Computabilità

AA 2019/2020

Paolo Baldan
Dipartimento di Matematica
Università di Padova

17 settembre 2020

Segue una raccolta di esercizi svolti, suddivisi approssimativamente per aree tematiche. Gli esercizi sono spesso accompagnati da una bozza di soluzione, che contiene una indicazione su come procedere nella soluzione dell'esercizio (a volte dettagliata, altre volte solo abbozzata).

Gli esercizi che possono essere svolti nella preparazione della prova parziale sono indicati con una "(p)" a fianco dell'esercizio stesso.

1 Macchina URM

Esercizio 1.1 (p). Considerare la variante URM$^-$della macchina URM ottenuta sostituendo l'istruzione successore $S(n)$ con l'istruzione predecessore $P(n)$. L'esecuzione di $P(n)$ sostituisce il contenuto r_n del registro n con $r_n \dot{-} 1$. Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}^-$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM$^-$ e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Esercizio 1.2 (p). Si consideri una variante della macchina URM dove l'istruzione di salto e successore sono sostituite dall'istruzione $JI(m, n, t)$ che confronta il contenuto r_m e r_n dei registri R_m e R_n e quindi:

- se $r_m = r_n$ incrementa il registro R_m e salta all'indirizzo t (restando inteso che se t non cade nel programma, l'esecuzione termina).
- altrimenti continua con l'istruzione successiva.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Esercizio 1.3 (p). Considerare la variante URM^s della macchina URM ottenuta eliminando le istruzioni successore $S(n)$ e salto $J(m, n, t)$, ed aggiungendo l'istruzione $JS(m, n, t)$, che confronta il contenuto dei registri m ed n, e, se coincidono, salta all'istruzione t, altrimenti incrementa il registro m ed esegue l'istruzione successiva. Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}^s$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM^s e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Esercizio 1.4 (p). Considerare la sottoclasse dei programmi URM nei quali, se l'i-ma istruzione è una istruzione di salto $J(m, n, t)$, allora $t > i$. Dimostrare che le funzioni calcolabili dai programmi in tale sottoclasse sono tutte totali.

Esercizio 1.5. Si consideri una variante della macchina URM, che comprende le istruzioni di salto, trasferimento e due nuove istruzioni

- *A(m,n)* che scrive nel registro m la somma dei registri m e n, ovvero $r_m \leftarrow r_m + r_n$;
- *C(n)* che scrive nel registro n il valore del suo segno, ovvero $r_n \leftarrow sg(r_n)$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Esercizio 1.6 (p). Considerare la variante URM^m della macchina URM ottenuta eliminando l'istruzione successore $S(n)$ e ed aggiungendo l'istruzione $M(n)$, che memorizza nel registro n il valore $1 + \min\{r_i \mid i \leqslant n\}$, ovvero il successore del minimo valore contenuto nei registri di indice minore o uguale di n. Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}^m$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM^m e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Esercizio 1.7 (p). Definire l'operazione di ricorsione primitiva e dimostrare che l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni URM-calcolabili è chiuso rispetto a tale operazione.

2 Funzioni Primitive Ricorsive

Esercizio 2.1 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $pow2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $pow2(y) = 2^y$.

Esercizio 2.2 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione caratteristica χ_A dell'insieme $A = \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Si può assumere, senza dimostrarlo, che somma, prodotto, sg e $\overline{sg}$ siano in $\mathcal{PR}$.

Esercizio 2.3 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che la funzione caratteristica $\chi_{\mathbb{P}}$ dell'insieme dei numeri pari $\mathbb{P}$ è primitiva ricorsiva.

Esercizio 2.4 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $half : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $half(x) = x/2$.

Esercizio 2.5 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $p_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $p_2(y) = |y - 2|$.

3 Teorema SMN

Esercizio 3.1 (p). Enunciare il teorema smn e darne la dimostrazione (è sufficiente fornire l'argomento informale che usa le funzioni di codifica/decodifica).

Esercizio 3.2 (p). Enunciare il teorema s-m-n ed utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $|W_{s(x)}| = 2x$ e $|E_{s(x)}| = x$.

Esercizio 3.3. Enunciare il teorema s-m-n ed utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tale che $W_{s(x,y)} = \{z : x * z = y\}$

Esercizio 3.4 (p). Dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $W_{k(n)} = \mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari}\}$ e $E_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$.

Esercizio 3.5. Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $W_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$ e $E_{k(n)} = \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ pari}\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4 Decidibilità e Semidecidibilità

Esercizio 4.1. Dimostrare il teorema di struttura dei predicati semidecidibili, ovvero provare che un predicato $P(\vec{x})$ è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile $Q(\vec{x}, y)$ tale che $P(\vec{x}) \equiv \exists y.\ Q(\vec{x}, y)$.

Esercizio 4.2. Dimostrare il teorema di proiezione ovvero provare che se il predicato $P(x, \vec{y})$ è semidecidibile allora anche $\exists x.\ P(x, \vec{y})$ è semi-decidibile. Vale anche l'implicazione opposta? Vale che se $P(x, \vec{y})$ è decidibile allora anche $\exists x.\ P(x, \vec{y})$ è decidibile? Dimostrare o portare un controesempio.

5 Numerabilità e diagonalizzazione

Esercizio 5.1 (p). Si consideri l'insieme F_0 delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, possibilmente parziali, tali che valga $cod(f) \subseteq \{0\}$. L'insieme F_0 è numerabile? Giustificare la risposta.

Esercizio 5.2 (p). Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *totale crescente* quando è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Dimostrare che l'insieme delle funzioni totali crescenti non è numerabile.

Esercizio 5.3 (p). Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *totale crescente* quando è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leqslant y$ allora $f(x) \leqslant f(y)$. La funzione f si dice binaria se $cod(f) \subseteq \{0, 1\}$. L'insieme delle funzioni totali crescenti binarie è numerabile? Motivare adeguatamente la risposta.

6 Funzioni e Calcolabilità

Esercizio 6.1 (p). Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che $f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Esercizio 6.2 (p). Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *crescente* se è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leqslant y$ allora $f(x) \leqslant f(y)$. Esiste una funzione crescente non calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.3 (p). Possono esistere due funzioni $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con g non calcolabile tali che la composizione $f \circ g$ (definita da $(f \circ g)(x) = f(g(x))$) sia calcolabile? E se richiedo che anche f sia non calcolabile, la composizione $f \circ g$ può essere calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta, fornendo un esempio o dimostrando la non esistenza.

Esercizio 6.4 (p). Può esistere una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con codominio finito, crescente totale (ovvero $f(x) \leqslant f(y)$ per $x \leqslant y$) e non calcolabile? Motivare la risposta con un esempio o con una dimostrazione di non esistenza. E rilassando l'ipotesi di totalità?

Esercizio 6.5 (p). Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *decrescente* se è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leqslant y$ allora $f(x) \geqslant f(y)$. Esiste una funzione decrescente non calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.6 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni altra funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 6.7. Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che esista una funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per cui la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 6.8 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \cap img(f)$ sia finito? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 6.9. Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \cap img(f)$ sia vuoto? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 6.10. Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che la sua immagine $cod(f) = \{y \mid \exists x \in \mathbb{N}.\ f(x) = y\}$ sia finito? Fornire un esempio o mostrare che una tale funzione non esiste.

Esercizio 6.11 (p). Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita come

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in W_x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile.

Esercizio 6.12 (p). Dire se esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che, per infiniti $x \in \mathbb{N}$ valga

$$f(x) = \varphi_x(x)$$

Se la risposta è negativa fornire una dimostrazione, se la risposta è positiva dare un esempio di una tale funzione.

Esercizio 6.13. Dire se esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$f(x) \neq \varphi_x(x)$$

solo su di un valore $x \in \mathbb{N}$. Se la risposta è negativa fornire una dimostrazione, se la risposta è positiva dare un esempio di una tale funzione.

Esercizio 6.14. Dire se esiste una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$f(x) \neq \varphi_x(x)$$

solo su di un valore $x \in \mathbb{N}$. Se la risposta è negativa fornire una dimostrazione, se la risposta è positiva dare un esempio di una tale funzione.

Esercizio 6.15. Può esistere una funzione non calcolabile totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $cod(f)$ sia l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 6.16. Dire se esiste una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che l'insieme $D = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq \phi_x(x)\}$ sia finito. Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.17. Dire se esistono funzioni totali calcolabili $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \in K$ e $g(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \notin K$. Motivare adeguatamente la risposta, fornendo un esempio o dimostrando la non esistenza per ciascuna funzione.

Esercizio 6.18. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ 2x \dot{-} 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.19 (p). Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \forall y \leqslant x.\ \ \varphi_y \text{ totale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.20. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ x \dot{-} 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.21. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x+1)+1 & \text{se } \varphi_x(x+1) \downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.22. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x)+1 & \text{se per ogni } y \leqslant x \text{ vale } \varphi_y(y) \downarrow \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.23. Si consideri la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ x+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se la funzione è o meno calcolabile, motivando adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.24. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *quasi totale* se è indefinita su di un insieme finito di punti. Esiste una funzione quasi totale e calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f \subseteq \chi_K$? Motivare adeguatamente la risposta fornendo un esempio di tale funzione nel caso esista e una prova della non esistenza, altrimenti.

Esercizio 6.25. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *quasi costante* se esiste un valore $k \in \mathbb{N}$ tale che l'insieme $\{x \mid f(x) \neq k\}$ è finito. Esiste una funzione quasi costante non calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.26. Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con la proprietà che $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(x) \downarrow$? Motivare adeguatamente la risposta fornendo un esempio di tale funzione, se esiste, o dimostrando che non esiste, altrimenti.

Esercizio 6.27 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni altra funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f * g$ definita da $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 6.28 (p). Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che $f(x) = x/2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ pari oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Esercizio 6.29. Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{N}$, da $g(x) = f(x) \dot{-} x$ sia calcolabile? Fornire un esempio oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Esercizio 6.30 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Esercizio 6.31. Esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile tale che $dom(f) = K$ e $cod(f) = \mathbb{N}$? Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.32. Sia A è un insieme ricorsivo e siano $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzioni calcolabili. Dimostrare che è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x \in A \\ f_2(x) & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Il risultato continua a valere se indeboliamo le ipotesi e assumiamo A r.e.? Spiegare come si adatta la dimostrazione, in caso positivo, o fornire un controesempio, in caso negativo.

Esercizio 6.33 (p). Può esistere una funzione totale, non calcolabile, tale che $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ sia l'insieme Pr dei numeri primi? Motivare la risposta.

7 Riduzione, Ricorsività e Ricorsiva Enumerabilità

Esercizio 7.1. Dimostrare che un insieme A è ricorsivo se e solo se esiste una funzione totale calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $x \in A$ se e solo se $f(x) > x$.

Esercizio 7.2. Dimostrare che un insieme A è ricorsivo se e solo se esistono due funzioni totali calcolabili $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$

$$x \in A \text{ se e solo se } f(x) > g(x).$$

Esercizio 7.3. Dimostrare che se un insieme A è ricorsivo sse $A \leqslant_m \{0\}$.

Esercizio 7.4. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è r.e. allora $f(A) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in A.\ y = f(x)\}$ è r.e. Vale anche il contrario? Ovvero da $f(A)$ r.e. si può dedurre che A è r.e.?

Esercizio 7.5. Sia A un insieme ricorsivo e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile totale. È vero in generale che $f(A)$ è r.e.? È vero che $f(A)$ è ricorsivo? Motivare le proprie risposte con una dimostrazione o un controesempio.

Esercizio 7.6. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$ è r.e. L'insieme $f^{-1}(A)$ è anche ricorsivo? Anche di quest'ultimo fatto dare una dimostrazione o fornire un controesempio.

Esercizio 7.7. Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se $A \leqslant_m K$.

Esercizio 7.8. Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $A = img(f)$ (si ricordi che $img(f) = \{y : \exists z.\ y = f(z)\}$).

Esercizio 7.9. Data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si definisca il predicato $P_f(x, y) \equiv$ "$f(x) = y$", ovvero $P_f(x, y)$ è vero sse $x \in dom(f)$ e $f(x) = y$. Dimostrare che la funzione f è calcolabile se e solo se il predicato $P_f(x, y)$ è semidecidibile.

Esercizio 7.10. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme infinito. Dimostrare che A è ricorsivo sse è l'immagine di una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale strettamente crescente (ovvero per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$).

Esercizio 7.11. Dire se può esistere un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{K} = \{y^2 - 1 : y \in E_x\}$. Motivare la risposta.

Esercizio 7.12. Sia $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la codifica delle coppie nei naturali. Si dimostri che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è calcolabile se e solo se l'insieme $A_f = \{\pi(x, f(x)) : x \in \mathbb{N}\}$ è ricorsivamente enumerabile.

Esercizio 7.13. Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è un insieme ricorsivo se e solo se $A \leqslant_m \{0\}$.

Esercizio 7.14. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme non vuoto. Dimostrare che A è ricorsivamente enumerabile se e solo se esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f)$ è l'insieme dei numeri primi e $img(f) = A$.

Esercizio 7.15. Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ un insieme di funzioni calcolabili tale che, indicate con $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ le funzioni costanti 0 e 1, rispettivamente, si abbia $\mathbf{0} \notin \mathcal{A}$ e $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$. Detto $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ mostrare che A non r.e. oppure $\bar{A}$ non r.e.

Esercizio 7.16. Dire se può esistere un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{K} = \{2^y - 1 : y \in E_x\}$. Motivare la risposta.

Esercizio 7.17. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leqslant_m B$. Dimostrare che dati comunque $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ vale:

a. se $A \leqslant_m B$ e $B \leqslant_m C$ allora $A \leqslant_m C$;
b. se $A \neq \mathbb{N}$ allora $\varnothing \leqslant_m A$.

Esercizio 7.18. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leqslant_m B$. È vero che per ogni insieme A vale vale $A \leqslant_m A \cup \{0\}$? In caso affermativo dare una prova e in caso negativo un controesempio. Nel secondo caso, proporre una condizione (indicando se è solo suffciente o anche necessaria) che renda vero $A \leqslant_m A \cup \{0\}$.

Esercizio 7.19. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leqslant_m B$. Dimostrare che, dato comunque $A \subseteq \mathbb{N}$, vale A r.e. sse $A \leqslant_m K$.

Esercizio 7.20. Dimostrare che un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e $\bar{A}$ sono r.e.

Esercizio 7.21. Enunciare e dimostrare il teorema di Rice (senza utilizzare il secondo teorema di ricorsione).

Esercizio 7.22. Dare la definizione di insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ saturato e dimostrare che K non è saturato.

Esercizio 7.23. Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ un insieme di funzioni calcolabili e sia $f \in \mathcal{A}$ tale che per ogni funzione finita $\theta \subseteq f$ vale $\theta \notin \mathcal{A}$. Dimostrare che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ non è r.e.

8 Caratterizzazione di insiemi

Esercizio 8.1. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| \geqslant 2\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.2. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \cap E_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.3. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid x \in W_x \cup E_x\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.4. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \cup W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.5. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq \mathbb{P}\}$, dove $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri pari, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.6. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y, z \in \mathbb{N}.\ z > 1 \ \wedge\ x = y^z\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.7. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \phi_x(y) = y \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.8. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq E_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.9. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > |E_x|\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.10. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(y) = x * y \text{ per qualche } y\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.11. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x \cap E_x| = 1\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.12. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *strettamente crescente* se per ogni $y, z \in \mathrm{dom}(f)$, $y < z$ implica $f(y) < f(z)$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \varphi_x \text{ strettamente crescente}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.13. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *quasi totale* se è indefinita su di un insieme finito di punti. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \varphi_x \text{ quasi totale}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.14. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x = \emptyset\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.15. Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{N}$, definiamo $X + 1 = \{x + 1 : x \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = W_x + 1\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.16. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari. Dimostrare che indicato con $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = \mathbb{P}\}$, si ha che $\bar{K} \leqslant_m A$.

Esercizio 8.17. Studiare la ricorsività dell'insieme $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(x) \downarrow\ \wedge \varphi_x(x) < x+1\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.18. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x\ \wedge\ \varphi_x(x) = x^2\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.19. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ \varphi_x(x + 3k) \uparrow\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.20. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = \overline{E_x}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.21. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{\pi(x, y)\ :\ P_x(x) \downarrow \text{ in meno di } y \text{ passi}\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.22. Detto $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è totale}\}$, dimostrare che $\bar{K} \leqslant_m A$.

Esercizio 8.23. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = y \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.24. Dato un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $F(X) = \{0\} \cup \{y, y + 1 \mid y \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = F(E_x)\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.25. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid k \cdot (x + 1) \in W_x \cap E_x \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.26. Sia $\varnothing$ la funzione sempre indefinita. Si studi la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \varphi_x = \varnothing\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.27. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x\ :\ \forall y.\ \text{if } y+x \in W_x \text{ then } y \leqslant \varphi_x(y+x)\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.28. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \ : \varphi_x(y + x) \downarrow \ \text{per qualche}\ y \geqslant 0\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.29. Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ finito, $X \neq \emptyset$ e si definisca $A_X = \{x \in \mathbb{N} : W_x = E_x \cup X\}$. Studiare la ricorsività di A, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.30. Sia $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x \ \neq \emptyset\}$. Studiare la ricorsività di A, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.31. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}.\ x + k \in W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.32. Una funzione parziale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $f(x) = f(y)$ allora $x = y$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \ : \ \varphi_x \ \text{iniettiva}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.33. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in E_x.\exists z \in W_x.\ x = y * z\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.34. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \ \wedge \ \varphi_x(x) > x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.35. Sia f una funzione calcolabile totale tale che $img(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$ sia infinito. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \ : \ \exists y \in W_x.\ x < f(y)\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.36. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.37. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : W_x \ \text{infinito}\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.38. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in W_x.\ \exists k \in \mathbb{N}.\ y = k \cdot x\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.39. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > 1\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.40. Detto P l'insieme dei numeri pari e Pr l'insieme dei numeri primi, dimostrare che $P \leqslant_m Pr$ e $Pr \leqslant_m P$.

Esercizio 8.41. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale calcolabile fissata. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ f(x) \in E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.42. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale calcolabile fissata. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ img(f) \cap E_x \neq \emptyset\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili. Si ricorda che $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 8.43. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ E_x \not\supseteq W_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.44. Sia $B = \{x \mid \forall m \in \mathbb{N}.\ m \cdot x \in W_x\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme B, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.45. Detto $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è totale}\}$, dimostrare che $\bar{K} \leqslant_m A$.

Esercizio 8.46. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \exists y > x.\ y \in E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.47. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \forall y > x.\ 2y \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.48. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in N : 1 \leqslant |E_x| \leqslant 2\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.49. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P} \subseteq W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.50. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \varphi_x(y) = y^2 \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.51. Dato $X \subseteq \mathbb{N}$ si indichi con $2X$ l'insieme $2X = \{2x : x \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 2W_x \subseteq E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.52. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ W_x \supseteq Pr\}$, dove $Pr \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.53. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{\pi(x, y) \ : \ P_x \text{ termina sull'input } x \text{ in più di } y \text{ passi}\},$$

dove $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ è la funzione di codifica delle coppie, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.54. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è simmetrica nell'intervallo $[0, 2k]$ se $dom(f) \supseteq [0, 2k]$ e per ogni $y \in [0, k]$ vale $f(y) = f(2k - y)$. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k > 0.\ \varphi_x \text{ simmetrica in } [0, 2k]\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.55. Dato $X \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $inc(X) = X \cup \{x + 1 : x \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : inc(W_x) = E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.56. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \ : \ \varphi_x(0) \uparrow \ \vee \ \varphi_x(0) = 0\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.57. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *crescente* quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Indicato con $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ crescente}\}$, dimostrare che $\overline{K} \leqslant_m B$.

Esercizio 8.58. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è k-bounded se $\forall x \in dom(f)$ vale $f(x) < k$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, studiare la ricorsività dell'insieme

$$A_k = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \ k\text{-bounded}\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.59. Si studi la ricorsività dell'insieme $B = \{x + y : x, y \in \mathbb{N} \ \wedge \ \varphi_x(y) \uparrow\}$, ovvero stabilire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.60. Sia f una funzione calcolabile totale. Studiare la ricorsività dell'insieme $B_f = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \varphi_x(y) = f(y) \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.61. Sia f una funzione calcolabile totale, diversa dall'identità. Studiare la ricorsività dell'insieme $B_f = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \varphi_x = f \circ \varphi_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.62. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ k \cdot x \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\overline{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.63. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}.\ k + x \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\overline{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.64. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : E_x \text{ infinito}\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.65. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N}\ :\ x \in W_x \backslash \{0\}\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.66. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \mid W_x \backslash E_x \text{ infinito}\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.67. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in N : |W_x \backslash E_x| \geqslant 2\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.68. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ \forall y \geqslant k.\ \varphi_x(y) \downarrow\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.69. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N}\ :\ x > 0\ \wedge\ x/2 \notin E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.70. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in W_x.\, \exists z \in W_x.\, (y < z)\ \wedge\ (\varphi_x(y) > \varphi_x(z))\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.71. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in W_x.\, \exists z \in W_x.\, (y < z)\ \wedge\ (\varphi_x(y) < \varphi_x(z))\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.72. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \mid W_x \cup E_x = \mathbb{N}\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.73. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ kx \in W_x\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.74. Dati $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $X + Y = \{x + y \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid x \in W_x + E_x\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.75. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x = \mathbb{N}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

9 Secondo teorema di ricorsione

Esercizio 9.1. Enunciare e dimostrare il secondo teorema di ricorsione.

Esercizio 9.2. Enunciare il secondo teorema di ricorsione e utilizzarlo per dimostrare che K non è ricorsivo.

Esercizio 9.3. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = y^x$, per ogni $y \in \mathbb{N}$.

Esercizio 9.4. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{x \cdot n : x \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 9.5. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = x + y$.

Esercizio 9.6. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = x - y$.

Esercizio 9.7. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che φ_n è totale e and $|E_n| = n$.

Esercizio 9.8. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che la funzione $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $\Delta(x) = \min\{y : \varphi_y \neq \varphi_x\}$, non è calcolabile.

Esercizio 9.9. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che, indicato con e_0 un indice della funzione sempre indefinita $\varnothing$ e con e_1 un indice della funzione identità, la funzione $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da

$$h(x) = \begin{cases} e_0 & \text{se } \varphi_x \text{ è totale} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile.

Esercizio 9.10. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \leqslant y \leqslant x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 9.11. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x : 2x \in W_x \cap E_x\}$ non è saturato.

Esercizio 9.12. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in E_x\}$ non è saturato.

Esercizio 9.13. Siano e_0 ed e_1 indici della funzione sempre indefinita $\emptyset$ e della costante 1, rispettivamente. Si enunci il Secondo Teorema di Ricorsione e lo si utilizzi per dimostrare che non è calcolabile la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} e_0 & \varphi_x \text{ totale} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 9.14. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Dimostrare che data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzione totale calcolabile iniettiva, l'insieme $C_f = \{x : f(x) \in W_x\}$ non è saturato.

Esercizio 9.15. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che se C è un insieme tale che $C \leqslant_m \overline{C}$, allora C non è saturato.

Esercizio 9.16. Si enunci il Secondo Teorema di Ricorsione e lo si utilizzi per dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_e(y) = \begin{cases} y+e & \text{se } y \text{ multiplo di } e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 9.17. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che ogni funzione f non totale, ma indefinita su di un solo punto, ovvero tale che $dom(f) = \mathbb{N} \backslash \{k\}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, ammette un punto fisso, ovvero esiste $x \neq k$ tale che $\varphi_x = \varphi_{f(x)}$.

Esercizio 9.18. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{x \cdot n : x \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 9.19. Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_n = \varphi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_m \neq \varphi_{m+1}$

Esercizio 9.20. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ k \cdot x \in W_x\}$ non è saturato.

Esercizio 9.21. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(x) = x^2\}$ non è saturato.

Esercizio 9.22. Enunciare il secondo teorema di ricorsione e utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice k take che $W_k = \{k * i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 9.23. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} : [0, x] \subseteq W_x\}$ non è saturato.

Esercizio 9.24. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{p_n} = \varphi_n$, dove p_n è l'n-mo numero primo.

Esercizio 9.25. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice x tale che $W_x = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 9.26. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $W_e = \{e^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 9.27. Utilizzare il secondo teorema di ricorsione per dimostrare che non è saturato l'insieme

$$C = \{x \mid W_x = \mathbb{N} \ \wedge \ \varphi_x(0) = x\}.$$