

Introduzione alla Teoria dei Giochi [TG]

Gianmaria Martini

Impiego della TG nelle Scienze economiche

- Utilizzo della TG: analisi dell'interazione strategica. La teoria microeconomica tradizionale è basata sulla teoria della **decisione individuale**. La TG è applicabile ai casi in cui due (o più) agenti prendono decisioni che influenzano le funzioni obiettivo sia dell'agente che ha preso la decisione che dell'altro agente economico.
- Viene normalmente impiegata quando gli agenti sono soggetti alla **interazione strategica**, ossia sono coscienti che le decisioni individuali hanno effetti anche sulla funzione obiettivo di altri.
- Gli agenti hanno inoltre **interessi contrastanti**: un aumento dell'utilità di un individuo porta spesso ad una diminuzione dell'utilità di un altro individuo. Questo fenomeno avviene normalmente nei rapporti tra le imprese. Di conseguenza la TG è ampiamente utilizzata in Economia Industriale.

Definizioni preliminari

- N = numero dei giocatori, i = giocatore i -esimo, $i = 1, \dots, N$
- A_i = insieme delle mosse (azioni) a disposizione del giocatore i
- a_i = singola azione nell'insieme delle mosse
- $a = [a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_N]$ vettore delle mosse dei giocatori
- S_i = insieme delle strategie del giocatore i
- s_i = singola azione nell'insieme delle strategie S_i
- s_{-i} = vettore delle strategie di tutti i giocatori coinvolti nel gioco tranne il giocatore i
- $s = [s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_N]$ vettore delle strategie
- $\pi_i(s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_N)$ = vincita (o profitto) del giocatore i
- ω_i = insieme informativo del giocatore i al momento di effettuare una mossa
- nodo decisionale = evento all'interno del gioco in cui un giocatore deve effettuare una mossa
- nodo iniziale = prima mossa effettuata nel gioco
- nodo finale = termine del gioco, cui non corrisponde alcuna mossa ma solo la contabilizzazione delle vincite
- equilibrio = vettore s delle strategie effettivamente implementate dai giocatori
- sentiero di equilibrio = sequenza delle mosse di equilibrio dei giocatori

Classificazione dei giochi

- statici ad informazione completa
 - dinamici ad informazione completa
 - statici ad informazione incompleta
 - dinamici ad informazione incompleta
-
- un gioco è **statico** se i giocatori muovono **una** sola volta **simultaneamente**
 - un gioco è **dinamico** se i giocatori scelgono **più volte** oppure se scelgono in modo **sequenziale**, ossia dopo aver osservato la mossa di altri giocatori
 - un gioco è ad **informazione completa** se tutti i giocatori conoscono le mosse ad disposizione di tutti i giocatori e le possibili **vincite** di tutti i giocatori
 - un gioco è ad **informazione incompleta** se un (almeno) giocatore **non conosce le vincite** degli altri
 - un gioco è ad **informazione perfetta** se ogni giocatore **sa esattamente dove si trova** al momento di scegliere

- un gioco è ad **informazione imperfetta** se un (almeno) giocatore non sa esattamente in che nodo decisionale si trova al momento di effettuare una mossa

Tipi di strategie

- strategia **pura** = assegna **probabilità 1** ad ogni mossa che il giocatore **deve** adottare nel corso del gioco
- strategia **mista** = **distribuzione di probabilità** su ogni mossa che il giocatore **può** adottare nel corso del gioco
- strategia **dominante** = la strategia s_i è dominante se **garantisce** al giocatore i la **miglior vincita** possibile rispetto a tutte le altre strategie a sua disposizione **per ogni possibile vettore s_{-i}** (quindi per ogni possibile combinazione di strategie dei rivali)
- strategia **dominata** = la strategia s_i è dominata se **non viene mai utilizzata** dal giocatore i per ogni possibile vettore s_{-i}
- strategia di **risposta ottima** = la strategia che garantisce al giocatore i , tra tutte le strategie a sua disposizione, la vincita maggiore, **se il rivale adotta una particolare strategia**. Esiste una (o più) risposta ottima per ogni strategia a disposizione del rivale.
- **corrispondenza di risposta ottima** = ad una particolare mossa (o ad una strategia mista) del rivale **corrisponde** non una singola mossa di risposta ottima ma piuttosto un **intervallo di risposte**.
- **tipo** = una **caratteristica particolare di un giocatore**. In presenza di informazione incompleta (i giocatori non sanno le vincite degli altri giocatori) esiste un grado di incertezza in merito alle possibili vincite dei rivali. Tale grado di incertezza viene modellizzato ipotizzando che il rivale, di cui non si conosce l'esatta vincita, possa essere di diversi tipi: ad ogni tipo corrisponde una vincita. Pertanto il tipo di un giocatore comporta una particolare vincita. Più tipi portano a vincite diverse. Il giocatore conosce però una distribuzione di probabilità in merito ai possibili tipi
- **strategia in funzione del tipo**: piano completo di mosse da adottare in funzione del tipo assegnato

Concetti di equilibrio

- **equilibrio in strategie dominanti** = ogni giocatore presenta una strategia dominante
- eliminazione della strategia dominata = il giocatore non prende in considerazione una strategia che non verrà mai adottata dai rivali
- eliminazione iterata delle strategie dominate = si basa sull'ipotesi di conoscenza comune che tutti i giocatori siano razionali. Consiste nell'iniziale eliminazione ad opera del giocatore i della strategia dominata del rivale, nella successiva eliminazione da parte del rivale dell'eventuale strategia dominata del giocatore i , e così via
- **equilibrio con eliminazione iterata delle strategie dominate** = vettore composta dalla strategia rimasta a ciascun giocatore al termine del processo di eliminazione iterata delle strategie dominate
- **Equilibrio di Nash** = vettore di strategie di equilibrio costituito da risposte ottime di tutti i giocatori. Si ottiene tramite l'intersezione degli insiemi delle strategie di risposta ottima di ciascun giocatore. Si applica ai giochi statici.
- Sottogioco = parte di un gioco dinamico che presenta le seguenti caratteristiche: (1) nodo iniziale diverso e successivo rispetto al nodo iniziale vero e proprio del gioco, (2) contiene tutti i nodi decisionali successivi fino ai nodi finali, (3) non contiene alcun insieme informativo che presenta come suoi elementi nodi decisionali non successivi al nodo iniziale del sottogioco
- **Equilibrio perfetto nei sottogiochi**: vettori di strategie di equilibrio che hanno la caratteristica di costituire un equilibrio di Nash di ciascun sottogioco. E' un **raffinamento** dell'equilibrio di Nash da applicare ai giochi dinamici ad informazione completa
- **Equilibrio Bayesiano di Nash**: equilibrio di Nash in cui le strategie di equilibrio, che sono sempre delle risposte ottime, sono tali da prevedere la mossa da adottare in funzione di ciascun tipo possibile di giocatore. E' un raffinamento dell'equilibrio di Nash da applicare ai giochi statici ad informazione incompleta.
- Credenza = valutazione effettuata da ciascun giocatore in merito al tipo del rivale. Si modella assegnando una probabilità al nodo decisionale in cui il giocatore deve muovere. La credenza deve essere consistente, ossia deve tener conto di tutte le informazioni disponibili all'interno del gioco e delle mosse effettuate dai giocatori sulla base di tali credenze. Viene calcolata, quando possibile, sulla base della regola di Bayes.

- **Equilibrio Bayesiano perfetto:** sistema di credenze e vettore di strategie consistenti con le predette credenze che formano un equilibrio. E' un raffinamento dell'equilibrio di Nash da applicare ai giochi dinamici con informazione incompleta

Rappresentazione di un gioco

- **Forma normale** = matrice delle vincite. Bimatrice in cui vengono indicate sulle colonne e sulle righe le strategie pure a disposizione dei due giocatori e nelle celle della bimatrice le coppie di vincite corrispondente a ciascuna coppia di mosse (o a ciascuna situazione strategica)
- **Forma estesa** = albero del gioco, rappresentato dal nodo iniziale, dai nodi decisionali successivi, dai nodi finali, dai rami che corrispondono alle possibili mosse ad ogni nodo decisionale, dalle vincite indicate ai nodi finali