Esercizi di computabilità risolti

Questi esercizi sono stati svolti nel luglio 2013, in vista dell'esame per il corso di Computabilità.

Anche se ne ho ricontrollata la maggior parte, non vi posso garantire che le soluzioni siano corrette.

Ho anche dato una sistemata alla grammatica, ma pure lì non posso assicurarvi niente :-)

Spero possano tornarvi utili.

Si ringrazia con profonda ammirazione Marco Bertan, la persona con cui ho studiato questa materia e che mi ha aiutato a svolgere tutto questo lavoro.

Si esprime gratitudine verso tutti quelli che mi hanno prestato appunti ed esercizi svolti.

Si auspica che il professor Baldan pubblichi degli appunti ufficiali.
Se tutti quelli che hanno dubbi su quello che studiano gli scrivessero una email, o chiedessero udienza nel suo ufficio, sarebbe sommerso di lavoro.

Computabilità con Marco, foglio 1 08/07/2013

ES 2 esame 20/06/2012

$\exists\, f(x) = x^2$ totale non calcolabile t.c. $\varphi_x(x)\downarrow$?

$\varphi_x(x)\downarrow \equiv x \in K$ (funz calcolabili). Scrivo f così:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in K \\ 2 & \text{se } x \notin K \end{cases} \quad \text{se non è calcolabile}$$

restituisce qualcosa che non è il quadrato di niente (in $\mathbb{N}$)

f totale (definita ovunque) ✓

$$\chi_{\bar{K}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \bar{K} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

funz caratteristica di $\bar{K}$, che so essere non calcolabile. Se riuscissimo a ricavarla dalla funz f attraverso un procedimento calcolabile, allora mostreremmo che se f fosse calcolabile, lo sarebbe pure $\chi_{\bar{K}}$.

Riscrivo f come mi fa più comodo (uso il compl di K)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in \bar{K} \\ x^2 & \text{se } x \notin \bar{K} \end{cases}$$

Ora provo a cavarne $\chi_{\bar{K}}$ con un procedimento calcolabile.

Così non mi riesce facile; la riscrivo così:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \in \bar{K} \\ x^2 & \text{altrim} \end{cases}$$

comodo così non va sotto zero la $f(x) - x^2$ che uso dopo

$$\chi_{\bar{K}}(x) = \overline{sg}\,|f(x) - x^2|$$

1 se $x \in \bar{K}$, 0 altrim

La sottrazione è calcolabile e la potenza pure. Se f fosse calcolabile, allora lo sarebbe pure $\chi_{\bar{K}}$ (assurdo) $\Rightarrow$

f non calcolabile

ES 2 esame 22/03/2012

$f: N \to N$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \varphi_x(x)\downarrow \\ x^2+1 & \text{altrimenti} \end{cases} \left(\begin{array}{l} \Rightarrow \text{se } x \in K \text{, per come è definito } K \\ \Rightarrow \text{se } x \notin K \end{array} \right)$$

calcolabile o no? NOTA: le parentesi non fa parte della consegna

x è un indice di una funzione calcolabile qualsiasi

PATTERN: uso la funzione f, che non so se è calcolabile, come parte di una formula per calcolare una funzione non calcolabile (tipicamente χ_K o $\chi_{\bar{K}}$).

Nella formula, oltre ad f uso solo funz calcolabili (sg, $\mathbb{1}$, $||$, etc.), poi ragiono così:

$\chi_K(x) = \overline{sg}(|f(x) - x^2|) \Rightarrow$ scritta co

1 se $x \in K$, 0 altrim $\Rightarrow f$ non calcolabile (so che χ_K non calcolabile)

Scritta così, $\chi_K(x)$ sarebbe calcolabile se $f(x)$ fosse calcolabile, dato che tutte le altre operazioni usate per esprimerla sono calcolabili. Ma so che $\chi_K(x)$ non è calcolabile, quindi $f(x)$ non può essere calcolabile.

ES 2 esame 18/09/2012, pag 20 pdf 3/4 di Simone

Esiste una funzione $f: N \to N$ crescente, a codominio finito e non calcolabile? NOTA: crescente: ($f(x) \leq f(y)$ per $x \leq y$)

Provo a definirla così:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \bar{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \begin{array}{l} \text{(se non è calcolabile, dai 1)} \\ \text{(se è calcolabile, cicla all'infinito)} \end{array}$$

Che poi è proprio la funz semi caratteristica di $\bar{K}$ ($SC_{\bar{K}}(x)$)

La $SC_{\bar{K}}(x)$ è non calcolabile (perché non riesco a dire quando $x \in \bar{K}$, per definizione di $\bar{K}$) $\rightarrow$ ESISTE, SÌ se f NON totale

Volendo posso anche vedere un caso con $f(x)$ totale. Definisco:

$m = \max(\text{cod}(f))$ VEDO CHE SE F TOTALE, È SEMPRE CALCOLABILE

$$f(x) = \begin{cases} m & \text{se } x \geq x_0 \quad \text{// dà } m \text{, da un certo punto in poi} \\ \theta(x) & \text{altrim} \quad \text{// prima, restituisce il valore di una funz calcolabile } \theta \end{cases}$$

Computabilità con Marco, foglio 2 08/07/2013

ES 2 esame 17/07/2008

esiste $f: N \to N$ totale non calc che, per infiniti x, sia $f(x) = \varphi_x(x)$?

Provo a definirla

$$f(x) = \begin{cases} \downarrow & \text{se } x \in K \ (\text{se } \varphi_x(x)\downarrow, \text{ allora } x \in K) \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \ (\text{se } \varphi_x(x)\uparrow, \text{ diverge pure } f) \end{cases}$$

È simile alla $SC_K(x)$, che posso ricavare da f con operazioni calcolabili

$SC_K(x) = \overline{sg}\,(f(x) \dot- \varphi_x(x))$

ho espresso $SC_K(x)$, che so non calcolabile, in termini di $f(x)$

Se f fosse calcolabile, lo sarebbe pure $SC_K(x) \Rightarrow f$ non calcolabile.

Altro metodo (Simone), per "assurdo":

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \notin \overline{K} \ (\text{cioè se } x \in K) \\ \varphi_x(x)+1 & \text{se } x \in \overline{K} \ (\text{diverso da } \varphi_x(x) \text{ se } x \notin K) \end{cases}$$

Assomiglia alla funz car di $\overline{K}$:

$\chi_{\overline{K}}(x) = f(x) - \varphi_x(x)$

1 se $x \in \overline{K}$ $(f(x) - (f(x) - 1))$; 0 altrimenti

Se f fosse calcolabile, lo sarebbe pure $\chi_{\overline{K}}(x)$, che non lo è (lo so).

ES 2 esame 19/03/2010, pag 26 e 49 pdf 3/4

Dire se $f: N \to N$ è calcolabile, definita

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \forall y < x \mid \varphi_y \text{ totale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È calcolabile se riusciamo a scriverne la funz caratt. in modo calcolabile.

Vedo che al primo y per cui φ_y non totale, $f(x)$ va a zero

Definisco $x_0 = \min(y \mid \varphi_y \text{ non totale})$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < x_0 \\ 0 & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$$

(non mi interessa dov'è)

È calcolabile per costruzione (paragone con costante). Va bene, so che $\exists x_0$

ES 5 esame 19/03/2009

Data $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita così:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in W_x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrare che non è calcolabile.

Potrei definirla in termini di una funzione che so essere non calcolabile. Scelgo la funzione totale diversa da tutte le funzioni totali calcolabili (quella trovata con la diagonalizzazione). Definisco

$$g(x) = f(x) + 1 = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

So che $g(x)$ non è calcolabile, perché è diversa da tutte le funzioni calcolabili. Quindi pure $f(x)$ non è calcolabile, sennò basterebbe sommarle 1 (~~op~~ calcolabile) per ottenere $g(x)$.

ES 2 appello 14/09/09 pag 45 pdf 3/4

Dire se esiste $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile t.c. $f(x) \neq \varphi_x(x)$ solo su un valore di $x \in \mathbb{N}$.

φ_x è la funz calcolata dal programma di indice x

$\varphi_x(x)$ è il suo output in x

Il punto in cui la funz non è calcolabile chiamiamolo x_0 ; $x_0 \notin dom(f)$

PATTERN: definisco $\chi_K(x)$ tramite una funzione accessoria Θ

$$\chi_K(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \quad (D \text{ di } f) \\ \Theta(x) & \text{se } x \notin D \quad (\text{in un solo punto}) \Rightarrow x = x_0 \end{cases}$$

$\Theta(x)$ ha un dominio finito (x_0). Lo definisco coerentemente a sopra:

$$\Theta(x) = \begin{cases} \chi_K(x) & \text{se } x \notin D \quad (\text{in } x_0) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Theta(x)$ calcolabile perché <u>finita</u>. Non è totale ma chissene. Se anche $f(x)$ fosse calcolabile, sarebbe calcolabile anche χ_K $\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow f(x)$ non calc.

Computabilità con Marco, foglio 3 08/07/2013

ES 2 esame 13/07/2010; pag 57 pdf 3/4

Dire se esiste una funz non calcolabile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $D = \{ x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq \varphi_x(x) \}$ sia finito.

~~Provo a esprimere $f(x)$~~

$$\cancel{f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1 & \text{se } x \leq x_0 \\ \uparrow & \text{se } x > x_0 \end{cases}}$$

~~Mac, tralascio~~

NOTA: Ricordiamo la teoria...

se A ricorsivo, $\chi_A(x)$ è calcolabile, altrimenti no.

So che K è R.E., ma non ricorsivo $\Rightarrow \chi_K(x)$ non calcolabile | B!

PATTERN es 2 appello 24/09/09 AL CONTRARIO

Qua il dominio D è finito per ipotesi: θ dovrà usare D.

$$\chi_K(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \notin D \\ \theta(x) & \text{se } x \in D \end{cases}$$ (se $x \notin D$, allora $f(x) = \varphi_x(x) \to$ se $x \in K$, $x \notin D$)

$$\theta(x) = \begin{cases} \chi_K(x) & \text{se } x \in D \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

D finito, $\theta(x)$ finito (perché ha un dominio finito) $\Rightarrow \theta$ calcolabile

NOTA: ed è pure ricorsivo, quindi (va bene)

Se $f(x)$ fosse anche lei calcolabile, allora χ_K sarebbe calcolabile

$\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow f(x)$ non calcolabile.

ES 2 del 30/08/2010 (no sol)

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x+1)+1 & \text{se } \varphi_x(x+1)\downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dire se è calcolabile

RIPASSO Th di Rice - Shapiro

- Lemma:

- insieme saturo $\mathcal{A}$ (progr $x \in A$ se calcola funz $\in \mathcal{A}$, non conta com'è fatto il progr).
- Posso usare 1) o 2) per dire che A non è ricorsivamente enumerabile:

1) $f \notin \mathcal{A}$, $\exists \theta \subseteq f$, θ finito $\theta \in \mathcal{A} \Rightarrow A$ non R.E. (e non ricorsivo)

$\mathcal{A}$ è l'insieme delle funz con determinate proprietà intrinseche

θ è sottoinsieme finito di f.

2) $f \in \mathcal{A}$, $\forall \theta \subseteq f$, $\theta \notin \mathcal{A} \Rightarrow A$ non R.E. (e non ricorsivo)

è più rognoso da dimostrare per via del $\forall$ (tutte)

Th di Rice

Serve: Mi dice:

- A saturo
- $A \neq \emptyset$
- $A \neq \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ A non ricorsivo (ma può essere r.e.)

NOTA: A contiene gli indici dei programmi con determinate caratteristiche (es quello che calcolano, ma anche altro)

$\mathcal{A}$ esiste se A è saturo, e sono le funzioni calcolate dai progr in A

Riduzione a K

Serve a dimostrare che un insieme è r.e. ma non ric.: provo a ricondurlo a K, che so essere r.e., ma non ricorsivo. Posso usarla anche se A non è saturo.

$K \leq_m A$ è la notazione per "A si riduce a K"

Riduzione a $\bar{K}$

$\bar{K}$ non è r.e. quindi può essere utile per ridurci insiemi da mostrare non r.e. (e non ricorsivi). Può essere usata con insiemi non saturi.

Computabilità con Marco, foglio 4 08/07/2013

- Dimostrare che un insieme è r.e.

O lo riduco a K. (e allora mostro anche che è non ricorsivo)

O posso scriverne la funzione semicaratteristica

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$ e poi mostrarla calcolabile (?)

NOTA: se sotto qua ci fosse 0 sarebbe la funz "caratteristica" di A.

- Dimostrare che un insieme è ricorsivo

Manca un procedimento chiaro.

ES 5 esame 30/03/2010 pag 53 pdf 3/4

$A \subseteq N$ ricorsivo $\overset{sse}{\Longleftrightarrow}$ $A \leq_m \{0\}$ (0 si riduce ad A)

Dovremo dimostrare entrambi i versi delle frecce.

La definizione generica di una riduzione $A \leq_m B$ è questa

$\exists f : N \to N$ totale calcolabile che $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ | B!

(esiste una funz che mi porta gli ele di A in B)

Applichiamolo al nostro caso:

$A \subseteq N$ ricorsivo $\Leftrightarrow$ $\exists f : N \to N$ tot calc t.c. $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in \{0\}$

~~Verso $\Rightarrow$~~

~~Ip: A ricorsivo~~

~~Allora posso scrivere $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$~~

Finito il giorno dopo (v foglio 2)

Computabilità con Marco, foglio 1 09/07/2013

ES 3 esame 14/09/09 pag 39 pdf 34

$A = \{ x \in \mathbb{N} : \exists y, z \in \mathbb{N} \,.\, z > 1 \wedge x = y^z \}$

A, $\bar{A}$ ric / re ?

Mi scelgo $\bar{A}$, il suo complementare:

$\bar{A} = \{ x \in \mathbb{N} : \underbrace{\forall y, z \in \mathbb{N}} \,.\, z \leq 1 \vee x \neq y^z \}$

troppa roba: sono tutte le coppie di naturali

posso dire se è vero? No, sono ∞ coppie $\rightarrow$ non r.e.

posso dire se è falso? Sì, ma conta poco

Ed A? Mi basta esaminare le coppie una ad una finché ne trovo una che soddisfa, e posso dire: vero. $\Rightarrow$ è r.e. (ends).

Provo a scriverne la funz SC.

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}(\mu y . \mu z . (z > 1 \wedge x = y^z))$$

μy è la minimalizzazione: trova il primo y per cui la roba seguente va a zero, oppure cicla all'infinito. Così è scritta male. Per riscriverla sfrutto il fatto che funziona anche con le tuple. Definisco $w = (z, y)$; $z = (w)_1$, $y = (w)_2$

$$SC_A(x) = \mathbb{1}(\mu w . ((w)_1 > 1 \text{ and } x = (w)_2^{(w)_1}))$$

$$= \mathbb{1}(\mu w . ((2 - (sg(w_1 \dot{-} 1) + \overline{sg}(|x - (w)_2^{(w)_1}|)))))$$

per dare 1 quando μw restituisce un w

$SC_A(x)$ calcolabile $\Rightarrow$ A è r.e.

altro modo

Uso la riduzione a K: $K \leq_m A$ (voglio mostrare che A è r.e)

$\exists f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tot calc t.c. $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A$

$$f(x) = \begin{cases} \text{valore} \in A & \text{se } x \in K \\ \text{valore} \notin A & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \quad (\text{basta prendere } x = 0,\ z = 2,\ y = 0 \rightarrow z > 1 \wedge 0 = 0^2 = 0 \checkmark) \\ \ldots \end{cases}$$

Computabilità con Marco, foglio 2 09/07/2013

ES 3 continuato

Devo vedere i 2 versi, quindi per la funzione che stiamo costruendo deve valere: NOTA: forse basta vederne solo due

$$\begin{cases} 1) & x \in K \Rightarrow f(x) \in A \\ 2) & f(x) \in A \Rightarrow x \in K \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3) & f(x) \notin A \Rightarrow x \in K \\ 4) & x \notin K \Rightarrow f(x) \notin A \end{cases}$$

Provando con $f(x)=0$

1) $x \in K$, $f(x) \in A$ ($z>1 \wedge 0=0^2$; $z=2$, $y=0$, $x=0$) ✓

2) boh

... È lunga. Ragioniamo su $\bar{A}$: se A fosse ricorsivo, $\bar{A}$ sarebbe r.e.

Voglio dimostrare che $\bar{A}$ non r.e., uso la riduz a $\bar{K}$, perché non posso usare Rice-Shapiro ($\bar{A}$ non saturo).

$\bar{K} \leq_m \bar{A}$

$\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale t.c. $x \in \bar{K} \Leftrightarrow f(x) \in \bar{A}$

$$f(x) = \begin{cases} \text{valore} \in \bar{A} & \text{se } x \in \bar{K} \\ \text{valore} \notin \bar{A} & \text{se } x \notin \bar{K} \end{cases}$$

→ questa sta fissa

→ questi 2 valori li decido io

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \underline{\forall} y, z \in \mathbb{N} \,.\, z \leq 1 \vee x \neq y^2\}$

Provo a trovare un valore che $\notin \bar{A}$: controllare che falsifichi le 2 condizioni dell'or, per ogni coppia è un casino. Cerco un valore che $\in A$ (suo compl)

$0 \in A$? Sì, basta vedere il caso 1) di prima $\Rightarrow 0 \notin \bar{A}$

Ora voglio trovare un valore che $\in \bar{A}$. Per via del $\forall$ è più facile trovare un valore che $\notin A$ (basta controllare che $\exists$).

$1 \in A$? Sì $\Rightarrow 1 \notin \bar{A}$ (inutile)

$2 \in A$? No $\Rightarrow 2 \in \bar{A}$ (buono)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in \bar{K} \\ 0 & \text{se } x \in K \end{cases}$$

ES 4 esame 24/09/2009 ; pag 46 pdf 3/4

P = insieme numeri pari ; P_2 = insieme numeri primi. Dimostrare

$P \leq_m P_2$ e $P_2 \leq_m P$.

$P \leq_m P_2$ sse $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot. calc. t.c. $x \in P \Leftrightarrow f(x) \in P_2$

Provo a scrivere sta f.

$$f(x) = \begin{cases} \text{val} \in P_2 & \text{se } x \in P \\ \text{val.} \notin P_2 & \text{se } x \notin P \end{cases}$$

Trovo due valori adatti

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in P \\ 4 & \text{se } x \notin P \end{cases}$$

Facile vedere il verso $\Rightarrow$: se $x \in P$, allora $f(x)$ da un numero primo (3)

se $x \notin P$, allora $f(x)$ da un numero non primo (4)

Verso $\Leftarrow$: se $f(x)$ è primo (3), allora x datole era pari (ok)

se $f(x)$ non è primo (4), allora x datole non era pari (ok)

La $f(x)$ così costruita va bene. Ripetere il gioco per $g: P_2 \leq_m P$.

ES 5 esame 30/03/2010, continuato da ieri

Verso $\Rightarrow$ (continuato)

Vogliamo dimostrare che se $x \in A$ allora $f(x) = 0$

Ragiono su $\chi_{\bar{A}}$

$$\chi_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \bar{A} \equiv x \notin A \\ 0 & \text{se } x \notin \bar{A} \equiv x \in A \end{cases}$$

Se $x \in A$, restituisce 0. È buona come $f(x)$.

(Chissene dell'1 quando $x \notin A$).

Verso $\Leftarrow$

Ipotesi: $f(x) = 0$ Th: $x \in A$ ricorsivo

Provo a definire $f(x)$, che non sarà necessariamente uguale a prima.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ 1 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Computabilità con Marco, foglio 3 09/07/2013

ES continuato

Se riesco a dire che A ha una funz caratteristica calcolabile, mostro che A è ricorsivo.

Possiamo vedere che $f(x)$ così messa è $\chi_{\bar{A}}(x)$, ed è calcolabile

$\Rightarrow \bar{A}$ è ricorsivo $\Rightarrow$ A è ricorsivo.

NOTA: anziché scrivere la funz car. in termini di f, l'abbiamo fatta $= f$.

ES 4 esame 23/03/11 pag 5 pdf 414

Studiare la ricorsività di:

$B = \{ x \in \mathbb{N} : \exists y > x . y \in \underbrace{E_x}_{\text{cod}(\varphi_x)} \}$

cod(φ_x), ma per come è messo, dipende dall'input

Cioè dire se B e $\bar{B}$ sono/non sono ricorsivi e/o r.e.

$\bar{B} = \{ x \in \mathbb{N} : \forall y > x . y \notin E_x \}$

Penso che B sia r.e.: cerco finché non ne trovo uno che va bene (soddisfa l'$\exists$); il codominio è segnato come E, quindi è fissato e posso cercarci dentro: posso dire "sì".

Dato che penso sia r.e., ne cerco la funz SC.

NOTA: $S(x, i, y, t)$ è la funz che mi dà 1? se il programma di indice x, dato un input i, termina con output y in al massimo t passi, e 0? altrimenti. Di certo $\chi_{S(\cdot)}$ mi da 1 o 0.

$$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ATT! qua nel pdf forse è sbagliato

$$= \mathbb{1}(\mu(i, y, t). (\underbrace{x \dot{-} (y-1)}_{\text{dà 0 se } y > x} + \underbrace{1 - (\chi_S(x, i, y, t))}))$$

dà 0 se ho trovato la terna giusta, serve per far ciclare all'infinito la μ nel caso non trovi una terna adatta

per dare 1 quando la μ da qualcosa

Ma niente vieta che B sia anche ricorsivo, oltre che r.e.

Conviene fare una riduzione a K, e mi risolverei anche $\overline{B}$ così.

. $K \leq_m B$

$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc t.c. $x \in K \iff f(x) \in B$

Verso $\Rightarrow$

Definisco una funz accessoria $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

$$= \cancel{y \cdot S\chi_B(x)}$$

capire perché si usa questa

$$= y \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x))$$

calcolabile

Avanti: non è finita, nessuno mi garantisce che g sia anche totale, condizione necessaria per farne una funz di riduzione.

Applico il th smn (ecco perché avevo definito g con 2 parametri):

Data $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile, esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c.

$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)\ \forall y$ Vediamo che s va bene per la riduzione.

Due versi:

$\Rightarrow$) $x \in K$, allora siamo nel 1° ramo di g: $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y \quad \forall y$, quindi

$cod(\varphi_{s(x)}) = \mathbb{N} \to \exists y > s(x) \,.\, y \in cod(\varphi_{s(x)}) \to s(x) \in B$

$\Leftarrow$) $x \notin K$, allora siamo nel 2° ramo di g: $\varphi_{s(x)}(y) \uparrow \ \forall y \to cod(\varphi_{s(x)}) = \emptyset$

$\to \nexists y > s(x) \,.\, y \in cod(\varphi_{s(x)}) \to s(x) \notin B$

OK. $\Rightarrow$ B è r.e. ma non ricorsivo

$\Rightarrow \overline{B}$ non è r.e.

Computabilità con Marco, foglio 1 10/07/2013

ES 3 esame 19/03/2009, soluzione corrispondente su pdf Marta

$A = \{ x \in \mathbb{N} : |W_x| \geq 2 \}$ ric / r.e ?

Vedo che è saturo. (vabbè)

Posso dire se il dominio della funz di indice x è almeno 2?

Sì, basta continuare a provare. → r.e

E dire di no? No. → non ric.

Per mostrare che A r.e., basta trovarne la SC calcolabile.

Per mostrare che A non ric, posso usare il th di Rice (v. precond.)

Se riesco a mostrare queste 2 proprietà di A, quelle di $\bar{A}$ posso capirle.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

NOTA: la minimalizzazione si fa su 1 var, se voglio farla su più var mi basta che quella var sia una tupla di var, e poi uso le proiezioni per cavarne le var che mi servono sul posto.

Uso la funz halt: H(indice progr, input, # passi)

Voglio che 2 input diversi diano un output in un # di passi finito

$z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$

1° input progr, # passi sul 1° input, 2° input progr, # passi sul 2° input

$f(x) = \mathbb{1} \left(\mu z \left(2 - \chi_{H(x, z_1, z_2)} - \chi_{H(x, z_3, z_4)} + \overline{sg}(|z_1 - z_3|) \right) \right)$ calcolabile

li voglio diversi gli input!

bene ⇒ è r.e.

Provo a vedere se ho le precond per Rice

A saturo? sì

$A \neq \emptyset$? $(f(x) = 2 \ \forall x) \in A$ ha $|W_x| \geq 2$ // queste sono f(x) diverse!

$A \neq \mathbb{N}$? $\left(f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases} \right)$ ha $|W_x| = 1$ (per $x \in \mathbb{N}$) ⇒ $f(x) \notin A$ ⇓ $A \neq \mathbb{N}$

⇒ posso usare Rice ⇒ A non ricorsivo

A r.e. e non ric $\Rightarrow \bar{A}$ non ricorsivo

ES 4 esame 19/03/2009

$B = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x\}$ ric / r.e. ?

Non naturo, dipende dall'indice (?)

Sono progr il cui indice appartiene al cod delle funz che calcolano, cioè

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y.\ x = \varphi_x(y)\}$

Di conseguenza

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y.\ x \neq \varphi_x(y)\}$

Ad occhio:

· riesco a dire "sì" per B: basta trovarne una buona $(\exists) \Rightarrow$ r.e.

· non riesco a dire di "no" perché dovrei provare tutti gli input possibili.

$\Rightarrow$ non ric

Provo con la riduzione a K: $K \leq_m B$, dimostrare che:

$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc t.c. $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in B$ (dopo)

$$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ \uparrow & \text{se } x \notin B \end{cases}$$ non è definita su alcuni valori $\Rightarrow$ non totale

La calcolabilità di una SC dipende dalla possibilità di esprimerla tramite op. e funz calcolabili. Se la SC è calcolabile, l'insieme è r.e.

Dato che si ragiona sull'output, potrei avvalermi di S così:

$S(x, i, x, t)$ indice progr output

con μ voglio giocare su questi $\Rightarrow$ definisco $w(i, t)$

$SC_B(x) = \mathbb{1}(\mu w.(1 - \chi_{S(x, (w)_1, x, (w)_2)}))$ calcolabile

$\Rightarrow B$ è r.e. Resta da vedere se è anche ricorsivo.

Provo la riduzione a K. (~~tanto volevo farlo prima~~). Verso $\Rightarrow$ e $\Leftarrow$:

Definisco $$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = \mathbb{1}(\Psi_U(x,x)) \cdot y$$ calcolabile

Ma la funz di riduzione deve essere calcolabile e totale; g non è totale, ma mi serve come punto di partenza

Computabilità con Marco, foglio 2 10/07/2013

ES continuato

NOTA: Corollario a smn: data $f: \mathbb{N}^{n+m} \to \mathbb{N}$ calcolabile, $\exists s: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ calcolabile e totale t.c. $f(\vec{x},\vec{y}) = \varphi^n_{s(\vec{x})}(\vec{y})$ $\forall \vec{x} \in \mathbb{N}^n$ e $\forall \vec{y} \in \mathbb{N}^m$

In pratica c'è una funz $s(\vec{x})$ che individua la funzione che calcola la stessa roba di $f(\vec{x},\vec{y})$ usando solo i parametri $\vec{y}$, a patto che gli altri siano fissati con la serie di valori $\vec{x}$.

INUTILE

Per trovare una funz totale calcolabile a partire da quella solo calcolabile che abbiamo, posso usare il th smn. Questo mi dice che $\exists s: N \to N$ calcolabile totale t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)\ \forall y$.

Idea: mostro che s è la funz di riduzione cercata

- se $x \in K$, allora $g(x,y) = y\ \forall y$, posto $y = s(x)$, $\varphi_{s(x)}(s(x)) = g(x, s(x)) = s(x)$, quindi $s(x) \in cod(\varphi_{s(x)}) \to s(x) \in B$
- se $x \notin K$, allora $g(x,y) \uparrow\ \forall y$, posto $y = s(x)$, $\varphi_{s(x)}(s(x)) \uparrow\ \forall s(x)$ $\to cod(\varphi_{s(x)}) = \emptyset \to s(x) \notin cod(\varphi_{s(x)}) \to s(x) \notin B$

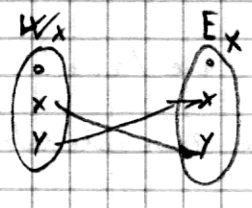
$\Rightarrow$ B è riducibile a K $\Rightarrow$ B r.e. ma non ric $\Rightarrow$ $\overline{B}$ non r.e.

ES 3 esame 02/04/2009

$A = \{x \in N : x \in W_x \cap E_x\}$ ric/re ?

A saturo? No.

NOTA: caso complesso di $f \in A$



Non è detto che $f_x(x) = x$ sia l'unico modo per cui $f \in A$.

A penso sia r.e. ma non ric. Lo riscrivo così

$A = \{x \in N \mid \exists y. (\underbrace{\varphi_x(y) = x}_{} \wedge \underbrace{\varphi_x(x)\downarrow}_{})\}$ → che significa $x \in K$, pure

x è parte dell'output AND φ_x è definita sull'input x ($\to x \in dom$)

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Se A è r.e., dev'essere calcolabile.

Mi interessa: indice ed output, uso $S(\ldots)$

$w = (i, t)$

$$SC_A(x) = \mathbb{1}\left(\mu w.\left(2 - \left(\chi_{S(x,(w)_1, x, (w)_2)} + \chi_K(x)\right)\right)\right) \quad \text{calcolabile}$$

$\Rightarrow A$ è r.e.

A è ricorsivo? Boh, provo la riduzione a K: $K \leq_m A$

Dimostrare che $\exists f : N \to N$ tot calc t.c. $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A$. Definisco:

$$g(x,y) = \begin{cases} \text{valore } \in A & \text{se } x \in K \\ \text{valore } \notin A & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

$y \in A$? Sì

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = SC_A(x) \cdot y \quad \text{calcolabile}$$

Uso il th smn, che mi dice che $\exists s : N \to N$ tot calc t.c. $\varphi_{S(x)}(y) = g(x,y)$.

$S(x)$ è l'indice della funz $\varphi_{S(x)}(y)$ che calcola $f(x,y)$ dati x fissato e y variabile.

- se $x \in K \Rightarrow \varphi_{S(x)}(y) = f(x,y) = y \quad \forall y$ (per come ho definito g, 1° ramo) $\Rightarrow$ in particolare vale anche per $y = S(x) \Rightarrow \varphi_{S(x)}(Sx) = f(x, S(x)) = S(x)$ $\Rightarrow \varphi_{S(x)}(S(x)) = S(x) \Rightarrow S(x) \in$ cod $\wedge$ dom etc $\Rightarrow S(x) \in A$
- se $x \notin K \Rightarrow \varphi_{S(x)}(y) = f(x,y)\uparrow \quad \forall y$ (per com'è definita g) $\Rightarrow$ allora vale pure nel caso $\varphi_{S(x)}(S(x)) \uparrow \forall y \Rightarrow E_{S(x)} = \emptyset \Rightarrow S(x) \notin W_{S(x)} \cap E_{S(x)} \Rightarrow S(x) \notin A$

ES 4 esame 02/04/2009

$V = \{x \in N : W_x \text{ infinito}\}$ ric / r.e.?

V saturo, dipende dalla proprietà della funz calcolate dal progr di avere un dominio infinito.

V r.e? Credo di no: bisognerebbe calcolare tutto il dom per dire "sì, è ∞"

$\overline{V} = \{x \in N : W_x \text{ finito}\}$

Un discorso simile vale per il complementare: difficile dire "sì, è finito". Credo $\overline{V}$ non r.e.

Potrei usare il th di Rice Shapiro, dato che gli insiemi sono saturi.

Computabilità con Marco, foglio 3 10/07/2013

Definisco $\mathcal{V} = \{ f \mid dom(f) \text{ infinito} \}$

$\bar{\mathcal{V}} = \{ f \mid dom(f) \text{ finito} \}$

R. S. ha 2 strade che portano alla stessa conclusione:

1) $f \notin A$ t.c. $\exists \theta \subseteq f$ finita $\theta \in A \Rightarrow A$ non r.e

2) $f \in A$ t.c. $\forall \theta \subseteq f$ finito $\theta \notin A \Rightarrow A$ " "

Provo con 2) e $id(x) = x$ (funzione identità)

$|dom(id(x))| = \text{infinito} \rightarrow id(x) \in \mathcal{V}$

$\forall \theta$ finito $\subseteq id$ vale $dom(\theta)$ finito $\rightarrow \theta \notin \mathcal{V} \rightarrow V$ non r.e.

Dimostrare che pure $\bar{V}$ non r.e.

Provo con 1) ed $id(x)$; 1) va inteso come "rovesciato" per il complementare

$id \notin \bar{\mathcal{V}}$, $\exists \theta$ finita $\in \bar{\mathcal{V}}$? Sì, definisco

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < x_0 \\ \uparrow & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$$

è un pezzo finito della funz id, ha dominio finito e quindi $\in \bar{\mathcal{V}}$

$\Rightarrow \bar{V}$ non r.e.

ES 3 esame 11/07/2009

$A = \{ x \in N : W_x \subseteq P \}$ ric / r.e?

numeri pari $\quad A = \{ f \mid dom(f) \subseteq P \}$

A saturo, dipende solo da che funz calcolano i suoi programmi, non da come.

Riesco a dire sì (A è r.e)? No, non senza aver calcolato tutto W_x, che può essere ∞.

$\bar{A} = \{ x \in N \mid W_x \not\subseteq P \}$

$\bar{A}$ sembra r.e: il primo dispari che trovo dico "sì".

Resto con R. S. su A saturo.

Provo 1) con $id \notin A$ ($dom(id)$ ha anche dispari), ma $\exists \theta \in A$, ad es.

$$\theta(x) = \begin{cases} x & \text{se } x = 2 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$$

θ finita e $\theta \in A$

È l'id definita solo su $x = 2 \in P$. Sì $\Rightarrow$ A non r.e.

$\bar{A}$ r.e.? Provo a darne la $SC_{\bar{A}}$

$$SC_{\bar{A}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \bar{A} \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$$

Minimalizzatore

Ci interessa solo che termini su almeno un input dispari. Uso H.

$$SC_{\bar{A}}(x) = 1\!\!1\left(\mu w.\left(2 - \chi_{H(x,(w)_1,(w)_2)} - sg\left(\underset{\uparrow}{rm}((w)_1, 2)\right)\right)\right)$$

$w = (i, t)$ resto della divisione per 2

Uso il trick $2 - (1 \text{ se bene} + 1 \text{ se bene})$ per tradurre un AND *

$SC_{\bar{A}}(x)$ calcolabile $\Rightarrow$ $\bar{A}$ r.e.

$\bar{A}$ è r.e., ma non ricorsivo poiché A non r.e.

NOTA: A re ma non ric $\Rightarrow$ $\bar{A}$ non r.e.

A non r.e. e $\bar{A}$ r.e $\Rightarrow$ $\bar{A}$ non ric.

*NOTA: altri lo fanno con $1 - (1 \text{ se vero} \cdot 1 \text{ se vero})$

Computabilità con Marco, foglio 1 11/07/2013

ES 3 esame 24/09/2009

$A = \{ x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = y$ per infiniti $y \}$ ric / r.e ?

A saturo: progr che calcolano f t.c. ci sono infiniti input restituiti come output. Non è detto "tutti". Es potrebbero essere solo gli ∞ input pari. | B!

Ne scrivo l'insieme che descrive le proprietà delle sue funz.

$A = \{ f \in \mathcal{C} : f(y) = y$ per infiniti $y \}$

Per dire "sì, $\in A$", dovrei guardare ∞ input $\rightarrow$ penso non sia r.e.

Posso usare il th di R.S.

1) $f \notin A$ $\exists \theta \subseteq f$ θ finito con $\theta \in A$ $\Rightarrow$ A non r.e.

2) $f \in A$ $\forall \theta \subseteq f$ θ finito con $\theta \notin A$

Provo caso 2) ed id

id $\in A$ e $\forall \theta \subseteq f$ θ finito, $\theta \in A$ (perché θ finito = ha dom finito, quindi non può avere infiniti input y che van bene) $\Rightarrow$ A non r.e.

Passo ad $\bar{A} = \{ x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = y$ per ~~finiti~~ $y \}$ NOTA: qua Marta ha sbagliato

ATT! A potrebbe anche essere $\neq y$ per ∞ y, basti pensare ad una funz che fa da identità solo per i pari e non per i dispari

Penso che $\bar{A}$ non sia r.e. Provo con R.S.

Caso 1 sul complementare e id.

id $\notin \bar{A}$ $\exists \theta \subseteq id$ θ finito con $\theta \in \bar{A}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}$ non r.e

esempio id definita solo su 0

$$\rightarrow id(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ES 3 esame 19/03/2010

$A = \{ x \in N : W_x \subseteq E_x \}$ ric/r.e ?

A saturo, scrivo $\mathcal{A}$

$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{C} \mid dom(f) \subseteq cod(f) \}$

Penso A non sia r.e : già calcolarne tutto il cod è un problema.

Uso R.S.

id è caso 2 ? No

$\emptyset$ è caso 2 ? No

$x \dot- 1$ è caso 2 ? No per $f(0)=0$ mi fugge il $\forall$ nella parte finita

$x \dot- 1$ è caso 1 ? Rimodello

$$\theta(x) = \begin{cases} x \dot- 1 & se\ x < 2 \\ \uparrow & altrim \end{cases}$$

$\theta \notin \mathcal{A}$ perché $|dom(\theta)| = 2 > |cod(\theta)| = 1$

Esiste una sua parte finita che $\in \mathcal{A}$? Sì, eccola:

$$\theta(x) = \begin{cases} x \dot- 1 & se\ x = 0 \\ \uparrow & altrim \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A non r.e.

NOTA: Marta l'ha risolto in un altro modo (usando la funz $\mathbb{1}()$)

Ragiono su $\bar{A} = \{ x \in N : W_x \not\subseteq E_x \}$ non penso sia r.e.

$\bar{\mathcal{A}} = \{ f \in \mathcal{C} \mid dom(f) \not\subseteq cod(f) \}$ è saturo

Provo con R.S.

Caso 2 rigirato è $\mathbb{1}$? no, manca il $\forall$.

Caso 1 rigirato è $x \dot- 1$? No

Caso 1 " è $1 \dot- x$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \dot- x & se\ x \leq 1 \\ \uparrow & altrim \end{cases}$$ vedo $f \notin \bar{\mathcal{A}}$ $dom(f) = \{0,1\}$ $cod(f) = \{0,1\}$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 \dot- x & se\ x = 0 \\ \uparrow & altrim \end{cases}$$ vedo $\theta \subseteq f$ $dom(f) = \{0\}$

θ finito e $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$ $cod(f) = \{1\}$

Computabilità con Marco, foglio 2 11/07/2013

ES 4 esame 19/03/2010 B !

$B = \{x \in \mathbb{N} : f(x) \in E_x\}$ con f calcolabile totale fissata

ric / r.e ?

Penso si possa dire di "sì": basta andare avanti a provare $x \in \mathbb{N}$

finché non ne trovo uno $\in E_x \Rightarrow$ r.e.

Non credo si possa dire di no (potrei delere) $\Rightarrow$ non ric

Vado per la SC + minimaliz.

$$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$$

Uso $S(\ldots)$ per dire che voglio che prima o poi x dia output $f(x)$

$w = (i, t)$

$SC_B(x) = \mathbb{1}(\mu w. (1 - \chi_{S(x,(w)_1, f(x), (w)_2)}))$ calcolabile $\Rightarrow$ B r.e.

Devo dire se A è ric o r.e.

Provo la riduz a K : $K \leq_m B$

Definisco $g(x, y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases}$

indice progr input

se $g(x,y) \downarrow f(y)$, e $x = y$, allora $x \in B$ — che è ? boh, fan così !

$g(x,y)$ calcolabile, è $\mathbb{1}(\varphi_U(x,x)) \cdot f(y)$ e so che $f(y)$ calcolabile per ip.

Uso smn, che dice $\exists S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc tot t.c. $\varphi_{S(x)}(y) = g(x,y)$

Voglio dimostrare che $S(x)$ è la funzione di riduzione da B in K !

cioè $K \leq_m B \Leftrightarrow S(x) \in B$

• verso $\Rightarrow$) se $x \in K$ $\varphi_{S(x)}(y) = g(x,y) = f(y)$ $\forall y$ quindi in particolare se $y = S(x)$, $\varphi_{S(x)}(S(x)) = g(x, S(x)) = f(S(x)) \Rightarrow f(S(x)) \in E_{S(x)} \Rightarrow S(x) \in B$

• verso $\Leftarrow$) se $x \notin K$ $\varphi_{S(x)}(y) \uparrow \forall y$ (siamo nel 2° ramo di $g(x,y)$) $\Rightarrow E_x = \emptyset$

$\Rightarrow f(S(x)) \notin E_x \Rightarrow S(x) \notin B$

$\Rightarrow$ ok, $S(x)$ è la funz di riduzione cercata

$\Rightarrow$ B non ric ma r.e.

$\Rightarrow \bar{B}$ non r.e.

ES 3 esame 30/03/2010

$A = \{ x \in N : |W_x| > |E_x| \}$ sia r.e.?

A saturo, a occhio, sensato

$A = \{ f \in \mathcal{C} : |dom(f)| > |cod(f)| \}$

Penso non sia r.e. (per dire di sì devo calcolare tutto cod e dom)

Provo R.S.

È un casino, ragiono su $\bar{A} = \{ x \in N : |W_x| \leq |E_x| \}$, saturo

$\bar{A} = \{ f \in \mathcal{C} : |dom(f)| \leq |cod(f)| \}$

Penso $\bar{A}$ non r.e. : per dire sì dovrei sapere le cardinalità (diff)

Caso 1 rigirato e $\mathbb{1}$

$\mathbb{1} \notin \bar{A}$ perché $|dom(\mathbb{1})| > |cod(\mathbb{1})|$ una sua parte finita θ

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 1 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$$

$\theta \in A$ perché $|dom(\theta)| = |cod(\theta)| = 1$ $\Rightarrow \exists \theta \ldots \Rightarrow \bar{A}$ non r.e

Torno a ragionare su A, caso 1 e $x-1$

$f(x) = x \dot{-} 1 \in A$, $|dom(f)| = |N| = |cod(f)|$ perché non ho messo un top tipo x_0, quindi gli ele del cod posso ottenerli tutti andando avanti col prot num nel dom

$$\theta(x) = \begin{cases} x \dot{-} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$$

$|dom(\theta)| = 2$ $|cod(\theta)| = 1$ $\Rightarrow \theta \in A$

$\Rightarrow A$ non r.e.

I PROSSIMI ESERCIZI NON SONO STATI TUTTI RICONTROLLATI

Computabilità con Marco, foglio 3 11/07/2013

Es 4 esame 30/03/2010

$B = \{ x \in \mathbb{N} : img(f) \cap E_x = \emptyset \}$ con f totale calcolabile fissata

immagine, e' il cod, stessa roba circa cod della funz con indice x

Posso dire "si, appartiene"? L'$img(f)$, finita o infinita, è calcolabile perché f è calcolabile. Se trovo un ele che sta in tutti e due dico sì, basta andare avanti a calcolare E_x e $img(f)$ pian piano.

Penso sia r.e., ma non credo sia ric: dire di no è più difficile, bisognerebbe calcolare tutto E_x in un colpo.

Provo con SC.

$$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ \uparrow & \text{se } x \notin B \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}(\mu w. (1 - \chi_{S(x, (w)_1, f((w)_2), (w)_3)}))$$ è calcolabile perché lo è f

Provo a vedere se c'è una tripla $w = $ (input 1, altro input, t) che rende un input $(w)_1$ uguale ad un output $f((w)_2)$ B?

$\Rightarrow B$ è r.e.

Ma non so se sia ric, provo con Rice:

- B saturo? Sì
- $B \neq \mathbb{N}$? basta vedere x corrispondente alla funz vuota, che ha $E_x = \emptyset$ $\Rightarrow img(f) \cap \emptyset = \emptyset \Rightarrow \emptyset \notin B$
- $B \neq \emptyset$? So che $img(f) \neq \emptyset$ perché f è totale e calc, quindi ha un output. Prendo come x l'indice di quella f, e sarà $E_x \neq \emptyset$, $(img(f) \cap E_{\text{indice di } f}) \neq \emptyset \Rightarrow f \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ per Rice B non ricorsivo

B non ric ma solo r.e $\Rightarrow \overline{B}$ non r.e.

ES 3 esame 13/07/2010

$A = \{ x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = x \cdot y$ per qualche $y \}$ ric / r.e.?

A r.e. penso, basta trovare un qualche y per dire "sì".

Dire di no richiederebbe di provare tutti gli $x \in \mathbb{N}$, difficile, credo non sia ric.

Provo con SC_A + minimalizz

$SC_A(x) = \mathbb{1}(\mu w. (1 - \chi_{S(x,(w)_1, x\cdot(w)_1, (w)_2)}))$ calcolabile $\Rightarrow$ A è r.e.

$w = (i, t)$

1 se c'è un input che da in output input · x.

Non so se sia ric.

A non saturo, è quel "per qualche y" che crea problemi (variabilità).

Niente Rice. Provo la riduz a K : $K \leq_m A$

$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot. calc t.c. $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in A$

$$g(x,z) = \begin{cases} (z)_1 \cdot (z)_2 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

Non è la y di prima, ma è quella qualche y "per cui vale" $x \cdot y = \varphi_x(y)$

$z = (x, y)$ t.c. $\varphi_x(y) = x \cdot y$

B!

NOTA: inoltre x non deve apparire in ... "se $x \in K$", per cui fa comodo mascherarla con la z

$g(x,z)$ è calcolabile perché è $(z)_1 \cdot (z)_2 \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x))$

Per il th smn, $\exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $\varphi_{s(x)}(z_1, z_2) = g(x,z)$

Voglio dimostrare che $S(x)$ è la funz di riduzione da A in K.

Cioè

- verso $x \in K$, $\varphi_{S(x)}(z) = g(x,z) = (z)_1 \cdot (z)_2 \quad \forall z$, quindi pure esisterà uno z t.c. $\varphi_{(z)_1}((z)_2) = (z)_1 (z)_2 \Rightarrow \varphi_x(y) = x \cdot y$ stessa cosa, basta rinominare. $\Rightarrow S(x) \in A$ (quella di prima è la def. di $\in A$)
- verso $x \notin K$ $\varphi_{S(x)}(z) \uparrow \quad \forall z$, quindi $|cod((z)_1)| = \emptyset$ e in particolare $|cod((z)_2)| = \emptyset \Rightarrow \nexists z = (S(x), y)$ t.c. $x \cdot y \in cod(S(x)) \Rightarrow S(x) \notin A$

Computabilità con Marco, foglio 4 11/07/2013

ES continuato

B re ma non ric

$\Rightarrow \overline{B}$ non r.e.

ES 3 esame 30/08/2010

$A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x$ strettamente crescente$\}$ ric/r.e.?

$\varphi_x > \varphi_y \quad \forall x, y$ t.c. $x > y$

A saturo: finito con la proprietà di essere crescenti

$\mathcal{A} = \{ f \in \mathcal{C} : f$ strettamente crescente $\}$

A r.e.? Riesco a dire di sì? No, dovrei vedere tutte le coppie possibili.

$\overline{A}$ r.e.? Sembra di sì, appena ne trovo una non strettamente crescente dico "sì". $\rightarrow \overline{A}$ r.e.

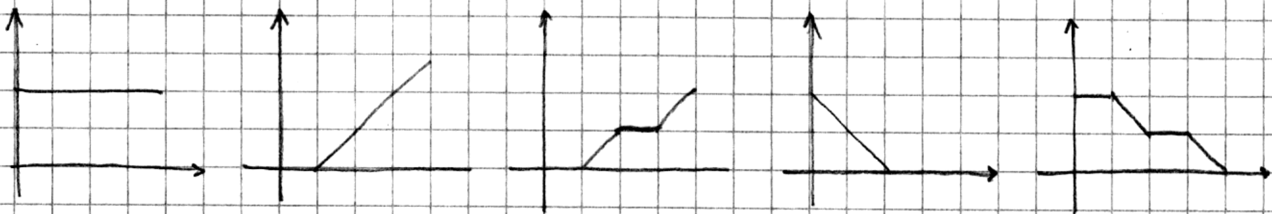
$\overline{\mathcal{A}} = \{ f \in \mathcal{C} : f$ non strettamente crescente $\}$

Vedo anche che non riesco a dire di no senza provare tutte le coppie

$\rightarrow$ r.e. ma non ric.

Provo con SC + minim per dire $\overline{A}$ r.e.

Voglio un prog che si fermi se trova uno di questi casi $\in A$



Attenzione che devo negare solo la tesi

$x > y$ e $f(x) \leq f(y)$

stessa ip tesi negata

$$SC_{\overline{A}}(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w.\big(1 - \chi_{S(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3)} \cdot \chi_{S(x,(w)_4,(w)_5,(w)_6)} \cdot sg((w)_1 \dot{-} (w)_4) \cdot sg(((w)_5 + 1) \dot{-} (w)_2)\big)\Big)$$

1 sse i1 > i2

1 sse out1 ≤ out2

È calcolabile $\rightarrow \overline{A}$ r.e.

$\bar{A}$ ric? Posso usare Rice perché A saturo

· $\bar{A}$ saturo? Sì

· $\bar{A} \neq \mathbb{N}$? id(x) è crescente stretta $\Rightarrow id \notin \bar{A} \Rightarrow$ Sì

· $\bar{A} \neq \emptyset$? $\mathbb{1}(x)$ è costante $\Rightarrow$ non strett cresc $\Rightarrow \mathbb{1}(x) \in \bar{A} \Rightarrow$ Sì

$\Rightarrow$ $\bar{A}$ è non ric (per Rice)

$\bar{A}$ è r.e. ma non ric $\Rightarrow$ A non r.e.

NOTA: meglio il nostro!

ES 4 esame 30/08/2010

$B = \{ x \in N : \forall m \in \mathbb{N}, m \cdot x \in W_x \}$ ric/r.e?

A non re : bisognerebbe vedere ogni $m \in N$

A non saturo : dipende dall'm che ci butto dentro e dall'indice del progr.

Riduzione a $\bar{K}$: $\bar{K} \leq_m B$

$\exists f : N \to N$ tot calc t.c.

Boh, vediamo $\bar{B} = \{ x \in N : \exists n \in N . n \cdot x \in W_x \}$

Posso dire "sì"? No, se mentre sto provando i vari $n \in N$ il progr cicla, io non posso più provare il prossimo n.

$\Rightarrow$ penso $\bar{B}$ non ric r e

?

Computabilità con Marco, foglio 5 11/07/2013

ES 3 esame 17/09/2010

$A = \{ x \in \mathbb{N} : \varphi_x$ quasi totale $\}$ ric / r.e?

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ quasi totale se $\{ x \mid f(x)\uparrow \}$ finito

(se f è indefinita per un numero finito di punti)

A saturo? Sì, dipende solo dall'indice della funz

A r.e? Riesco a dire "sì, sono finiti i punti per cui è indefinita"?

No, dovrei provarli tutti. $\Rightarrow$ non r.e.

Provo con R.S.

Caso 1 e id? Problema: ha dominio infinito, quindi se la limito da una parte, l'altra resta infinita

Ragiono su $\bar{A} = \{ x \in \mathbb{N} : \varphi_x$ non quasi totale $\}$

$\downarrow$

o è totale o è $\uparrow$ su ∞ elementi

$\bar{A}$ saturo

A non r.e, ad occhio. Uso R.S.

$\exists f \notin \bar{A}$ per cui $\exists \theta \subseteq f$, finito e $\theta \in \bar{A}$?

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \neq 0 \\ \uparrow & \text{se } x = 0 \quad (\text{solo in un caso}) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) \notin \bar{A}$ perché $\uparrow$ in un numero finito di casi.

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\theta(x)$ finito $\subseteq f$ (è definita solo su un caso di f)

$\theta \in \bar{A}$ perché è $\uparrow$ su un ∞ numero di elementi

$\Rightarrow \bar{A}$ non r.e.

Ritorno su A, sfrutto la stessa $f(x)$, che vedo $f(x) \in A$ e $\forall \theta$ finito $\subseteq f$, il numero di casi per cui $\theta(x)\uparrow$ è infinito (discorso di prima, se limito da una parte, l'altra esplode) $\Rightarrow \theta \notin A \Rightarrow A$ non r.e

ES 3 esame 23/03/2011

$A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x = \emptyset\}$

A saturo, è propr delle funz

A r.e? Dovrei calcolare tutto W_x e tutto E_x prima di calcolare la $\cap$.

No, non credo.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$

$\bar{A}$ saturo

$\bar{A}$ r.e? Sembra sia possibile dire di sì, basta fermarsi al 1° ele in comune,

$\bar{A}$ ric? No, difficile. $w = (i1, o1, t1, i2, o2, t2)$

$$sc_{\bar{A}}(x) = \mathbb{1}(\mu w.(1 - \chi_{S(x, w_1, w_2, w_3)} \cdot \chi_{S(x, w_4, w_5, w_6)} \cdot \overline{sg}(\overline{sg}|w_1 - w_5| + \overline{sg}|w_2 - w_4|)))$$ calcolabile

ho 2 progr che calcolano un output dato un input; vedo se:

- input 1° progr = output 2° progr
- output 1° progr = input 2° progr
- tutti e 2 di prima

Oppure, più semplice

$$sc_{\bar{A}}(x) = \mathbb{1}(\mu w.(1 - \chi_{H(x, w_1, w_2)} \cdot \chi_{S(x, w_3, w_1, w_4)})$$

$w = (i1, o1, i2, t2)$

$\Rightarrow \bar{A}$ r.e.

Provo Rice per vedere che non è ric.

- $\bar{A}$ saturo
- $\bar{A} \neq \mathbb{N}$? $\emptyset(x)$ ha $dom(\emptyset) = \emptyset = cod(\emptyset) \Rightarrow \emptyset(x) \notin \bar{A}$
- $\bar{A} \neq \emptyset$? $id(x)$ ha $dom(id) \cap cod(id) \neq \emptyset \Rightarrow id \in \bar{A}$

$\Rightarrow \bar{A}$ non ric

$\bar{A}$ r.e. ma non ric $\Rightarrow A$ non r.e.

Computabilità, foglio 6 — 11/07/2013

ES 4 esame 23/03/2011

$B = \{ x \in \mathbb{N} : \exists y > x \,.\, y \in E_x \}$ ric / r.e ?

B saturo? no, la y è una cosa fuori dalle caratteristiche di una f calcolata.

B r.e.? E_x so che è r.e., si può scorrere anche se è infinito, non devo temere che il progr si pianti.

Sì, posso calcolare un po' alla volta finché non trovo un y buono, allora so che $\exists y$, e che quindi $x \in B$.

$$sc_A(x) = \mathbb{1}\left(\mu w. \left(1 - \chi_{S(x, w_1, w_2, w_3)} \cdot \underbrace{sg(w_2 \dot{-} x)}_{\text{è 1 sse } x < w_2}\right)\right) \quad \text{calcolabile}$$

$\Rightarrow$ B è r.e., ma è ric?

L'unico è fare la riduzione a K: $K \leq_m B$

$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc tot t.c. $x \in K \iff f(x) \in B$

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$= y \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x))$ calcolabile (per definizione; totale su K, ma su N?)

Per smn $\exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$

. Dimostro che s è la funz di riduz cercata

. se $x \in K$) $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y \;\; \forall y$, $\exists y > s(x)$ t.c. $y \in E_{s(x)}$, allora va bene quella appena vista $\Rightarrow s(x) \in B$ (ne soddisfa le condiz)

. se $x \notin K$) $\varphi_{s(x)}(y) \uparrow \;\; \forall y \Rightarrow y \notin E_x = \emptyset \Rightarrow s(x) \notin B$

$\Rightarrow$ B non ric

B r.e ma non ric $\Rightarrow \bar{B}$ non r.e.

ES 3 esame 04/04/2011

$A = \{ x \in N : E_x = W_x + 1 \}$

cioè $\exists$ output t.c. $\nexists$ input t.c. output = input + 1

A r.e? Riesco a dire di sì? No, dovrei controllare <u>tutto</u> E_x che è potenzialmente infinito. Però posso dire di no al primo che becco: $\bar{A}$ r.e.

$\bar{A} = \{ x \in N : E_x \neq W_x + 1 \}$ cioè $\forall y \in E_x. \ \forall z \in W_x, \ y \neq z\,1$

cioè al 1° uguale ci fermiamo e diciamo sì, se $\exists y \in E_x$ t.c. $y = z+1$ con $z \in W_x$

$\bar{A}$ r.e.? Sì, basta scorrere un pò alla volta E_x e W_x, che si possono scorrere per come sono definiti, controllando coppie output ed input, fermandosi quando si becca il caso giusto. Tuttavia dovrei provare <u>tutte</u> le coppie per dire di no $\Rightarrow \bar{A}$ non ric. Provo SC + minimaliz.

Penso se ho un progr che mi controlla <u>2</u> coppie di valori alla volta: (in 1, out 1) e (in 2, out 2): se in 1+1 = out 2 o in 2+1 = out 1 allora $x \in \bar{A}$ *

$$SC_{\bar{A}}(x) = \mathbb{1}\Big(\mu w. \big(1 - \chi_{S(x, w_1, w_2, w_3)} \cdot \chi_{S(x, w_4, w_5, w_6)} \cdot \overline{sg}\,(|w_1 + 1 - w_5| \cdot |w_4 + 1 - w_2|)$$

1 sse $w_1 + 1 = w_5 \ \vee \ w_4 + 1 = w_2$

calcolabile $\Rightarrow \bar{A}$ r.e.

$w = (\underset{1}{in\,1}, \underset{2}{out\,1}, \underset{3}{t\,1}, \underset{4}{in\,2}, \underset{5}{out\,2}, \underset{6}{t\,2})$

Ma $\bar{A}$ è ric? Non credo, provo Rice

$\bar{A}$ saturo? Sì, <u>non</u> vedo comparire roba fuori dal programma: tutto dipende dalle funz che calcola.

$\bar{A} \neq \emptyset$? $id \in \bar{A}$ perché ha $cod(id) = dom(id) = N \Rightarrow$ Sì

$\bar{A} \neq N$? $\emptyset \notin \bar{A}$ perché ha $cod(\emptyset) \neq dom(\emptyset) + 1 \Rightarrow$ Sì

$\Rightarrow \bar{A}$ non ric

$\bar{A}$ r.e ma non ric $\Rightarrow A$ non r.e.

Vedo un paio di casi pratici:

$W_x = \{ 3, 4, 5 \}$	$W_x = \{ 3, 4, 5 \}$
$\uparrow_{+1} \ \uparrow_{+1} \ \uparrow_{+1}$	$+1 ?$
$E_x = \{ 2, 3, 4 \}$	$E_x = \{ 3, \dots \}$
oK	non oK

Computabilità con Marco, foglio 1 12/07/2013

ES 4 esame 22/03/2012, risolto meglio che su pdf

$B = \{ \Pi(x,y) : P_x$ termina sull'input x in più di y passi $\}$ ric/r.e?

B r.e? Vediamola così:

$\exists\, t_p > y$ t.c. $H(x,x,t_p) = 1$

Vado avanti a provare vari t_p (# passi) finché vedo che termina $\Rightarrow$ r.e.

Riesco a dire di no? No, potrebbe non terminare mai, ma non riesco a dirlo con sicurezza (dovrei essere sicuro che $\nexists\, t_p$) $\Rightarrow$ non ric.

$\overline{B} = \{ \Pi(x,y) : P_x$ non termina sull'input in più di y passi $\}$

traduco in logica negando quello di sopra

$\nexists\, t_p > y$ t.c. $\underbrace{H(x,x,t_p) = 1}$ $\rightarrow$ $\varphi_x(x)\downarrow$, è l'appartenenza a K

cioè $\forall\, t_p > y$ succede $H(x,x,t_p) = 0$ $\leftarrow$ $\varphi_x(x)\uparrow$

Riesco a controllare ogni t_p? No

NOTA: v. anche es 3 esame 11/07/2011, è r.e !

Provo con la SC per B

w = (passi usati) $\qquad$ 1 se $y < t_p$ (cioè $t_p > y$)

$$SC_B(x) = \mathbb{1}(\mu w. (1 - \chi_{H(x,x,w)} \cdot sg(w \dot{-} y)))$$

calcolabile $\rightarrow$ B è r.e.

NOTA: codifica del minore $a < b \rightarrow sg(b \dot{-} a)$

$3 \dot{-} 2 \rightarrow 1$

$2 \dot{-} 3 \rightarrow 0$

$3 \dot{-} 3 \rightarrow 0$

codifica del maggiore $a > b \rightarrow b < a \rightarrow sg(a \dot{-} b)$

codifica dell'uguale $a = b \rightarrow \overline{sg}(|a-b|)$

codifica di $a \leq b \rightarrow b > a-1 \rightarrow sg(b \dot{-} (a \dot{-} 1))$

U T I L E

Torniamo al problema. Devo dimostrare B non ric.

B saturo? No, si fanno considerazioni sui passi che il programma impiega per terminare. I passi sono un dettaglio del programma che non ha niente a che fare con la funz calcolata.

Riduzione a K : $K \leq_m B$

$\exists f : N \to N$ tot calc t.c. $x \in K \Leftrightarrow f(x) \in B$

Definisco $g(x, z) = \begin{cases} z & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases}$

? { x = indice programma; z = # passi, non necessariamente y
So che se $x \in K$, la funzione di indice x è calcolabile, quindi $\exists z$ finito
Ma tra x indice funzione ed x indice programma è un casino. Mi appoggio a π.

Per smn, $\exists S : N \to N$ tot calc t.c. $\varphi_{S(x)}(y) = g(\pi(x,0), y)$:

- se $x \in K \Rightarrow \varphi_x(x)\downarrow \ \forall x$ (1° ramo funz g) $\Rightarrow \exists t > 0$ t.c. $\varphi_x(x)\downarrow$
  cioè $H(x, x, t) = 1 \to \pi(x,0) \in B$
- se $x \notin K \Rightarrow \varphi_x(x)\uparrow \ \forall x$ (2° ramo funz g) $\Rightarrow \nexists t > 0$ t.c. $\varphi_x(x)\downarrow$
  cioè $\forall t \ H(x, x, t) = 0 \Rightarrow \pi(x, 0) \notin B$

$\Rightarrow B$ non ric

...

DA RIVEDERE

ES 3 del 03/04/2012

$B = \{ \pi(x,y) : P_x(x)\downarrow$ in meno di y passi $\}$ ric/r.e ?

Penso di poter dire di sì e anche di no: basta eseguire i passi (istruzioni base eseguite dal progr) e vedere se termina prima di y istruz poi dire sì/no. B ricorsivo, credo.

Provo a scriverne la funz caratt. !

$z = \pi(x,y)$, è un numero che codifica la coppia (credo)

$$\chi_B(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in B \\ 0 & \text{se } z \notin B \end{cases}$$

$$= \chi_{H(\pi_1(z), \pi_1(z), \pi_2(z)) = 1}$$ calcolabile

$\pi_1(z)$ mi da x (ricava il primo numero codificato in z)

Computabilità con Marco, foglio 2 12/07/2013

ES 4 esame 17/09/2010

$B = \{ x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ totale} \}$

Dimostrare che $\overline{K} \leq_m B$.

$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc t.c. $x \in \overline{K} \Leftrightarrow f(x) \in B$

Definisco $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \overline{K} \quad (\text{se } x \notin K, \text{ se } \varphi_x(x)\uparrow, \text{ se } \neg H(x,x, \ldots \\ \uparrow & \text{se } x \notin \overline{K} \quad (\text{se } x \in K, \text{ se } \varphi_x(x)\downarrow \ldots \end{cases}$

indice prog

input progr o #passi?

basta che qualcosa su ogni input

(se è totale deve terminare su ogni input y)

Roba nuova: le qualsiasi y glielo passo io da fuori, non serve vedere $\forall y$

.

. BOH

?

ES SU 2° TEOREMA DI RICORSIONE

ES 5 esame 17/07/2009

Dim che $\exists\, x \in N$ t.c. $\varphi_x(y) = y^x \quad \forall y \in N$

Prendo una funz che mi rappresenti ciò che voglio dimostrare, e che sia calcolabile. La funz la voglio a 2 parametri (vedremo dopo perché)

$f(x,y) = y^x$ calcolabile (lo è l'elev a potenza)

La funz calcolabile a 2 par mi serve per usare smn e dire che

$\exists\, s : N \to N$ calc tot t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = y^m$

Uso il 2° th di ricorsione che mi dice, dato che $\exists\, h$ tot calc, allora $\exists\, n \in N$ t.c. $\underline{\varphi_n = \varphi_{h(n)}}$

esiste un programma diverso che calcola la stessa cosa

Dato che $S(x)$ è tot calc, va bene usata come h. Quindi so che esiste n t.c. $\varphi_n = \varphi_{S(n)}$. Per come ho definito S, $\varphi_{S(n)}(y) = f(n,y)\ \forall y$.

Metto assieme le due cose ed ho $\underline{\varphi_n(y)} = \varphi_{S(n)}(y) = f(n,y) = \underline{y^n\ \forall y}$.

Trovato l'x cercato: corrisponde a n.

ES 5 esame 14/09/2009

Dimostrare che esiste $n \in N$ t.c. $W_n = E_n = \{x \cdot n : x \in N\}$

Definisco una funz che mi rappresenti l'insieme

$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } div(x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$ cioè se x è divisore di y $\longleftrightarrow$ $y = x \cdot n$

$n = \frac{y}{x} \in N$

$\Downarrow$

$div(x,y)$

$y \in W_x$ e $y \in E_x$ è sia input che output del progr

Vedo che f è una SC, vedo se è calc

$= \mathbb{1}(\mu w.\,(1 - div(x,y)))$ sì

minimalizzazione farlocca: w neanche lo uso

Per smn, $\exists\, s : N \to N$ tot calc t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)$

Per il 2° th di ric, se h tot calc, allora $\exists\, n \in N$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{h(n)}$

Computabilità con Marco, foglio 3 12/07/2013

ES continuato

$\varphi_n = \varphi_{h(n)} = \varphi_{s(x)} \Rightarrow \varphi_{s(n)}(y) = f(n, y) = \begin{cases} y & \text{se } div(n,y) \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$

indice progr

se $div(n,y) = 1$ allora $\exists\, x \in \mathbb{N}$ (risultato intero di $\frac{y}{n}$)

cioè $x = \frac{y}{n}$.

Allora ho un $x \in \mathbb{N}$ per cui ogni y che è output è anche in input

quindi $E_x = W_x$ e vale $x \cdot n$ (dato che $x = \frac{y}{n}$)

ES 5 esame 30/08/2010 (FACILE)

Dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_x(y) = x - y$

Trovo una funz adatta a rappresentare

$f(x,y) = x - y$ è calcolabile

Per smn $\exists\, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)$

Per il 2° th di ric, data $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{h(n)}$

$\varphi_n(y) = \varphi_{s(n)}(y) = f(n,y) = x - y$

Ecco, l'$x \in \mathbb{N}$ per cui ..., è $s(n)$.

ES 5 esame 23/03/2011

Dim che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che φ_n è totale e $|E_n| = n$

Cioè dimensione cod = indice progr e definita ovunque.

$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } y < x \\ 0 & \text{altrim} \end{cases}$ Ritorna x valori: da 0 a $x-1$ $\Rightarrow |E_x| = x$

definita ovunque ✓ (o un ramo ↓ o l'altro è pure ↓)

cardinalità cod = indice funz ✓ (scritto bene sopra)

Mostrare $f(x,y)$ calcolabile

$f(x,y) = sg(x \dot{-} y) \cdot y$ calcolabile

$\qquad\quad \uparrow$ 1 sse $x > y$

Per smn $\exists\, s : N \to N$ tot calc t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)$

Per il 2° th di ric, data $h : N \to N$ tot calc, $\exists\, n \in N$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{h(n)}$

$\varphi_{h(n)} = \varphi_{s(n)} = f(n,y) = sg(x \dot{-} y) \cdot y$ che è tot ed ha $|E_x| = x$

$\Rightarrow n$ è l'$x \in N$ con le proprietà cercate

$\Rightarrow$ c.v.d.

ES 5 esame 04/04/2011

Dimostrare che la funz $\Delta : N \to N$ definita da $\Delta(n) = \min(\{ y : \varphi_y \neq \varphi_x \})$

non è calcolabile.

Cioè non riesco a trovare la funz che mi trova l'indice del 1° programma che calcola roba diversa dal progr di indice x.

min è totale sui naturali.

NOTA : $A \Rightarrow B$ se lo nego, ho la contronominale $\bar{A} \Leftarrow \bar{B}$

vale per ogni teorema, non c'entra niente il sse ($\Leftrightarrow$)

Provo con la contronominale del 2° th di ric

$\nexists\, \Delta : N \to N$ tot calc

$\Uparrow$

$\nexists\, n \in N$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{\Delta(n)}$

cioè $\forall\, n \in N$ t.c. $\varphi_n \neq \varphi_{\Delta(n) = y}$

sempre sì, per come è definita $\Delta(n)$, mi da il 1° numero diverso

Un progr è diverso da un altro se ha un indice diverso,

che calcoli la stessa cosa è un altro conto.

Posso dire allora che $\nexists\, \Delta : N \to N$ tot calc : o non è tot

o non è calc. Mostro che Δ è totale:

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \quad // \ 0 \text{ è il minimo} \neq \text{da tutti i numeri} > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \quad // \text{ se } x = 1, \text{ il 1° diverso è } 1 \end{cases}$$

Computabilità con Marco, foglio 4 12/07/2013

ES continuato

Resta solo la possibilità che sia non calcolabile.

Dimostrato.

ES 5 esame 13/09/2011

Usare il 2° th di ricorsione per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \le y \le x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Devo trovare la f che rappresenti sta cosa

v pdf Marta per soluzione

ES 5 esame 03/04/2012

Dimostrare che non è calcolabile

$$g(x) = \begin{cases} e_0 & \text{se } \varphi_x \text{ totale} \\ e_1 & \text{o/w} \end{cases}$$

Dove e_0 è l'indice della funz $\emptyset$ (sempre indef)

" e_1 " " " " $\mathbb{1}$

Vedo che $g(x)$ è totale.

So che $\emptyset$ è indefinita ovunque

" " $\mathbb{1}$ è definita "

Uso il contronominale del 2° th di ric.

$\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_n \neq \varphi_{g(n)} \Rightarrow \nexists g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc

$$g(n) = \begin{cases} e_0 \Rightarrow \text{se siam qui, } \forall n \;\; \varphi_n \text{ totale, cioè} \downarrow \text{sempre; invece } \varphi_{e_0} \uparrow \text{ sempre} \\ \qquad \Rightarrow \varphi_{e_0} \neq \varphi_n \;\; \forall n \\ e_1 \Rightarrow \text{se siam qui, } \forall n \;\; \varphi_n \text{ non totale, cioè } \exists a \text{ t.c. } \varphi_n(a)\uparrow, \\ \qquad \text{mentre } \varphi_{e_1}\downarrow \text{ sempre} \Rightarrow \varphi_{e_1} \neq \varphi_n \;\; \forall n \end{cases}$$

$\Rightarrow \nexists\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot calc + ma g è tot $\Rightarrow g$ non è calc

ES 5 del 22/03/2012

Dimostrare, usando il 2° th di ric, che C non è saturo

$C = \{ x : 2x \in W_x \wedge E_x \}$ NOTA: questa teoria è dubbia

Se un insieme è saturo, le funzioni che ne fanno parte possono essere calcolate da programmi diversi, perché non conta come sono fatti i programmi che le calcolano. Ad esempio posso prendere un programma che calcola una somma, aggiungergli istruzioni inutili ed ottenere un programma diverso che però calcola la stessa cosa. Se invece un insieme non è saturo, conta anche come sono fatti i programmi che ne fanno parte. Infatti non si può neanche scrivere il programma come un insieme di funzioni, ma è solo possibile vederlo come un insieme di indici dei programmi che ne fanno

Computabilità con Marco, foglio 5 12/07/2013

ES continuato

parte: indice diverso significa programma diverso.

Qui abbiamo programmi il cui output dipende dal proprio indice, quindi da come sono fatti.
Se becchiamo un caso in cui non si riesce a calcolare la stessa cosa con un programma di indice diverso, è fatta.
Cioè vogliamo un caso in cui $\nexists n, n' \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{n'}$, $n' \neq n$

L'idea è quella di arrivare ad un assurdo con quanto dimostrato dal 2° th di ric, cioè $\exists n$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{h(n)}$
Ci servirà una h tot. calc. adatta, ed una funz tot calc
ce la possiamo trovare con il th smn, che però ha bisogno di una funz a 2 parametri calcolabile. Definisco

$$f(e,x) = \begin{cases} 2e & \text{se } x = 2e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NOTA: il trick rispetto ad altri problemi è aver messo $f(e,x)$ invece di $f(x,e)$!

Vedo che questa f è definita solo per i casi in cui $x = 2e$
e $2e \in dom(f) \cap cod(f)$ Quindi è una buona candidata a rappresentare un programma il cui indice $e \in \mathcal{C}$.
Dimostro che è calcolabile, minimalizzo e mostro che è multiplo di SC.

$$f(e,x) = 2e \cdot \mathbb{1}(\mu w. (\overline{sg}(|x-2e|))) \quad \text{calcolabile}$$

Per smn $\exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_{s(e)}(x) = f(e,x)$ $\forall x$
data f calcolabile.

Per il 2° th di ric., data h tot calc, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{h(n)}$
Dato che e è generico come n, $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{h(e)}$

$\varphi_e = \varphi_{h(e)} \Rightarrow \varphi_{h(e)}(x) = f(e,x) = \begin{cases} 2e & \text{se } x = 2e \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$

Osservo nuovamente che $2e \in W_x \cap E_x$, (in particolare qui $\{2e\} = W_x = E_x$). Quindi $\underline{e \in \mathcal{C}}$.

Supponiamo che $\exists\, e' \neq e$ t.c. $\varphi_{e'} = \varphi_e$, cioè un programma diverso che calcola la stessa cosa, allora $W_{e'} = W_e = \{2e\} = E_e = E_{e'}$

Vedo però che $2e' \notin W_{e'} \cap E_{e'}$ perché $2e' \neq 2e \Rightarrow e' \notin \mathcal{C}$.

Ho mostrato che c'è un programma di indice $e \in \mathcal{C}$ che calcola qualcosa, e che tutti gli altri programmi di indice $e' \neq e$ che potrebbero calcolare la stessa cosa non possono stare in $\mathcal{C}$, o addirittura non possono esistere (quale esattamente non lo so...).

$\Rightarrow \mathcal{C}$ non saturo.

Es 2 esame 15/07/2013

Dimostrare che un insieme A è ricorsivo sse esistono due funzioni totali calcolabili tali che:
per ogni x, $x \in A$ sse $f(x) > g(x)$

L'idea base è quella di usare le funzioni caratteristiche degli insiemi A ed A segnato.