Esercizi di computabilità risolti

Questi esercizi sono stati svolti nel 2012 da Marta Aduasio.

L'autrice non garantisce che siano tutti corretti. Potrebbero esserci degli errori, fate attenzione.

COMPUTABILITÀ - APPELLI

ESERCIZI SULLO STUDIO DI RICORSIVITÀ

19 MARZO 2009

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| \geq 2\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : |dom(f)| \geq 2\}$

A è saturato

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu z. \left|\chi_{H(x, z_1, z_2)} \cdot \chi_{H(x, z_3, z_4)} \cdot \chi_{z_1 \neq z_3} - 1\right|\right)$$

calcolabile $\Rightarrow$ A è r.e.

$A \neq \emptyset$ $(id \in \mathcal{A})$
$A \neq \mathbb{N}$ $(\emptyset \notin \mathcal{A})$
A è saturato
$\Rightarrow$ A non ricorsivo

A non ricorsivo, A r.e $\Rightarrow$ $\bar{A}$ non r.e.

④ $B = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x\}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x \in B \Rightarrow x \in E_x \Rightarrow \exists y . \varphi_x(y) = x \\ x \notin B \Rightarrow x \notin E_x \Rightarrow \forall y . \varphi_x(y) \neq x \end{array}\right]$

B non è saturato

$$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ \uparrow & x \notin B \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w . \left|\chi_{S(x, (w)_1, x, (w)_2)} - 1\right|\right)$$

calcolabile $\Rightarrow$ B r.e.

$K \leq_m B$: $x \in K$ sse $s(x) \in B$ (sse $s(x) \in E_{s(x)}$)

$$g(x,y) = \begin{cases} y & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x)) \text{ calcolabile}$$

per smn $\exists s$ totale calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y$ $\forall y \Rightarrow y = s(x) \Rightarrow s(x) \in E_{s(x)}$
  $\Rightarrow s(x) \in B$
- $x \notin B \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ $\forall y \Rightarrow y = s(x) \Rightarrow s(x) \notin E_{s(x)}$
  $\Rightarrow s(x) \notin B$

$\Rightarrow$ B non ricorsivo

$\Rightarrow$ $\bar{B}$ non r.e.

2 APRILE 2009

(3) $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \cap E_x\}$

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases}$$

$$= 1\!\!1\left(\varphi_0(x,x) \cdot \mu w. \left|\chi_{S(x,(w)_1,x,(w)_2)} - 1\right|\right)$$

è calcolabile $\Rightarrow$ A è r.e.

$K \leq_m A$ ($x \in K$ sse $s(x) \in A$ sse $s(x) \in W_{s(x)} \cap E_{s(x)}$).

$$f(x,y) = \begin{cases} y & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = y \cdot 1\!\!1(\varphi_0(x,x)) \text{ è calcolabile}$$

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists\, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = y \ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}(s(x)) = s(x)$
  $\Rightarrow s(x) \in W_{s(x)} \cap E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \uparrow \overset{\forall y}{\Longrightarrow} \varphi_{s(x)}(s(x)) \uparrow \Rightarrow E_{s(x)} = \emptyset$
  $\Rightarrow s(x) \notin W_{s(x)} \cap E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin A$

s è la funzione di riduzione di K non ricorsivo $\Rightarrow$ A non ricorsivo

A r.e. non ricorsivo $\Rightarrow \bar{A}$ non r.e.

(4) $V = \{x \in \mathbb{N} : W_x \text{ infinito}\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{V}\} \Rightarrow V$ è saturato

$\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{C} : \text{dom}(f) \text{ infinito}\}$

$\exists f \in \mathcal{V} : id \in \mathcal{V}$. $\forall \theta \subseteq id$, θ finita, $\theta \notin \mathcal{V}$ perché $\text{dom}(\theta)$ è finito

$\hookrightarrow$ V è non r.e.

$\exists f \notin \bar{\mathcal{V}} : id \notin \bar{\mathcal{V}}$ perché $\text{dom}(id)$ è ∞. $\exists\, \theta \subseteq id$, θ finita, $\theta \in \bar{\mathcal{V}}$

$$\theta(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 10 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{dom}(\theta) = [0,10] \text{ finito}$$

$\hookrightarrow \bar{V}$ è non r.e.

17 LUGLIO 2009

(3) $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq \mathbb{P}\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\Rightarrow$ A saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \subseteq \mathbb{P}\}$

$\exists f \notin \mathcal{A} : id \notin \mathcal{A}$ $\exists \theta \subseteq id$, θ finita t.c. $\theta \in \mathcal{A}$: $\theta(x) = \begin{cases} x & x = \\ \uparrow & alt \end{cases}$

↳ A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \not\subseteq \mathbb{P}\}$ (è saturato)

$SC_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{A} \\ \uparrow & x \notin \bar{A} \end{cases} = 1\!\!1\left(\mu\omega . \left| \chi_{H(x,(\omega)_1,(\omega)_2)} \cdot Hm(2,(\omega)_1) - \right.\right.$

è calcolabile

↳ $\bar{A}$ è r.e. ma non ricorsivo (poiché A non r.e.)

(4) $V = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in W_x, \exists k \in \mathbb{N}, y = k \cdot x\}$

$SC_V(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ \uparrow & x \notin V \end{cases} = 1\!\!1\left(\mu\omega . \left| \chi_{H(x,(\omega)_1 \cdot x,(\omega))} - 1 \right|\right)$

è calcolabile

↳ V è r.e.

$K \leq_m V$ ($x \in K$ sse $s(x) \in V$ sse $\exists y \in W_{s(x)}, \exists k \in \mathbb{N}, y = k \cdot s(x)$)

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = 1\!\!1(\Psi_U(x,x))$ è calcolabile

$\overset{smn}{\Longrightarrow}$ $\exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile tale che $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f($

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 1$ $\forall y \Rightarrow \exists k = 1$ t.c. $\varphi_{s(x)}(k \cdot s(x)) = 1$

  $\Rightarrow k \cdot s(x) = s(x) \in W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in V$

- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\uparrow$ $\forall y \Rightarrow W_{s(x)} = \emptyset \Rightarrow \neg\exists y \in W_{s(x)}$,

  $\neg\exists k \in \mathbb{N}$; $y = k \cdot s(x) \Rightarrow s(x) \notin V$

↳ V non ricorsivo $\Rightarrow \bar{V}$ non r.e.

14 SETTEMBRE 2009

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y, z \in \mathbb{N},\ z > 1 \wedge x = y^z\}$

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w . \left| sg((w)_1 \dot{-} 1) \cdot \overline{sg}\left(\left|x - (w)_2^{(w)_1}\right|\right) - 1 \right| \right)$$

calcolabile

↳ A è r.e.

$K \leq_m A$ $\{x \in K$ sse $s(x) \in A$ sse $\exists y, z \in \mathbb{N},\ z > 1 \wedge s(x) = y^z\}$

$$f(x,t) = \begin{cases} \sqrt[z]{t} & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \sqrt[z]{t} \cdot \mathbb{1}\left(\varphi_U(x,x)\right)$$

è calcolabile

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(t) = f(x,t)\ \forall t$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(t) = f(x,t) = \sqrt[z]{t}\ \forall t\ \forall z > 1 \Rightarrow \varphi_{s(x)}(s(x)) = \sqrt[z]{s(x)}$

  $\Rightarrow s(x) = y^z$ con $y \in \mathbb{N} \Rightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(t) = f(x,t)\uparrow\ \forall t \Rightarrow \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z > 1\ s(x) \neq y^z$

  $\Rightarrow s(x) \notin A$

↳ A non ricorsivo $\Rightarrow \bar{A}$ non r.e.

④ $V = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > 1\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{V}\}$ $\mathcal{V} = \{f \in \mathcal{C} : |dom(f)| > 1\}$ V satu

$$SC_V(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ \uparrow & x \notin V \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w . \left| \chi_{H(x,(w)_1,(w)_2)} \cdot \chi_{H(x,(w)_3,(w)_4)} \cdot \chi_{[w]}\right.\right.$$

è calcolabile

↳ V è r.e.

$$\left.\begin{array}{l} V \neq \emptyset \rightarrow id \in \mathcal{V} \\ V \neq \mathbb{N} \rightarrow \emptyset \notin \mathcal{V} \\ V \text{ saturato} \end{array}\right\} \Rightarrow V \text{ non ricorsivo}$$

↳ $\bar{V}$ non r.e.

24 SETTEMBRE 2009

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = y \text{ per infiniti } y\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\Rightarrow$ A saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : f(y) = y \text{ per infiniti } y\}$

$\exists f \in \mathcal{A} : id \in \mathcal{A}$. $\exists \theta \subseteq id$, θ finita, $\theta \notin \mathcal{A}$ $\quad \theta(x) = \begin{cases} x & x < 100 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) \neq y \text{ per infiniti } y\}$

$\exists f \notin \bar{\mathcal{A}} : id \notin \bar{\mathcal{A}}$. $\exists \theta \subseteq id$, θ finita, $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$ $\quad \theta(x) = \begin{cases} x & x < 100 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\hookrightarrow \bar{A}$ non r.e.

19 MARZO 2010

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq E_x\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\Rightarrow$ A saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \subseteq codom(f)\}$

$\exists f \notin \mathcal{A} : \mathbb{1}(x) \notin \mathcal{A}$. $\exists \theta \subseteq \mathbb{1}$, θ finita t.c. $\theta \in \mathcal{A}$: $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \not\subseteq E_x\}$

$\exists f \notin \bar{\mathcal{A}} : f(x) = x - 1 \notin \bar{\mathcal{A}}$. $\exists \theta \subseteq f$, θ finita t.c. $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$: $\theta(x) = \begin{cases} x - 1 \\ \uparrow \end{cases}$

$\hookrightarrow \bar{A}$ non r.e.

④ $B = \{x \in \mathbb{N} : f(x) \in E_x\}$ con f funzione totale calcolabile fissata

$sc_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ \uparrow & x \notin B \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w. \left| \chi_{S(x, (w)_1, f(x), (w)_2)} - 1 \right|\right)$

è calcolabile

$\hookrightarrow$ B è r.e.

$K \leq_m B$ ($x \in K$ sse $s(x) \in B$ sse $f(s(x)) \in E_{s(x)}$)

$g(x,y) = \begin{cases} f(y) & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = f(y) \cdot \mathbb{1}(\varphi_U(x,x))$ calcolabile

smn
$\Rightarrow \exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = g \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = f(y)\ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}(s(x)) = f(s(x))$

  $\Rightarrow f(s(x)) \in E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in B$

- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow\ \forall y \Rightarrow E_{s(x)} = \phi \Rightarrow f(s(x)) \notin E_{s(x)}$

  $\Rightarrow s(x) \notin B$

s è funzione di riduzione da K che è non ricorsivo

↳ B non ricorsivo $\Rightarrow \bar{B}$ non r.e.

30 MARZO 2010

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > |E_x|\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$
$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : |dom(f)| > |codom(f)|\}$ $\Rightarrow A$ saturato

$\exists f \notin \mathcal{A} : f(x) = x \dot{-} 1 \notin \mathcal{A}$. $\exists \theta \subseteq f$, θ finita t.c. $\theta \in \mathcal{A}$: $\theta(x) = \begin{cases} x \dot{-} 1 & x \leq \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$

↳ A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| \leq |E_x|\}$ saturato

$\exists f \notin \bar{\mathcal{A}} : \mathbb{1} \notin \bar{\mathcal{A}}$. $\exists \theta \subseteq \mathbb{1}$, θ finita t.c. $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$: $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$

↳ $\bar{A}$ non r.e.

④ $B = \{x \in \mathbb{N} : img(f) \cap E_x \neq \phi\}$ con f funzione totale calcolabile fissata

$B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ $\mathcal{B} = \{g \in \mathcal{C} : img(f) \cap codom(g) \neq \phi\}$ $\Rightarrow B$ saturato

$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ \uparrow & x \notin B \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w . |\chi_{S(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3)} \cdot \overline{sg}(|f(w_4) - (w)_2|) - 1|$

è calcolabile

↳ B è r.e.

$B \neq \emptyset$ (id $\in \mathcal{B}$ perche codom(id) $= \mathbb{N}$ e $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$)
$B \neq \mathbb{N}$ ($\emptyset \notin \mathcal{B}$)
B saturato
$\overset{\text{Rice}}{\Rightarrow}$ B non ricorsi...

$\Rightarrow \bar{B}$ non r.e.

13 LUGLIO 2010

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = x \cdot y$ per qualche $y\}$

$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w. \left|\chi_{S(x,(w)_1,(w)_1 \cdot x,(w)_2)} - 1\right|\right)$ è calcolabile

↳ A r.e.

$K \leq_m A$ ($x \in K$ sse $s(x) \in A$ sse $\varphi_{s(x)}(y) = s(x) \cdot y$ per qualche y)

$f(x,z) = \begin{cases} (z)_1 \cdot z & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \mathbb{1}(\psi_U(x,x))$ calcolabile

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(z) = f(x,z)\ \forall z$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(z) = f(x,z) = z_1 z\ \forall z \Rightarrow \exists y = \langle s(x), y \rangle$ t.c.
  $\varphi_{s(x)}(y) = s(x) \cdot y \Rightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(z) = f(x,z)\uparrow\ \forall z \Rightarrow \neg\exists y\ \varphi_{s(x)}(y) = y \cdot s(x)$
  $\Rightarrow s(x) \notin A$

s è funzione di riduzione da K che è non ricorsivo

↳ A non ricorsivo $\Rightarrow \bar{A}$ non r.e.

④ $B = \{x \in \mathbb{N} : W_x \not\subseteq E_x\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ $\Rightarrow$ B saturato
$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \not\subseteq codom(f)\}$

$\exists f \notin \mathcal{B} : f(x) = x \dot{-} 1 \notin \mathcal{B}.\ \exists \vartheta \subseteq f$, ϑ finita t.c. $\vartheta \in \mathcal{B}$: $\vartheta(x) = \begin{cases} x \dot{-} 1 & x \leq 1 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$

↳ B non r.e.

$\exists f \notin \bar{\mathcal{B}} : \mathbb{1} \notin \mathcal{B}.\ \exists \vartheta \subseteq \mathbb{1}$, ϑ finita, t.c. $\vartheta \in \bar{\mathcal{B}}$: $\vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$

↳ $\bar{B}$ non r.e.

30 AGOSTO 2010

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ strettamente crescente}\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\Rightarrow A$ saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : f \text{ strett. crescente}\}$

$\exists f \notin \mathcal{A} : f(x) = x \dot{-} 1 \notin \mathcal{A}$. $\exists \theta \subseteq f$, θ finita t.c. $\theta \in \mathcal{A} : \theta(x) = \begin{cases} x \dot{-} 1 & x > 0 \wedge \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\hookrightarrow A$ non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ non strett. crescente}\}$ saturato

$\neg(\forall y, z \in dom(f)\ y < z \Rightarrow f(y) < f(z))$

$\exists y, z \in dom(f).\ \neg(y < z \Rightarrow f(y) < f(z))$

$\exists y, z \in dom(f).\ y < z \wedge f(y) \geq f(z)$

$$SC_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{A} \\ \uparrow & x \notin \bar{A} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w . \left| \chi_{S(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3)} \cdot \chi_{S(x,(w)_4,(w)_5,(w)_6)} \cdot \overline{sg}((w)_1 + 1 \dot{-} (w)_4) \cdot sg((w)_2 + 1 \dot{-} (w)_5) - 1 \right| \right)$$

calcolabile

$\hookrightarrow \bar{A}$ r.e

$\hookrightarrow \bar{A}$ non ricorsivo

④ $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall m \in \mathbb{N},\ m \cdot x \in W_x\}$

$\bar{K} \leq_m B$ ($x \in \bar{K}$ sse $s(x) \in B$ sse $\forall m \in \mathbb{N}\ m \cdot s(x) \in W_{s(x)}$)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in \bar{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \underline{0}(\mu z . \chi_{H(x,x,z)})$$

calcolabile

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\ \forall y$

- $x \in \bar{K} \Rightarrow \neg H(x,x,y) \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 0\ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}(m \cdot s(x)) = 0$ $\forall m \Rightarrow m \cdot s(x) \in W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in B$
- $x \notin \bar{K} \Rightarrow H(x,x,y) \Rightarrow \exists\ y_0$ = min n° di passi tali per cui φ_x termina

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \forall y < y_0 \ \neg H(x,x,y) \\ \forall y \geq y_0 \ H(x,x,y)\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = \begin{cases} 0 & y < y_0 \\ \uparrow & y \geq y_0 \end{cases} \quad \text{non è totale}$$

$\Rightarrow \exists m$ tale per cui $m \cdot s(x) \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin B$

B non r.e.

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : mx \notin W_x\}$

$\bar{K} \leq_m \bar{B}$ ($x \in \bar{K}$ sse $s(x) \in \bar{B}$ sse $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot s(x) \notin W_{s(x)}$)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \notin \bar{K} / x \in K \\ \uparrow & x \in \bar{K} \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\Psi_U(x,x)) \text{ calcolabile}$$

$\xRightarrow{smn} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \ \forall y$

- $x \notin \bar{K} / x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 1 \ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}(m \cdot s(x)) = 1 \ \forall m$
  $\Rightarrow m \cdot s(x) \in W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin \bar{B}$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \uparrow \ \forall y \Rightarrow m \cdot s(x) \notin W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in \bar{B}$

s è funzione di riduzione da $\bar{K}$ che è non r.e.

$\hookrightarrow \bar{B}$ non r.e.

17 SETTEMBRE 2010

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ quasi totale}\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\} \Rightarrow A$ saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : f \text{ quasi totale}\}$

$\exists f \in \mathcal{A} : f(x) = x - 1 \in \mathcal{A}$. $\forall \theta \subseteq f, \theta$ finita. $\theta \notin \mathcal{A}$ perché indefinita su insieme in

$\hookrightarrow$ A non r.e.

$\exists f \notin \bar{\mathcal{A}} : f(x) = x - 1 \notin \bar{\mathcal{A}} : \exists \theta \subseteq f, \theta$ finita tale che $\theta \in \bar{\mathcal{A}} : \theta = \emptyset$

$\hookrightarrow \bar{A}$ non r.e.

23 MARZO 2011

(3) $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x = \emptyset\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\Rightarrow$ A saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \cap codom(f) = \emptyset\}$

$\exists f \notin \mathcal{A} : f = \mathbb{1} \notin A$. $\exists \vartheta \subseteq f$, ϑ finita tale che $\vartheta \in \mathcal{A} : \vartheta(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases}$

$\hookrightarrow$ A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$

$SC_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{A} \\ \uparrow & x \notin \bar{A} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w . \left|\chi_{H(x,(w)_1,(w)_2)} \cdot \chi_{S(x,(w)_3,(w)_1,(w)_4)}\right.\right)$

calcolabile

$\hookrightarrow \bar{A}$ r.e $\Rightarrow \bar{A}$ non ricorsivo

(4) $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists y > x, y \in E_x\}$

$SC_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w \left|\chi_{S(x,(w)_1,(w)_2,(w)_3)} \cdot sg((w)_2 \dot{-} x) - 1\right.\right)$

calcolabile

$\hookrightarrow$ B è r.e.

$K \leq_m B$ ($x \in K$ sse $s(x) \in B$ sse $\exists y > s(x), y \in E_{s(x)}$)

$f(x,y) = \begin{cases} y & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x))$ calcolabile

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\ \forall y$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = y\ \forall y \Rightarrow \exists y > s(x)$ tale che $\varphi_{s(x)}(y) = y$ $\Rightarrow y \in E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in B$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \uparrow\ \forall y \Rightarrow \neg\exists y > s(x)$ t.c. $\varphi_{s(x)}(y) = y$ $\Rightarrow E_{s(x)} = \emptyset$, cioè $y \notin E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin B$

s è funzione di riduzione da K che è non ricorsivo

$\hookrightarrow$ B non ricorsivo, $\bar{B}$ non r.e.

4 APRILE 2011

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = W_x + 1\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\} \Rightarrow A$ saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : \text{codom}(f) = \text{dom}(f) + 1\}$

$\exists f \notin \mathcal{A} : \mathbb{1} \in \mathcal{A}$. $\exists \theta \subseteq \mathbb{1}$, θ finita t.c. $\theta \in \mathcal{A}$: $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

↳ RS: A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : E_x \neq W_x + 1\}$

$sc_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{A} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w . \left| \chi_{H(x,(w)_1,(w)_2)} \, \chi_{S(x,(w)_3,(w)_4,(w)_5)} \cdot sg(|(w)_4 - ((w)_1 + 1)|) - 1 \right|\right)$ calcolabile

↳ $\bar{A}$ r.e. $\Rightarrow \bar{A}$ non ricorsivo

④ $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y > x, \; 2y \in W_x\}$

$\bar{K} \leq B$ ($x \in \bar{K}$ sse $s(x) \in B$ sse $\forall y > s(x), \; 2y \in W_{s(x)}$)

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{K} \\ \uparrow & x \notin \bar{K} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu z . \chi_{H(x,x,z)}\right)$ calcolabile

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \; \forall y$

- $x \in \bar{K} \Rightarrow \neg H(x,x,y) \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 1 \; \forall y \Rightarrow \forall y > s(x) \; \varphi_{s(x)}(2y) =$

  $\Rightarrow 2y \in W_{s(x)} \; \forall y > s(x) \Rightarrow s(x) \in B$

- $x \notin \bar{K} \Rightarrow x \in K \Rightarrow H(x,x,y) \Rightarrow \exists y_0 =$ min n° di passi tale per cui φ_x

  $\Rightarrow \begin{matrix} \forall y < y_0 & \neg H(x,x,y) \\ \forall y \geq y_0 & H(x,x,y) \end{matrix} \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = \begin{cases} 1 & y < y_0 \\ \uparrow & y \geq y_0 \end{cases}$

  $\Rightarrow \neg \forall y > s(x) \; \varphi_{s(x)}(2y)\downarrow \Rightarrow s(x) \notin B$

↳ s è funzione di riduzione da $\bar{K}$ che è non r.e.

↳ B è non r.e.

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : \exists y > x,\ 2y \notin W_x\}$

$\bar{K} \leq_m \bar{B}$ ($x \in \bar{K}$ sse $s(x) \in \bar{B}$ sse $\exists y > s(x),\ 2y \notin W_{s(x)}$)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \notin \bar{K} / x \in K \\ \uparrow & x \in \bar{K} / x \notin K \end{cases} = \mathbb{1}(\Psi_U(x,x)) \text{ calcolabile}$$

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\ \forall y$

- $x \notin \bar{K} / x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 1\ \forall y \Rightarrow \exists y > s(x)\ \varphi_{s(x)}(2y) \downarrow 1$
  $\Rightarrow 2y \in W_{s(x)} \Rightarrow s(x) \notin \bar{B}$
- $x \in \bar{K} / x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \uparrow\ \forall y \Rightarrow ? \exists y > s(x)\ \varphi_{s(x)}(2y) \downarrow$
  $\Rightarrow 2y \notin W_{s(x)}$ perché $W_{s(x)} = \emptyset \Rightarrow s(x) \in \bar{B}$

↳ s è funzione di riduzione da $\bar{K}$ che è non r.e.

↳ $\bar{B}$ è non r.e.

28 GIUGNO 2011

(4) $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = y^2$ per infiniti $y\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{B}\} \Rightarrow$ saturato

$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : f(y) = y^2$ per infiniti $y\}$

$\exists f \in \mathcal{B} : f(x) = x^2$. $\forall \theta \subseteq f$, θ finita $\theta \notin \mathcal{B}$ perché ha dominio finito

↳ B non r.e.

$\exists f \notin \bar{\mathcal{B}} : f(x) = x^2$. $\exists \theta \subseteq f$, θ finita $\theta \in \bar{\mathcal{B}} : \theta(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 100 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

↳ $\bar{B}$ non r.e.

11 LUGLIO 2011

(3) $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(x) \downarrow \wedge \varphi_x(x) < x+1\}$

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w . |\chi_{S(x,x,(w)_1,(w)_2)} \cdot sg((x+1) \dot{-} (w)_1) - 1|)$$

calcolabile

↳ A r.e.

$K \leq_m A$ ($x \in K$ sse $s(x) \in A$ sse $\varphi_{s(x)}(s(x))\downarrow \wedge \varphi_{s(x)}(s(x)) < s(x)+1$)

$f(x,y) = \begin{cases} y & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x))$

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\ \forall y$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = y\ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}(s(x)) = s(x) \Rightarrow \varphi_{s(x)}(s(x))\downarrow$
  $\wedge\ \varphi_{s(x)}(s(x)) < s(x)+1 \Rightarrow s(x) \in A$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\uparrow\ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}(s(x))\uparrow \Rightarrow s(x) \notin A$

↳ s è funzione di riduzione da K che è non ricorsivo

↳ A non ricorsivo $\Rightarrow \bar{A}$ non r.e.

(4) $B = \{x \in \mathbb{N} : 2W_x \subseteq E_x\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ $\Rightarrow$ B saturato

$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : 2 \cdot dom(f) \subseteq cod(f)\}$

$\exists f \in \mathcal{B} : id \in \mathcal{B}.\ \forall \theta \subseteq id,\ \theta$ finita, $\theta \notin \mathcal{B}$ perché ha dominio finito che moltiplicato per 2 non sta nel codominio che è uguale al dominio

↳ B non r.e.

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : 2W_x \nsubseteq E_x\}$ saturato

$\exists f \notin \bar{\mathcal{B}} : id \notin \bar{\mathcal{B}}.\ \exists \theta \subseteq id,\ \theta$ finita t.c. $\theta \in \bar{\mathcal{B}}.\ \theta(x) = \begin{cases} x & x \leq 100 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

↳ $\bar{B}$ non r.e.

13 SETTEMBRE 2011

(3) $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ \varphi_x(x+3k)\uparrow\}$

$\bar{K} \leq A$ ($x \in \bar{K}$ sse $s(x) \in A$ sse $\exists k \in \mathbb{N}\ \varphi_{s(x)}(s(x)+3k)\uparrow$)

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \notin \bar{K} / x \in K \\ \uparrow & x \in \bar{K} \end{cases} = \mathbb{1}(\Psi_U(x,x))$ calcolabile

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\ \forall y$

- $x \notin \bar{K} \Rightarrow x \in K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 1\ \forall y \Rightarrow \nexists k \in \mathbb{N}.\ \varphi_{s(x)}(s(x)$
  $\Rightarrow s(x) \notin A$
- $x \in \bar{K} \Rightarrow x \notin K \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\uparrow\ \forall y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}.\ \varphi_{s(x)}(s(x)+3$
  $\Rightarrow s(x) \in A$

↳ s è funzione di riduzione da $\bar{K}$ che è non r.e
↳ A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}\ \varphi_x(x+3k)\downarrow\}$

$\bar{K} \leq \bar{A}$ ($x \in \bar{K}$ sse $x \in \bar{A}$ sse $\forall k \in \mathbb{N}\ \varphi_{s(x)}(s(x)+3k]\downarrow$)

$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{K} \\ \uparrow & x \notin \bar{K} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \neg H(x,x,y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu z . \chi_{H(x,x,z)}\right)$ calcolabile

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\ \forall y$

- $x \in \bar{K} \Rightarrow \neg H(x,x,y) \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 1\ \forall y \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \varphi_{s(x)}(s(x)$

  $\Rightarrow s(x) \in \bar{A}$

- $x \notin \bar{K} \Rightarrow H(x,x,y) \Rightarrow \exists y_0$ = min n° di passi tali per cui φ termina

  $\begin{matrix} \forall y < y_0 & \neg H(x,x,y) \\ \forall y \geq y_0 & H(x,x,y) \end{matrix} \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = \begin{cases} 1 & y < y_0 \\ \uparrow & y \geq y_0 \end{cases}$ non è totale

  $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} . \varphi_{s(x)}(s(x)+3k)\uparrow \Rightarrow s(x) \notin \bar{A}$

↳ s è funzione di riduzione da $\bar{K}$ che è non r.e.
↳ $\bar{A}$ non r.e.

(4) $B = \{x \in \mathbb{N} : \mathbb{P}_1 \subseteq W_x\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{B}\} \Rightarrow B$ saturato

$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : \mathbb{P}_1 \subseteq dom(f)\}$

$\exists f \in \mathcal{B}$: id $\in \mathcal{B}$ (dom(id) = $\mathbb{N}$) $\forall \theta \subseteq f$, θ finita, $\theta \notin \mathcal{B}$. Nessuna θ può con $\mathbb{P}_1$ perché è infinit

↳ B non r.e.

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} : \mathbb{P}_1 \not\subseteq W_x\}$

$\exists f \notin \bar{\mathcal{B}}$: id $\notin \mathcal{B}$. $\exists \theta \subseteq$ id, θ finita t.c. $\theta \in \bar{\mathcal{B}}$: $\theta(x) = \begin{cases} x & x \leq 100 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

↳ $\bar{B}$ non r.e.

22 MARZO 2012

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = \overline{E_x}\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\Rightarrow A$ saturato

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) = \overline{cod(f)}\}$

$\exists f \in \mathcal{A} : f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } div(2,x) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$: $\forall \vartheta \subseteq f, \vartheta$ finito, $\vartheta \notin \mathcal{A}$ infatti $dom(\vartheta)$ fini[to] mentre $\overline{cod(\vartheta)}$ infin[ito]

↳ A non r.e.

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} : W_x \neq \overline{E_x}\}$

$\exists f \notin \bar{\mathcal{A}} : f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } div(2,x) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$. $\exists \vartheta \subseteq f, \vartheta$ finito, $\vartheta \in \bar{\mathcal{A}} : \vartheta(x) = \begin{cases} x+1 & \text{d[iv]} \\ \uparrow & \text{alt[rimenti]} \end{cases}$

↳ $\bar{A}$ non r.e.

④ $B = \{\pi(x,y) : P_x$ termina sull'input x in più di y passi$\}$

$SC_B(z) = \begin{cases} 1 & z \in B \\ \uparrow & z \notin B \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w. |\overline{sg}(\chi_{H(z_1,z_1,z_2)}) \cdot \chi_{H(z_1,z_1,w\ )} \cdot sg(w$

↳ è calcolabile, B è r.e.

$K \leq_m B$ ($x \in K$ sse $s(x) \in B$)

$s(x) = \pi(x, 0)$

- $x \in K \Rightarrow \varphi_x(x)\downarrow \Rightarrow \exists t > 0\, H(x,x,t) \Rightarrow P_x$ compie almeno un passo $\Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow \pi(x,0) = s(x) \in B$
- $x \notin K \Rightarrow \varphi_x(x)\uparrow \Rightarrow \neg\exists t > 0\, H(x,x,t) \Rightarrow \pi(x,0) = s(x) \notin B$

s è funzione di riduzione da K che è non ricorsivo $\Rightarrow$ B non ricorsiv[o]

↳ $\bar{B}$ non r.e.

3 APRILE 2012

③ $B = \{\pi(x,y) : P_x(x)\downarrow$ in meno di y passi$\}$

$\chi_B(w) = \begin{cases} 1 & w \in B \\ 0 & w \notin B \end{cases} = \chi_{H(\pi_1(w), \pi_1(w), \pi_2(w) \dot{-} 1)}$ calcolabile

B è ricorsivo $\Rightarrow \bar{B}$ è ricorsivo

(4) $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k > 0 \,.\, \varphi_x \text{ simmetrica in } [0, 2k]\} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : \exists k > 0 \; f \text{ simmetrica in } [0,2k]\}$ $\Rightarrow$ A saturato

f è simmetrica nell'intervallo $[0,2k]$ se $[0,2k] \subseteq dom(f)$ e $\forall y \in [0,k] \; f(y) = f(2k-y)$

$$SC_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu k \left(\sum_{y=0}^{k} \left(|\varphi_U(x,y) - \varphi_U(x, 2y-k)| \right) + \overline{sg}(k) \right)\right)$$

↳ è calcolabile $\Rightarrow$ A r.e.

$\left.\begin{array}{l} A \neq \emptyset \; (\mathbb{1} \in \mathcal{A}) \\ A \neq \mathbb{N} \; (\emptyset \notin \mathcal{A}) \\ A \text{ saturato} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Rice}} A$ non ricorsivo

↳ $\bar{A}$ non r.e.

ESERCIZI SULLA RIDUZIONE

24 SETTEMBRE 2009

(4) * $\mathbb{P} \le_m P_H$ ($x \in \mathbb{P}$ sse $s(x) \in P_H$)

$$s(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{P} \\ 1 & x \notin \mathbb{P} \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{se } div(2,x) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} = div(2,x) + 1$$

s(x) è totale e calcolabile ed è funzione di riduzione, infatti:

- $\underline{x \in \mathbb{P}} \Rightarrow div(2,x) \Rightarrow s(x) = 2 \Rightarrow 2 \in P_H \Rightarrow \underline{s(x) \in P_H}$
- $\underline{x \notin \mathbb{P}} \Rightarrow \neg div(2,x) \Rightarrow s(x) = 1 \Rightarrow 1 \notin P_H \Rightarrow \underline{s(x) \notin P_H}$

* $P_H \le_m \mathbb{P}$ ($x \in P_H$ sse $s(x) \in \mathbb{P}$)

$$s(x) = \begin{cases} 2 & x \in P_H \\ 1 & x \notin P_H \end{cases} = \begin{cases} 2 & \text{se } P_H(x) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} = P_H(x) + 1$$

s(x) è totale e calcolabile ed è funzione di riduzione, infatti:

- $\underline{x \in P_H} \Rightarrow P_H(x) \Rightarrow s(x) = 2 \Rightarrow 2 \in \mathbb{P} \Rightarrow \underline{s(x) \in \mathbb{P}}$
- $\underline{x \notin P_H} \Rightarrow \neg P_H(x) \Rightarrow s(x) = 1 \Rightarrow 1 \notin \mathbb{P} \Rightarrow \underline{s(x) \notin \mathbb{P}}$

17 SETTEMBRE 2010

④ $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ totale}\}$. Dimostrare che $\bar{K} \leq_m B$.

$\bar{K} \leq_m B$ ($x \in \bar{K}$ sse $s(x) \in B$ sse $\varphi_{s(x)}$ totale)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in \bar{K} \\ \uparrow & x \notin \bar{K} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu z . \chi_{H}(x,x,z)\right) \text{ calcolab}$$

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \ \forall y$.

- $\underline{x \in \bar{K}} \Rightarrow \neg H(x,x,y) \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 1 \ \forall y \Rightarrow \varphi_{s(x)}$ è totale
  $\Rightarrow \underline{s(x) \in B}$
- $\underline{x \notin \bar{K}} \Rightarrow H(x,x,y) \Rightarrow \exists y_0 =$ min n° di passi per cui φ_x termina

$$\Rightarrow \begin{matrix} \forall y < y_0 & \neg H(x,x,y) \\ \forall y \geq y_0 & H(x,x,y) \end{matrix} \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = \begin{cases} 1 & y < y_0 \\ \uparrow & y \geq y_0 \end{cases} \text{ non è to}$$

$\Rightarrow \underline{s(x) \notin B}$

28 GIUGNO 2011

③ $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = \mathbb{P}\}$. Dimostrare che $\bar{K} \leq_m A$

$\bar{K} \leq_m A$ ($x \in \bar{K}$ sse $s(x) \in A$ sse $E_{s(x)} = \mathbb{P}$)

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 \cdot y & x \in \bar{K} \\ \uparrow & x \notin \bar{K} \end{cases} = \begin{cases} 2y & \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 2y \cdot \mathbb{1}\left(\mu z . \chi_{H(x,x,z)}\right)$$

$\Rightarrow \exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \ \forall y$

- $\underline{x \in \bar{K}} \Rightarrow \neg H(x,x,y) \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = 2y \ \forall y \Rightarrow E_{s(x)} = \mathbb{P} \Rightarrow \underline{s(x) \in}$
- $\underline{x \notin \bar{K}} \Rightarrow x \in K \Rightarrow H(x,x,y) \Rightarrow \exists y_0 =$ min n° passi per cui φ_x termina

$$\Rightarrow \begin{matrix} \forall y < y_0 & \neg H(x,x,y) \\ \forall y \geq y_0 & H(x,x,y) \end{matrix} \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = \begin{cases} 2y & y < y_0 \\ \uparrow & y \geq y_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \neg\forall y \ \varphi_{s(x)}(y) = 2y \Rightarrow E_{s(x)} \neq \mathbb{P}$ perché è finito $\Rightarrow \underline{s(x) \notin A}$

ESERCIZI SU 2° TEOREMA DI RICORSIONE

17 LUGLIO 2009

(5) Dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = y^x$, $\forall y \in \mathbb{N}$.

$f(x,y) = y^x$ calcolabile

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = y^x \ \forall y$

$\Rightarrow$ essendo s totale e calcolabile per il 2° th. ricorsione $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che

$\varphi_n = \varphi_{s(n)} = f(n,y) = y^n \Rightarrow \varphi_n(y) = y^n \ \forall y \in \mathbb{N}$ CVD

14 SETTEMBRE 2009

(5) Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{x \cdot n : x \in \mathbb{N}\}$

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } div(x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\mu z . |div(x,y) - 1|) \text{ calcolabi}$$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) \ \forall y$

$\overset{\text{II th. ric.}}{\Rightarrow}$ essendo s tot. calc. $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{s(n)} \Rightarrow \varphi_n(y) = \varphi_{s(n)}(y) = f(n,y) =$

$$\Rightarrow \varphi_n(y) = \begin{cases} y & \text{se } div(n,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \Rightarrow W_n = E_n = \{y : y = x \cdot n, x \in \mathbb{N}\}$$

24 SETTEMBRE 2009

(5) Dire se può esistere un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{K} = \{y^2 - 1 : y \in E_x\}$.

$f(y) = y^2 - 1$

$A = \{f(y) : y \in E_x\} = \{f(y) : y = \varphi_x(z) \mid z \in \mathbb{N}\} = \{f(\varphi_x(z)) \mid z \in \mathbb{N}\}$

$= \operatorname{imm}(f \circ \varphi_x)$

Essendo f e φ_x calcolabili A è immagine di una funzione calcolabile (per composizione) $\Rightarrow A$ è r.e $\neq \bar{K}$ che è non r.e.

Non può esistere l'indice x tale che $\bar{K} = \{y^2 - 1 : y \in E_x\}$

30 AGOSTO 2010

⑤ Dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = x - y$

$f(x,y) = x - y$ calcolabile

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y) = x - y$

$\overset{\text{II th ric.}}{\Rightarrow}$ $\underline{\exists x_0 \in \mathbb{N}}$ t.c. $\varphi_{x_0} = \varphi_{s(x_0)} \Rightarrow \varphi_{x_0}(y) = \varphi_{s(x_0)}(y) = x_0 - y$

$\Rightarrow \underline{\varphi_{x_0}(y) = x_0 - y}$ CVD

23 MARZO 2011

⑤ Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che φ_n è totale e $|E_n| = n$

$f(x,y) = \begin{cases} y & y < x \\ 0 & y \geq x \end{cases} = y \cdot \overline{sg}(y+1 \dot{-} x)$ calcolabile e totale

$= f_x(y)$

$\overset{smn}{\Rightarrow} \exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tot. calc. t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)$

$\overset{\text{II th ric}}{\Rightarrow}$ $\underline{\exists n \in \mathbb{N}}$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{s(n)} \Rightarrow \varphi_n(y) = \varphi_{s(n)}(y) = f(n,y) = \begin{cases} y & y < n \\ 0 & y \geq n \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{\varphi_n(y)} = \begin{cases} y & y < n \\ 0 & y \geq n \end{cases}$ $\underline{\text{totale}}$ e $\underline{|E_n| = n}$

4 APRILE 2011

⑤ Dimostrare che la funzione $\Delta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $\Delta(x) = \min\{y : \varphi_y \neq \varphi_x\}$ non è calcolabile.

$\Delta(x) = \min\{y : \varphi_y \neq \varphi_x\}$ è totale e $\forall x$ $\varphi_{\Delta(x)} \neq \varphi_x$, cioè non ha un punto fisso. $\Rightarrow$ per il II th. di ricorsione $\Delta(x)$ non può essere calcolabile altrimenti $\varphi_{\Delta(x)}$ sarebbe stato uguale a φ_x

11 LUGLIO 2011

⑤ Dire se può esistere un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{K} = \{2^y - 1 : y \in E_x\}$

vedere es 5 appello 24 SETTEMBRE 2009

13 SETTEMBRE 2011

⑤ Dimostrare che esiste un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \le y \le x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \le y \le x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y^2 \cdot \mathbb{1}\left(\mu z . |x-y| \cdot |x+1-y| \cdot |x+2-y|\right)$$

calcolabile

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists\, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = f \Rightarrow \varphi_{s(x)}(y) = f(x,y)\ \forall y$

$\overset{\text{II th ric}}{\Longrightarrow} \exists\, x_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{x_0} = \varphi_{s(x_0)} \Rightarrow \varphi_{x_0}(y) = \varphi_{s(x_0)}(y) = f(x_0, y)$

$$\Rightarrow \varphi_{x_0}(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x_0 \le y \le x_0+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

22 MARZO 2012

⑤ Dimostrare che l'insieme $C = \{x : 2x \in W_x \cap E_x\}$ non è saturato

$$g(e,x) = \begin{cases} 2e & \text{se } x = 2e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 2e \cdot \mathbb{1}\left(\mu z . |x - 2e|\right) \text{ calcolabile}$$

$\overset{smn}{\Longrightarrow} \exists\, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile t.c. $\varphi_s = g \Rightarrow \varphi_{s(e)}(x) = g(e,x)\ \forall x$

$\overset{\text{II th ric.}}{\Longrightarrow} \exists\, e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{s(e)} \Rightarrow \varphi_e(x) = \varphi_{s(e)}(x) = g(e,x) = \begin{cases} 2e & x = 2e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

$W_e \cap E_e = \{2e\}$ (in particolare $W_e = E_e = \{2e\}$) $\Rightarrow e \in C$

Supponiamo che $\exists\, e' \neq e$ t.c. $\varphi_{e'} = \varphi_e$, cioè $W_{e'} = W_e$ e $E_{e'} = E_e$

$2e' \notin W_{e'} \cap E_{e'}$ perché $2e' \neq 2e \Rightarrow e' \notin C$

$\Rightarrow C$ non saturato

3 APRILE 2012

(5) e_0 = indice della funzione sempre indefinita $\varphi_{e_0} = \phi$
e_1 = indice della funzione costante 1 $\varphi_{e_1} = \mathbb{1}$

Dimostrare che non è calcolabile la funzione

$$g(x) = \begin{cases} e_0 & \varphi_x \text{ totale} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

g è totale e la suppongo calcolabile

$\Rightarrow$ per il II th. di ric. $\exists\, x \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_x = \varphi_{g(x)}$

MA $\forall x \;\; \varphi_x \neq \varphi_{g(x)}$ perché:

- se x è indice di funzione totale $\varphi_{g(x)} = \varphi_{e_0}$ che è la funz. sempr
- se x è indice di funzione non totale $\varphi_{g(x)} = \varphi_{e_1}$ che è la funzione costante è totale

$\Rightarrow g$ non può essere calcolabile

ESERCIZI SULLA CALCOLABILITÀ DI FUNZIONI

19 MARZO 2009

(5) Dimostrare che la seguente funzione non è calcolabile

$$f(e) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in W_x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(x) = f(x) + 1 = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ x + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\forall x \;\; g(x) \neq \varphi_x(x)$ cioè è diversa da ogni funzione calcolabile

- se $\varphi_x(x)\downarrow \Rightarrow g(x) = \varphi_x(x) + 1 \neq \varphi_x(x)$
- se $\varphi_x(x)\uparrow \Rightarrow g(x) = x + 1 \neq \varphi_x(x)\uparrow$

$\Rightarrow$ essendo g non calcolabile nemmeno f può esserlo.

2 APRILE 2009

② Definire una funzione f totale non calcolabile tale che $f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che non esiste.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in K \\ x+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$ è totale

$\chi_K(x) = \overline{sg}(|f(x) - x|)$ $\quad$ $\overline{sg}$ è calc., $-x$ è calc, modulo è calc.

Poiché χ_K non è calcolabile $\Rightarrow$ f non è calcolabile

17 LUGLIO 2009

② Dire se esiste una funzione totale non calcolabile f tale che per infiniti $x \in \mathbb{N}$ valga $f(x) = \varphi_x(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & x \in K \\ x & \end{cases}$$

Da qui dico che non è calcolabile come es. 5 - 19 MARZO 2009

14 SETTEMBRE 2009

② Dire se esiste una funzione totale non calcolabile f tale che $f(x) \neq \varphi_x(x)$ solo su un valore $x \in \mathbb{N}$.

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & x \neq x_0 \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$$

$$= \left(\mu z. \left| \max\left(\chi_{S(x,x,(z)_1,(z)_2)}\, sg(|x - x_0|),\ \overline{sg}(|(z)_1 - y_0|) \cdot \overline{sg}(|x - x_0|)\right) - 1 \right|\right)_1$$

è calcolabile

24 SETTEMBRE 2009

② Testo come prima ma funzione solo calcolabile (totalità non specificata)

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & x \neq x_0 \\ \uparrow & x = x_0 \end{cases}$$ [caso totale vedi sopra]

$$= \Psi_U(x, x) \cdot \mathbb{1}\left(\mu z. \overline{sg}(|x - x_0|)\right)$$

f calcolabile

19 MARZO 2010

② Dire se è calcolabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \forall y \leq x,\ \varphi_y \text{ totale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato x_0 = minimo indice tale che φ_{x_0} non totale

$$f(x) = \begin{cases} x & x < x_0 \\ 0 & x \geq x_0 \end{cases} = x \cdot \overline{sg}(x+1 \dot{-} x_0) \quad \text{è calcolabile}$$

30 MARZO 2010

② Dire se è calcolabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } \varphi_x(x)\downarrow \\ x \dot{-} 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\chi_K(x) = \overline{sg}\left(|f(x) - (x+2)|\right)$$

Essendo χ_K non calcolabile $f(x)$ non può essere calcolabile.

30 AGOSTO 2010

② Dire se è calcolabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x+1)+1 & \text{se } \varphi_x(x+1)\downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \Psi_U(x, x+1) + 1 \quad \text{calcolabile}$$

17 SETTEMBRE 2010

② Dire se è calcolabile la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1 & \text{se } \forall y \leq x\ \varphi_y(y)\downarrow \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato x_0 = min indice tale φ_{x_0} non termina

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1 & x < x_0 \\ 0 & x \geq x_0 \end{cases} = \overline{sg}(x+1 \dot{-} x_0) \cdot (\Psi_U(x,x)+1)$$

calcolabile

23 MARZO 2011

(2) Si dice che una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è crescente se è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leq y$ allora $f(x) \leq f(y)$. Esiste una funzione crescente non calcolabile?

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in K \\ x+1 & x \notin K \end{cases}$$

$$\chi_K(x) = \overline{sg}(|f(x) - x|)$$

χ_K non è calcolabile, allora nemmeno f può esserlo

28 GIUGNO 2011

(2) Date f non calcolabile e g ogni altra funzione non calcolabile tali che $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile

$$f(x) = \chi_K \qquad g(x) = \chi_{\bar{K}}$$

$$f(x) + g(x) = \chi_K(x) + \chi_{\bar{K}}(x) = 1 \quad \text{calcolabile}$$

13 SETTEMBRE 2011

(2) Può esistere f non calcolabile tale che $dom(f) \cap img(f)$ sia finito?

$$\chi_K = \begin{cases} 1 & x \in K \\ 0 & x \notin K \end{cases} \qquad \underbrace{dom(\chi_K)}_{\infty} \cap \underbrace{img(\chi_K)}_{\{0,1\}} \text{ è finito}$$

χ_K non calcolabile

22 MARZO 2012

Dire se è calcolabile

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ x+1 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} x^2 & x \in K \\ x+1 & x \notin K \end{cases}$$

$$\chi_K(x) = \overline{sg}(|f(x) - x^2|)$$

χ_K non calcolabile $\Rightarrow f$ non può essere calcolabile