Computabilità

AA 2019/2020

Paolo Baldan

Dipartimento di Matematica

Università di Padova

17 settembre 2020

Segue una raccolta di esercizi svolti, suddivisi approssimativamente per aree tematiche. Gli esercizi sono spesso accompagnati da una bozza di soluzione, che contiene una indicazione su come procedere nella soluzione dell'esercizio (a volte dettagliata, altre volte solo abbozzata).

Gli esercizi che possono essere svolti nella preparazione della prova parziale sono indicati con una "(p)" a fianco dell'esercizio stesso.

1 Macchina URM

Esercizio 1.1 (p). Considerare la variante URM$^-$della macchina URM ottenuta sostituendo l'istruzione successore $S(n)$ con l'istruzione predecessore $P(n)$. L'esecuzione di $P(n)$ sostituisce il contenuto r_n del registro n con $r_n \dot{-} 1$. Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}^-$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM$^-$ e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Vale $\mathcal{C}^- \subseteq \mathcal{C}$, perché il predecessore è URM-calcolabile, e l'inclusione è stretta perché si può provare, induttivamente sul numero di passi, che il massimo tra i valori contenuti nei registri in ogni momento è minore o uguale a quello iniziale, e dunque la funzione successore (ad esempio) non è calcolabile. □

Esercizio 1.2 (p). Si consideri una variante della macchina URM dove l'istruzione di salto e successore sono sostituite dall'istruzione $JI(m, n, t)$ che confronta il contenuto r_m e r_n dei registri R_m e R_n e quindi:

- se $r_m = r_n$ incrementa il registro R_m e salta all'indirizzo t (restando inteso che se t non cade nel programma, l'esecuzione termina).
- altrimenti continua con l'istruzione successiva.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Si osserva che se le istruzioni sono mutuamente codificabili e si procede per induzione sulla lunghezza di un programma che contenga entrambi i set di istruzioni per concludere che uno dei due set può essere eliminato.

In particolare per codificare le nuove istruzioni in URM si procede come segue. L'istruzione $I_j : S(n)$ si pu'o sostituire con

$$I_j : J(n, n, j + 1)$$

Utilizzando un registro k non usato dal programma, l'istruzione $J(m, n, t)$ può essere sostituita da

$T(m,k)$
$J(k,n,t)$

Vice versa, l'istruzione $JI(m,n,t)$ della nuova macchina si può codificare come $J(m,n,t_1)$, inserendo all'indirizzo t_1

t_1 : $S(m)$
t_1+1 : $J(m,m,t)$

□

Esercizio 1.3 (p). Considerare la variante URM^s della macchina URM ottenuta eliminando le istruzioni successore $S(n)$ e salto $J(m,n,t)$, ed aggiungendo l'istruzione $JS(m,n,t)$, che confronta il contenuto dei registri m ed n, e, se coincidono, salta all'istruzione t, altrimenti incrementa il registro m ed esegue l'istruzione successiva. Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}^s$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM^s e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Chiaramente l'istruzione $JS(m,n,t)$ è simulabile nella macchina URM come

$J(m,n,t)$
$S(m)$

Viceversa, l'istruzione $S(n)$ non è simulabile. Infatti, partendo dalla configurazione nella quale tutti i registri sono a 0, non c'è modo di modificare alcun registro, perchè per farlo occorrebbero due registri differenti, ma non ci sono (e non si possono rendere differenti). □

Esercizio 1.4 (p). Considerare la sottoclasse dei programmi URM nei quali, se l'i-ma istruzione è una istruzione di salto $J(m,n,t)$, allora $t > i$. Dimostrare che le funzioni calcolabili dai programmi in tale sottoclasse sono tutte totali.

Soluzione: Dato un programma P si dimostra per induzione su t che l'istruzione da eseguire al $t+1$-mo passo ha numero d'ordine maggiore di t. Dunque il programma termina in al più $l(P)$ passi. □

Esercizio 1.5. Si consideri una variante della macchina URM, che comprende le istruzioni di salto, trasferimento e due nuove istruzioni

- *A(m,n)* che scrive nel registro m la somma dei registri m e n, ovvero $r_m \leftarrow r_m + r_n$;
- *C(n)* che scrive nel registro n il valore del suo segno, ovvero $r_n \leftarrow sg(r_n)$.

Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}'$ delle funzioni calcolabili con la nuova macchina e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Indichiamo con URM* la macchina modificata. Osserviamo che le istruzioni della macchina URM* sono codificabili nella macchina URM.

L'istruzione $I_j : A(m,n)$ si può sostituire con un salto alla seguente routine: detto q l'indice del primo registro non usato dal programma (quindi inizialmente a 0)

SUB : $J(n,q,j+1)$
$S(m)$
$S(q)$
$J(1,1,SUB)$

Allo stesso modo, indicando ancora con q l'indice di un registro non utilizzato, un'istruzione I_j : $C(m)$ si può sostuire con un salto alla subroutine

$$\begin{array}{lll}
SUB & : & J(n,q,ZERO) \\
 & & Z(n) \\
 & & S(n) \\
ZERO & & J(1,1,j+1)
\end{array}$$

Più formalmente, si prova che $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ dimostrando che, per ogni numero di argomenti k e per ogni un programma P che utilizzi entrambi i set di istruzioni si può ottenere un programma URM P' che calcola la stessa funzione ovvero tale che $f^{(k)}_{P'} = f^{(k)}_{P}$.

La prova procede per induzione sul numero h di istruzioni A e C nel programma. Il caso base $h = 0$ è banale, dato che P con 0 istruzioni A e C è già un programma URM. Supposto vero il risultato per h dimostriamolo per $h+1$. Il programma P contiene certamente almeno una istruzione A o una istruzione C. Supponiamo che sia l'istruzione di indice j e sia una istruzione C.

$$\begin{array}{lll}
1 & : & I_1 \\
 & & \dots \\
j & & A(m,n) \\
 & & \dots \\
\ell(P) & : & I_{\ell(P)}
\end{array}$$

Costruiamo un programma P'', utilizzando un registro non riferito da P, $q = \max\{\rho(P), k\} + 1$

$$\begin{array}{lll}
1 & : & I_1 \\
 & & \dots \\
j & & J(1,1,SUB) \\
 & & \dots \\
\ell(P) & : & I_{\ell(P)} \\
 & & J(1,1,END) \\
SUB & : & J(n,q,ZERO) \\
 & & Z(n) \\
 & : & S(n) \\
ZERO & & J(1,1,j+1) \\
END & : &
\end{array}$$

Il programma P'' è tale che $f^{(k)}_{P''} = f^{(k)}_{P}$ e contiene h istruzioni di tipo A o C. Per ipotesi induttiva, esiste un programma URM P' tale che $f^{(k)}_{P'} = f^{(k)}_{P''}$ che quindi è il programma desiderato.

Se l'istruzione I_j è di tipo A si procede in modo completamente analogo, rimpiazzando l'istruzione con la sua codifica e usando l'ipotesi induttiva.

L'inclusione è stretta, ovvero $\mathcal{C} \nsubseteq \mathcal{C}^*$. Ad esempio si può facilmente vedere che la funzione successore non è URM* calcolabile. Infatti, si può dimostrare che partendo da una configurazione con i registri tutti a zero, un qualunque programma URM*, dopo un qualunque numero di passi, produrrà una configurazione con i registri ancora tutti a zero. Una prova completamente formale dimostra la tesi suddetta per induzione sul numero di passi. $\square$

Esercizio 1.6 (p). Considerare la variante URM^m della macchina URM ottenuta eliminando l'istruzione successore $S(n)$ e ed aggiungendo l'istruzione $M(n)$, che memorizza nel registro n il valore $1 + \min\{r_i \mid i \leqslant n\}$, ovvero il successore del minimo valore contenuto nei registri di indice minore o uguale di n. Dire quale relazione sussiste tra l'insieme $\mathcal{C}^m$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM^m e l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni calcolabili con la macchina URM. Sono uno contenuto nell'altro? L'inclusione è stretta? Motivare le risposte.

Soluzione: Si osserva che l'istruzione $M(n)$ è simulabile nella macchina URM come segue: in un registro k "non utilizzato" si mantiene un numero crescente, che parte da zero, e viene via via confrontrato con tutti i registri $R_1, \ldots, R_n$ fino a che diventa uguale a uno di essi. A questo punto il registro k sarà il minimo. Il suo successore è il valore da memorizzare in n

$$
\begin{array}{ll}
 & Z(k) \\
LOOP: & J(1,k,END) \\
 & J(2,k,END) \\
 & \ldots \\
 & J(n,k,END) \\
 & S(k) \\
 & J(1,1,LOOP) \\
END: & S(k) \\
 & T(k,n)
\end{array}
$$

Viceversa, l'istruzione $S(n)$ è simulabile nella macchina URM^m come segue. Assumendo di nuovo che k sia il numero di un registro non utilizzato:

$$
\begin{array}{l}
T(1,k) \\
T(n,1) \\
M(1) \\
T(1,n) \\
T(k,1)
\end{array}
$$

□

Esercizio 1.7 (p). Definire l'operazione di ricorsione primitiva e dimostrare che l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni URM-calcolabili è chiuso rispetto a tale operazione.

2 Funzioni Primitive Ricorsive

Esercizio 2.1 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $pow2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $pow2(y) = 2^y$.

Soluzione: Si definisce $pow2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$
\begin{cases}
pow2(0) = 1 \\
pow2(y+1) = double(pow2(y))
\end{cases}
$$

dove $double(x)$ si può definire per ricorsione primitiva come

$$
\begin{cases}
double(0) = 0 \\
double(y+1) = double(y) + 2 = (double(y)+1)+1
\end{cases}
$$

□

Esercizio 2.2 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione caratteristica χ_A dell'insieme $A = \{2^n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$. Si può assumere, senza dimostrarlo, che somma, prodotto, sg e $\overline{sg}$ siano in $\mathcal{PR}$.

Soluzione: Si osserva che $A = \{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$ dove la funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \in \mathcal{PR}$ è definita da

$$
\begin{cases}
a(0) & = & 0 \\
a(n+1) & = & 2 \cdot a(n) + 1
\end{cases}
$$

Definiamo $chk : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, tale che $chk(x,m) = 1$ se esiste $n \leqslant m$ tale che $x = a(n)$ e 0 altrimenti:

$$\begin{cases} chk(x,0) & = & \overline{sg}(x) \\ chk(x,m+1) & = & chk(x,m) + eq(x, a(m+1)) \end{cases}$$

può essere provata in $\mathcal{PR}$ osservando che $y \dot{-} 1$ e $x \dot{-} y$ sono in $\mathcal{PR}$, e osservando che $eq(x,y) = \overline{sg}(x \dot{-} y + y \dot{-} x)$. Si conclude osservando che $\chi_A(x) = chk(x,x)$. $\square$

Esercizio 2.3 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che la funzione caratteristica $\chi_{\mathbb{P}}$ dell'insieme dei numeri pari $\mathbb{P}$ è primitiva ricorsiva.

Soluzione: Si può definire:

$$\chi_{\mathbb{P}}(0) = 1$$
$$\chi_{\mathbb{P}}(y+1) = \overline{sg}(\chi_{\mathbb{P}}(y))$$

dove anche $\overline{sg}$ può essere definita per ricorsione primitiva:

$$\overline{sg}(0) = 1$$
$$\overline{sg}(y+1) = 0$$

$\square$

Esercizio 2.4 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $half : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $half(x) = x/2$.

Soluzione: L'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive è il minimo insieme di funzioni che contiene le funzioni di base:

1. $\mathbf{0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{0}(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$;
2. $\mathbf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{s}(x) = x+1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$;
3. $\mathbf{U}^k_j : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definita da $\mathbf{U}^k_j(x_1, \ldots, x_k) = x_j$ per ogni $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$.

e chiuso rispetto a composizione generalizzata e ricorsione primitiva, definite come segue. Date le funzioni $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ la loro composizione generalizzata è la funzione $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definita da:

$$h(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x})).$$

Date le funzioni $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ la funzione definita per ricorsione primitiva è $h : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Occorre dimostrare che la funzione *half* può essere ottenuta dalle funzioni di base (1), (2) e (3), utilizzando ricorsione primitiva e composizione generalizzata. Si può procedere come segue.

Si definisce in primo luogo la funzione $\overline{sg} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\overline{sg}(x) = 1$ se $x = 0$ e $\overline{sg}(x) = 0$ altrimenti:

$$\begin{cases} \overline{sg}(0) & = & 1 \\ \overline{sg}(x+1) & = & 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione $rm_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che restituisce il resto della divisione di x per 2:

$$\begin{cases} rm_2(0) & = & 0 \\ rm_2(x+1) & = & \overline{sg}(rm_2(x)) \end{cases}$$

Infine la funzione $half : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ può essere definita come:

$$\begin{cases} half(0) & = & 0 \\ half(x+1) & = & half(x) + rm_2(x) \end{cases}$$

□

Esercizio 2.5 (p). Dare la definizione dell'insieme $\mathcal{PR}$ delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $p_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $p_2(y) = |y - 2|$.

Soluzione: Per la definizione di $\mathcal{PR}$ si veda il libro. Per la seconda parte, si osserva che se definiamo $p_1(y) = |y - 1|$ allora

$$\begin{cases} p_1(0) = 1 \\ p_1(y+1) = |y+1-1| = |y| = y \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} p_2(0) = 2 \\ p_2(y+1) = |y+1-2| = |y-1| = p_1(y) \end{cases}$$

Quindi p_2 definita per ricorsione primitiva a partire dalle funzioni di base è in $\mathcal{PR}$. □

3 Teorema SMN

Esercizio 3.1 (p). Enunciare il teorema smn e darne la dimostrazione (è sufficiente fornire l'argomento informale che usa le funzioni di codifica/decodifica).

Esercizio 3.2 (p). Enunciare il teorema s-m-n ed utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $|W_{s(x)}| = 2x$ e $|E_{s(x)}| = x$.

Soluzione: We can define, for instance,

$$f(x, y) = \begin{cases} qt(2, y) & \text{if } y \leqslant 2x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Observe that $f(x, y) = qt(2, y) + \mu z.\, 2x + 1 \dot{-} y$ is computable and finally use the smn-theorem to get function $s(x)$. □

Esercizio 3.3. Enunciare il teorema s-m-n ed utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ tale che $W_{s(x,y)} = \{z : x * z = y\}$

Esercizio 3.4 (p). Dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $W_{k(n)} = \mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pari}\}$ e $E_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n, x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} x/2 + n & \text{se } x \text{ pari} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = qt(2,x) + n + \mu z.rm(2,x)$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n,x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto:

- $W_{k(x)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid x \text{ pari}\}$
- $E_{k(x)} = \{f(n,x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{n + x/2 \mid x \text{ pari}\} = \{n + x \mid x \geqslant 0\} = \{y \mid y \geqslant \mathbb{N}\}$

come desiderato. □

Esercizio 3.5. Enunciare il teorema s-m-m. Utilizzarlo per dimostrare che esiste una funzione calcolabile totale $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $W_{k(n)} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geqslant n\}$ e $E_{k(n)} = \{y \in \mathbb{N} \mid y \text{ pari}\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione: Si inizia definendo una funzione calcolabile di due argomenti $f(n,x)$ che rispetti le condizioni quando vista come funzione di x, con n considerato come parametro, ad es.

$$f(n,x) = \begin{cases} 2 * (x \dot{-} n) & \text{se } x \geqslant n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 2 * (x \dot{-} n) + \mu z.(n \dot{-} x)$$

Per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{k(n)}(x) = f(n,x)$ per ogni $n, x \in \mathbb{N}$. Pertanto, come desiderato

- $W_{k(n)} = \{x \mid f(n,x) \downarrow\} = \{x \mid x \geqslant n\}$;
- $E_{k(n)} = \{f(n,x) \mid x \in \mathbb{N}\} = \{2(x \dot{-} n) \mid x \geqslant n\} = \{2(n + z \dot{-} n) \mid z \geqslant 0\} = \{2z \mid z \in \mathbb{N}\}$.

□

4 Decidibilità e Semidecidibilità

Esercizio 4.1. Dimostrare il teorema di struttura dei predicati semidecidibili, ovvero provare che un predicato $P(\vec{x})$ è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile $Q(\vec{x}, y)$ tale che $P(\vec{x}) \equiv \exists y.\ Q(\vec{x}, y)$.

Esercizio 4.2. Dimostrare il teorema di proiezione ovvero provare che se il predicato $P(x, \vec{y})$ è semidecidibile allora anche $\exists x.\ P(x, \vec{y})$ è semi-decidibile. Vale anche l'implicazione opposta? Vale che se $P(x, \vec{y})$ è decidibile allora anche $\exists x.\ P(x, \vec{y})$ è decidibile? Dimostrare o portare un controesempio.

Soluzione: No, the converse is false. Consider, for instance, $P(x,y) = (y = 2x) \wedge (y \notin W_x)$ (or more simply, $P(x,y) = x \notin W_x$, which is not semi-decidable. The existentially quantified version is constant, hence decidable.

Also the second claim is false. Take for instance $P(x,y) = H(y,y,x)$ which is decidable, while $\exists x.\ P(x,y) \equiv y \in K$ is only semi-decidable, but not decidable. □

5 Numerabilità e diagonalizzazione

Esercizio 5.1 (p). Si consideri l'insieme F_0 delle funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, possibilmente parziali, tali che valga $cod(f) \subseteq \{0\}$. L'insieme F_0 è numerabile? Giustificare la risposta.

Soluzione: No, una tale funzione è completamente determinata dal suo dominio, che è un generico sottoinsieme di $\mathbb{N}$, ed i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ non sono numerabili. $\square$

Esercizio 5.2 (p). Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *totale crescente* quando è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Dimostrare che l'insieme delle funzioni totali crescenti non è numerabile.

Soluzione: Data una qualsiasi enumerazione delle funzioni totali crescenti $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si può definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = 1 + \Sigma_{n=0}^{x} f_n(n),$$

che è totale crescente e diversa da tutte le f_n. Infatti,

- f è chiaramente totale per definizione.
- f è crescente, dato che $f(x+1) = f(x) + f_{x+1}(x+1) > f(x)$. L'ultima disuguaglianza segue dal fatto che, essendo f_{x+1} crescente, $f_{x+1}(x+1) > f_{x+1}(x) \geqslant 0$.
- f è diversa da tutte le f_x dato che per ogni $x \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = 1 + \Sigma_{n=0}^{x} f_n(n) \geqslant 1 + f_x(x) > f_x(x).$$

Ne consegue che nessuna enumerazione può contenere tutte le funzioni totali crescenti.

Lo stesso argomento poteva essere condotto definendo $f(x) = 1 + \max\{f_n(n) \mid 0 \leqslant n \leqslant x\}$. $\square$

Esercizio 5.3 (p). Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *totale crescente* quando è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leqslant y$ allora $f(x) \leqslant f(y)$. La funzione f si dice binaria se $cod(f) \subseteq \{0, 1\}$. L'insieme delle funzioni totali crescenti binarie è numerabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: Sia f totale binaria crescente, diversa dalla costante 0, e si indichi con $s(f) = \min\{x \mid f(x) = 1\} \in \mathbb{N}$. È facile vedere che $f_1 = f_2$ sse $s(f_1) = s(f_2)$. Quindi, indicata con

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & x < i \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha che $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ è una enumerazione delle funzioni totali crescenti binarie, diverse dalla costante 0, che quindi sono numerabili. L'aggiunta della costante 0 non cambia la numerabilità. $\square$

6 Funzioni e Calcolabilità

Esercizio 6.1 (p). Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che $f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Soluzione: We can define

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ x & \text{se } x \notin W_x \end{cases}$$

Clearly, for all $x \in \mathbb{N}$ we have $\varphi_x(x) \neq f(x)$, hence f is not computable. Moreover $x \notin W_x$ holds true infinitely many times since the empty function has infinitely many indices, therefore also the last condition is satisfied. □

Esercizio 6.2 (p). Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *crescente* se è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leqslant y$ allora $f(x) \leqslant f(y)$. Esiste una funzione crescente non calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: We define

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{if } x \in W_x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and then $f(x) = \Sigma_{y \leqslant x} g(y)$. □

Esercizio 6.3 (p). Possono esistere due funzioni $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con g non calcolabile tali che la composizione $f \circ g$ (definita da $(f \circ g)(x) = f(g(x))$) sia calcolabile? E se richiedo che anche f sia non calcolabile, la composizione $f \circ g$ può essere calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta, fornendo un esempio o dimostrando la non esistenza.

Soluzione: Si, in entrambe i casi. Infatti, sia $g = \chi_k$, non calcolabile, e f definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 1 \\ \chi_k(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non calcolabile anch'essa, altrimenti χ_K sarebbe calcolabile. È facile vedere che $f \circ g$ è la costante 0, calcolabile. □

Esercizio 6.4 (p). Può esistere una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con codominio finito, crescente totale (ovvero $f(x) \leqslant f(y)$ per $x \leqslant y$) e non calcolabile? Motivare la risposta con un esempio o con una dimostrazione di non esistenza. E rilassando l'ipotesi di totalità?

Soluzione: Con la richiesta di totalità non può esistere. Infatti, possiamo dimostrare che ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con le caratteristiche indicate è calcolabile. La prova procede per induzione su $M = \max\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

($M = 0$) Si osserva che in questo caso $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$, ovvero f è la costante 0 e quindi è calcolabile.

($M > 0$) In questo caso sia $x_0 = \min\{x \mid f(x) = M\}$. Se $x_0 = 0$, la funzione f è la costante M, quindi calcolabile.

Se invece $x_0 > 0$, sia $M' = f(x_0 - 1)$, il valore che la funzione assume prima di M. Possiamo allora scrivere $f(x)$ come somma di due funzioni,

$$f(x) = f'(x) + g(x)$$

dove $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x < x_0 \\ M' & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_0 \\ M - M' & \text{altrimenti} \end{cases} = (M - M')\ \overline{sg}(x + 1 \dot{-} x_0)$$

La funzione f' è totale, con codominio contenuto in quello di f, quindi finito, è crescente e $\max\{f'(x) \mid x \in \mathbb{N}\} = M' < M$. Quindi è calcolabile per ipotesi induttiva. Anche g è calcolabile in quanto esprimibile come composizione di funzioni calcolabili. Quindi anche f è calcolabile.

Se invece si rilassa la richiesta di totalità possiamo definire una funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è crescente, con codominio finito e non calcolabile in quanto, per diagonalizzazione, diversa da ogni funzione calcolabile.

□

Esercizio 6.5 (p). Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *decrescente* se è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \leqslant y$ allora $f(x) \geqslant f(y)$. Esiste una funzione decrescente non calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: Let $k = \min\{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ and let $x_0 \in \mathbb{N}$ be such that $f(x_0) = k$. Therefore, since f is decreasing, $f(x) = k$ for all $x \geqslant x_0$. If we define

$$\theta(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x < x_0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

we can write f as

$$f(x) = \begin{cases} \theta(x) & \text{if } x < x_0 \\ k & \text{otherwise} \end{cases}$$

Since θ is finite, it is computable. Let $\theta = \varphi_e$. Therefore

$$f(x) = (\mu w. ((x < x_0 \ \wedge \ S(e, x, (w)_1, (w)_2) \vee (x \geqslant x_0 \ \wedge \ (w)_1 = k))_1$$

hence it is computable.

An alternative simpler solution, shows that actually all decreasing functions are primitive recursive. One ca reuse the previous exercise and observe that $g(x) = f(0) \dot{-} f(x)$ is total, increasing and with finite domain. A direct proof can proceed by (complete) induction on $f(0)$.

□

Esercizio 6.6 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni altra funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Non può esistere, altrimenti, dato che la quantificazione per g è universale, la proprietà dovrebbe valere anche per $g = f$. Quindi $f + f = 2f$ calcolabile, quindi f calcolabile. □

Esercizio 6.7. Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che esista una funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ per cui la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Si, $\chi_K + \chi_{\bar{K}}$ è la costante 1. □

Esercizio 6.8 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \cap img(f)$ sia finito? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Si, si definisca

$$f(x) = \begin{cases} \uparrow & \text{se } x \leqslant 1 \\ \chi_K(x) & \text{altrimenti, se } x > 1 \end{cases}$$

□

Esercizio 6.9. Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f) \cap img(f)$ sia vuoto? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 * \chi_K(\lfloor x/2 \rfloor) & \text{se } x \text{ dispari} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha che $dom(f)$ è l'insieme dei numeri dispari, $cod(f) = \{0, 2\}$, quindi $dom(f) \cap cod(f) = \emptyset$. Inoltre f non è calcolabile. Se lo fosse allora anche $\chi_K(z) = f(2z+1)/2$ lo sarebbe, mentre sappiamo che K non è ricorsivo, ovvero χ_K non è calcolabile. □

Esercizio 6.10. Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tale che la sua immagine $cod(f) = \{y \mid \exists x \in \mathbb{N}.\ f(x) = y\}$ sia finito? Fornire un esempio o mostrare che una tale funzione non esiste.

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} \overline{sg}(\varphi_x(x)) & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{se } x \notin W_x \end{cases}$$

Allora la funzione f

- è totale;
- non è calcolabile in quanto per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha che $f(x) \neq \varphi_x(x)$; infatti, se $\varphi_x(x) \downarrow$ allora $f(x) = \overline{sg}(\varphi_x(x)) \neq \varphi_x(x)$, e se invece $\varphi_x(x) \uparrow$ allora $f(x) = 0 \neq \varphi_x(x)$;
- chiaramente $cod(f) \subseteq \{0, 1\}$.

□

Esercizio 6.11 (p). Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita come

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in W_x \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile.

Soluzione: Observe that

$$g(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ x + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

is not computable, and, for concluding, use the fact that $g(x) = f(x) + 1$. Hence if f were computable, also g would have been. □

Esercizio 6.12 (p). Dire se esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che, per infiniti $x \in \mathbb{N}$ valga

$$f(x) = \varphi_x(x)$$

Se la risposta è negativa fornire una dimostrazione, se la risposta è positiva dare un esempio di una tale funzione.

Soluzione: Possiamo definire

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{se } x \notin W_x \end{cases}$$

Se questa fosse calcolabile, sarebbe calcolabile (per composizione) anche la funzione $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$h(x) = f(x) + 1 = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se } x \in W_x \\ 1 & \text{se } x \notin W_x \end{cases}$$

che è invece non calcolabile. Infatti, è facile dimostrare, che per ogni $x \in \mathbb{N}$ risulta $h \neq \varphi_x$. □

Esercizio 6.13. Dire se esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$f(x) \neq \varphi_x(x)$$

solo su di un valore $x \in \mathbb{N}$. Se la risposta è negativa fornire una dimostrazione, se la risposta è positiva dare un esempio di una tale funzione.

Esercizio 6.14. Dire se esiste una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che

$$f(x) \neq \varphi_x(x)$$

solo su di un valore $x \in \mathbb{N}$. Se la risposta è negativa fornire una dimostrazione, se la risposta è positiva dare un esempio di una tale funzione.

Esercizio 6.15. Può esistere una funzione non calcolabile totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $cod(f)$ sia l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} 2\varphi_x(x) + 2 & \text{se } x \in W_x \\ 2k & \text{se } x \notin W_x \text{ e } k = |\{y < x \mid y \notin W_y\}| \end{cases}$$

La funzione f ha dominio coincidente con i numeri pari, perché il numero di funzioni indefinite sul proprio indice è infinito (ad es. abbiamo infiniti indici per la funzione sempre indefinita). Inoltre, è non calcolabile in quanto per costruzione diversa da tutte le funzioni calcolabili.

Alternativamente va bene

$$f(x) = \begin{cases} 2\varphi_{\frac{x}{2}}(x) + 2 & \text{se } x \in W_x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

osservando che i numeri pari maggiori di zero sono comunque coperti dal primo caso (le funzioni costanti sono calcolabili!). □

Esercizio 6.16. Dire se esiste una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che l'insieme $D = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq \phi_x(x)\}$ sia finito. Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.17. Dire se esistono funzioni totali calcolabili $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \in K$ e $g(x) \neq \varphi_x(x)$ per ogni $x \notin K$. Motivare adeguatamente la risposta, fornendo un esempio o dimostrando la non esistenza per ciascuna funzione.

Soluzione: La funzione f non esiste, dato che per ogni x se φ_x è totale allora $x \in K$. Quindi se per ogni $x \in K$ vale $f(x) \neq \varphi_x(x)$, se ne deduce che f è diversa da ogni funzione totale calcolabile. Quindi, qualora sia totale non è calcolabile.

La funzione g esiste dato che basta prendere $g(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Infatti, se $x \in \bar{K}$, si ha che $g(x) = 1 \neq \varphi_x(x) =\uparrow$. □

Esercizio 6.18. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } \varphi_x(x)\downarrow \\ 2x \dot{-} 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: La funzione non è calcolabile, dato che possiamo scrivere

$$\chi_K(x) = sg(f(x) \dot{-} 2x).$$

Se f fosse calcolabile, dedurremmo che anche χ_K lo è, mentre sappiamo che K non è ricorsivo, ovvero χ_K non è calcolabile. □

Esercizio 6.19 (p). Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \forall y \leqslant x.\ \ \varphi_y \text{ totale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: Let $y_0 = \min\{y \mid \varphi_y \text{ is not total}\}$. Note that y_0 is well-defined since the set of non-total computable function is non-empty and natural numbers are well-ordered. Then notice that

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < y_0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = x \cdot sg(y_0 - x)$$

is computable. □

Esercizio 6.20. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } \varphi_x(x)\downarrow \\ x \dot{-} 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.21. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x+1) + 1 & \text{se } \varphi_x(x+1) \downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.22. Dire se è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1 & \text{se per ogni } y \leqslant x \text{ vale } \varphi_y(y) \downarrow \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Motivare adeguatamente la risposta.

Esercizio 6.23. Si consideri la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ x+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dire se la funzione è o meno calcolabile, motivando adeguatamente la risposta.

Soluzione: La funzione non è calcolabile. Infatti, dato che $x^2 \neq x+1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$, se si considera la funzione $g(x) = \overline{sg}(|f(x) - x^2|)$ si ha che $g(x) = \chi_K(x)$. □

Esercizio 6.24. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *quasi totale* se è indefinita su di un insieme finito di punti. Esiste una funzione quasi totale e calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f \subseteq \chi_K$? Motivare adeguatamente la risposta fornendo un esempio di tale funzione nel caso esista e una prova della non esistenza, altrimenti.

Soluzione: Sia f quasi totale tale che $f \subseteq \chi_K$. Si osservi che detto $D = dom(f)$, si ha che $\overline{D}$ è finito e quindi ricorsivo. Pertanto anche D è ricorsivo. Si definisca $\theta = \chi_K|_{\overline{D}}$, che è una funzione finita, quindi calcolabile.

A questo punto si osserva che

$$\chi_K(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ \theta(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si conclude che f non calcolabile, altrimenti anche χ_K sarebbe calcolabile. □

Esercizio 6.25. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *quasi costante* se esiste un valore $k \in \mathbb{N}$ tale che l'insieme $\{x \mid f(x) \neq k\}$ è finito. Esiste una funzione quasi costante non calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: Let $I = \{x \mid f(x) \neq k\}$ and define

$$\theta(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in I \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

we can write f as

$$f(x) = \begin{cases} \theta(x) & \text{if } x \in I \\ k & \text{otherwise} \end{cases}$$

Since θ is finite, it is computable. Let $\theta = \varphi_e$. Therefore $f(x) == (\mu w. ((x \in I \wedge S(e, x, (w)_1, (w)_2) \vee (x \notin I \ \wedge \ (w)_1 = k))_1$ is computable. □

Esercizio 6.26. Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con la proprietà che $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(x) \downarrow$? Motivare adeguatamente la risposta fornendo un esempio di tale funzione, se esiste, o dimostrando che non esiste, altrimenti.

Soluzione: Si, la funzione esiste e può essere definita come:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } \varphi_x(x) \downarrow \\ x^2 + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile dato che $\chi_K(x) = \overline{sg}(f(x) - x^2)$. □

Esercizio 6.27 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni altra funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f * g$ definita da $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: No, la funzione non può esistere. Infatti, supponiamo che, per assurdo, una tale funzione f non calcolabile esista. Allora, in particolare, possiamo scegliere $g = f$ e quindi $f * f$ deve essere calcolabile, con

$$(f * f)(x) = f(x) \cdot f(x) = f(x)^2$$

Ma allora anche $f(x) = \mu y.|(f * f)(y) - y \cdot y|$ è calcolabile, contro l'ipotesi. □

Esercizio 6.28 (p). Definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che $f(x) = x/2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ pari oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Soluzione: Si definisce

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{if } x \text{ pari} \\ \varphi_{\frac{x-1}{2}}(x) + 1 & \text{se } x \text{ dispari e } x \in W_{\frac{x-1}{2}} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Quindi si osserva che per ogni $x \in \mathbb{N}$ vale che $\varphi_x \neq f$ in quanto $\varphi_x(2x+1) \neq f(2x+1)$. □

Esercizio 6.29. Esiste una funzione totale non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{N}$, da $g(x) = f(x) \dot{-} x$ sia calcolabile? Fornire un esempio oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

Soluzione: Si può prendere $f(x) = \chi_K(x)$. Allora $f(x) \dot{-} x$ è la costante per ogni $x \geqslant 1$, quindi calcolabile. □

Esercizio 6.30 (p). Può esistere una funzione non calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni funzione non calcolabile $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f + g$ definita da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile? Motivare adeguatamente la risposta (fornendo un esempio di tale f, se esiste, oppure dimostrando che non può esistere).

Soluzione: No, altrimenti $f + f = 2f$ calcolabile, quindi f calcolabile. $\square$

Esercizio 6.31. Esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile tale che $dom(f) = K$ e $cod(f) = \mathbb{N}$? Motivare adeguatamente la risposta.

Soluzione: Si esiste, ad esempio si puó considerare $f(x) = \varphi_x(x)$. Chiaramente $dom(f) = K$. Inoltre, per ogni $k \in N$, se si considera un indice e della funzione costante k si ha che $f(e) = \varphi_e(e) = k$. Quindi $cod(f) = \mathbb{N}$.

Alternativamente si può definire

$$f(x) = (\mu t.H(x, x, t)) - 1$$

Chiaramente $dom(f) = K$ poiché $f(x) \downarrow$ sse esiste t tale che $H(x, x, t)$, i.e., sse $x \in K$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{N}$ basta prendere il programma Z_k che consiste di $Z(1)$ ripetuto x volte. Sull'indice corrispondente $y = \gamma(Z_k)$ avremo $f(y) = k - 1$, che mostra che $cod(f) = \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 6.32. Sia A è un insieme ricorsivo e siano $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzioni calcolabili. Dimostrare che è calcolabile la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x \in A \\ f_2(x) & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

Il risultato continua a valere se indeboliamo le ipotesi e assumiamo A r.e.? Spiegare come si adatta la dimostrazione, in caso positivo, o fornire un controesempio, in caso negativo.

Soluzione: Let $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$ be indexes for f_1, f_2, respectively, namely $\varphi_{e_1} = f_1$ and $\varphi_{e_2} = f_2$. Observe that we can define f as

$$f(x) = (\mu w.((S(e_1, x, (w)_1, (w)_2) \ \wedge \ \chi_A(x) = 1) \vee (S(e_2, x, (w)_1, (w)_2) \ \wedge \ \chi_A(x) = 0)))_1$$

showing that f is computable. Relaxing the hypotheses to recursive enumerability of A, the result is no longer true. Consider for instance $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 0$ and $A = K$, which is r.e. Then f defined as above would be the characteristic function of K which is not computable. $\square$

Esercizio 6.33 (p). Può esistere una funzione totale, non calcolabile, tale che $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$ sia l'insieme Pr dei numeri primi? Motivare la risposta.

Soluzione: Si esiste. Ad esempio, basta considerare:

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{se } x \in W_x \text{ e } p = \min\{p' \in Pr \mid p' > \varphi_x(x)\} \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora la funzione f

- è totale;
- non è calcolabile in quanto per ogni $x \in \mathbb{N}$ si ha che $f(x) \neq \varphi_x(x)$; infatti, se $\varphi_x(x) \downarrow$ si ha che $f(x)$ è un primo maggiore di $\varphi_x(x)$, e se invece $\varphi_x(x) \uparrow$ allora $f(x) = 2$;
- chiaramente $img(f) \subseteq Pr$. Per l'inclusione inversa si consideri un qualunque numero primo $p \in Pr$ e la funzione costante $g(x) = p - 1$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. La funzione g è calcolabile, quindi $g = \varphi_n$ per un opportuno indice n. Si conclude notando che $f(n) = \min\{p' \in Pr \mid p' > \varphi_n(n)\} = \min\{p' \in Pr \mid p > p - 1\} = \min\{p' \in Pr \mid p' \geqslant p\} = p$ e quindi $p \in img(f)$.

$\square$

7 Riduzione, Ricorsività e Ricorsiva Enumerabilità

Esercizio 7.1. Dimostrare che un insieme A è ricorsivo se e solo se esiste una funzione totale calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $x \in A$ se e solo se $f(x) > x$.

Soluzione: Sia A ricorsivo. Allora χ_A è calcolabile. Dunque la funzione richiesta può essere $f(x) = x + \chi_A(x)$.

Vice versa, sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale calcolabile tale che $x \in A$ se e solo se $f(x) > x$. Allora $\chi_A(x) = sg(f(x) \dot{-} x)$ è calcolabile e dunque A è ricorsivo. □

Esercizio 7.2. Dimostrare che un insieme A è ricorsivo se e solo se esistono due funzioni totali calcolabili $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{N}$

$$x \in A \text{ se e solo se } f(x) > g(x).$$

Soluzione: Sia A ricorsivo. Allora χ_A è calcolabile. Dunque le funzioni richieste possono essere $f(x) = \chi_A(x)$ e $g(x) = 0$.

Vice versa, siano $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzioni totali calcolabili tale che $x \in A$ se e solo se $f(x) > g(x)$. Allora $\chi_A(x) = sg(f(x) \dot{-} g(x))$ è calcolabile e dunque A è ricorsivo. □

Esercizio 7.3. Dimostrare che se un insieme A è ricorsivo sse $A \leqslant_m \{0\}$.

Soluzione: Sia A ricorsivo. Allora χ_A è calcolabile. La funzione di riduzione può essere $1 - \chi_A(x)$. Viceversa, se $A \leqslant_m \{0\}$ e f è la funzione di riduzione, $\chi_A(x) = \bar{sg}(f(x)$. □

Esercizio 7.4. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è r.e. allora $f(A) = \{y \in \mathbb{N} \mid \exists x \in A.\ y = f(x)\}$ è r.e. Vale anche il contrario? Ovvero da $f(A)$ r.e. si può dedurre che A è r.e.?

Soluzione: Siano e, e' tali che $f = \varphi_e$ e $sc_A = \varphi_{e'}$. Allora

$$sc_{f(A)}(y) = \mathbf{1}(\mu w.\ H(e', (w)_1, (w)_2)\ \wedge\ S(e, (w)_1, y, (w)_3))$$

quindi $f(A)$ è r.e. Il contrario non vale. Per esempio $\mathbf{1}(\bar{K}) = \{1\}$ è r.e., ma $\bar{K}$ non è r.e. □

Esercizio 7.5. Sia A un insieme ricorsivo e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile totale. È vero in generale che $f(A)$ è r.e.? È vero che $f(A)$ è ricorsivo? Motivare le proprie risposte con una dimostrazione o un controesempio.

Soluzione: Si ha che $f(A)$ è ricorsivo dato che

$$sc_{f(A)}(x) = \mathbf{1}(\mu z.|f(z) - y|)$$

Non vale invece che A è ricorsivo. Si consideri ad esempio la funzione definita come segue. Sia $a \in K$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} (x)_1 & \text{se } H((x)_1, (x)_1, (x)_2) \\ a & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= (x)_1 \cdot \chi_H((x)_1, (x)_1, (x)_2) + a \cdot \bar{sg}(\chi_H((x)_1, (x)_1, (x)_2)) \end{aligned}$$

calcolabile e totale. Inoltre $f(\mathbb{N}) = K$. □

Esercizio 7.6. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dimostrare che se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$ è r.e. L'insieme $f^{-1}(A)$ è anche ricorsivo? Anche di quest'ultimo fatto dare una dimostrazione o fornire un controesempio.

Soluzione: L'insieme $f^{-1}(A)$ è r.e. dato che

$$sc_{f^{-1}(A)}(x) = \chi_A(f(x))$$

Non è ricorsivo in generale, dato che $sc_K^{-1}(\mathbb{N}) = K$. □

Esercizio 7.7. Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se $A \leqslant_m K$.

Soluzione: Si consideri Se A è r.e., allora $g(x, y) = sc_A(x)$, con l'applicazione del teorema smn porta alla funzione di riduzione. Viceversa, se $A \leqslant_m K$, allora detta f la funzione di riduzione, si ha $sc_A(x) = sc_k(f(x))$ è calcolabile. □

Esercizio 7.8. Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se esiste una funzione calcolabile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $A = img(f)$ (si ricordi che $img(f) = \{y : \exists z.\ y = f(z)\}$).

Soluzione: Per l'implicazione ($\Rightarrow$) si può definire:

$$f(z) = z * sc_A$$

per l'implicazione inversa, detto e un indice per f:

$$sc_A(x) = 1(\mu z(S(e, (z)_1, x, (z)_2))$$

□

Soluzione: [In English] If A is r.e., then just take $f(x) = x \cdot sc_A(x)$. Conversely, if $A = img(f)$ for $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable, say $f = \varphi_e$ for a suitable $e \in \mathbb{N}$ then $sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.S(e, (w)_1, x, (w)_2))$. □

Esercizio 7.9. Data una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si definisca il predicato $P_f(x, y) \equiv$ "$f(x) = y$", ovvero $P_f(x, y)$ è vero sse $x \in dom(f)$ e $f(x) = y$. Dimostrare che la funzione f è calcolabile se e solo se il predicato $P_f(x, y)$ è semidecidibile.

Soluzione: Let $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a computable function. Let $e \in \mathbb{N}$ such that $f = \varphi_e$. Then $sc_P(x, y) = \mathbf{1}(\mu w.|f(x) - y|$ is computable, hence P is semidecidable.

Vice versa, let $P(x, y)$ be semidecidable and let e be an index for the semicharacteristics function of P, namely $\varphi_e^{(2)} = sc_P$. Then we have $f(x) = (\mu w.H^{(2)}(e, (x, (w)_1), (w)_2))_1$. □

Esercizio 7.10. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme infinito. Dimostrare che A è ricorsivo sse è l'immagine di una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale strettamente crescente (ovvero per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y$ implica $f(x) < f(y)$).

Soluzione: Sia A ricorsivo e infinito. Si definisca la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come

$$g(x) = \Sigma_{y<x}\chi_A(y)$$

ovvero $g(x)$ conta quanti sono gli elementi di A minori di x. La funzione è calcolabile in quanto χ_A lo è. Inoltre, è facile vedere che g è monotona, ovvero per ogni $x \in \mathbb{N}$, $g(x) \leqslant g(x + 1)$ e inoltre $x \in A$ se e solo se $g(x) < g(x + 1)$. Essendo A infinito, questo implica che $img(g) = \mathbb{N}$.

A questo punto possimamo definire $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ come

$$f(n) = \mu x.\ g(x+1) > n = \mu x.\ n + 1 \dot{-} g(x+1).$$

La funzione f è

- calcolabile in quanto minimalizazione di una funzione calcolabile;
- totale, in quanto $img(g) = \mathbb{N}$ e quindi, qualunque sia n, la condizione $g(x+1) > n$ viene certamente soddisfatta per qualche x.

Inoltre vale $img(f) = A$. Infatti se $x \in img(f)$, allora $g(x) < g(x+1)$ e quindi per quanto osservato sopra $x \in A$. Viceversa, se $x \in A$, allora detto $n = g(x-1)$ si ha $g(x) = n+1$, quindi $f(n) = x$, pertanto $x \in img(A)$.

Per l'implicazione inversa, sia $A = img(f)$ con f totale calcolabile e strettamente crescente. Allora è facile vedere che la funzione caratteristica di A puøessere espressa $\chi_A(x) = \overline{sg}(x \dot{-} f(\mu n.\, f(n) \geqslant x))$.

□

Esercizio 7.11. Dire se può esistere un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{K} = \{y^2 - 1 : y \in E_x\}$. Motivare la risposta.

Esercizio 7.12. Sia $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la codifica delle coppie nei naturali. Si dimostri che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è calcolabile se e solo se l'insieme $A_f = \{\pi(x, f(x)) \ : \ x \in \mathbb{N}\}$ è ricorsivamente enumerabile.

Esercizio 7.13. Dimostrare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è un insieme ricorsivo se e solo se $A \leqslant_m \{0\}$.

Esercizio 7.14. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme non vuoto. Dimostrare che A è ricorsivamente enumerabile se e solo se esiste una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $dom(f)$ è l'insieme dei numeri primi e $img(f) = A$.

Esercizio 7.15. Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ un insieme di funzioni calcolabili tale che, indicate con $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ le funzioni costanti 0 e 1, rispettivamente, si abbia $\mathbf{0} \notin \mathcal{A}$ e $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$. Detto $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ mostrare che A non r.e. oppure $\bar{A}$ non r.e.

Soluzione: Dato che ne A, ne il suo complementare sono vuoti, per il teorema di Rice non sono ricorsivi. Dunque, non possono essere entrambi r.e. □

Esercizio 7.16. Dire se può esistere un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{K} = \{2^y - 1 : y \in E_x\}$. Motivare la risposta.

Soluzione: No, dato che indicata con f la funzione definita da $f(y) = 2^y - 1$, si ha che $\{2^y - 1 : y \in E_x\} = img(f \circ \varphi_x)$, quindi è un insieme r.e., diversamente da $\bar{K}$. □

Esercizio 7.17. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leqslant_m B$. Dimostrare che dati comunque $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ vale:

a. se $A \leqslant_m B$ e $B \leqslant_m C$ allora $A \leqslant_m C$;
b. se $A \neq \mathbb{N}$ allora $\varnothing \leqslant_m A$.

Soluzione:

a. Si osservi che se f riduce A a B, e g riduce B a C allora $g \circ f$ riduce A a C.

b. Si consideri $a_0 \notin A$ (che esiste in quanto $A \neq \mathbb{N}$). Allora la funzione di riduzione può essere $f(x) = a_0$ per ogni $x \in \mathbb{N}$.

□

Esercizio 7.18. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leqslant_m B$. È vero che per ogni insieme A vale vale $A \leqslant_m A \cup \{0\}$? In caso affermativo dare una prova e in caso negativo un controesempio. Nel secondo caso, proporre una condizione (indicando se è solo suffciente o anche necessaria) che renda vero $A \leqslant_m A \cup \{0\}$.

Soluzione:
In generale non vale, in particolare non vale $\mathbb{N}\backslash\{0\} \leqslant_m \mathbb{N}$, dato che non può esistere una funzione totale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $x \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ sse $f(x) \in \mathbb{N}$: qualunque sia f la seconda parte è sempre vera!
Questo è l'unico esempio che falsifica l'asserto, ovvero per ogni $A \neq \mathbb{N}\backslash\{0\}$ vale $A \leqslant_m A \cup \{0\}$. Infatti, distinguiamo due casi:

- se $0 \in A$, allora $A \cup \{0\}$ (la funzione di riduzione può essere l'identità).
- se $0 \notin A$, allora possiamo considerare certamente $x_0 \notin A$, $x_0 \neq 0$ (infatti sappiamo che $A \neq \mathbb{N}$ e $A \neq \mathbb{N}\backslash\{0\}$). E la funzione di riduzione può essere

$$f(x) = \begin{cases} x_0 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Esercizio 7.19. Dati due insiemi $A, B \subseteq \mathbb{N}$ definire il significato di $A \leqslant_m B$. Dimostrare che, dato comunque $A \subseteq \mathbb{N}$, vale A r.e. sse $A \leqslant_m K$.

Soluzione: Se $A \leqslant_m K$ allora A r.e., in quanto K r.e.
Viceversa, sia A r.e. Si definisca

$$g(x, y) = sc_A(x) = \varphi_{s(x)}(y)$$

con $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale data dal teorema smn. Allora s è funzione di riduzione per $A \leqslant_m K$. □

Esercizio 7.20. Dimostrare che un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e $\bar{A}$ sono r.e.

Esercizio 7.21. Enunciare e dimostrare il teorema di Rice (senza utilizzare il secondo teorema di ricorsione).

Esercizio 7.22. Dare la definizione di insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ saturato e dimostrare che K non è saturato.

Esercizio 7.23. Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ un insieme di funzioni calcolabili e sia $f \in \mathcal{A}$ tale che per ogni funzione finita $\theta \subseteq f$ vale $\theta \notin \mathcal{A}$. Dimostrare che $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ non è r.e.

8 Caratterizzazione di insiemi

Esercizio 8.1. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| \geqslant 2\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.2. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \cap E_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.3. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid x \in W_x \cup E_x\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Osserviamo che $K \leqslant_m A$. Si definisca

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = sc_K(x)$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che s può essere la funzione di riduzione.

Inoltre B è r.e., infatti

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(H(x,x,(w)_2) \vee S(x,(w)_1,x,(w)_2))$$

Si conclude quindi che $\bar{A}$ non è r.e. □

Esercizio 8.4. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x \cup W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Mostriamo che $K \leqslant \bar{A}$, quindi A non ricorsivo. Infatti si definisca

$$g(x,y) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x,y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x,y) = \psi_U(x,x)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a A.

Inoltre A è r.e., dato che

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.\ H(x, x(w)_1) \vee S(x,(w)_1,x,(w)_2))$$

Pertanto $\bar{A}$ non r.e. □

Esercizio 8.5. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq \mathbb{P}\}$, dove $\mathbb{P}$ è l'insieme dei numeri pari, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme $\bar{A}$ non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m \bar{A}$. Infatti, si consideri la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

è calcolabile. Dunque per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$, e la funzione s è funzione di riduzione.

Infatti, se $x \in \bar{K}$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ per ogni y. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$, e pertanto $W_{s(x)} \subseteq \mathbb{P}$, quindi $s(x) \in \bar{A}$.

Se invece $x \notin \bar{K}$, ovvero $x \in K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = 1$ per ogni y. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$. Pertanto $W_{s(x)} \nsubseteq \mathbb{P}$, i.e., $s(x) \in A$.

L'insieme $\bar{A}$ è r.e., infatti

$$sc_A(x) = \mu w. H(x, 2(w)_1 + 1, (w)_2)$$

Pertanto, A non r.e.

$\square$

Esercizio 8.6. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y, z \in \mathbb{N}.\ z > 1 \ \wedge\ x = y^z\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.7. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \phi_x(y) = y \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.8. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \subseteq E_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.9. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > |E_x|\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.10. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(y) = x * y \text{ per qualche } y\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A è r.e. Infatti la funzione semicaratteristica

$$_A(x) = \mu w. S(x, (w)_1, x * (w)_1, (w)_2)$$

è calcolabile.

Non è ricorsivo, dato che $K \leqslant_m A$. Per dimostrarlo si consideri la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases} = \mathbf{0}(sc_K(x))$$

Essendo calcolabile, per il teorema smn, esiste una funzione $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ totale e calcolabile, tale che, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$$

Allora s è un funzione di riduzione per $K \leqslant_m A$. Infatti

- se $x \in K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = 0$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. In particolare $\varphi_{s(x)}(0) = 0 = s(x) * 0$. Quindi $s(x) \in A$.
- se $x \notin K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto non può esistere y tale che $\varphi_{s(x)}(y) = x * y$. Quindi $s(x) \notin A$.

Infine, essendo A r.e., non ricorsivo, si conclude che $\bar{A}$ non r.e. e quindi non ricorsivo.

□

Esercizio 8.11. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x \cap E_x| = 1\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: The set A is clearly saturated since $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ where $\mathcal{A} = \{f \mid |cod(f) \cap img(f)| = 1\}$. We can deduce, by using Rice-Shapiro, that A is not r.e., in fact $id \notin \mathcal{A}$ but there is $\theta \subseteq id$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

such that $cod(\theta) = dom(\theta) = \{0\}$, hence $|cod(\theta) \cap dom(\theta)| = |\{0\}| = 1$, therefore $\theta \in \mathcal{A}$.

The complement is not r.e. again by Rice-Shapiro. E.g., θ defined above is not in $\bar{\mathcal{A}}$, but it admits $\varnothing$ as finite subfunction and $\varnothing \in \bar{\mathcal{A}}$. □

Esercizio 8.12. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *strettamente crescente* se per ogni $y, z \in \text{dom}(f)$, $y < z$ implica $f(y) < f(z)$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \varphi_x \text{ strettamente crescente}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: The set A is clearly saturated since $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ where $\mathcal{A} = \{f \mid f \text{ strettamente crescente}\}$. We can deduce, by using Rice-Shapiro, that A is not r.e., in fact $\varnothing \in \mathcal{A}$ and $\varnothing \subseteq id \notin \mathcal{A}$.

The complement is r.e., in fact

$$sc_{\bar{A}}(x) = \mathbf{1}(\mu z.S(x, (z)_1, (z)_2 + (z)_3, (z)_4) \wedge S(x, (z)_1 + (z)_5 + 1, (z)_2, (z)_4)$$

Therefore $\bar{A}$ is not recursive. □

Esercizio 8.13. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è *quasi totale* se è indefinita su di un insieme finito di punti. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \varphi_x \text{ quasi totale}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.14. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x = \varnothing\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.15. Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{N}$, definiamo $X + 1 = \{x + 1 : x \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = W_x + 1\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: The set A is saturated since $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid cod(f) = dom(f) + 1\}$. We can use Rice-Shapiro to show that

- A is not r.e.
  In fact $id \notin \mathcal{A}$ since $cod(id) = \mathbb{N} \neq dom(id) + 1 = \mathbb{N} + 1 = \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Moreover, $\varnothing \subseteq id$ and $\varnothing \in \mathcal{A}$ since $cod(\varnothing) = \varnothing = dom(\varnothing) + 1$.
- $\overline{A}$ not r.e.
  In fact, if we define

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leqslant 1 \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

and

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 1 \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

we have that $f \in \bar{\mathcal{A}}$ since $cod(f) = \mathbb{N}\backslash\{0\} = dom(f) + 1 = \mathbb{N} + 1$. Moreover, $\theta \subseteq f$ and $\theta \in \bar{\mathcal{A}}$ since $cod(\theta) = \{1\} = dom(\theta) \neq dom(\theta) + 1$.

□

Esercizio 8.16. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri pari. Dimostrare che indicato con $A = \{x \in \mathbb{N} : E_x = \mathbb{P}\}$, si ha che $\bar{K} \leqslant_m A$.

Soluzione: Per ottenere la funzione di riduzione si può considerare

$$f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa è calcolabile, dato che può essere scritta come $f(x, y) = 2\, y\, \bar{sg}(\chi_H(x, x, y)) + \chi_H(x, x, y)$.

Pertanto, per il teorema smn, esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $f(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, che può essere usata come funzione di riduzione per $\bar{K} \leqslant_m A$. Infatti:

- se $x \in \bar{K}$, allora $\chi_H(x, x, y) = 0$ per ogni y, e pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = f(x, y) = 2y$ per ogni y. Quindi $E_{s(x)} = \mathbb{P}$, e pertanto $s(x) \in A$.
- se $x \notin \bar{K}$, ovvero $x \in K$ allora esiste y_0 tale che $\chi_H(x, x, y) = 1$ per ogni $y \geqslant y_0$. Quindi $\varphi_{s(x)}(y) = 1$ per $y \geqslant y_0$, dunque $1 \in E_{s(x)}$ e pertanto $E_{s(x)} \neq \mathbb{P}$, quindi $s(x) \notin A$.

□

Esercizio 8.17. Studiare la ricorsività dell'insieme $\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(x) \downarrow \ \wedge \ \varphi_x(x) < x+1\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: $(K \leqslant A)$ Per ottenere la funzione di riduzione considerare

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque A non ricorsivo. Inoltre A r.e. e

$$sc_A(x) = sg(x + 1 - \varphi_x(x))$$

Infine $\bar{A}$ non r.e., dato che A r.e. e non ricorsivo.

□

Esercizio 8.18. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \ \wedge \ \varphi_x(x) = x^2\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Mostriamo che $K \leqslant A$, quindi A non ricorsivo. Si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$g(x, y) = y^2 \cdot sc_K(x)$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$

La funzione s è funzione di riduzione di K a A. Infatti

- se $x \in K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) = y^2$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \in W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e $\varphi_{s(x)}(s(x)) = s(x)^2$. Pertanto $s(x) \in A$.
- se $x \notin K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \notin W_{s(x)} = \varnothing$. Quindi $s(x) \notin A$.

Inoltre A è r.e., dato che la sua funzione caratteristica

$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w. \, |x^2 - \varphi_x(x)|) = \mathbf{1}(\mu w. \, |x^2 - \Psi_U(x, x)))|$

è calcolabile. Pertanto $\bar{A}$ non r.e., e quindi non è neppure ricorsivo. □

Esercizio 8.19. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}. \, \varphi_x(x + 3k) \uparrow\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: ($\bar{K} \leqslant A$) Per ottenere la funzione di riduzione considerare

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque A non r.e.

($\bar{K} \leqslant \bar{A}$) Per ottenere la funzione di riduzione considerare

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque anche $\bar{A}$ non r.e.

□

Esercizio 8.20. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = \overline{E_x}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) = \overline{cod(f)}\}$.

Utilizzando Rice-Shapiro si prova che A e $\overline{A}$ sono non r.e.:

- A non r.e.
  nessuna funzione finita può appartenere a $\mathcal{A}$, che però è non vuoto (es. $sc_{\mathbb{N}-\{1\}}$, la funzione semicaratteristica di $\mathbb{N} - \{1\}$, è in $\mathcal{A}$)
- $\overline{A}$ non r.e.
  Si noti che $sc_{\mathbb{N}-\{1\}} \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma $\varnothing \in \overline{\mathcal{A}}$.

□

Esercizio 8.21. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{\pi(x, y) \; : \; P_x(x) \downarrow \text{ in meno di } y \text{ passi}\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si ha che $B = \{\pi(x, y) \; : \; H(x, x, y - 1)\}$. Quindi B e $\overline{B}$ sono ricorsivi. □

Esercizio 8.22. Detto $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è totale}\}$, dimostrare che $\bar{K} \leqslant_m A$.

Soluzione: Si definisce

$$g(x, y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x, x, y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che s può essere la funzione di riduzione. □

Esercizio 8.23. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = y \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.24. Dato un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $F(X) = \{0\} \cup \{y, y + 1 \mid y \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x = F(E_x)\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) = F(cod(f))\}\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova A e $\overline{A}$ sono entrambi non r.e.:

- A non r.e.
  Si consideri la funzione

  $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1, 2 \\ \uparrow \; = & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Si ha che $f \notin \mathcal{A}$, in quanto $dom(f) = \{0, 1, 2\}$ e $cod(f) = \{0\}$. Dunque $F(cod(f)) = \{0, 1\} \neq dom(f)$. Inoltre se consideriamo

  $$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, 1 \\ \uparrow \; = & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  chiaramente $\theta \subseteq f$. Inoltre $dom(\theta) = \{0, 1\}$ e $cod(\theta) = \{0\}$. Dunque $F(cod(\theta)) = \{0, 1\} = dom(\theta)$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che A non è r.e.

- $\overline{A}$ non r.e.
  Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$, dato che $dom(\emptyset) = cod(\emptyset) = \emptyset$ e pertanto $F(cod(\emptyset)) = \{0\} \neq dom(\emptyset)$. Quindi, riassumendo $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma ammette una parte finita, ovvero la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che $\bar{A}$ non è r.e.

□

Esercizio 8.25. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid k \cdot (x + 1) \in W_x \cap E_x \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A non è r.e., dato che $\bar{K} \leqslant_m A$. Per dimostrarlo si consideri

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e se ne deduce la funzione di riduzione.

Anche $\bar{A}$ non è r.e., dato che $\bar{K} \leqslant_m \bar{A}$. La funzione di riduzione può essere dedotta considerando

$$g(x,y) = \begin{cases} y & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

□

Esercizio 8.26. Sia $\varnothing$ la funzione sempre indefinita. Si studi la ricorsività dell'insieme $A = \{x \mid \varphi_x = \varnothing\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A è non ricorsivo, per il teorema di Rice, dato che è saturato, non vuoto (la funzione sempre indefinita è calcolabile) e diverso da $\mathbb{N}$. Inoltre $\bar{A}$ è r.e., dato che

$$sc_{\bar{A}}(x) = \mathbf{1}(\mu w.H(x,(w)_1,(w)_2)$$

Quindi A non r.e. □

Esercizio 8.27. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \ : \ \forall y.\ \text{if}\ y+x \in W_x\ \text{then}\ y \leqslant \varphi_x(y+x)\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme $\bar{A} = \{x \ : \ \exists y.\ y+x \in W_x \ \wedge \ y > \varphi_x(y+x)\}$ non è ricorsivo, dato che che $K \leqslant_m A$. Infatti, si consideri la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

è calcolabile. Dunque per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$, e la funzione s è funzione di riduzione.

Infatti, se $x \in K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = 0$ per ogni y. Quindi $\varphi_{s(x)}(s(x)+1) = 0 < s(x)+1$, e pertanto $s(x) \in \bar{A}$. Se invece $x \notin K$, si ha $s(x) \notin \bar{A}$.

L'insieme $\bar{A}$ è r.e., infatti

$$sc_{\bar{A}}(x) = \mu w.S(x,(w)_1+x,(w)_1+(w)_2+1,(w)_3)$$

dove $(w)_1$ rappresenta il valore y cercato ed il valore della funzione è richiesto essere $(w)_1+(w)_2+1 > (w)_1$.

Pertanto, A non r.e.

□

Esercizio 8.28. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \ : \varphi_x(y+x)\downarrow \ \text{per qualche}\ y \geqslant 0\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme $A = \{x \ : \varphi_x(y+x)\downarrow \ \text{per qualche}\ y \geqslant 0\}$ è r.e., dato che

$$sc_A(x) = 1(\mu(y,t).H(x,x+y,t))$$

è calcolabile. Non è ricorsivo perche' $K \leqslant A$ (prova!).

Pertanto, A non r.e.

□

Esercizio 8.29. Sia $X \subseteq \mathbb{N}$ finito, $X \neq \emptyset$ e si definisca $A_X = \{x \in \mathbb{N} : W_x = E_x \cup X\}$. Studiare la ricorsività di A, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $A_X = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A}_X = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) = cod(f) \cup X\}\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova A e $\bar{A}$ sono entrambi non r.e.:

- A non r.e.
  Sia $x \in X$ e $y \notin X$ e si consideri la funzione
  $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X \cup \{y\} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  Si ha che $f \notin \mathcal{A}$, in quanto $dom(f) = X \cup \{y\} \neq X = X \cup \{x\} = X \cup cod(f)$. Inoltre se consideriamo
  $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  chiaramente $\theta \subseteq f$. Inoltre $dom(\theta) = X = X \cup \{x\} = X \cup cod(f)$ e pertanto $\theta \in \mathcal{A}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che A non è r.e.

- $\bar{A}$ non r.e.
  Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$, dato che $dom(\emptyset) = \emptyset \neq X = cod(\emptyset) \cup X$. Quindi, riassumendo $\theta \notin \overline{\mathcal{A}}$, ma ammette una parte finita, ovvero la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che $\bar{A}$ non è r.e.

□

Esercizio 8.30. Sia $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x \ \neq \emptyset\}$. Studiare la ricorsività di A, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $A = \{x : \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C} : dom(f) \cap cod(f) = \emptyset\}\}$. Non è vuoto (dato che $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$) e non è tutto $\mathbb{N}$ (dato che $\emptyset \notin \mathcal{A}$), quindi per Rice non è ricorsivo. Inoltre A è r.e. dato che

$$\begin{aligned} sc_A(x) &= \mathbf{1}(\mu(y,z,t).H(x,y,t) \wedge S(x,z,y,t)) \\ &= \mathbf{1}(\mu w.H(x,(w)_1,(w)_3) \wedge S(x,(w)_2,(w)_1,(w)_3) \end{aligned}$$

Quindi A non è r.e. □

Esercizio 8.31. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}.\ x + k \in W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si dimostra che $\bar{K} \leqslant_m A$, quindi A non r.e. Per ottenere la funzione di riduzione, si utilizza la funzione calcolabile

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi si usa il teorema smn.

Inoltre $K \leqslant_m A$, tramite la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e pertanto $\bar{K} \leqslant \bar{A}$ e quindi $\bar{A}$ non r.e. □

Esercizio 8.32. Una funzione parziale $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $f(x) = f(y)$ allora $x = y$. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \ : \ \varphi_x \text{ iniettiva}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A è chiaramente saturato, in quanto $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A}$ è l'insieme delle funzioni iniettive. Dato che $\varnothing \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{1} \notin \mathcal{A}$, per Rice l'insieme non è ricorsivo. Inoltre $\bar{A}$ è r.e, dato che

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.\ (S(x, (w)_1, (w)_3, (w)_4) \wedge S(x, (w)_2, (w)_3, (w)_4) \ \wedge \ (w)_1 \neq (w)_2)).$$

□

Esercizio 8.33. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in E_x . \exists z \in W_x.\ x = y * z\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Mostriamo che $K \leqslant A$, quindi A non ricorsivo. Infatti si definisca

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x,y) =_K (x)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a A. Infatti, se $x \in K$, $\varphi_{s(x)}(y) = y$ per ogni y e quindi esistono certamente $s(x) \in W_{s(x)}$ e $1 \in E_{s(x)}$ tali che $s(x) = s(x) * 1$. Quindi $s(x) \in A$. Altrimenti $\varphi_{s(x)} = \varnothing$ ed è facile concludere $s(x) \notin A$.

Inoltre A è r.e., dato che

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.\ S(x, (w)_1, (w)_2, (w)_3) \ \wedge \ (w)_1 * (w)_2 = x)$$

Pertanto $\bar{A}$ non r.e. □

Esercizio 8.34. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : x \in W_x \ \wedge \ \varphi_x(x) > x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Mostriamo che $K \leqslant A$, quindi A non ricorsivo. Si definisca

$$g(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x, y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x,y) = (y+1) \cdot sc_K(x)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a A. Infatti

- se $x \in K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y+1$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \in W_{s(x)} = \mathbb{N}$ e $\varphi_{s(x)}(s(x)) = s(x)+1 > s(x)$. Pertanto $s(x) \in A$.
- se $x \notin K$ allora $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) \uparrow$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Pertanto $s(x) \notin W_{s(x)} = \emptyset$. Quindi $s(x) \notin A$.

Inoltre A è r.e., dato che la sua funzione caratteristica

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.\ (x+1) \dot{-} \varphi_x(x)) = \mathbf{1}(\mu w.\ ((x+1) \dot{-} \Psi_U(x,x)))$$

è calcolabile. Pertanto $\bar{A}$ non r.e., e quindi non è neppure ricorsivo. $\square$

Esercizio 8.35. Sia f una funzione calcolabile totale tale che $img(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{N}\}$ sia infinito. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \ : \ \exists y \in W_x.\ x < f(y)\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A non è ricorsivo dato che $K \leqslant_m A$. Infatti, si consideri la funzione

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

è calcolabile. Dunque per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$, e la funzione s è funzione di riduzione.

Infatti, se $x \in K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = 1$ per ogni y. Quindi $W_{s(x)} = \mathbb{N}$, e pertanto $f(W_{s(x)}) = f(\mathbb{N}) = img(f)$, che è infinita per ipotesi. Pertanto certamente esiste $z \in f(W_{s(x)})$ tale che $x < z$, ovvero esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \in A$.

Se invece $x \notin K$, si ha che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) =\uparrow$ per ogni y. Quindi $W_{s(x)} = \emptyset$, e pertanto, certamente non esiste $y \in W_{s(x)}$ tale che $s(x) < f(y)$. Dunque $s(x) \notin A$.

L'insieme A è r.e., infatti

$$sc_A(x) = \mu w.(H(x,(w)_1,(w)_2) \ \wedge \ x < f((w)_1))$$

Pertanto, $\bar{A}$ non r.e.

$\square$

Esercizio 8.36. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : x \in E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.37. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : W_x \text{ infinito}\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.38. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : \exists y \in W_x.\ \exists k \in \mathbb{N}.\ y = k \cdot x\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.39. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : |W_x| > 1\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.40. Detto P l'insieme dei numeri pari e Pr l'insieme dei numeri primi, dimostrare che $P \leqslant_m Pr$ e $Pr \leqslant_m P$.

Esercizio 8.41. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale calcolabile fissata. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ f(x) \in E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Observe that B is r.e., in fact we can write

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.\,(x, (w)_1, f(x), (w)_2))$$

Moreover B is not recursive since $K \leqslant_m B$. In order to get the reduction function consider

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hence $\bar{B}$ is not r.e. $\square$

Esercizio 8.42. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione totale calcolabile fissata. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ img(f) \cap E_x \neq \varnothing\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili. Si ricorda che $img(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 8.43. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ E_x \not\supseteq W_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.44. Sia $B = \{x \mid \forall m \in \mathbb{N}.\ m \cdot x \in W_x\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme B, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.45. Detto $A = \{x \mid \varphi_x \text{ è totale}\}$, dimostrare che $\bar{K} \leqslant_m A$.

Soluzione: Si definisce

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che s può essere la funzione di riduzione. $\square$

Esercizio 8.46. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \exists y > x.\ y \in E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Esercizio 8.47. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \forall y > x.\ 2y \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Observe that B is not r.e. since $\bar{K} \leqslant_m B$. In order to get the reduction function consider

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Also $\bar{B} = \{x \mid \exists y > x.\ 2y \notin W_x\}$ is not r.e. In order to reduce $\bar{K} \leqslant_m \bar{B}$, the reduction function can be constructed from:

$$g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & \text{if } x \notin K \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} = sc_K(x)$$

□

Esercizio 8.48. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in N : 1 \leqslant |E_x| \leqslant 2\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $B = \{x : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : 1 \leqslant |cod(f)| \leqslant 2\}\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova B e $\bar{B}$ sono entrambi non r.e.:

- B non r.e.
  Si osservi che $id \notin \mathcal{B}$ ma vi è la funzione finita
  $$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  tale che $\theta \subseteq id$ e $\theta \in \mathcal{B}$ Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che B non è r.e.
- $\bar{B}$ non r.e.
  Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \overline{\mathcal{B}}$, ma la funzione sempre indefinita $\varnothing \in \overline{\mathcal{B}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che $\bar{B}$ non è r.e.

□

Esercizio 8.49. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P} \subseteq W_x\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: The set A is saturated since $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, where $\mathcal{A} = \{f \mid \mathbb{P} \subseteq dom(f)\}$. We can use Rice-Shapiro to show that

- A is not r.e.
  In fact $id \in \mathcal{A}$ since $\mathbb{P} \subseteq dom(id) = \mathbb{N}$ and no finite $\theta \subseteq id$ can be in $\mathcal{A}$, since functions in $\mathcal{A}$ necessarily have an infinite domain.
- $\overline{A}$ not r.e.
  In fact, $id \notin \bar{\mathcal{A}}$, and $\varnothing \subseteq id$, $\varnothing \in \bar{\mathcal{A}}$.

□

Esercizio 8.50. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ \varphi_x(y) = y^2 \text{ per infiniti } y\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Osserviamo che B è saturato, dato che $B = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \mid f(y) = y^2 \text{ per infiniti } y\}$. Si usa Rice-Shapiro per dedurre che entrambi gli insiemi non sono r.e.

- B non r.e. perchè $\mathcal{B}$ contiene y^2 e nessuna sua sottofunzione finita (dato che non contiene nessuna funzione finita).
- $\bar{B}$ non r.e. dato che $\emptyset \in \bar{\mathcal{B}}$ e $\emptyset$ ammette come estensione $y^2 \notin \bar{\mathcal{B}}$.

□

Esercizio 8.51. Dato $X \subseteq \mathbb{N}$ si indichi con $2X$ l'insieme $2X = \{2x : x \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 2W_x \subseteq E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si usa Rice-Shapiro per dimostrare che entrambi gli insiemi non sono r.e.:

- B non r.e. perchè contiene $\emptyset$, ma non tutte le funzioni (ad esempio non contiene $\theta = \{(1,4)\}$.
- $\bar{B}$ non r.e. dato che contiene θ al punto precedente, ma non $\theta' = \{(1,4),(2,2)\}$.

□

Esercizio 8.52. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ W_x \supseteq Pr\}$, dove $Pr \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si usa Rice-Shapiro per dimostrare che entrambi gli insiemi non sono r.e.:

- B non r.e. perchè non contiene funzioni finite ed è non vuoto (es. $id \in B$, ma nessuna sua parte finita in B).
- $\bar{B}$ non r.e. dato che contiene $\emptyset$, ma non tutte le funzioni (es. non contiene id, di cui $\emptyset$ è una parte finita).

□

Esercizio 8.53. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{\pi(x,y) \ : \ P_x \text{ termina sull'input } x \text{ in più di } y \text{ passi}\},$$

dove $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ è la funzione di codifica delle coppie, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B è r.e., ma non ricorsivo. Infatti

$$B = \{x : x \in K \ \wedge \ \neg H(x,x,y)\}$$

Per dimostrare che non è ricorsivo si nota che $K \leqslant_m B$. Infatti, $x \in K$ sse $\pi(x,0) \in B$. Inoltre B è r.e. in quanto è calcolabile:

$$sc_B(z) = sc_K(\pi_1(z)) \cdot sc_{\neg H}(\pi_1(z), \pi_1(z), \pi_2(z))$$

Quindi $\bar{B}$ non ricorsivo. □

Esercizio 8.54. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è simmetrica nell'intervallo $[0,2k]$ se $dom(f) \supseteq [0,2k]$ e per ogni $y \in [0,k]$ vale $f(y) = f(2k-y)$. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{N} : \exists k > 0.\ \varphi_x \text{ simmetrica in } [0,2k]\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A è r.e. Infatti:

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu h.\forall_{y \leqslant h+1}\ \varphi_x(y) = \varphi_x(2(h+1) - y))$$

Non è ricorsivo er Rice. Infatti, A è saturato, se e_0 ed e_1 sono indici per le funzioni $\emptyset$ e $\mathbf{1}$, si ha che $e_0 \notin A$ ed $e_1 \in A$, quindi $A \neq \emptyset, \mathbb{N}$. □

Esercizio 8.55. Dato $X \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $inc(X) = X \cup \{x+1 : x \in X\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : inc(W_x) = E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si ha che $\mathcal{B} = \{f \mid inc(dom(f)) = cod(f)\}$, dunque l'insieme è saturato. Inoltre $\emptyset \in \mathcal{B}$, ma $\emptyset \subseteq \mathbf{1}$ e $\mathbf{1} \notin \mathcal{B}$ dato che $\mathbb{N} = inc(dom(\mathbf{1})) \neq cod(\mathbf{1}) = \{1\}$. Per Rice-Shapiro B non r.e.

La funzione $\theta = (0,0) \in \bar{\mathcal{B}}$, ma $\theta \subseteq id \notin \bar{\mathcal{B}}$, dunque, ancora per Rice-Shapiro, neppure $\bar{\mathcal{B}}$ è r.e. □

Esercizio 8.56. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x\ :\ \varphi_x(0)\uparrow\ \vee \varphi_x(0) = 0\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si osserva che B è saturato, il corrispondente insieme di funzioni è definibile come $\mathcal{B} = \{f : f(0)\uparrow\ \vee f(0) = 0\}$. Si ha che $\mathbf{1} \notin \mathcal{B}$, mentre la parte finita $\emptyset \in \mathcal{B}$, quindi per Rice-Shapiro B non r.e. Invece $\bar{B} = \{x : \varphi_x(0)\downarrow\ \wedge \varphi_x(0) \neq 0\}$ è r.e., dato che $sc_B(x) = \overline{sg}(\varphi_x(0))$.

□

Esercizio 8.57. Una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si dice *crescente* quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $x < y$ allora $f(x) < f(y)$. Indicato con $B = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x \text{ crescente}\}$, dimostrare che $\overline{K} \leqslant_m B$.

Soluzione: Si può procedere in modo simile alla prova del teorema di Rice-Shapiro e definire

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo, se $x \in \bar{K}$ allora g, vista come funzione di y sarà l'identità, che è crescente. Altrimenti esisterà un numero di passi per cui $H(x,x,y)$ e quindi da quel punto in poi $g(x,y)$ è costantemente uguale a 0 e quindi non crescente

Più precisamente, si osserva che la funzione $g(x,y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x,y) = y \cdot \chi_{\neg H}(x,x,y)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di $\bar{K}$ a B. Infatti

- Se $x \in \bar{K}$ allora per ogni $y \in \mathbb{N}$ è falso $H(x,x,y)$. Pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y) = y$ per ogni $y \in \mathbb{N}$. Quindi $\varphi_{s(x)}$ è crescente e pertanto $s(x) \in B$.
- Se $x \notin \bar{K}$ allora esiste un $y \in \mathbb{N}$ tale che vale $H(x,x,y)$, e quindi vale anche $H(x,x,y+1)$. Pertanto $\varphi_{s(x)}(y) = 0 = \varphi_{s(x)}(y+1)$. Quindi $\varphi_{s(x)}$ non è crescente e pertanto $s(x) \notin B$.

Alternativamente, in modo più semplice, si può osservare che la funzione sempre indefinita è crescente e la costante 0 non lo è. Pertanto basta definire $g(x, y) = sc_K(x)$ (funzione semicaratteristica dell'insieme K, che è nota essere calcolabile dato che K è r.e.) e si procede poi come sopra. □

Esercizio 8.58. Si dica che una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è k-bounded se $\forall x \in dom(f)$ vale $f(x) < k$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, studiare la ricorsività dell'insieme

$$A_k = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x\ k\text{-bounded}\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme $\bar{A}_k$ è r.e. Infatti:

$$sc_{\bar{A}_k}(x) = \mathbf{1}(\mu w.S(x, (w)_1, (w)_2 + k, (w)_3))$$

Non è ricorsivo per Rice. Infatti, $\bar{A}_k$ è saturato, se e_0 ed e_1 sono indici per le funzioni $\emptyset$ e id, si ha che $e_0 \notin \bar{A}_k$ ed $e_1 \in \bar{A}_k$, quindi $\bar{A}_k \neq \emptyset, \mathbb{N}$. Pertanto A_k non r.e. □

Esercizio 8.59. Si studi la ricorsività dell'insieme $B = \{x + y : x, y \in \mathbb{N} \ \wedge \ \varphi_x(y) \uparrow\}$, ovvero stabilire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B è ricorsivo. Infatti, sia z_0 il minimo indice della funzione sempre indefinita. Allora, per ogni $z \geqslant z_0$ possiamo esprimere z come $z_0 + (z - z_0)$ e vale $\varphi_{z_0}(z - z_0) \uparrow$. Quindi $z \in B$. Pertanto, indicata con $\theta = \chi_{B|[0,z_0-1]}$ la parte finita della funzione caratteristica nell'intervallo $[0, z_0 - 1]$ abbiamo

$$\chi_B(z) = \begin{cases} \theta(z) & \text{if } z < z_0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Essendo θ e la costante 1 calcolabili, ed il predicato $z < z_0$ deeidibile, la funzione caratteristica ecalcolabile. □

Esercizio 8.60. Sia f una funzione calcolabile totale. Studiare la ricorsività dell'insieme $B_f = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(y) = f(y)$ per infiniti $y\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si usa Rice-Shapiro per entrambi gli insiemi

- B non r.e. perchè contiene $f(y)$ e nessuna sua sottofunzione finita (dato che, essendo f totale, B non contiene nessuna funzione finita)
- $\bar{B}$ non r.e. dato che $\emptyset \in \bar{B}$ e $\emptyset$ ammette come estensione $f(y) \notin \bar{B}$.

□

Esercizio 8.61. Sia f una funzione calcolabile totale, diversa dall'identità. Studiare la ricorsività dell'insieme $B_f = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x = f \circ \varphi_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione:

Si usa Rice-Shapiro per entrambi gli insiemi

- B non r.e. perchè contiene $f(y)$ e nessuna sua sottofunzione finita (dato che, essendo f totale, B non contiene nessuna funzione finita)

- $\bar{B}$ non r.e. dato che $\varnothing \in \bar{B}$ e $\varnothing$ ammette come estensione $f(y) \notin \bar{B}$.

$\square$

Esercizio 8.62. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ k \cdot x \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\overline{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si mostra che $K \leqslant B$ e quindi B non ricorsivo. Infatti si definisca

$$g(x,y) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x,y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x,y) = \psi_U(x,x)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a B.

Inoltre B è r.e., dato che

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.\ H(x, (w)_1 \cdot x, (w)_2))$$

Pertanto $\bar{B}$ non r.e.

$\square$

Esercizio 8.63. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}.\ k + x \in W_x\}$, ovvero dire se B e $\overline{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Si mostra che $\bar{K} \leqslant B$ e quindi B non r.e. Infatti si definisca

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione $g(x,y)$ è calcolabile, dato che

$$g(x,y) = \mu z.\chi_H(x,x,y)$$

Quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

La funzione s è funzione di riduzione di K a B.

Inoltre $\bar{B}$ non r.e., dato che $\bar{K} \leqslant \bar{B}$. Infatti si definisca

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si procede come prima.

□

Esercizio 8.64. Studiare la ricorsività dell'insieme $V = \{x \in \mathbb{N} : E_x \text{ infinito}\}$, ovvero dire se V e $\overline{V}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme è saturo in quanto $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$, dove $\mathcal{A} = \{f \mid cod(f) \text{ infinito}\}$. Quindi si usa Rice-Shapiro:

- $id \in \mathcal{A}$, ma nessuna sua parte finita in $\mathcal{A}$ (quindi A non r.e.);
- $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$, $\emptyset \subseteq id$, ma $id \notin \bar{\mathcal{A}}$ (quindi $\bar{A}$ non r.e.).

□

Esercizio 8.65. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ : \ x \in W_x \backslash \{0\}\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme B è r.e., dato che

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.\ (H(x, (w)_1, (w)_2) \wedge x \neq 0)).$$

e non ricorsivo. Infatti, $K \leqslant_m B$. Per domostrarlo si considera

$$g(x, y) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per il teorema smn, essendo la funzione calcolabile, si ottiene $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, totale calcolabile tale che $\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$. Questa è quasi la funzione di riduzione, tranne che per il fatto che potrebbe valere 0 in qualche punto. Tuttavia, è sufficiente prendere un indice $k \neq 0$ per la funzione φ_0 e considerare:

$$s'(x) = \begin{cases} s(x) & \text{if } s(x) \neq 0 \\ k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e abbiamo finito. □

Esercizio 8.66. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \mid W_x \backslash E_x \text{ infinito}\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A è saturato dato che $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) \backslash cod(f) \text{ infinito}\}$.

Per il teorema di Rice-Shapiro:

- A non r.e., dato che $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$, ma nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq \mathbf{1}$ può appartenere a $\mathcal{A}$. Infatti $dom(\theta)$ è finito e quindi anche $dom(\theta) \backslash cod(\theta)$ è finito. Pertanto $\theta \notin \mathcal{A}$.
- $\bar{A}$ non r.e., dato che $\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$, $\mathbf{1} \notin \bar{\mathcal{A}}$ e $\emptyset \subseteq \mathbf{1}$.

□

Esercizio 8.67. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in N : |W_x \backslash E_x| \geqslant 2\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $B = \{x : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : |dom(f) \backslash cod(f)| \geqslant 2\}\}$.

Utilizzando il teorema di Rice-Shapiro si prova B e $\bar{B}$ sono entrambi non r.e.:

- B non r.e.
  Si osservi che $f(x) = x - 2 \notin \mathcal{B}$ ($dom(f) = cod(f) = \mathbb{N}$ quindi $dom(f) - cod(f)$ ma vi è la funzione finita
  $$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
  tale che $\theta \subseteq f$ e $\theta \in \mathcal{B}$ Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che B non è r.e.
- $\bar{B}$ non r.e.
  Si noti che se θ è la funzione definita al punto precedente, $\theta \notin \overline{\mathcal{B}}$, ma la funzione sempre indefinita $\emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$. Per il teorema di Rice-Shapiro si conclude quindi che $\bar{B}$ non è r.e.

$\square$

Esercizio 8.68. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ \forall y \geqslant k.\ \varphi_x(y) \downarrow\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme è chiaramente saturato dato che è l'insieme degli indici di funzioni che appartengono all'insieme $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ \forall y \geqslant k.\ f(y) \downarrow\}$.

Possiamo concludere che B e $\bar{B}$ sono non r.e. utilizzando il teorema di Rice-Shapiro. Infatti:

- B non r.e., in quanto $id \in \mathcal{B}$ ma ovviamente nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq id$ può appartenere a $\mathcal{B}$ (che non contiene, più in generale, nessuna funzione finita).
- $\bar{B}$ non r.e., in quanto $id \notin \bar{\mathcal{B}}$, ma esiste una parte finita $\emptyset \subseteq id$ con $\emptyset \in \mathcal{B}$.

$\square$

Esercizio 8.69. Studiare la ricorsività dell'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} \ :\ x > 0 \ \wedge\ x/2 \notin E_x\}$, ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Observe that $\bar{B}$ is r.e., in fact we can write

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.\, x > 0 \ \vee\ S(x, (w)_1, x/2, (w)_2))$$

Moreover $\bar{B}$ is not recursive since $K \leqslant_m \bar{B}$. In order to get the reduction function consider

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{if } x \in W_x \\ \uparrow & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then, by smn, we have that $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ for some total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. This is almost the reduction function. We need to be sure that when $x \notin K$ then $s(x)$, which is an index of the empty function, is not 0. This can be done by "changing manually" function s. More precisely take any index $n_0 > 0$ such that $\varphi_{n_0} = \emptyset$ (there is such n_0 since $\emptyset$ has infinitely many indices). Then define $s'(x) = s(x)$ if $s(x) \neq 0$ and $s(x) = n_0$ otherwise. Then s' is still total and computable, and operates as a reduction function.

Hence $\bar{B}$ is not r.e. $\square$

Esercizio 8.70. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in W_x.\, \exists z \in W_x.\, (y < z) \ \wedge\ (\varphi_x(y) > \varphi_x(z))\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $B = \{x : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : \forall y \in dom(f).\, \exists z \in dom(f).\ (y < z) \ \wedge \ (f(y) > f(z))\}\}$.

Per il complementare $\bar{\mathcal{B}} = \{f \mid \exists y \in dom(f).\forall z > y.\ (z \notin dom(f)) \vee (f(y) \leqslant f(z))\}$, si osserva che se $f \neq \varnothing$ allora indicato con $y = \{x \in dom(\theta) \mid f(x) = \min f(\mathbb{N})\}$ si ha che y soddisfa la condizione definitoria di $\bar{\mathcal{B}}$. Quindi $\varnothing$ è l'unica funzione non in $\bar{\mathcal{B}}$ ovvero $\mathcal{B} = \{\varnothing\}$ e $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{C} \backslash \{\varnothing\}$. Quindi $\bar{B}$ è r.e. dato che la sua funzione semicaratteristica è $sc_{\bar{B}} = \mathbf{1}(\mu w.H(x, (w)_1, (w)_2))$. Utilizzando il teorema di Rice, si prova $\bar{B}$ non è ricorsivo, quindi B non r.e.

Quest'ultimo fatto si poteva dedurre con il teorema di Rice-Shapiro, osservando che $id \notin \mathcal{B}$ ma vi è la funzione finita $\varnothing \subseteq id$ tale che $\varnothing \in \mathcal{B}$. □

Esercizio 8.71. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \in \mathbb{N} : \forall y \in W_x.\, \exists z \in W_x.\, (y < z) \ \wedge \ (\varphi_x(y) < \varphi_x(z))\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme in esame è saturato, dato che $B = \{x : \varphi_x \in \mathcal{B}\}$, dove $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} : \forall y \in dom(f).\, \exists z \in dom(f).\ (y < z) \ \wedge \ (f(y) < f(z))\}\}$.

L'insieme B non è r.e. per Rice-Shapiro. Infatti si osserva che $\mathbf{1} \notin \mathcal{B}$, ma $\varnothing \subseteq \mathbf{1}$ and $\varnothing \in \mathcal{B}$.

Per il complementare $\bar{\mathcal{B}} = \{f \mid \exists y \in dom(f).\forall z \in dom(f).y < z \rightarrow (f(y) \geqslant f(z))\}$, si osserva che se θ è una qualunque funzione finita, $\theta \neq \varnothing$, $y = \max(dom(\theta))$ chiaramente soddisfa la condizione definitoria di $\bar{\mathcal{B}}$. Quindi è sufficiente osservare che $id \notin \bar{\mathcal{B}}$ e considerare $\theta \subseteq id$, $\theta \neq \varnothing$ osservando che $\theta \in \bar{\mathcal{B}}$. □

Esercizio 8.72. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$A = \{x \mid W_x \cup E_x = \mathbb{N}\},$$

ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: L'insieme A è saturato dato che $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ con $\mathcal{A} = \{f \mid dom(f) \cup cod(f) = \mathbb{N}\}$.

Per il teorema di Rice-Shapiro:

- A non r.e., dato che $id \in \mathcal{A}$, ma nessuna sottofunzione finita $\theta \subseteq id$ può appartenere a $\mathcal{A}$. Infatti $dom(\theta)$ è finito e quindi anche $cod(\theta)$ lo è. Quindi la loro unione $dom(\theta) \cup dom(\theta)$ è finita, il che implica che $dom(\theta) \cup dom(\theta) \neq \mathbb{N}$. Pertanto $\theta \notin \mathcal{A}$.
- $\bar{A}$ non r.e., dato che $\varnothing \in \bar{\mathcal{A}}$, $id \notin \bar{\mathcal{A}}$ e $\varnothing \subseteq id$.

□

Esercizio 8.73. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}.\ kx \in W_x\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Osserviamo che $K \leqslant_m A$. Si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = sc_K(x)$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che s può essere la funzione di riduzione.

Inoltre A è r.e., infatti

$$sc_A(x) = \mathbf{1}(\mu w.H(x, x \cdot (w)_1, (w)_2))$$

Si conclude quindi che $\bar{A}$ non è r.e. □

Esercizio 8.74. Dati $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ si definisca $X + Y = \{x + y \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$. Studiare la ricorsività dell'insieme

$$B = \{x \mid x \in W_x + E_x\},$$

ovvero dire se B e $\bar{B}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: Osserviamo che $K \leqslant_m A$. Si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbf{0}(sc_K(x))$$

Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ ed è facile vedere che s può essere la funzione di riduzione.

Inoltre B è r.e., infatti

$$sc_B(x) = \mathbf{1}(\mu w.(S((w)_1 + (w)_2, (w)_1, (w)_2, (w)_3))$$

Si conclude quindi che $\bar{A}$ non è r.e. □

Esercizio 8.75. Studiare la ricorsività dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : W_x \cap E_x = \mathbb{N}\}$, ovvero dire se A e $\bar{A}$ sono ricorsivi/ricorsivamente enumerabili.

Soluzione: The set A is clearly saturated since $A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ where $\mathcal{A} = \{f \mid cod(f) \cup img(f) = \mathbb{N}\}$. We can deduce, by using Rice-Shapiro, that A is not r.e., in fact $id \in \mathcal{A}$ but clearly no $\theta \subseteq id$ can be in $\mathcal{A}$ since $cod(f)$, $img(f)$ are finite and thus $cod(f) \cup img(f) \neq \mathbb{N}$.

The complement is not r.e. again by Rice-Shapiro. E.g., $id \notin \bar{\mathcal{A}}$, but it admits $\varnothing$ as finite subfunction and $\varnothing \in \bar{\mathcal{A}}$. □

9 Secondo teorema di ricorsione

Esercizio 9.1. Enunciare e dimostrare il secondo teorema di ricorsione.

Esercizio 9.2. Enunciare il secondo teorema di ricorsione e utilizzarlo per dimostrare che K non è ricorsivo.

Esercizio 9.3. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = y^x$, per ogni $y \in \mathbb{N}$.

Esercizio 9.4. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{x \cdot n : x \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 9.5. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = x + y$.

Soluzione: Define $h(x, y) = x + y$, which is a computable function. By smm there is a total computable function $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $\varphi_{s(x)}(y) = h(x, y)$. The second recursion theorem gives an x_0 such that $\varphi_{x_0}(y) = \varphi_{s(x_0)}(y) = h(x_0, y) = x_0 + y$ for all $y \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 9.6. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(y) = x - y$.

Esercizio 9.7. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che φ_n è totale e and $|E_n| = n$.

Soluzione: Il secondo teorema di ricorsione asserisce che per ogni funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_n = \varphi_{h(e)}$.

Consideriamo la funzione $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$g(x, y) = rm(x, y)$$

che sappiamo essere calcolabile (con la convenzione $rm(0, y) = y$). Per il teorema smn esiste $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che $g(x, y) = \varphi_{h(x)}(y)$ e per il secondo teorema di ricorsione esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_n = \varphi_{h(n)}$. Pertanto

$$\varphi_n(y) = \varphi_{h(n)}(y) = g(n, y) = rm(n, y)$$

Se $n \neq 0$, allora $E_n = [0, n)$, quindi $|E_n| = n$, come desiderato.

Se invece $n = 0$ le cose non funzionano, perché $\varphi_n(y) = rm(0, y) = y$. È sufficiente modificare h di modo che il punto fisso in 0 venga rimosso. Ovvero, si considera e tale che $\varphi_e \neq \varphi_0$, e si definisce

$$h'(x) = \begin{cases} e & \text{se } x = 0 \\ h(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente $h'(x) = h(x) * x + e * \overline{sg}(x)$ è calcolabile e totale e quindi si può riapplicare lo stesso ragionamento di prima e concludere. $\square$

Esercizio 9.8. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che la funzione $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $\Delta(x) = \min\{y : \varphi_y \neq \varphi_x\}$, non è calcolabile.

Soluzione: Just observe that Δ is total, and by definition, for all x, it holds $\varphi_{\Delta(x)} \neq \varphi_x$. Then, by the second recursion theorem, Δ cannot be computable. $\square$

Esercizio 9.9. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che, indicato con e_0 un indice della funzione sempre indefinita $\varnothing$ e con e_1 un indice della funzione identità, la funzione $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da

$$h(x) = \begin{cases} e_0 & \text{se } \varphi_x \text{ è totale} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è calcolabile.

Soluzione: Si osservi che h è totale. Inoltre $\varphi_x \neq \varphi_{h(x)}$ per ogni x, dato che φ_x è totale sse $\varphi_{h(x)}$ non lo è. Quindi, per il secondo teorema di ricorsione, si deduce che h non può essere calcolabile. $\square$

Esercizio 9.10. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \leqslant y \leqslant x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione: Si consideri

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \leqslant y \leqslant x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È chiaramente calcolabile, dunque per il teorema smn esiste una funzione totale calcolabile $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$. Applicando il II teorema di ricorsione ad s si conclude. $\square$

Esercizio 9.11. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x : 2x \in W_x \cap E_x\}$ non è saturato.

Soluzione: Si definisce

$$g(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{se } y = 2x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si procede in modo standard. $\square$

Esercizio 9.12. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in E_x\}$ non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, si definisca

$$g(x,y) = x$$

È una funzione calcolabile e quindi per il teorema smn, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$$

Per il II teorema di ricorsione esiste un e tale che $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ e quindi

$$\varphi_e(y) = e$$

Pertanto $E_e = \{e\}$ e quindi $e \in C$.

Dato un qualunque $e' \neq e$ tale $\varphi_{e'} = \varphi_e$ si ha che $e' \notin E_{e'} = E_e$ e quindi $e' \notin C$. Pertanto C non è saturato. $\square$

Esercizio 9.13. Siano e_0 ed e_1 indici della funzione sempre indefinita $\varnothing$ e della costante 1, rispettivamente. Si enunci il Secondo Teorema di Ricorsione e lo si utilizzi per dimostrare che non è calcolabile la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} e_0 & \varphi_x \text{ totale} \\ e_1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione: La funzione g è chiaramente totale. Se fosse calcolabile, per il II Teorema di Ricorsione esisterebbe $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{g(e)}$. Invece, per definizione di g si ha che φ_e totale sse $\varphi_{g(e)}$ non totale. $\square$

Esercizio 9.14. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Dimostrare che data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funzione totale calcolabile iniettiva, l'insieme $C_f = \{x : f(x) \in W_x\}$ non è saturato.

Soluzione: Si definisce
$$g(x,y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } x = f(y) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Per il teorema smn, si ottiene una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, tale che $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ e per il secondo teorema di ricorsione esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{s(e)}$. Dunque:
$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = g(e,y) = \begin{cases} f(e) & \text{se } x = f(e) \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$
Dunque $e \in C_f$. Ma preso un indice diverso e' tale che $\varphi_e = \varphi_{e'}$ avremo che per l'iniettività di f vale $f(e') \neq f(e)$ e quindi $f(e') \notin W_{e'} = W_e = \{f(e)\}$, pertanto $e' \notin C_f$.

□

Esercizio 9.15. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che se C è un insieme tale che $C \leqslant_m \overline{C}$, allora C non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, sia $C \leqslant_m \bar{C}$ e sia f la funzione di riduzione, ovvero $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è calcolabile e totale, e soddisfa:
$$x \in C \quad \text{iff} f(x) \notin C \tag{1}$$
Siccome f è calcolabile totale, per il Secondo Teorema di Ricorsione, esiste e tale che
$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}. \tag{2}$$
Ora se $e \in C$, essendo C saturato, da (2) segue che $f(e) \in C$ e questo contraddice (1). Analogamente se $e \notin C$, si arriva ad una contraddizione. Quindi se ne conclude che la funzione di riduzione non può esistere e quindi C non è saturato. □

Esercizio 9.16. Si enunci il Secondo Teorema di Ricorsione e lo si utilizzi per dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che
$$\varphi_e(y) = \begin{cases} y + e & \text{se } y \text{ multiplo di } e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione: Si definisce
$$g(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{se } y \text{ multiplo di } x \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = (x+y) \cdot \mathbf{1}(\mu z.|z * x - y|)$$
Per il teorema smn, $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ con s calcolabile totale. Quindi si applica il II teorema di ricorsione. □

Esercizio 9.17. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che ogni funzione f non totale, ma indefinita su di un solo punto, ovvero tale che $dom(f) = \mathbb{N} \backslash \{k\}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$, ammette un punto fisso, ovvero esiste $x \neq k$ tale che $\varphi_x = \varphi_{f(x)}$.

Soluzione: Sia h tale che $\varphi_h \neq \varphi_k$ e si definisca
$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq k \\ h & \text{se } x = k \end{cases}$$

Chiaramente f è calcolabile (essendo f e la costante k calcolabili, ed il predicato $x = k$, decidibile) e totale. Dunque per il secondo teorema di ricorsione esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{f'(x)} = \varphi_x$. E per costruzione $x \neq k$, quindi $f'(x) = f(x)$. $\square$

Esercizio 9.18. Enunciare il Secondo Teorema di Ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{x \cdot n : x \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Si definisce

$$g(n, y) = \begin{cases} y & \text{if } y = x \cdot n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si applica quindi il teorema smm ed il secondo teorema di ricorsione.

$\square$

Esercizio 9.19. Dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_n = \varphi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_m \neq \varphi_{m+1}$

Soluzione: Per la prima parte si osserva che $s(x) = x + 1$ è una funzione totale calcolabile e si applica quindi il teorema smm ed il secondo teorema di ricorsione.

Per la seconda parte, se l'indice m non esistesse, tutte le funzioni calcolabili coinciderebbero.

$\square$

Esercizio 9.20. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}.\ k \cdot x \in W_x\}$ non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, come nel caso della prova per K possiamo trovare un indice e tale che $\varphi_e = \{(e, e)\}$ e possiamo assumere che $e \neq 0$. Infatti, definiamo

$$g(e, x) = \begin{cases} e & \text{se } x = e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È calcolabile e quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $e, x \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(e)}(x) = g(e, x)$$

Per il II teorema di ricorsione esiste un e tale che $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ e quindi

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} e & \text{se } x = e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo assumere $e \neq 0$ perchè se fosse $e = 0$ è sufficiente considerare s' tale che $s'(0) = e_0$ (indice della funzione sempre vuota) e $s'(x) = s(x)$ altrimenti, a riapplicare lo stesso ragionamento. Il punto fisso certamente sarà $\neq 0$, dato che $\varphi_0 \neq \emptyset = \varphi_{e_0} = \varphi_{f(0)}$.

A questo punto vale che

- $e \in B$, dato che $e = 1 \cdot e \in W_e = \{e\}$;
- dato un qualsiasi indice $e' > e$ tale che $\varphi_e = \varphi_{e'}$ (esiste certamente dato che ci sono infiniti indici per una funzione calcolabile) si ha che $e' \notin B$, dato che non può esistere $k \in \mathbb{N}$ tale che $k \cdot e' \in W_{e'} = W_e = \{e\}$. Infatti per $k > 0$ si ha che $k \cdot e' > e$ e per $k = 0$, vale $k \cdot e' = 0 \neq e$ per costruzione.

Quindi B non saturato. $\square$

Esercizio 9.21. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} : \varphi_x(x) = x^2\}$ non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, come nel caso della prova per K possiamo trovare un indice e tale che $\varphi_e = \{(e, e^2)\}$. Si ha che $e \in C$, ma qualsiasi altro indice per la stessa funzione no.

$\square$

Esercizio 9.22. Enunciare il secondo teorema di ricorsione e utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice k take che $W_k = \{k * i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Si utilizza la funzione calcolabile

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se esiste } i \text{ tale che } y = x * i \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mu i.|x \cdot i - y|$$

quindi si usa il teorema smn ed il secondo teorema di ricorsione. $\square$

Esercizio 9.23. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che l'insieme $C = \{x \in \mathbb{N} : [0, x] \subseteq W_x\}$ non è saturato.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, come nel caso della prova per K possiamo trovare un indice e tale che $W_e = [0, e]$ e possiamo assumere che $e \neq 0$. Infatti, definiamo

$$g(e, x) = \begin{cases} e & \text{se } x \leqslant e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

È calcolabile e quindi per il teorema SMN, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $e, x \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(e)}(x) = g(e, x)$$

Per il II teorema di ricorsione esiste un e tale che $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ e quindi

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} e & \text{se } x \leqslant e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dato un qualsiasi indice $e' > e$ tale che $\varphi_e = \varphi_{e'}$ (esiste certamente dato che ci sono infiniti indici per una funzione calcolabile) si ha che $e' \notin C$, dato che $[0, e'] \nsubseteq [0, e] = W_{e'}$.

Quindi C non saturato. $\square$

Esercizio 9.24. Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{p_n} = \varphi_n$, dove p_n è l'n-mo numero primo.

Soluzione: Just observe that $f(x) = p_x$ is a computable total function and use the second recursion theorem. $\square$

Esercizio 9.25. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice x tale che $W_x = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, definiamo una funzione $g(x, y) = \mu z.|zx - y|$. Si nota che $dom(\lambda y.g(x, y) = \{kx \mid k \in \mathbb{N}\}$ e quindi si usa il teorema di ricorsione.

□

Esercizio 9.26. Enunciare il secondo teorema di ricorsione. Utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $W_e = \{e^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione: Il Secondo Teorema di Ricorsione asserisce che data una funzione calcolabile totale $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$.

Per quanto riguarda la domanda, si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} \log_x y & \text{se } y = x^n \text{ per qualche } n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mu n.\ |y - x^n|$$

È una funzione calcolabile e quindi per il teorema smn, si ha che esiste una funzione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che per ogni $x, y \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{s(x)}(y) = g(x, y)$$

Per il II teorema di ricorsione esiste un e tale che $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ e quindi

$$\varphi_e(y) = \begin{cases} \log_e y & \text{se } y = e^n \text{ per qualche } n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Pertanto $W_e = \{e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

□

Esercizio 9.27. Utilizzare il secondo teorema di ricorsione per dimostrare che non è saturato l'insieme

$$C = \{x \mid W_x = \mathbb{N} \ \wedge \ \varphi_x(0) = x\}.$$

Soluzione: Si consideri

$$g(x, y) = x$$

Per il teorema smn esiste $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che $g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$. Per il secondo teorema di ricorsione esiste e tale che $\varphi_e = \varphi_{s(e)}$. Pertanto $\varphi_e(y) = \varphi_{s(e)}(y) = e$. In particolare $\varphi_e(0) = e$ e chiaramente $W_e = \mathbb{N}$, quindi $e \in C$.

Prendendo $e' \neq e$ tale $\varphi_{e'} = \varphi_e$ si ha che $\varphi_{e'}(0) = \varphi_e(0) = e \neq e'$. Quindi $e' \notin C$.

Pertanto C non saturato.

□