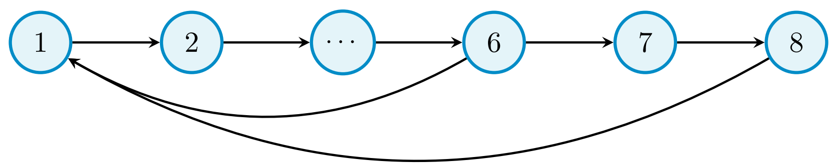
a) Si dos estados x y y se comunican, entonces $d(x) = d(y)$
En consecuencia, la periodicidad es propiedad de clase.
Más aún, si una cadena es irreducible, entonces todos los estados tienen el mismo periodo.

b) Para cada estado x existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para algún $n \geq N$ se cumple que $P^{n \cdot d(x)}(x, x) > 0$
Esto es que, para algún tiempo grande, la cadena regresará al estado x con probabilidad positiva.

c) Para cada par de estados x, y tales que $x \neq y$ y $P_{x,y}(m) > 0$ para algún $m \geq 1$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para algún $n \geq N$ se cumple que $P^{m+n \cdot d(x)}(x, y) > 0$
Esto es análogo al resultado anterior, únicamente extendiendose para dos estados.

Ejemplo

Observemos la siguiente cadena y calculemos el periodo del estado 1



Tenemos que

$$d(1) = \text{mcd}\{6, 8, 12, 16, 18, 24, 30, 32, \cdots\} = 2$$

No es complicado demostrar por definición que $d(1) = d(2) = d(3) = \cdots = d(7) = d(8)$.

El inciso b) muestra que aunque $d(1) = 2$ no significa que cada 2 pasos podremos llegar de nuevo al estado 1. Mas bien, que después de un cierto tiempo, se cumple que $P^{3 \cdot 2} > 0$ y $P^{4 \cdot 2} > 0$.

Similarmente, si estuvieramos en otro estado, por ejemplo el estado 3 nos tardaríamos $m = 3$ pasos en llegar al estado 1 y luego, estando en el estado 1, nos tardaríamos $n \cdot d(1)$ tiempos en regresar a ese estado (con n grande).

Cadena de Nacimiento y Muertes

Considera una cadena de nacimiento y muerte sobre un espacio de estados enteros no negativos $\{0, 1, \ldots, d\}$ con función de transición

$$\mathbb{P}(x, y) = \begin{cases} q_x & y = x - 1 \\ r_x & y = x \\ p_x & y = x + 1 \end{cases}$$

donde $p_x + q_x + r_x = 1$. Además, consideremos $q_0 = 0$ y $p_d = 0$. Éstas condiciones nos indican que no podemos irnos a la izquierda del estado 0 ni a la derecha del estado d. También asumamos que $p_x > 0$ y $q_0 > 0$ para $0 < x < d$

Sea a y b estados tales que $a < b$. Definamos $u(x) = \mathbb{P}_x(T_a < T_b) \qquad a < x < b$ Veámos que $u(a) = 1$ y $ux(d) = 0$. Esto es porque si la cadena inicia en el estado y, entonces en el siguiente paso se puede ir al estado $y - 1, y, y + 1$ con probabilidades q_y, r_y, p_y.

$$u(y) = q_y \cdot u(y-1) + r_y \cdot u(y) + p_x \cdot u(y+1) \qquad\qquad a < y < b$$

Como $p_x + q_x + r_x = 1$, entonces tenemos $r_x = 1 - p_x + q_x$. sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} u(y) &= q_y \cdot u(y-1) + (1 - p_y - q_y) \cdot u(y) + p_y \cdot u(y+1) \\ u(y) &= q_y \cdot u(y-1) + u(y) - p_y \cdot u(y) - q_y \cdot u(y) + p_y \cdot u(y+1) \\ 0 &= q_y \left[u(y-1) - u(y)\right] - p_y \left[\cdot u(y) - u(y+1)\right] \\ 0 &= \frac{q_y}{p_y} \left[u(y-1) - u(y)\right] - \left[u(y) - u(y+1)\right] \\ u(y) - u(y+1) &= \frac{q_y}{p_y} \left[u(y-1) - u(y)\right] \end{aligned}$$

Cadena de Fila de Espera

Considere un comercio que tenga una fila de espera, como la de un supermercado. Las personas llegan al local en diferentes tiempos y eventualmente se les da el servicio en la caja registradora. Se desea modelar la fila de espera que realizan aquellos clientes que han llegado a la caja registradora donde puede o no haber personas enfrente de ella.

Consideremos que el tiempo se mide en un cierto periodo, por ejemplo minutos. Supongamos que si existe alguien esperando en la fila al inicio de un cierto periodo, solamente se atenderá a un cliente por periodo y que si no hay nadie en la fila no se le dará el servicio a nadie.

Denotemos como M_n el número de clientes que se incorporan a la fila al tiempo $n \geq 1$ (durante el intervalo $(n-1, n]$. Notemos que M_n es una variable aleatoria con valores en $\{0, 1, 2, \cdots\}$.

Sea X_n el tamaño de la fila al tiempo n (X_0 es el número de clientes en la fila inicialmente).

$$X_{n+1} = \begin{cases} M_{n+1} & \text{Si } n = 0 \\ X_n + M_{n+1} - 1 & \text{Si } n \geq 1 \end{cases}$$

Si $M_1, M_2, \cdots$ son independientes, entonces $\{X_n : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ es una Cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ y con probabilidad de transición

$$P(i, j, n) = \begin{cases} \mathbb{P}(M_{n+1} = j) & \text{Si } i = 0 \\ \mathbb{P}(M_{n+1} = j - i + 1) & \text{Si } i \geq 0 \end{cases}$$

Suponiendo que $M_1, M_2, \cdots$ son independientes con una misma función de densidad, podemos pensar a cada M_k como una sola variable aleatoria pues no depende de n, digamos M. Tenemos que las probabilidades de transición de dicha cadea son

$$P(0, y) = f(y) \qquad\qquad P(x, y) = f(y - x + 1) \quad x \geq 1$$

donde $f(\cdot)$ es la función de densidad de la variable aleatoria M. Más aún, consideremos que $\mathbb{P}(M = k) = a_k$ para $k = \{0, 1, 2, \cdots\}$, lo que implica que la matriz de transición es la siguiente

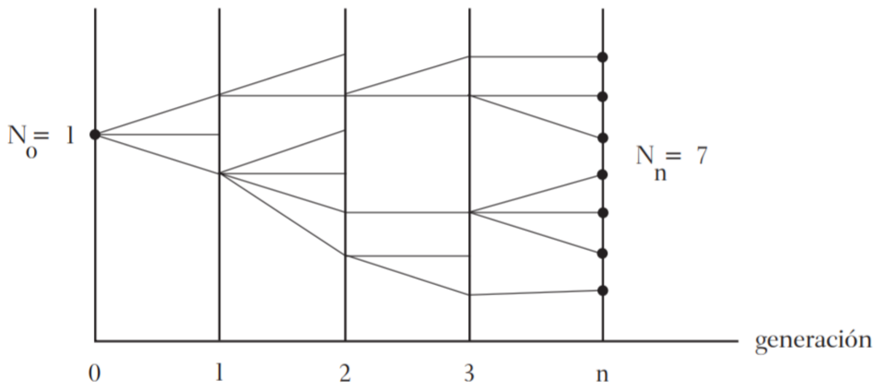
$$\mathbf{P} = P(i, j) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & \cdots \end{pmatrix}$$

Observemos que no podemos dar una expresión más simple porque todo depende de la distribución que tengan las variables aleatorias $M_1, M_2, \cdots$ y si son o no independientes.

Cadena de Ramificación

Considere una particulas (como un neutrón or una bacteria) que pueden generar nuevas partículas del mismo tipo. Al conjunto inicial de estos objectos se les referirá como la generación 0. Las partículas de la generación n generán nuevas particulas que serán parte de la generación $n+1$.

Sea X_n el número de partículas en la generación n. Varias partículas pueden coexistir en la misma generación



Para modelar este sistema como una cadena de Markov, nosotros suponemos que cada partícula genera ξ partículas en la siguiente generación, donde ψ is una variable aleatoria (no negativa y de valores enteros) con función de densidad $f(\cdot)$.

Bajo estas afirmaciones $\{X_n : n \geq 0\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados los enteros no negativos.

Notemos que el estado 0 es un estado absorbente, porque si no hay partículas en alguna generación, la siguiente generación necesariamente tampoco tendrá particulas porque no hay manera de que se hayan generado partículas a partir de ninguna partícula.

Por lo anterior, tenemos que la función de transición de dicha cadena es la siguiente

$$P(x,y) = P(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_x = y)$$

donde ξ_k son variables aleatorias que tienen función de densidad común $f(\cdot)$. En particular, $P(1,y) = f(y) \quad y \geq 1$.

La cadena de ramificación fue usada originalmente para determinar la probabilidad de que una linea masculina de una cierta persona eventualmente se extingiera. Las partículas de un sistema ramificado pueden ser de tipos muy diversos, ya que hay muchas "poblaciones" cuyos elementos pueden reproducirse, fragmentarse o desaparecer.

Por ejemplo, moléculas, genes, virus, células, células cancerosas, bacterias, animales, especies de animales, personas, apellidos, grupos étnicos, plantas, enfermedades, neutrones, rayos cósmicos, galaxias, piedras, partículas contaminantes, archivos electrónicos, mensajes en redes de información, citas bibliográficas, valores financieros, partidos políticos, grupos terroristas, lenguajes, religiones, etc.

Los temas de investigación científica o matemática son un ejemplo de sistema ramificado, algunos generan nuevos temas y otros se extinguen.

El siguiente ejemplo es muy ilustrativo. Las partículas son árboles, sus semillas son transportadas por el viento de manera aleatoria a otros sitios, en los cuales nacen nuevos árboles. Es una caminata aleatoria ramificada. ¿Cómo evoluciona el bosque de árboles en número y en extensión geográfica?