ESERCIZI COMPUTABILITA’

Il presente documento è una raccolta di esercizi da me svolti durante l’anno accademico 2015/2016.

Li pubblico affinché possano essere utili anche ad altri come degli *‘spunti’* nel caso non sappiate quale possa essere la soluzione per un determinato esercizio.

Per una giusta comprensione dei formalismi usati e degli esercizi in generale bisogna studiare la teoria (consultate pure il documento “Appunti_totali_Computabilità” redatto Andrea Domenico Giuliano)

Ringrazio ancora i colleghi (Andrea Giuliano, Enrico Bottaro, Stefano Campese) con i quali ho studiato quel periodo perché molti degli esercizi qua presentati sono stati fatti insieme con loro.

Come studente che ha frequentato per 2 volte il corso e tentato l’esame più volte, il mio consiglio è di sforzarsi ad avere una buona base teorica, studiare in gruppo, fare tanti esercizi, fare le dimostrazioni richieste più volte, andare a ricevimento per i dubbi che avete. I prof sono spesso molto più disponibili di quel che pensate (soprattutto alla magistrale).

Catalin Copil

ES. 6 APPELLO 1/7/2016

Studiare la ricorsività dell'insieme B e $\overline{B}$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in W_x . \exists z \in W_x . (y < z) \wedge (\varphi_x(y) > \varphi_x(z))\}$$

Saturato? SI!! perché la x non influenza l'insieme

Riscrivo l'insieme: $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$

$$\mathcal{B} = \{F \in \mathcal{C}_e \mid \forall y \in dom(F) . \exists z \in dom(F) . (y < z) \wedge (F(y) > F(z))\}$$

Saturato $\longrightarrow$ Rice B non ricorsivo

Uso Rice-Shapiro per vedere se B è R.E.

$\emptyset$ sta in $\mathcal{B}$ perché per ogni elemento in cui è definita (nessuno) vale la proprietà richiesta

Considero la funzione identità: $id \notin \mathcal{B}$

ho che $\left.\begin{array}{l} \emptyset \subseteq id \\ \emptyset \in \mathcal{B} \\ id \notin \mathcal{B} \end{array}\right\}$ assurda $\longrightarrow$ quindi $\mathcal{B}$ non R.E.

Ma $\overline{B}$? È R.E.?

$\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \notin \mathcal{B}\}$ anche $\overline{B}$ è saturato, perché lo posso esprimere come classe di funzioni che non appartengono a $\mathcal{B}$

$$\overline{\mathcal{B}} = \{F \in \mathcal{C}_e \mid \exists y \in dom(F) . \forall z \in dom(F) . (y \geq z) \vee (F(x) \leq F(z))\}$$

basta che una delle due valga

Provo a trovare la funz. $sc_{\overline{B}}$

$$sc_{\overline{B}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{B}, x \notin B \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{1}(\mu w . \overline{sg} . H(x, w_1, w_2))$$

posso vedere l'insieme come le funzioni che hanno un punto minimo, vale sempre se ho un dominio non vuoto

se per un qualsiasi input termina dopo un qualsiasi numero di passi

ES. 5 APPELLO 1/7/2016

2° Teorema di Ricorsione:

Data una funz. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale esiste un $e \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}$$

Dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ t.c. $W_e = \{e^n : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow$ tutte le potenze di e

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{1}(\mu w. |x^n - y|) \text{ calcolabile}$$

quindi per smn $\exists$ una funz $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c.

$\varphi_{h(x)}(y) = g(x,y)$ per il 2° teorema di ric. ho un indice $e \in \mathbb{N}$

$\varphi_{h(e)} = \varphi_e$ quindi hanno anche lo stesso dominio

$$W_{h(e)} = \{e^n : n \in \mathbb{N}\} = W_e$$

ES. 1 Date f_1, f_2 calcolabili, con A ricorsiva, definiamo f come

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in A \\ f_2(x) & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

per scrivere la funzione, non posso usare $f_1(x) \cdot \chi_A$ perché f_1 potrebbe essere indefinito

essendo f_1, f_2 calcolabili, ho i programmi che le calcolano:

$f_1 = \varphi_{e_1}$ $f_2 = \varphi_{e_2}$ quindi ho

posso scrivere: $+ sg(\chi_A(x))$

$$f(x) = \left(\mu w\left(S(e_1, x, w_1, w_2) \wedge x \in A\right) \vee \left(S(e_2, x, w_1, w_2) \wedge x \notin A\right)\right)_1$$

quindi è calcolabile per A ricorsiva

Se invece A è R.E. ?? Allora la χ_A non è calcolabile:

ipotizzo $f_1 = 1$ $f_2 = 0$ ho

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} = \chi_A(x)$$ ma essa non è calcolabile!

APPELLO DEL 6/30/2015 15/7/2016

ES. 3 Studiare ricorsività di A, $\bar{A}$

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in E_x \cup W_x\}$ Saturato? NO

Allora voglio dimostrare che A non ricorsivo, riduco K ad A: $K \leq_m A$

Quindi cerco una funz. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in A$

$$g(x,y) = \begin{cases} \varphi_x(x) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\to$ praticamente è $\psi_U(x,x)$

$\Downarrow$

$\psi_U(x,x) \to$ calcolabile

Quindi per smn so che $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c.

$$\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$$

Se $x \in K \longrightarrow g(x,y) = \varphi_x(x)\downarrow$ perche $x \in K$

quindi $\varphi_{f(x)}(y) = \varphi_{f(x)}(f(x))\downarrow$ quindi $f(x) \in W_{f(x)}$

allora $f(x) \in A$

Se $x \notin K \longrightarrow g(x,y) = \uparrow$ quindi $\varphi_{f(x)}(y) = \uparrow$ $\forall y$ ho $W_{f(x)} = \emptyset = E_{f(x)}$

$f(x) \notin E_{f(x)} \cup W_{f(x)} = \emptyset \Longrightarrow f(x) \notin A$

OK, quindi $f(x)$ è funzione di riduzione da K ad A

Quindi A è non ricorsivo. Provo a dire che A è R.E.

$$sc_A(x) = \mathbb{1}(x \in E_x \vee x \in W_x) = \mathbb{1}(\mu w.\, S(x,(w)_1,x,(w)_2) \vee H(x,x,(w)_3))$$

calcolabile

Quindi A è R.E. $\longrightarrow$ Allora $\bar{A}$ è non ricorsivo e non R.E. altrimenti A sarebbe stato ricorsivo

15/7/2016

ES. Dato l'insieme dei Pari P, ridurre $\overline{K}$ ad A

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid P \subseteq W_x\}$

$\overline{K} \leq_m A$

Cerco una $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in \overline{K}$ sse $f(x) \in A$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{K} \text{ cioè } x \notin K \\ \uparrow & \text{se } x \notin \overline{K} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \neg H(x,x,t) \\ \uparrow & \text{se } H(x,x,t) \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}(\mu w. \overline{sg}(H(x,x,w))) \quad \text{calcolabile}$$

quindi per smn $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c.

$\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$

$x \in \overline{K} \longrightarrow g(x,y) = 1\downarrow \ \forall y \quad \varphi_{f(x)}(y) = 1 \ \forall y \longrightarrow W_{f(x)} = \mathbb{N} \supseteq P$

quindi $f(x) \in A$

$x \notin \overline{K} \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = \uparrow \ \forall y \quad W_{f(x)} = \emptyset$ quindi $P \nsubseteq W_{f(x)}$

quindi $f(x) \notin A$

$f(x)$ è funz. di riduzione.

ES. Studiare ricorsività di

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists K. \varphi_x(x+3K)\uparrow\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists K. (x+3K) \notin W_x\}$

Dimostrare che si può ridurre $\overline{K} \leq_m A$:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{K} \\ \uparrow & \text{se } x \notin \overline{K} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \neg H(x,x,t) \ \forall t \\ \uparrow & \text{se } H(x,x,t) \text{ per un } t \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}(\mu w. H(x,x,w)) \quad \text{calcolabile}$$

quindi per smn $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale, funz. di riduzione con $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$

$x \in \overline{K} \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = 1\downarrow \ \forall y$

$W_{f(x)} = \mathbb{N} \longrightarrow$ quindi $f(x) \notin A \longrightarrow f(x) \in \overline{A}$

$x \notin \overline{K} \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = \uparrow \ \forall y \quad W_{f(x)} = \emptyset \longrightarrow f(x) \in A \longrightarrow f(x) \notin \overline{A}$

Quindi ho ridotto $\overline{K}$ ad $\overline{A}$, $\overline{A}$ non ricorsivo, quindi A non ricorsivo.

A o $\bar{A}$ sono R.E. ?

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists K . \varphi_x(x+3K)\uparrow\}$

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall K . \varphi_x(x+3K)\downarrow\}$

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

$\longrightarrow$ non posso capire se c'è un elem. per il quale ~~non si~~ la funzione non è definita

non calcolabile

dimostro che con $K=0$ A diventa $\bar{K}$ che è non R.E.

se ci fosse $\exists K . \varphi_x(x+3K)\downarrow$ allora potrei anche scrivere la $sc_{\bar{A}}$ però a causa della non chiusura del $\forall$ allora la ~~sc~~ non è calcolabile.

APPELLO 25/1/2016 16/7/2016

ES. 4 Studiare la ricorsività di $B, \bar{B}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \wedge x/2 \notin E_x\}$ Non Saturato

$\bar{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 0 \vee x/2 \in E_x\}$

Riduco K a B: $K \leq_m B$

Cerco $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y) = \begin{cases} ??? & \text{se } x \in K \\ & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

ES. 5 Enunciare il 2° teorema di ricorsione e dim che esiste $x \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_x(y) = x+y$

II° T. di Ric: data una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. esiste un $e \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}$$

$\varphi_e(K) = \varphi_{f(e)}(K)$

Considero le funzioni $f(a) = K+a$, con $K \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$ prog. che la calcola: j: $\varphi_j(a) = K+a$

essendo $f(a)$ calc tot. $\exists\, e \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}$$

16/7/2016

Esercizi (Marta)

ES. 3 | 19 marzo 2009

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x| \geq 2\}$ Saturato $\longrightarrow$ x Rice è non-ricorsivo

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$

$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}_e \mid |dom(f)| \geq 2\}$

$\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x| < 2\} \longrightarrow \bar{\mathcal{A}} = \{f \in \mathcal{C}_e \mid |dom(f)| < 2\}$

$\emptyset \in \bar{\mathcal{A}}$

$id \notin \bar{\mathcal{A}}$ perché $id \in \mathcal{A}$

però $\emptyset \subseteq id$

ASSURDO di Rice-Shapiro

$\bar{A}$ non R.E.

Provo a scrivere la sc_A:

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

devo trovare 2 valori del dominio che sono diversi

$\Downarrow$

$$\mathbb{1}(\mu w.\ \overline{sg}(\chi_{H(x,w_1,w_2)}) + \overline{sg}(\chi_{H(x,w_3,w_4)}) + \overline{sg}(|w_1 - w_3|))$$

quindi A è R.E.

(4) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in E_x\}$ Non saturato

Riduco K a B: $K \leq_m B \longrightarrow$ Cerco $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\psi_U(x,x)) \text{ calcolabile}$$

Per smn ho $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Calc. totale t.c. $g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$

$x \in K \longrightarrow \varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = y \ \forall y$

Dato che $x \in K$ vuol dire che $\varphi_x(x)\downarrow$ allora anche $\varphi_{f(x)}(f(x))\downarrow$

quindi con $x = f(x)$ la funz è definita e darà y

$\varphi_{f(x)}(f(x)) = f(x) \longrightarrow$ quindi $f(x) \in E_{f(x)} \longrightarrow f(x) \in B$

$x \notin K$ abbiamo $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \ \forall y$ .... cvd.

$E_{f(x)} = \emptyset \longrightarrow$ quindi neanche $f(x) \in E_{f(x)} \to f(x) \notin B$

Continua $\longrightarrow$ 16/7/2016

Quindi B non ricorsivo $\longrightarrow$ anche $\overline{B}$ non ricorsivo

B è R.E.??

$$sc_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ \uparrow & \text{se } x \notin B \end{cases} = \mathbb{1}\left[\mu w.\, \overline{sg}\left(\cancel{S(x, w_1, x, w_2)}\ \chi_{S(x, w_1, x, w_2)}\right)\right]$$

calcolabile perché definita per minimizz. e composizione.

ok, B è R.E. $\longrightarrow$ $\overline{B}$ quindi è non R.E.

---

(3) 2 aprile 2009

Studiare l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in W_x \cap E_x\}$

Non saturato. Riduco K

$$g(x,y) = \begin{cases} \cancel{x} & x \in K \\ \uparrow & x \notin K \end{cases} = \cancel{x \cdot 1}(\Psi_U(x,x)) \quad \text{calcolabile}$$

$\exists\, f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c. $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$

se $x \in K$ $\quad \varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \cancel{x}\, y \ \forall y$

Allora anche per $y = f(x)$ $\quad \varphi_{f(x)}(f(x))\downarrow \ \rightarrow f(x) \in W_{f(x)}$

$\varphi_{f(x)}(y) = \cancel{x}\, y$ quindi $\longrightarrow \varphi_{f(x)}(f(x)) = f(x) \longrightarrow f(x) \in E_{f(x)}$

$f(x) \in A$

se $x \notin K$

$\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \ \forall y \longrightarrow E_{f(x)} = W_{f(x)} = \emptyset \quad f(x) \notin W_{f(x)} \cap E_{f(x)}$

$f(x) \notin A$

A non ricorsivo, $\overline{A}$ non ricorsivo

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w.\, \overline{sg}\left(\chi_{H(x,x,w_1)}\right) + \overline{sg}\left(\chi_{S(x,w_2,x,w_3)}\right)\right) \quad \text{calcolabile}$$

ES. (4) appello 2 aprile 2009

$V = \{ x \in \mathbb{N} \mid W_x \text{ infinito} \}$ Saturato $\longrightarrow$ non ricorsivo

$V = \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{V} \}$

$\mathcal{V} = \{ f \in \mathcal{C}_e \mid dom(f) \text{ infinito} \}$

È R.E.?

Ipotizzo R.E. $\longrightarrow$ uso Rice-Shapiro: $id \in \mathcal{V}$

ma idmod NO

$$idmod(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 10 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = x \cdot \mathbb{1}(\mu w.(x-10)) \text{ calcolabile finita.}$$

$$\left.\begin{array}{l} idmod \notin \mathcal{V} \\ idmod \subseteq id \\ id \in \mathcal{V} \end{array}\right\} \text{ASSURDO per Rice-Shapiro} \longrightarrow V \text{ non R.E.}$$

Per $\overline{V}$ dimostro che $\emptyset \in \overline{\mathcal{V}}$

ho $id \notin \overline{\mathcal{V}}$ $\longrightarrow$ essendo $\emptyset \subseteq id \Rightarrow$ ASSURDO, quindi non R.E.

APPELLO 25/1/2016

(1) Dim che $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo se e solo se A e $\overline{A}$ sono R.E.

Cioè abbiamo χ_A calcolabile sse sc_A e $sc_{\overline{A}}$ calcolabili

Dim ($\Rightarrow$) Ho χ_A quindi scrivo le funz. sc.

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{se } x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w. \overline{sg}(\chi_A(x)))$$

$$sc_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{A} \\ \uparrow & \text{se } x \notin \overline{A} \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w. \chi_A(x))$$

Dim ($\Leftarrow$) Ho che sc_A e $sc_{\overline{A}}$ devo fare la χ

essendo sc_A e $sc_{\overline{A}}$ calcolabili, ho dei programmi che la calcolano: $sc_A = \varphi_{e_1}$ $sc_{\overline{A}} = \varphi_{e_2}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Se sc_A vale $\rightarrow \exists t. H(e_1, x, t)$ vale

restituisce $\chi_{H(e_1,x,t)}$ $\longrightarrow \chi_A(x) = \chi_{H(e_1,x,t)}$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists t. H(e_1, x, t) \\ 0 & \text{se } \exists t. H(e_2, x, t) \end{cases}$$

(ipotizzo che sc_A restituisce 0 se vale)

$$= \left(\mu w. \left(\chi_{s(e_1, x, w_1, w_2)} \vee \overline{sg}\left(\chi_{s(e_2, x, w_1, w_2)} \right) \right) \right)_1$$

cvd

ES. 2 Definire una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non calc. t.c.

$f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che una tale funz. non esiste.

$f(x) = x$ per infiniti $x \in \mathbb{N}$

Atteggiamento sbagliato, risolto più avanti

↳ equivale a $id(x)$ che è calcolabile

Assumo che $f(x)$ esiste $\to$ $f(x) = id(x)$ allora id sarebbe non calc. tot

quindi tale $f(x)$ non esiste! ← ASSURDO!

Soluzione alternativa:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \overline{K} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= x \cdot \chi_{\overline{K}}(x)$$

però non ho modo di capire se $x \in \overline{K}$, quindi $f(x)$ non calcolabile, totale però

oppure con K

ES. 3 Studiare ricorsività di $A = \{x \mid \varphi_x \text{ strettamente crescente}\}$

Saturato $\to$ quindi A non ricorsivo, è RE?

Funz. strett. crescente: $\forall y, z \in dom(f), y < z \Rightarrow f(y) < f(z)$

$\overline{A} = \{x \mid \varphi_x \text{ non strett. crescente}\} \longrightarrow \exists y, z \in dom(f), y < z \Rightarrow f(y) \geq f(z)$

$$sc_{\overline{A}} = \mu w. \left(S(x, y, w_1, t) + \overline{sg}(S(x, z, w_2, t)) + (y - z) + (w_2 - w_1) \right)$$

$\overline{A}$ R.E.

A non R.E.

Riscrivo $\mathcal{T} = \{ f \in \mathcal{C} \mid \exists y, z \in \mathbb{N} \text{ t.c. } y < z \wedge f(y) \geq f(z) \}$

Variante: dimostro con Rice-Shapiro che A non R.E.

$\emptyset \in A$

$id \notin$

ES. 4 Studiare $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \wedge x/2 \notin E_x\}$ Non saturato

$\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 0 \vee x/2 \in E_x\}$

Provo a scrivere la sc_B:

$$sc_B = \mathbb{1}(\mu w.\ (1 \dot{-} x) + S(x, w, x/2, w))$$

$$= \mathbb{1}(\mu w.\ (1 \dot{-} x) + \chi_{S(x, w_1, x/2, w_2)}))$$

Provo a scrivere $sc_{\overline{B}}$:

$$sc_{\overline{B}} = \mathbb{1}(\mu w.\ x * \chi_{S(x, w_1, x/2, w_2)})$$

la moltiplicazione utile per fare la OR, perché se uno dei 2 va a zero, manda tutto a zero.

Quindi B e $\overline{B}$ sono R.E.

Allora B è ricorsivo, posso scrivere la funz. caratteristica di B

Modifico $sc_{\overline{B}}$ tale che:

$$sc_{\overline{B}} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \overline{B} \\ \uparrow & \text{altrimenti } x \notin \overline{B} \end{cases}$$

Ho $\varphi_{e_1} = sc_B = 1$ sse $x \in B$

$\varphi_{e_2} = sc_{\overline{B}} = 0$ sse $x \in \overline{B}$

$$\chi_B(x) = \left(\mu w.\ \overline{sg}\, \chi_{S(e_1, \cancel{x}, w_2, w_3)} * \overline{sg}\, \chi_{S(e_2, \cancel{x}, w_2, w_3)}\right)_2$$

18/7/2016

ES. 5 2° T. di Ric: data una funz. $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot.

$\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{h(e)}$

Dimostrare che $\exists x \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_x(y) = x+y$

considero

$$g(x,y) = x+y \leftarrow \text{calcolabile}$$

Quindi per smn ho $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$

Per il 2° T. di Ricorsione ho un $x \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_{f(x)}(y) = \varphi_x(y) = x+y \quad \text{cvd.}$$

APPELLO del 20/6/2013

ES. 2

Esiste $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non calc. t.c. per ogni altra funz. non calc. $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ sia calcolabile?

Dare un esempio se esiste o dimostrare che non esiste

Definisco $h(x) = (f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Dato che non esistono gli indici e_1, e_2 t.c. $\varphi_{e_1} = f$ e $\varphi_{e_2} = g$

non può esistere l'indice del programma che calcola la moltiplicazione tra le due funzioni

$$h(x) = \left(\mu w. \overline{sg}\, \chi_{S(e_1, x, w_1, w_2)}\right)_1 \cdot \left(\mu w. \overline{sg}\, \chi_{S(e_2, x, w_1, w_2)}\right)_1$$

ES. 3 Sia $\emptyset$ l'indefinita

$A = \{x \mid \varphi_x = \emptyset\} = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\quad \mathcal{A} = \{F \in \mathcal{C} \mid F = \emptyset\}$ saturato

A e $\bar{A}$ non ricorsivi

Vedo se A è R.E.:

$$\left.\begin{array}{l} \emptyset \in \mathcal{A} \\ id \notin \mathcal{A} \\ \emptyset \in id \end{array}\right\} \text{ASSURDO} \longrightarrow A \text{ non R.E.}$$

$\bar{\mathcal{A}} = \{F \in \mathcal{C} \mid F \neq \emptyset\}$

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{se } x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu w. \overline{sg}\, H(x, w_1, w_2)\right)$$

$\overline{sg}\, \chi_{H(x, w_1, w_2)}$

quindi A è R.E.

ES. ④ Studiare $B = \{ x+y \mid x,y \in \mathbb{N} \wedge \varphi_x(y)\uparrow \}$

riscrivo B: come il caso $x=y$

$B' = \{ 2x \mid x \in \mathbb{N},\ \varphi_x(x)\uparrow \}$ e $B' \subseteq B$

simile a $\overline{K}$

Riduco $\overline{K}$: $g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & \text{se } x \in \overline{K} = x \notin K \\ 1 & \text{se } x \notin \overline{K} = \end{cases}$

Allora per smn $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. ~~$x \in \overline{K}$ se $f(x) \in B'$~~

$\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$

$x \in \overline{K} \longrightarrow \varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow\ \forall y$

quindi anche $\varphi_{f(x)}\ f(x)\uparrow \longrightarrow f(x) \in B'$

$x \notin \overline{K} \longrightarrow \varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = 1 \downarrow\ \forall y$ quindi anche $\varphi_{f(x)}\ f(x)\downarrow$

$\longrightarrow f(x) \notin \overline{K}$

$\circ K \to$ Quindi B' non ricorsivo.

Scrivo la $sc_{B'} \to$ quindi B' è R.E.

⑤ 2° T. di Ric. - Dimostrare che $\forall f$ non totale, ma indef. in un punto K, ammette un punto fisso, esiste $x \neq K$ tale che $\varphi_x = \varphi_{f(x)}$

$dom(f) = \mathbb{N} \setminus \{K\}$

Definisco g come

$$g(x,y) = \begin{cases} \varphi_x(y) & \text{se } y \neq K \\ \uparrow & \text{se } y = K \end{cases} = \left(\mu w.\ \chi_{S(x,y,w_1,w_2)}\right)_1$$

calcolabile

per smn ho una $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c.

$\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) \longrightarrow$ essendo f calc. tot allora ho per il 2° T. Ric. un $e \in \mathbb{N}$ t.c.

$\varphi_{f(e)}(y) = \varphi_e(y)$

APPELLO 16/7/2015 17/7/2016

ES. 1 Dim che se un predicato $P(x,\vec{y})$ é semi-decidibile allora $\exists x.\ P(x,\vec{y})$ è semidecidibile.

(Teorema Proiezione)

Per il T. di Struttura ho $P(x,\vec{y})$ semidec. sse esiste un Q decidib. tale che $P(x,\vec{y}) \equiv \exists t.\ Q(t,x,\vec{y})$ vale.

~~Scrivo $P(x,\vec{y})$ come $P'(\vec{y}) = \exists x.\ \exists t.\ Q(t,x,\vec{y}) = \exists w.\ Q(w_1,w_2,\vec{y})$ con Q decidibile quindi per il T. di Struttura ho $P'(x)$ semidec~~

Definisco $P'(\vec{y})$ come

$P'(\vec{y}) = \exists x.\ P(x,\vec{y})$

Per il teorema di struttura ho $P(x,\vec{y}) = \exists t.\ Q(t,x,\vec{y})$ con Q decidib.

Quindi $P'(\vec{y}) = \exists x.\ P(x,\vec{y}) = \exists x.\ \exists t.\ Q(t,x,\vec{y}) = \exists w.\ Q(w,\vec{y})$

quindi per t. di struttura $P'(\vec{y}) = \exists w.\ Q(w,\vec{y})$ con $P'(\vec{y})$ semi-decidib. perché Q decidibile.

Vale il contrario? NO, controesempio:

$P(x,y) = \exists 15.\ P(15,y)$ → FALSO

voglio $x+y=5$

Se ho un predicato $P(x,y)$ e io fisso x ad un valore che non va bene allora $\exists x.\ P(x,y)$ sarà sempre falso, perché ho fissato un valore x che non va bene, insomma è decidibile (non semi-decidibile)

Esempio: $P(x,y) = x+y==5 \longrightarrow P'(x,y) = \exists x.\ P(x,y)$

Se fisso $x=15$ $\exists 15.\ P(15,y) \longrightarrow$ sempre falsa.

ES. 2 Dim che A è R.E. sse $A \leq_m K$

Dimostro la doppia implicazione ricavando la funz. di riduzione dalle funz. semi-carat. (Soluzione scritta

ES. 3 Studiare $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in E_x, \exists z \in W_x.\ x = y * z\}$

Non saturato.

Provo a scrivere la sc_A:

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w_1.\ S(x, w_1, y, w_2) \wedge H(x, z, w_3) \wedge (x = y * z))$$

$$\mathbb{1}(\mu w.\ \overline{sg}\,\chi_{S(x, w_1, \underset{y}{w_2}, w_3)} + \overline{sg}\,\chi_{H(x, \underset{z}{w_4}, w_3)} + |w_2 * w_4 \dot{-} x|) \quad \text{calcolabile}$$

o meglio

$$\mathbb{1}(\mu w.\ \overline{sg}\,\chi_{S(x, w_1, w_2, w_3)} + |w_1 * w_2 - x|)$$

A è R.E

Dimostro che A è non ricorsivo: $K \leq_m A$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = \mathbb{1}(\psi_U(x,x))$$

Per smn $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$

$x \in K \longrightarrow \varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = 1 \downarrow \forall y$ anche per $\varphi_{f(x)}\ f(x) = 1$

$f(x) \in W_{f(x)}$, $1 \in E_{f(x)}$ $\varphi_1(1) = 1 \downarrow$ ok $f(x) \in A$

$x \notin K \longrightarrow \varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \forall y$

Allora $W_{f(x)} = \emptyset = E_{f(x)} \longrightarrow$ non esiste nessun x, z t.c. $x = y * z$

quindi $f(x) \notin A$

Allora f è funzione di riduzione $\longrightarrow$ A non ricorsivo $\longrightarrow$ $\bar{A}$ non ricorsivo

ES. 4 APPELLO 16/7/2015 17/7/2015
Studiare B

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid |W_x \setminus E_x| \geq 2\}$ Saturato $\rightarrow$ Non ricorsivo

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$

$\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C} \mid |dom(f) \setminus cod(f)| \geq 2\}$

$\overline{\mathcal{B}} = \{f \in \mathcal{C} \mid |dom(f) - cod(f)| < 2\}$ anche $\overline{B}$ saturato.

Considero $\overline{B}$ $\rightarrow$ per Rice-Shapiro non RE, infatti

$\emptyset \in \overline{B}$ $\longrightarrow$ perché $W_\emptyset = E_\emptyset = \emptyset\{\}$

$z \notin \overline{B}$ $\longrightarrow$ perché $W_z = \mathbb{N}$, $E_z = 0$ $\rightarrow$ $|W_z \setminus E_z| = \mathbb{N}$

$\emptyset \subseteq z$ $\Longrightarrow$ Assurdo, quindi $\overline{B}$ non R.E.

Considero B: è R.E.?

trovo una funzione finitoria di z che non appartiene in $\mathcal{B}$

$z \in \mathcal{B}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \Bigg\} \rightarrow W_{f(x)} = E_{f(x)} = \{0\}$$

$\left.\begin{array}{l} f \subseteq z \\ f \notin B \end{array}\right\}$ ASSURDO $\longrightarrow$ B non R.E.

ES. 5 2 T. di Ric. Data una funz. $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calc. totale, $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{h(e)}$

Dim. che esiste un indice x t.c. $W_x = \{Kx \mid K \in \mathbb{N}\}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & y = Kx \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases} = \mu(\overset{\text{calc.}}{\cancel{\max}\ \overline{sg}\ \chi_{y=Kx}})$$

per smn ho $f(x): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \downarrow \forall Kx$ $W_{f(x)}$

Quindi per il 2° T. di Ric. $\varphi_{f(e)}(y) = \varphi_e(y) \longrightarrow e = f(e) = Ke$ per $K \in \mathbb{N}$

Quindi $W_e = W_{f(e)} = \{Ke \mid K \in \mathbb{N}\}$

APPELLO DEL 30/6/2015

ES. 2 Significato di $A \leq_m B$

~~A Esiste una~~ Vuol dire che A è più semplice di B.

Esiste una $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in A$ sse $f(x) \in B$
f, funz. di riduzione!

È vero che $\forall A$, $A \leq_m A \cup \{0\}$ vale??

2 casi: - $0 \in A \to A \cup \{0\} = A \to A \leq_m A$ possibile funz di riduz. = id

Se invece

- $0 \notin A$: $A \cup \{0\} \neq A \to A \cup \{0\} = B$ $|B| > |A|$

Dato $A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ non può esistere una funzione totale $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sse $f(x) \in \mathbb{N}$

Quindi $A \neq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è cond. sufficiente e necessaria per far funzionare la riduzione

(vedi correz. del 30/6)

ES. 5 2° t di Ric: data $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale, $\exists\, e \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_e = \varphi_{h(e)}$$

Dim che $C = \{x \in \mathbb{N} \mid [0:x] \subseteq W_x\}$ non è saturato

Considero e_1 programma $\in C \to$ quindi $[0:e_1] \subseteq W_{e_1}$

Esiste per il 2° T. di Ric $e_2 \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{e_1} = \varphi_{e_2}$ calcola la stessa funz.

Ma $[0:e_2] \neq [0:e_1]$
e ho che $[0:e_2] \nsubseteq W_{e_1} \to$ quindi ~~non~~ anche se calcolano la stessa funzione non hanno lo stesso dominio $\to$ assurdo

vuol dire che C non è saturato

... da sistemare.

APPELLO 22/3/2013 17/7/2016

ES. 5 2 T. di Ricorsione

Dim. che se C è un insieme tale che $C \leq_m \overline{C}$ allora C non è saturato

Se ho $C \leq_m \overline{C}$ significa che ho $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c.

$x \in C$ sse $f(x) \in \overline{C}$

Per il 2° T. di Ric $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$ dove f è la funz. di riduzione

Quindi e ed $f(e)$ calcolano la stessa funzione

Se ipotizziamo C saturato ed $e \in C$ allora anche $f(e) \in C$

ma questo non è vero perché $f(e) \in \overline{C}$ essendo f funz. di rid.

$\Downarrow$

ASSURDO $\to$ quindi C non è saturato

APPELLO 25/8/2014

ES. 6 Dim che esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{n+1}$ ed esiste anche $m \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_m \neq \varphi_{m+1}$

$s(x)$ calc. tot. $\xRightarrow{\text{quindi}} \varphi_n = \varphi_{s(n)} = \varphi_{n+1}$

Ho $s(x)$ funz. tot. calc., considero che $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c.

$\varphi_n = \varphi_{s(n)} = \varphi_{s(n+1)}$ ok!

Considero

$$g(x,y) = \begin{cases} \varphi_{x+1}(y) & \text{se } \varphi_{x+1}(y)\downarrow \\ \uparrow & \text{se } \varphi_{x+1}(y)\uparrow \end{cases}$$

calcolabile $(\mu w. \overline{sg}\, \chi_{S(x+1,y,w_1,w_2)})_1 \to$ prendo il risultato.

per smn $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$

Per il 2° T. di Ric. $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{f(e)} = \varphi_e \Longrightarrow$ ma

Ho quindi $\varphi_{f(x)}(y) = \varphi_x(y) = \varphi_{x+1}(y)$ ok!!

18/7/2016

TEOREMA DI RICE:

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$, se $A \neq \emptyset$, $A \neq \mathbb{N}$ e A saturato allora A è non ricorsivo

<u>Dim:</u> Riduco $K \leq_m A$

Quindi devo trovare una $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot t.c. $x \in K$ sse $F(x) \in A$

Considero l'indice e_1 t.c. $e_1 \in A$, ed $e_2 \notin A$ (posso farlo perchè A non vuote e non tutt. $\mathbb{N}$)

Considero $g(x,y)$ come segue:

$$g(x,y) = \begin{cases} \varphi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \varphi_{e_2}(y) & \text{se } x \notin K \end{cases} = \begin{cases} \varphi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\varphi_{e_1}(x) \cdot \mathbb{1}(\Psi_U(x,x)) \quad \text{calcolabile}$$

Quindi per smn ho $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $\varphi_{F(x)}(y) = g(x,y)$

se $x \in K \longrightarrow \varphi_{F(x)}(y) = g(x,y) = \varphi_{e_1}(y) \ \forall y$ ~~ho che anche per y=f(x)~~

quindi $\varphi_{F(x)}(y) = \varphi_{e_1}(y)$ quindi calcolano la stessa funzione.

essendo A saturato se $e_1 \in A$ allora anche $F(x) \in A$

se $x \notin K \longrightarrow \varphi_{F(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \ \forall y$

$\perp \varphi_{e_2}(y)$ Sapendo che A è saturato se $e_2 \notin A$ allora neanche $F(x) \notin A$

OK, F è funz. di riduzione.

Caso $e_1 \notin A$ ed $e_2 \in A$, dimostrazione analoga a quella di prima

TEOREMA DI STRUTTURA:

Dato $P(\vec{x}) \in \mathbb{N}^k$, è un predicato semi-decidibile sse $\exists Q(t,\vec{x})$ decidibile t.c. $P(\vec{x}) = \exists t. Q(t,\vec{x})$

Dim ($\Leftarrow$) Ho $P(\vec{x}) = \exists t. Q(t,\vec{x})$ con $Q(t,\vec{x})$ decidibile

Scrivo la funz. semi-caratteristica $sc_P(x)$:

$$sc_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in P \\ \uparrow & \text{se } x \notin P \end{cases} = \mathbb{1}(\mu t. \overline{sg}\, \chi_{Q(t,\vec{x})}) \quad \text{calcolabile} \Longrightarrow P(\vec{x}) \text{ semi-decidib.}$$

Dim ($\Rightarrow$) Ho $P(x)$ semi-decidib., quindi esiste $sc_P(x) = \begin{cases} 1 & \text{con } x \in P \\ \uparrow & \text{con } x \notin P \end{cases}$ calcolabile

Se calcolabile $\to$ esiste $e \in \mathbb{N}$ t.c. $sc_P(x) = \varphi_e(x) = \downarrow$ se $x \in P$ $\quad P(\vec{x}) = \exists t. Q(t,\vec{x})$

~~$\varphi_e(x)\downarrow$ sse $x \in P$, $x \in P(\vec{x})$~~ vale sse $sc_P(\vec{x}) = 1$, sse $\varphi_e(\vec{x})\downarrow$ cioè sse

~~$H(e,x,t)$ sse~~ $\exists t. H(e,\vec{x},t)$ $\quad$ H decidibile $\to Q(t,\vec{x}) = H(e,\vec{x},t)$

APPELLO

RICORSIVITÀ DI $B = \{x \in \mathbb{N} \mid z*(x+1) \in W_x \cap E_x \ \forall z \in \mathbb{N}\}$?

B non saturato

Riduco $K \leq B$, cerco $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\varphi_v(x,x)) \text{ calcolabile}$$

$\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$ x smn

Se $x \in K$: $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = y \ \forall y$

vale anche $\varphi_{f(x)} f(x) = f(x)$

$\Rightarrow \varphi_{f(x)}(y) = id(y)$ ho quindi $W_{f(x)} = W_{id} = E_{id} = \mathbb{N}$

ok, $f(x) \in B$

se $x \notin K$: $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y) = \uparrow \ \forall y \to E_{f(x)} = W_{f(x)} = \emptyset \leftarrow f(x)$ non ci sta

quindi $f(x) \notin B$

Considero $\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z \in \mathbb{N}.\ z*(x+1) \notin W_x \cap E_x\}$

$$sc_{\overline{B}} = \mathbb{1}(\mu w_1 . \overline{sg}(H(x, w_1, t) \wedge S(x, x, w_1, t)) \wedge (z*(x+1) = w_2))$$

$$= \mathbb{1}(\mu w_1 . \overline{sg}(H(x, w_1, w_2) \wedge S(x, w_3, w_1, w_4)) \wedge (x+1)*z = w_1)$$

TEOREMA DI PROIEZIONE 18/7/2016

Dato un predicato $P(x,\vec{y})$ semidecidibile, allora $\exists x. P(x,\vec{y})$ è semi-decidibile

Dim: essendo $P(x,\vec{y})$ semi-decidibile, per il teorema di struttura $\exists Q(t,x,\vec{y})$ ~~t.c.~~ decidibile t.c.:

$$P(x,\vec{y}) = \exists t. Q(t,x,\vec{y}) \text{ vale}$$

Considero $P'(\vec{y}) = \exists x. P(x,\vec{y}) = \exists x. \exists t. Q(t,x,\vec{y}) = \exists w. Q(w_1,w_2,\vec{y}) = \exists w. Q(w,\vec{y})$

Quindi $P'(\vec{y})$ è semi-decidibile per il teorema di struttura

decidibile

Quindi anche $\exists x. P(x,\vec{y})$ è semi decidib. perché è nell'equazione ~~AA~~ sopra.

ES 5 appello 1/7/2016

Dim che esiste $e \in \mathbb{N}$ t.c. $W_e = \{e^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y = x^n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = 1(\mu n. |x^n - y|) \quad \text{calcolabile.}$$

Per smn ho che $\varphi_{f(x)}(y) = g(x,y)$ con $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale.

quindi $\exists e$ t.c. $\varphi_{f(e)}(y) = \varphi_e(y)$ stessa funzione $\to$ stesso dominio.

Dominio di $f(e) \to$ tutti i casi in cui $y = x^n$

$W_{f(e)} = \{e^n \mid n \in \mathbb{N}\} = W_e$

APPELLO COMPUTABILITÀ 5/4/2013 8/8/2016

ES 1 Definire $A \leq_m B$ e dimostrare che comunque $A \subseteq \mathbb{N}$ vale A r.e. sse $A \leq_m K$

A si riduce a B significa che esiste una funzione calc. totale $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $x \in A$ sse $f(x) \in B$

Dimostrare che A è R.E $\underset{sse}{\Leftrightarrow}$ $A \leq_m K$

Dim: A R.E. $\Rightarrow A \leq_m K$

se A è R.E. allora esiste $sc_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \uparrow & x \notin A \end{cases}$

idea: utilizzo sc_A per costruire la funz. di riduzione $\to$ non è totale

Dim: se $A \leq_m K \to$ allora ho una funz. di riduzione calc. tot.

$x \in A \Rightarrow f(x) \in K \to f(x)\downarrow$

$$sc_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrim} \end{cases} = \mathbb{1}(f(x))$$

~~se $f(x)\downarrow$ allora sta in K, altrimenti $\uparrow$~~

$$\overset{!}{=} \mathbb{1}(f(x) \in K) = \mathbb{1}(\Psi(e, e))$$

e indice di f

ES 3 Studiare ricorsività di

$B = \{x \mid K \cdot (x+1) \in W_x \cap E_x \text{ per ogni } K \in \mathbb{N}\}$ Non SATURATO

Riduco K a B: $K \leq_m B$. Trovo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y) = \begin{cases} ??? & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases}$$

ES 2 Numerabile: un insieme si dice numerabile se è possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra un numero $\mathbb{N}$ e un elemento dell'insieme $\longrightarrow$ funz. biunivoca tra $\mathbb{N}$ e l'insieme

Posso considerare le ~~corrispond~~ funzioni in base a dove iniziano gli uni:

f: 0000000000 ... 0001111111 1
x: 0 1 2 3 4 ... i ... i ...

con lo 0 indico le funz. ~~con~~ sempre a zero
con il 1 indico le funz. sempre a uno
con 2 indico le funz dove gli uni iniziano dall'elemento $f(1)$
con 3 indico le funz. dove gli uni iniziano da $f(2)$
⋮
e così via

indico con K le funz. che valgono 0 per $x = 0 \dots K-1$ e valgono 1 per $x = K-1 \dots \infty$

ES. 3 $\quad B = \{x \mid K\cdot(x+1) \in W_x \cap E_x \text{ per ogni } K \in \mathbb{N}\}$

Riduzione $K \leq B$

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\overline{B} = \{x \mid \exists K.\ K\cdot(x+1) \notin W_x \cap E_x\}$$

$$sc_{\overline{B}} = \mathbb{1}(\mu K.\ sg(K(x+1) \notin W_x \text{ and } K(x+1) \notin E_x))$$

$$= \mathbb{1}(\mu K.\ sg(H(x, K(x+1), t) + S(x, t, K(x+1), t)))$$

$$= \mathbb{1}(\mu K.\ (H(x, K(x+1), t) + S(x, y, K(x+1), t) \dot{-} 1))$$

$\dot{-}1$

più o meno è così

ES. 4 $\quad$ K-bounded $\longrightarrow$ c'è un massimo al codominio: K

$A_K = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ K-bounded}\}$ saturato.

$A_K = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}_K\}$ $\quad \mathcal{A}_K = \{f \subseteq \mathcal{C} \mid \forall x \in dom(f).\ f(x) < K\}$

Considero $K = 10 \longrightarrow A_{10}$

$\emptyset \in A_{10}$, $id \notin A_{10}$, ma $\emptyset \subseteq id \Longrightarrow A$ non R.E. per Rice-Shapiro

Considero $\overline{A}_K = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ non è K-bounded}\}$

$= \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \overline{\mathcal{A}}_K\}$ $\quad \overline{\mathcal{A}}_K = \{f \subseteq \mathcal{C} \mid \exists x \in dom(f).\ f(x) \geq K\}$

provo a scrivere $sc_{\overline{A}K}$:

$$sc_{\overline{A}K} = \mathbb{1}(\mu z.\ sg(S(x, y, z, t) + (K \dot{-} z)))$$

ES. 5 2° T. di Ricorsione. (Appello 5/4/2013) 10/8/2016

Data una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale esiste un $e \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}$$

Dimostrare che esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_e(y) = \begin{cases} y+e & \text{se } y \text{ multiplo di } e \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{se } y \text{ multiplo di } x \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases} = x+y \cdot \mathbb{1}(\mu z. |y - zx|)$$

$\downarrow$

x smn ho $g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$ con $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale

X 2° T. di Ric. ho un indice $e \in \mathbb{N}$ t.c.

$\varphi_e = \varphi_{f(e)}$ quindi $\exists\ \varphi_e(y)$ come richiesto.

Appello 2/4/2009

ES. 3: Studiare $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in W_x \cap E_x\}$ Non saturato.

Riduco K ad A: $K \leq A \longrightarrow$ trovo una funz. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in A$

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\Psi(x,x)) \quad \text{calcolabile}$$

$\downarrow$

per smn esiste $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c. $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$

- $x \in K$: $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = y \quad \forall x$

  essendo $x \in K \to \varphi_{s(x)} s(x)$ è definita $= s(x)$ $\quad s(x) \in W_{s(x)}$, $s(x) \in E_{s(x)} \Rightarrow s(x) \in A$

- $x \notin K$: $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = \uparrow \quad \forall y \Longrightarrow s(x) \notin W_{s(x)} \cap E_{s(x)} \Longrightarrow s(x) \notin A$

s: funzione di riduzione $\longrightarrow$ A non ricorsivo

A è R.E.? Provo a scrivere la sc_A

$$sc_A = \mathbb{1}(\mu t.\ \overline{sg}\, H(x,x,t_1) + \overline{sg}\, S(x,y,x,t_2))$$

Quindi ho $\overline{A}$ non R.E. perché A non ricorsivo

ES. 2 Appello 19/3/2010

È calcolabile la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } \forall y \leq x \ \ \varphi_y \text{ totale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

potrei definire per minimizzazione e in questo modo scorrere tutti gli y fino a x e valutare per ogni y se è totale o meno. ???

vedere soluzione su pdf di Agostino

Appello 11/7/2011

ES. 2 f non calcolabile, g non calcolabile

può essere $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ calcolabile? NO, Una funzione espressa come somma di funzioni per essere calcolabile deve avere gli "addendi calcolabili"

Non calcolabile per definizione di composizione generalizzata ???

ES 3 Studiare $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(x)\downarrow \wedge \varphi_x(x) < x+1\}$ Non saturato

Riduco K ad A

$$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\varphi(x,x))$$

x smn ho

$$g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$$

- $x \in K \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = y \quad \forall y$

  $\varphi_{f(x)}(f(x))\downarrow f(x) \quad < f(x)+1 \quad$ ok $\longrightarrow f(x) \in A$

- $x \notin K \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = \uparrow \quad \forall y \qquad f(x) \notin A$

f è funz. di riduzione $\longrightarrow$ A non ricorsivo.

Scrivo $sc_A = \mathbb{1}(\mu z. \cancel{sg\, H(x,x,t)} \ \overline{sg}\, S(x,x,z,t) + (z \dot{-} x+1))$

A è R.E. $\longrightarrow \overline{A}$ non R.E.

Appello 11/7/2011 11/8/2016

ES. 6 Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{N}$ definisco $2X = \{2x \mid x \in X\}$

Studiare $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2W_x \subseteq E_x\}$ saturato

$B = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ $\mathcal{B} = \{F \subseteq \mathcal{C} \mid$

ES. 9 Definire l'insieme delle PR

La classe delle funzioni primitive ricorsive è la minima classe che contiene le funzioni base:

- zero $z: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $z(x) = 0$
- successore $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $s(x) = x+1$
- proiezione $U: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ $U_i^k(\vec{x}) = x_i$

ed è chiusa rispetto alle operazioni:

* composizione generalizzata: date le funzioni $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ e $g_1, \dots, g_n: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ definisco la funzione $h: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

$$h(\vec{x}) = f(g_1(\vec{x}) \dots g_n(\vec{x}))$$

$h(\vec{x})\downarrow$ se e solo se tutte le $g(\vec{x})\downarrow$ e $f(g_1(\vec{x}) \dots g_n(\vec{x}))\downarrow$

se f e tutte le $g(\vec{x})$ sono calcolabili $\Longrightarrow$ anche $h(\vec{x})$ calcolabile

* ricorsione primitiva: date le funzioni $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ definisco $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ come

$$h = \begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

$$\chi_p = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } x \text{ è dispari} \end{cases}$$

definisco per ricorsione primitiva:

$$h \begin{cases} h(0) = 1 \\ h(1) = 0 \\ h(y+2) = h(y) \end{cases} \qquad \chi_p = h$$

$h(0) = f(0)$
$h(1) = f(1)$
$h(y+2) = g(y) = h(y)$

ES. 4 $B=\{x\in\mathbb{N} \mid 2W_x \subseteq E_x\}$ saturato

$B=\{x\in\mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ $\mathcal{B}=\{f\subseteq\mathcal{C} \mid 2\cdot dom(f)\subseteq cod(f)\}$

$\emptyset\in\mathcal{B}$

$f(x)=1\ \forall x \rightarrow f\notin\mathcal{B},\ \emptyset\subseteq f \Rightarrow$ per Rice-Shapiro B non R.E.

$\overline{B}=\{x\in\mathbb{N} \mid \varphi_x\notin\mathcal{B}\}$

$un(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \uparrow & \text{altrimenti}\end{cases}$ $un\in\overline{\mathcal{B}}$

$fun(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ $fun\in\mathcal{B}$ $dom(fun)=cod(fun)=\mathbb{N}$

$\downarrow$

$fun\notin\overline{\mathcal{B}},\ un\subseteq fun$

$\Downarrow$

$\overline{B}$ non R.E.

ES. 5 Dire se può esistere un indice $x\in\mathbb{N}$ tale che

$\overline{K}=\{2^y-1 \mid y\in E_x\}$ si riferisce al $\overline{K}$ conosciuto ??

??

14/8/2016

Appello del 3/4/2014

1. Dimostrare il teorema di struttura dei predicati semidecidibili, ovvero provare che un predicato $P(\vec{x})$ è semidecidibile se e solo se esiste un predicato decidibile $Q(\vec{x},y)$ tale che $P(\vec{x})\equiv\exists y.\ Q(\vec{x},y)$
2. Sia $A\subseteq\mathbb{N}$ un insieme e sia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una funzione calcolabile. Dim. che se A è ricorsivo allora $f^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{N} \mid f(x)\in A\}$ è R.E. L'insieme $f^{-1}(A)$ è anche ricorsivo? Dimostrare o dare un controesempio.
3. Sia $A=\{x\in\mathbb{N} \mid W_x\cap E_x\neq\emptyset\}$ Studiare la ricorsività di A
4. Studiare ricorsività di $B=\{x\in\mathbb{N} \mid \forall K\in\mathbb{N}.\ K+x\in W_x\}$
5. Enunciare il 2° T. di Ric. Dimostrare che $C=\{x\in\mathbb{N} \mid \varphi_x(x)=x^2\}$ non è saturato.

Appello del 21/7/2014

1. Enunciare e dimostrare il teorema di Rice
2. Esiste una funzione tot. non calcolabile $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tale che la funzione $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ definita, per ogni $x\in\mathbb{N}$, da $g(x)=f(x)\dot{-}x$ sia calcolabile? Fornire un esempio oppure dimostrare che una tale funz. non esiste
3. Una funz. parziale $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ è iniettiva quando per ogni $x,y\in dom(f)$, se $f(x)=f(y)$ allora $x=y$. Studiare la ricorsività di $A=\{x \mid \varphi_x \text{ iniettiva}\}$
4. Studiare la ricorsività di $B=\{x \mid x\in W_x\setminus\{0\}\}$
5. Enunciare il 2° T. di Ric. ed utilizzarlo per dimostrare che esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $W_n=E_n=\{x\cdot n \mid x\in\mathbb{N}\}$

Appello 3/4/2014 14/8/2016

ES. 1 Dim. Teorema di struttura

$P(\vec{x})$ è semidecidibile $\iff \exists\, Q(\vec{x},y)$ decidibile t.c. $P(\vec{x}) \equiv \exists y.\, Q(\vec{x},y)$

Dim ($\Leftarrow$) Ho $Q(\vec{x},y)$ decidibile e $P(\vec{x}) \equiv \exists y.\, Q(\vec{x},y)$

Scrivo la $sc_{P(x)}$:

$$sc_{P(x)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in P \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu t.\, \overline{sg}\, \chi_{Q(t,x)}\right)$$ è calcolabile $\longrightarrow$ quindi $P(\vec{x})$ semi-decidibile

Dim ($\Rightarrow$) Ho $P(\vec{x})$ semi-decidibile $\longrightarrow$ quindi esiste la sua sc, è calcolabile ed esiste un prog. di indice e che la calcola.

Ho $\varphi_e(x)\downarrow$ sse $x \in P$. Posso dire che $sc_P(x) = 1$ sse $x \in P$ cioè

sse $\varphi_e(x)\downarrow$, cioè sse $\exists t.\, H(e,x,t)$

H è decidibile, quindi ho trovato il mio Q: $Q(t,x) = H(e,x,t)$

ES 2 Insieme $A \subseteq \mathbb{N}$, f calcolabile, $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \in A\}$

Se A ricorsivo $\longrightarrow$ allora $f^{-1}(A)$ è R.E.

Essendo A ricorsivo ho la funz. caratteristica calcolabile
Posso scrivere la $sc_{f^{-1}(A)}$ perché f(x) calcolabile:

Attenz. f(x) non è totale $\longrightarrow$ per alcuni elem. non è definita.
f(x) calcolabile $\longrightarrow \exists\, e$ t.c. $\varphi_e(x) = f(x)$

$$f(x) \in A \Longrightarrow \mu t.\, \overline{sg}\left(H(e,x,t)\right) + \overline{sg}\, \chi_{f(x)\in A}$$

$$\downarrow$$

$$\mu t.\, \overline{sg}\, S(e,x,z,t) + \overline{sg}\, \chi_{(z \in A)}$$

$$sc_{f^{-1}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}\left(\mu t.\, \overline{sg}\, S(e,x,z,t) + \overline{sg}\, \chi_{z\in A}\right)$$ calcolabile

Non posso avere la funz. caratteristica completa perché f(x) non è sempre definita, quindi in quel caso non posso dire di no
$\longrightarrow$ quindi $f^{-1}(A)$ non ricorsivo ma è R.E.

ES. ③ Studiare ricorsività di $A=\{x \in \mathbb{N} \mid W_x \cap E_x \neq \emptyset\}$ Saturato.

$A=\{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\quad \mathcal{A}=\{f \subseteq \mathcal{C} \mid dom(f) \cap cod(f) \neq \emptyset\}$

dominio e codominio hanno almeno un elem. in comune

Provo a scrivere la sc_A: trovare un elem. che sta sia in W_x che in E_x

$$sc_A = \mathbb{1}(\mu t.\ S(x,y,z,t_1) + sg\, H(x,z,t_2)) \longrightarrow \text{calcolabile} \rightarrow A \text{ è R.E.}$$

Valuto $\overline{A}$:

$\overline{\mathcal{A}}=\{f \subseteq \mathcal{C} \mid W_x \cap E_x = \emptyset\}$ dominio e codominio non hanno elem. in comune

$succ \notin \overline{\mathcal{A}}$, $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $f \leq succ \implies$ per Rice-Shapiro $\overline{A}$ non RE

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases}$$

ES. ④ Studiare ricorsività di $B=\{x \in \mathbb{N} \mid \forall K \in \mathbb{N},\ K+x \in W_x\}$

Non Saturato. Riduco da K: $K \leq B$

Trovo una funz. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y)=\begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\Psi(x,x)) \quad \text{calcolabile}$$

x smn

$\exists f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calc. tot. tale che $g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)$

$* \ x \in K \longrightarrow g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)=y \quad \forall y \longrightarrow$ quindi anche per $y=f(x)$. K qualsiasi $f(x) \in B$

$* \ x \notin K \longrightarrow g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)=\uparrow \quad \forall y \longrightarrow f(x) \notin B$

quindi $f(x)$ è funzione di riduzione $\longrightarrow B$ non ricorsivo

Considero $\overline{B}=\{x \in \mathbb{N} \mid \exists K \in \mathbb{N}.\ K+x \notin W_x\}$

$$sc_{\overline{B}}(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{B} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\mu K.\ H(x, K+x, t))$$

calcolabile, $\overline{B}$ è R.E. $\longrightarrow B$ non R.E.

ES. ⑤ 2° T. di Ric: Data una funz. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile totale, esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}$$

Dimostrare che $C=\{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(x)=x^2\}$ non è saturato.

~~Dimostro che esiste un indice e t.c. $\varphi_e(e)=e^2$~~ Devo trovare un indice che sta in C di un prog. che fa la stessa cosa di un altro indice che però non sta nell'insieme

Trovo un indice che sta in C:

$$g(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x=y \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y^2 \cdot \mathbb{1}(\text{cat. sg}\,\chi_{(x=y)})$$

calcolabile

x smn

$\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$

Per il 2° T. di Ric. $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{f(e)} = \varphi_e(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } e=y \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases}$ $e \in C$

Essendoci infiniti indici per una funzione considero

$e' \neq e$ t.c. $\varphi_{e'} = \varphi_e$ però se $\varphi_{e'} = \varphi_e = \begin{cases} e^2 \\ \uparrow \end{cases}$ allora $e' \notin C$

Quindi C non saturato perché e' non ci sta.

19/8/2016

Appello del 21/7/2014

① Enunciare e dimostrare il Teorema di Rice

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ se A è saturato allora non è ricorsivo

Dim: riduzione $K \leq A$

Considero un indice e_0 per la funzione sempre indefinita e vedo se sta in A

$\boxed{\text{caso ①}}$ $e_0 \notin A \to e_0 \in \overline{A}$

cerco funz. di riduzione per A:

$$g(x,y) = \begin{cases} \varphi_{e_1}(y) & \text{se } x \in K \\ \varphi_{e_0}(y) = \uparrow & \text{se } x \notin K \end{cases} = \varphi_{e_1}(y) \cdot sc_K(x) = \varphi_{e_1}(y) \cdot \mathbb{1}(\Psi(x,x))$$

calcolabile

x smn

$g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = g(x,y)$ con $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale

* $x \in K \longrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = \varphi_{e_1}(y)$ $e_1 \in A$, essendo A saturato la funzione corrispondente a quell'indice sta in A $s(x) \in A$

* $x \notin K \longrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = \varphi_{e_0}(y)$ $e_0 \notin A$, A saturato, $s(x) \notin A$

quindi s è funz. di riduzione e $K \leq A \Longrightarrow A$ non ricorsivo

$\boxed{\text{caso ②}}$ se $e_0 \in A$, faccio un discorso analogo mettendo $B = \overline{A}$,

ho $e_0 \in \overline{B}$, $B \neq \emptyset$, $B \neq \mathbb{N}$ $\longrightarrow$ quindi B non ricorsivo

$\longrightarrow$ allora anche $\overline{B}$ non ricorsivo, $\overline{B} = A$, quindi A non ricorsivo

pratica, se dimostro che A (o $\overline{A}$) non ricorsivo allora anche il suo negato è non ricorsivo!

ES. 2 Esiste una funzione totale non calc. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che la funzione $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita, per ogni $x \in \mathbb{N}$, da $g(x) = f(x) \dot{-} x$ sia calcolabile?

~~No g(x) è definita per composizione quindi anche f(x) deve essere calcolabile, altrimenti g(x) non può esserlo~~ $f(x) = g(x) + x \to$ sarebbe calcolabile per composizione

ES. 3 Una funzione parziale $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è iniettiva quando per ogni $x, y \in dom(f)$, se $f(x) = f(y)$ allora $x = y$. Studiare la ricorsività di

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ iniettiva}\}$$

È saturato: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\quad \mathcal{A} = \{f \subseteq \mathcal{C} \mid f \text{ iniettiva}\} = \{f \subseteq \mathcal{C} \mid \forall x, y \in dom(f), \text{ se } f(x) = f(y) \text{ allora } x = y\}$

$\emptyset \in \mathcal{A}$, zero $\notin \mathcal{A}$, $\emptyset \subseteq$ zero

$\Downarrow$

Per Rice-Shapiro A non R.E.

Considero $\bar{A} = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \text{ non iniettiva}\} \to \exists x, y \in dom(f)$ t.c. se $f(x) = f(y)$ allora $x \neq y$

Scrivo la $sc_{\bar{A}}$:

$$= \mathbb{1}(\mu t. \; S(x, a, f_a, t_1) \wedge S(x, b, f_b, t_2) \wedge (f_a = f_b) \wedge (a \neq b)) =$$
$$= \mathbb{1}(\mu t. \; \overline{sg}\, S(x, a, f_a, t_1) + \overline{sg}\, S(x, b, f_b, t_2) + \overline{sg}\, \chi_{(f_a = f_b)} + \overline{sg}\, \chi_{(a \neq b)})$$

$\bar{A}$ è R.E

ES. 4 Studiare la ricorsività di $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in W_x \setminus \{0\}\}$

Non saturato. Riduco da K

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \text{ e } x \neq 0 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\Psi(x, x)) \cdot \underbrace{\mathbb{1}(\mu w. \; \overline{sg}(x))}_{\text{calcolabile}}$$

$\downarrow$ x smn

$g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y)$ con $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale

* $x \in K \longrightarrow g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = 1 \; \forall y$ con $y \neq 0$

$\varphi_{s(x)} s(x) = 1 \longrightarrow s(x) \in W_{s(x)}$, $s(x) \neq 0 \Longrightarrow s(x) \in B$

* $x \notin K \longrightarrow g(x, y) = \varphi_{s(x)}(y) = \uparrow \; \forall y \longrightarrow$ anche per $y = s(x) \Longrightarrow s(x) \notin W_{s(x)}$

$\Downarrow$

$s(x) \notin B$

ok. s è funz. di riduzione $\longrightarrow$ B non ricorsivo

$sc_B(x) = \mathbb{1}(\mu t. \; \overline{sg}(H(x, x, t) \cdot x)) \longrightarrow B$ è R.E $\longrightarrow \bar{B}$ non R.E.

ES. 5 Enunciare il 2° Teorema di Ricorsione e dimostrare che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $W_n = E_n = \{x \cdot n \mid x \in \mathbb{N}\}$ 19/8/2016

2° T. di Ric.: Data una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$

Definisco g: $g(x,y) = \begin{cases} x \cdot y & \text{se } y \in \mathbb{N} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$??? $= x \cdot y$ calcolabile $\longrightarrow W_n$??

DA RIFARE

$\downarrow$ x smn

$g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ con $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale.

Per il 2° T. di Ric. esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_n = \varphi_{s(n)} = \varphi_n(y) = n \cdot y$ con $y \in \mathbb{N}$

APPELLO 25/8/2014

ES. 2 $\longrightarrow$ già fatto in data 10/8/2016

ES. 3 Studiare ricorsività di $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x(y+x)\downarrow$ per qualche $y \geq 0\}$

Riduco da $K: K \leq A$ $\longrightarrow$ cioè trovo una funz. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc tot. t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in A$

$g(x,y) = \begin{cases} y & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases} = y \cdot \mathbb{1}(\Psi(x,x))$ calcolabile

$\downarrow$ x smn

$g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ con $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale

- se $x \in K$ $\quad g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = y \quad \forall y$

  $\varphi_{s(x)} s(x) = s(x) \longrightarrow$ ok $s(x) \in A$ per un $y = 0$

- se $x \notin K$ $\quad g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = \uparrow \quad \forall y \longrightarrow s(x) \notin A$

ok $\to$ s è funz. di riduzione $\Longrightarrow$ A non ricorsivo

Scrivo la $sc_A =$

$$\mathbb{1}(\mu t. \overline{sg}\, H(x, x+y, t) + \overline{sg}\, \chi_{(y \geq 0)})$$ calcolabile

Quindi A è R.E $\Longrightarrow \overline{A}$ non R.E.

Fatta da Enrico:

$g(z,K) = \mathbb{1}(\mu w. \overline{sg}\, \chi_{(K = w \cdot z)}) \cdot K = \begin{cases} K & \text{se } K = z \cdot n \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$

$= \varphi_{s(z)}(K) = \varphi_z(K)$

ES. 4 Studiare ricorsività di $B=\{x\in\mathbb{N} \mid W_x \supseteq P_r\}$ dove $P_r \subseteq \mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri primi.

È saturato. $B=\{x\in\mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ $\mathcal{B}=\{F\subseteq\mathcal{C} \mid P_r \subseteq dom(F)\}$

?

Considero $\overline{B}=\{x\in\mathbb{N} \mid \varphi_x\in\overline{\mathcal{B}}\}$ $\overline{\mathcal{B}}=\{F\subseteq\mathcal{C} \mid P_r \nsubseteq dom(F)\}$

$\emptyset\in\overline{\mathcal{B}}$, $id\notin\overline{\mathcal{B}}$, $\emptyset\subseteq id \Rightarrow$ per Rice-Shapiro $\overline{B}$ non R.E.

Provo riduzione da $\overline{K}$: $\overline{K}\leq B$

Trovo funz. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ calc. totale t.c. $x\in\overline{K}$ sse $f(x)\in B$

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & \text{se } x\in\overline{K}\\ \uparrow & \text{se } x\notin\overline{K}\end{cases}=\begin{cases}1 & \text{se } \neg H(x,x,y)\\ \uparrow & \text{se } H(x,x,y)\end{cases}=\mathbb{1}(\mu z.\chi_H(x,x,y))$$

calcolabile.

x smn $g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)$ con $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ calc. totale

$*\boxed{x\in\overline{K}}$ $g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)=1$ $\forall y \longrightarrow W_{f(x)}=\mathbb{N}$ che contiene $P_r \to f(x)\in B$

$*$ $x\notin\overline{K}\to x\in K$

$g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)=\uparrow$ $\forall y \longrightarrow W_{f(x)}=\emptyset \not\supseteq P_r \Rightarrow f(x)\notin B$

f è funz. di riduzione $\Rightarrow \overline{K}\leq B$ quindi B non R.E. perché $\overline{K}$ non R.E.

ES. 5 Dim. che esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $\varphi_n=\varphi_{n+1}$ ed esiste anche $m\in\mathbb{N}$ tale che $\varphi_m\neq\varphi_{m+1}$

Considero la funzione successore che è calc. totale: $s(x)=x+1$
Allora per il 2° T. di Ric. esiste un $e\in\mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_e=\varphi_{succ(e)}=\varphi_{e+1}$$

APPELLO 13/9/2011 22/08/2016

ES. 5 Enunciare il 2° Teorema di Ricorsione e dimostrare che esiste un indice $x \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \leq y \leq x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2° Teorema di Ricorsione: Data una funzione $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale, esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi_e = \varphi_{h(e)}$$

Dim: costruisco una $g(x,y)$ uguale alla $\varphi_x(y)$ richiesta, la scrivo come funzione calcolabile, applico poi smn per avere $g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$ ed infine applico il 2° t di Ric. per dire che esiste l'indice cercato.

$$g(x,y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } x \leq y \leq x+2 \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = y^2 \cdot \mathbb{1}\left(\mu t.\ \overline{sg}\,\chi_{(x \leq y)} + \overline{sg}\,\chi_{(y \leq x+2)}\right)$$

alternativa

$$= y^2 \cdot \mathbb{1}\left(\mu t.\ (x \dot{-} y) + (y \dot{-} (x+2))\right)$$

calcolabile

$\Downarrow$

x il teorema smn ho $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. tale che

$$g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$$

Per il 2° Teor di Ric. ho che esiste $e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$, quindi

$$\varphi_e(y) = \varphi_{f(e)}(y) = g(e,y) = \begin{cases} y^2 & \text{se } e \leq y \leq e+2 \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases}$$

cvd

APPELLO 15/7/2013

ES. 1 Idea: siccome le istruzioni di salto ci mandano sempre avanti, questo vuol dire che prima o poi ogni programma della sottoclasse termina, e quindi le funzioni che calcolano hanno un risultato, per ogni input, quindi sono funzioni totali.

ES. 2 ~~Dimostrare che~~ A ricorsivo $\overset{sse}{\iff}$ esistono f e g calcolabili totali tali che $\forall x$ $x \in A$ sse $f(x) > g(x)$

Dim ($\Longrightarrow$) Abbiamo A ricorsivo, quindi esiste la sua funz. caratteristica, che è calcolabile:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Posso mettere $g(x) = 0$ $\forall x$ ed $f(x) = \chi_A(x)$

In questo modo $x \in A$ sse $f(x) > g(x)$

Dim ($\Longleftarrow$) Abbiamo $f(x)$ e $g(x)$ calc. totali e $x \in A$ sse $f(x) > g(x)$, scrivo quindi la χ_A in funzione di f e g:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} = \overline{sg}\left(g(x) \overset{+1}{\dot{-}} f(x)\right)$$

ES proposto da Stefano: 27/8/2016

Dato $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ un insieme di funzioni calcolabili

$\mathbb{0}$ e $\mathbb{1}$ funz. costanti tale che

$\mathbb{0} \notin \mathcal{A}$ e $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$

$A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ A non r.e. oppure $\bar{A}$ non r.e.

COL $\longrightarrow$ ovvio, essendo A saturato e non vuoto e non tutto $\mathbb{N}$ allora è non ricorsivo per Rice $\longrightarrow$ quindi A o $\bar{A}$ non r.e.

APPELLO 25/1/2016

ES ③ Una funzione è detta strettamente crescente se per ogni $y, z \in dom(f)$, $y < z$ implica $f(y) < f(z)$. Studiare la ricorsività di

$A = \{x \mid \varphi_x$ strettamente crescente$\}$

$A = \{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\mathcal{A} = \{f \subseteq \mathcal{C} \mid \forall y, z \in dom(f),$ se $y < z \Rightarrow f(y) < f(z)\}$

$\hookrightarrow$ saturato (non dipende dalla x)

$\emptyset \in \mathcal{A}$, zero $\notin \mathcal{A}$, $\emptyset \subseteq$ zero $\Rightarrow$ per Rice-Shapiro A non r.e.

$\bar{A} = \{x \mid \varphi_x \in \bar{\mathcal{A}}\}$

$\bar{\mathcal{A}} = \{\exists y, z \in dom(f) \mid$ se $y < z \Longrightarrow f(y) \geq f(z)\}$ esistono y e z tale che se $y < z$ allora $f(y) \geq f(z)$

Scrivo $sc_{\bar{A}} =$

$= \mathbb{1}(\mu t.\ S(x, y, f_y, t_1)\ \&\ S(x, z, f_z, t_1)\ \&\ (y < z)\ \&\ (f_y \geq f_z))$

$= \mathbb{1}(\mu t.\ \overline{sg}\, S(x, y, f_y, t_1) + \overline{sg}\, S(x, z, f_z, t_2) + (y \overset{+1}{\dot{-}} z) + (f_z \dot{-} f_y))$ calcolabile

$\bar{A} \longrightarrow$ è R.E., A non ricorsivo (vabbè, lo sapevo già avendo detto non r.e.)

ES. 4 Studiare la ricorsività di $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \wedge x/2 \notin E_x\}$ 27/8/2016

B non saturato. Riduco da $\overline{K}$

$\overline{K} = \{x \mid \varphi_x(x)\uparrow\}$

Trovo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in \overline{K}$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{K} \\ \uparrow & \text{se } x \notin \overline{K} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{se } H(x,x,y) \end{cases} = \mathbb{1}(\mu z. \chi_H(x,x,y))$$

calcolabile

x smn ho

$g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$ con $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc tot

$x \in \overline{K}$: $g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = 1 \quad \forall y$

Soluzione: riduzione da $\overline{K}$ $\longrightarrow$ con conclusione che B non r.e.

$$g(x,y) = \begin{cases} \uparrow & \text{se } x \in \overline{K} \\ y/2 & \text{se } x \notin \overline{K} \end{cases} = y/2 \cdot \mathbb{1}(\psi_U(x,x))$$

.....

ES. 5 Enunciare il 2° T. di Ric. e dimostrare che esiste $x \in \mathbb{N}$ t.c.

$\varphi_x(y) = x + y$

2° T. di Ric. Data una funz. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. esiste $e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$

$g(x,y) = x + y$ calcolabile $\longrightarrow$ x smn $\exists s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c. $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = x + y$

x 2° T. di Ric. $\exists e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{s(e)}(y) = \varphi_e(y) = e + y$ cvd.

APPELLO 3/9/2015

ES. 2 Si dica che una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è decrescente se è totale e per ogni $x, y \in \mathbb{N}$ se $x \leq y$ allora $f(x) \geq f(y)$.

Esiste una funzione decrescente non calcolabile?

$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \forall y, z \in \mathbb{N}$, se $y \leq z$ allora $f(y) \geq f(z) \}$ saturato.

... ??

ES. 3 Data un insieme $X \subseteq \mathbb{N}$, definiamo $X+1 = \{ x+1 \mid x \in X \}$

Studiare la ricorsività di $A = \{ x \in \mathbb{N} \mid E_x = W_x + 1 \}$

$W_x + 1$: dominio di x con tutti gli elementi sommati di 1

se $W_x = \{1, 2, 3\} \Longrightarrow W_x + 1 = \{2, 3, 4\}$

A saturato: $A = \{ x \mid \varphi_x \in \mathcal{A} \}$ $\mathcal{A} = \{ f \subseteq \mathcal{C} \mid cod(f) = dom(f) + 1 \}$

$\emptyset \in \mathcal{A}$, zero $\notin \mathcal{A}$ (perché $cod(zero) = \{0\}$), $\emptyset \subseteq zero \Rightarrow A$ non R.E.

* Rice-Shapiro

$\bar{A} = \{ x \mid \varphi_x \in \bar{\mathcal{A}} \}$ $\bar{\mathcal{A}} = \{ f \subseteq \mathcal{C} \mid cod(f) \neq dom(f) + 1 \}$

cerco una funz. che non sta in $\bar{\mathcal{A}}$

~~succ circolare(x) = { x+1 se x < 10; 0 per x = 10; ↑ altrimenti~~ ~~cod = dom = [0-10] ⇒ ∈ Ā~~ ~~cod(succ circolare) = ℕ~~ ~~cod ≠ dom = [0-10]~~

~~succ 10(x) = { x+1 se x ≤ 10; ↑ altrimenti~~ ~~cod = [1-10] dom = [0-9]~~ ~~cod = dom + 1~~

~~succ 10 ∈ Ā~~

~~succ 2(x) = { x+1 se x ≤ 5; ↑ altrim.~~ ~~cod = [1-5] = dom + 1 = [0-4] + 1~~

succ 2 ∉ Ā

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 10 \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$cod(f) = \mathbb{N} \setminus \{0\} = dom(f) + 1$

$f \notin \bar{\mathcal{A}}$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{per } 10 < x < 20 \\ \uparrow & \text{altrim.} \end{cases}$$

$g \in \bar{\mathcal{A}}$, $g \subseteq f \Rightarrow \bar{A}$ non r.e per Rice-Shapiro.

ES. 4 Studiare la ricorsività di $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y > x \;\; 2y \in W_x\}$

27/8/2016

Non saturato.

Riduzione $K \leq_m B$: trovo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c. $x \in K$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\Psi_U(x,x)) \text{ calcolabile}$$

x smn

$g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$

$x \in K \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = 1 \;\; \forall y \longrightarrow$ anche per $y > x$ e anche per $2y$

quindi anche per $f(x) = 2y$ con $y > x \Rightarrow f(x) \in B$

$x \notin K \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = \uparrow \;\; \forall y$ nessun $y \in W_{f(x)} \Rightarrow f(x) \notin B$

quindi $f(x)$ è funz. di riduzione $\Longrightarrow B$ non ricorsivo

$\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > x \,.\, 2y \notin W_x\}$

~~$s_{\overline{B}} = \mathbb{1}(\mu t. H(x, 2y, t) + (x+1 \dot{-} y))$~~ No, non si può definire la non-appartenenza a W_x

Riduzione $\overline{K} \leq_m \overline{B}$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin \overline{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\Psi_U(x,x)) \text{ calcolabile}$$

x smn

$g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$

$x \in \overline{K} \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = \uparrow \;\; \forall y$ anche per un $y > f(x)$, $2y \notin W_{f(x)}$

$f(x) \longrightarrow \in \overline{B}$

$x \notin \overline{K} \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = 1 \;\; \forall y \longrightarrow$ anche per $2y$ con ogni $y > x$

$\longrightarrow$ la funzione è definita per ogni $y \rightarrow f(x) \notin \overline{B}$

ok $\rightarrow f$ è funz. di riduzione $\longrightarrow \overline{B}$ non R.E.

27/8/2016

ES. 5 Enunciare il 2° T. di Ric. e utilizzarlo per dimostrare che la funzione $\Delta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $\Delta(x) = \min\{y \mid \varphi_y \neq \varphi_x\}$ non è calcolabile

2° T. di Ric: data una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$

$\Delta(x) = \min\{y \mid \varphi_y \neq \varphi_x\}$ trova il minimo indice y tale che $\varphi_y \neq \varphi_x$

idea: l'insieme in cui cercare il minimo non è finito, quindi non è possibile trovare il minimo

APPELLO DEL 15/9/2015

ES. 1 Definire l'operazione di ricorsione primitiva e dimostrare che l'insieme $\mathcal{C}$ delle funzioni URM-calcolabili è chiuso rispetto a tale operazione

Ricorsione primitiva; ~~definita come~~ date le funzioni $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$

definisco $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ come

$$h = \begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Dim che le f URM-calcolabili sono chiuse rispetto alla ricorsione (???)

ES 2 Si dica che una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è quasi costante se esiste un valore $K \in \mathbb{N}$ tale che l'insieme $\{x \mid f(x) \neq K\}$ è finito
Esiste una funzione quasi costante non calcolabile?

Se ho f 'quasi costante', allora per un numero finito di x $f(x) \neq K$ mentre per il resto dei valori il risultato è K.
Quindi f ha un codominio finito.
Allora se f ha un numero finito di valori che può assumere sarà sempre possibile scriverla come calcolabile $\longrightarrow$ f è calcolabile
Quindi non ci sono funzioni 'quasi costanti' non calcolabili.

APPELLO 15/9/2015 27/8/2016

ES. 3 Studiare la ricorsività di $A=\{x \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P} \subseteq W_x\}$

$\mathbb{P}$ = insieme dei pari

A è saturato: $A=\{x \mid \varphi_x \in \mathcal{A}\}$ $\mathcal{A}=\{f \subseteq \mathcal{C} \mid \mathbb{P} \subseteq dom(f)\}$

(Non riesco a usare Rice-Shapiro per A)

Riduzione da $\overline{K}$: $\overline{K} \leq A$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. tale che $x \in \overline{K}$ sse $f(x) \in A$

$$g(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{se } H(x,x,y) \end{cases} = 1(\mu w. \chi_H(x,x,y))$$

x smn

$g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)$ con $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale

se $x \in \overline{K} \longrightarrow g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)=1 \ \forall y \longrightarrow W_{f(x)}=\mathbb{N} \supseteq \mathbb{P} \longrightarrow f(x) \in A$

se $x \notin \overline{K}$ $(x \in K) \longrightarrow g(x,y)=\varphi_{f(x)}(y)=$

RIPASSO TEORIA

29/8/2016

TEOREMA DI STRUTTURA

$P(\vec{x}) \in \mathbb{N}^k$ è un predicato semi-decidibile se e solo se $\exists Q(t,\vec{x})$ decidibile tale che $P(\vec{x}) = \exists t. Q(t,\vec{x})$ ~~vale~~

Dim ($\Rightarrow$) Ho $P(\vec{x})$ semidecidibile, quindi la sua sc è calcolabile.

Esiste quindi un programma che la calcola, considero l'indice di tale programma e,

$\varphi_e \downarrow$ sse $sc_P(\vec{x}) \downarrow \Longrightarrow \exists t. H(e,\vec{x},t)$, H è decidibile quindi

$\exists t. Q(t,\vec{x})$ con Q decidibile

$= H(e,\vec{x},t)$

Dim ($\Leftarrow$) Ho $Q(t,\vec{x})$ decidibile e

$P(\vec{x}) = \exists t. Q(t,\vec{x})$ Scrivo la sc_P in funzione a Q

$$sc_P(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \vec{x} \in P \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\mu t. \overline{sg}\, \chi_Q(t,\vec{x}))$$ è calcolabile $\Longrightarrow P(\vec{x})$ è semi-decidibile

TEOREMA DI PROIEZIONE (chiusura per $\exists$ dei predicati semi-decidibili)

Dato $P(x,\vec{y})$ semi-decidibile $\Rightarrow \exists x. P(x,\vec{y})$ semi-decidibile

Dim: Data $P(x,\vec{y})$ semi-decidibile x il t. di struttura ho

$P(x,\vec{y}) = \exists t. Q(t,x,\vec{y})$ con Q decidibile.

Considero $P'(\vec{y}) = \exists x, \exists t. Q(t,x,\vec{y}) = \exists w. Q(w_1, w_2, \vec{y}) = \exists w. Q'(w,\vec{y})$

ho che $P'(\vec{y})$ è semi-decidibile $\left(sc_{P'} = \mathbb{1}(\mu w. \overline{sg}\, \chi_{Q'}(w,\vec{y}))\right)$ con Q' decidibile

$P'(\vec{y}) = \exists x. P(x,\vec{y})$ quindi anche l'esiste è semi-decidibile

(Domanda: vale il contrario?)

cioè se ho $\exists x. P(x,\vec{y})$ semi-decidib. allora anche $P(x,\vec{y})$ è semi-decidib? NO

~~Penso di sì~~

Ad esempio se $P(x,y)$ per me è "$x+y=5$", allora $\exists x. P(x,y)$ sarà sempre vero o sempre falso (decidibile) $\longrightarrow$ non mi ~~sta~~ aiuta per la dimostrazione

Considero l'esempio $P(x,y) = (y > x) \wedge (y \notin W_x)$ e

$Q(y) = \exists x. (y > x) \wedge (y \notin W_x)$

Considerando un indice e_0 per la funz. indefinita ho che per ogni $y > e_0$ Q è vera, ma $P(x,y)$ resta non decidibile (mentre Q è decidibile)

ES. 1 APPELLO 25/1/2016 31/8/2016

Dimostrare che un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo sse A e $\bar{A}$ sono r.e.

Un insieme A è ricorsivo quando la sua funzione caratteristica χ_A è calcolabile.

Dim ($\Rightarrow$) ho A ricorsivo. Posso scrivere sc_A e $sc_{\bar{A}}$ utilizzando χ_A

$$sc_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w. \overline{sg}\,\chi_A)$$

$$sc_{\bar{A}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \bar{A} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \mathbb{1}(\mu w. \chi_A)$$

Dim ($\Leftarrow$) Ho le funz. sc_A e $sc_{\bar{A}}$ per scrivere la χ_A, però sc_A e $sc_{\bar{A}}$ potrebbero restituire indefinito.

Essendo sc_A e $sc_{\bar{A}}$ calcolabili hanno un programma che le calcola.

$sc_A = \varphi_{e_1}$ $\quad sc_{\bar{A}} = \varphi_{e_2}$

Se sc_A vale 1 allora $\exists t. H(e_1, x, t)$ vale. Posso dire $\chi_A = \chi_{H(e_1,x,t)}$

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists t. H(e_1, x, t) \\ 0 & \text{se } \exists t. H(e_2, x, t) \end{cases}$$

$$= \left(\mu w. \left(\overline{sg}\,\chi_{S(e_1, x, w_1, w_2)} \overset{(or)}{\cdot} \overline{sg}\,\chi_{S(e_2, x, w_1, w_2)}\right)\right)_1$$

prendo w_1 che è il risultato di S

ES. 2 APPELLO 16/7/2016

Dimostrare che un insieme A è r.e. se e solo se $A \leq_m K$

Dim ($\Rightarrow$) Ho insieme A r.e. dimostra che $A \leq K$ (A si riduce a K)

Devo trovare una funzione calcolabile totale t.c. $x \in A$ sse $f(x) \in K$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = sc_A \quad \text{(calcolabile)}$$

x smn $\quad g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = sc_A(x)$ con $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot.

$x \in A \longrightarrow g(x,y) = 1 \longrightarrow \varphi_{s(x)}(y) = 1 \ \forall y \quad s(x) \in K$

anche per $y = s(x)$

$x \notin A \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y) = \uparrow \ \forall y \longrightarrow s(x) \notin K$

ok $\longrightarrow s(x)$ è funzione di riduzione $\Rightarrow A \leq K$

Dim ($\Leftarrow$) Ho $A \leq K$, devo dim. che A è r.e.

Essendo valida la riduzione, ho una $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. totale t.c. $x \in A$ sse $f(x) \in K$

Avendo la funzione sc per K, possiamo scrivere la sc_A:

$$sc_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x) \in K \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = sc_K(f(x))$$ calcolabile perché f calcolabile

ES. 2 APPELLO 30/6/2015

Definire il significato di $A \leq_m B$. È vero che per ogni insieme A vale $A \leq A \cup \{0\}$? In caso affermativo dare una prova e in caso negativo un controesempio. Nel secondo caso, proporre una condizione (indicare se è solo sufficiente o anche necessaria) che renda vero $A \leq_m A \cup \{0\}$

$A \leq B$ (A si riduce a B) significa che esiste una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale tale che $x \in A$ sse $f(x) \in B$

Vale $A \leq A \cup \{0\}$?? Sempre? Devo avere f t.c. $x \in A$ sse $f(x) \in A \cup \{0\}$

- caso 1: $0 \in A \longrightarrow$ allora $A \cup \{0\} = A$ e $A \leq A$ sempre (id come funz. di riduzione)
- caso 2: $0 \notin A \longrightarrow$ allora $A \neq A \cup \{0\}$

  Quindi $f(0) \notin A \cup \{0\}$ per avere la riduzione, possiamo utilizzare:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 0 \\ x_0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{dove } x_0 \notin A \cup \{0\}$$

Quindi una condizione sufficiente può essere che $0 \in A$ oppure che esista un valore $x_0 \notin A \cup \{0\}$ nel caso lo zero non appartenga ad A.

Una condiz. necessaria e sufficiente è che $A \neq \mathbb{N} - \{0\}$ in questo modo ho un valore per x_0 oppure $0 \in A$.

ES. 1 APPELLO 22/3/2013 31/8/2016

Dare la definizione dell'insieme PR delle funzioni primitive ricorsive e, utilizzando esclusivamente la definizione, dimostrare che è primitiva ricorsiva la funzione $half: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita come $half(x) = x/2$

L'insieme PR è il minimo insieme di funzioni che contiene le funzioni base:

$$0: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{dove} \quad 0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

$$s: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{dove} \quad s(x) = x+1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

$$U_j^k: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad \text{dove} \quad U_j^k(x_1 \dots x_k) = x_j \quad \text{per ogni } (x_1 \dots x_k) \in \mathbb{N}^k$$

ed è chiuso rispetto alle operazioni di composizione generalizzata e ricorsione primitiva:

Composizione generalizzata: date le funzioni $f_1, \dots f_n: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ la loro composizione generalizzata è la funzione

$$h: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \quad h = g(f_1, \dots, f_n) \quad \text{meglio detto } h(\vec{x}) = g(f_1(\vec{x}), \dots f_n(\vec{x}))$$

Ricorsione primitiva: date le funzioni $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ la funz. definita per ricorsione è:

$$h = \begin{cases} h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}) \\ h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y)) \end{cases}$$

Definisco half utilizzando le funzioni base e le operazioni sopra descritte.

L'idea è di definire half per ricorsione; si fa decrescere x fino a zero e si incrementa ogni volta che trova un dispari.

Definisco $\overline{sg} = \begin{cases} \overline{sg}(0) = 1 \\ \overline{sg}(x+1) = 0 \end{cases}$

Definisco resto2 (il resto della divisione per 2)

$$resto2 = \begin{cases} resto2(0) = 0 \\ resto2(x+1) = \overline{sg}(resto2(x)) \end{cases}$$

Quindi definisco half:

$$half = \begin{cases} half(0) = 0 \\ half(x+1) = half(x) + resto2(x) \end{cases}$$

ES. 5 APPELLO 22/3/2013

Enunciare il 2° Teorema di Ric. e utilizzarlo per dimostrare che se C è un insieme tale che $C \leq \overline{C}$ allora C non è saturato.

2° T. di Ric: data una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale calcolabile, esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\varphi_e = \varphi_{f(e)}$$

Avendo $C \leq \overline{C}$ ho $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. come funz. di riduzione tale che $x \in C$ sse $f(x) \in \overline{C}$

Per il 2° T. di Ric. esiste e t.c. $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$ cioè calcolano la stessa funzione, quindi $f(e)$ dovrebbe stare in $\overline{C}$ se $e \in C$, questo è impossibile perché se $e \in C$, $f(e) \in \overline{C}$

ASSURDO! Quindi C non è saturato

11/9/2016

ES. 6 APPELLO 25/8/2014

Studiare ricorsività di $B = \{x \in \mathbb{N} \mid W_x \supseteq Pr\}$ con Pr l'insieme dei numeri primi.
SATURATO

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_x \in \mathcal{B}\}$ $\quad \mathcal{B} = \{f \subseteq \mathcal{C} \mid dom(f) \supseteq Pr\}$

$id \in \mathcal{B}$ però ogni sotto-parte finita di id non appartiene a $\mathcal{B}$ perché non può contenere tutti i numeri primi

Quindi, per Rice-Shapiro B non r.e.

Considero $\overline{B}$: $\emptyset \in \overline{\mathcal{B}}$, $id \notin \overline{\mathcal{B}}$ ma $\emptyset \subseteq id$, per Rice-Shapiro $\overline{B}$ non r.e.

Provo a fare $\overline{K} \leq B$: trovo $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot. t.c. $x \in \overline{K}$ sse $f(x) \in B$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{se } H(x,x,y) \end{cases} = 1(\mu t. \chi_H(x,x,t))$$

Ho scelto la funzione $g(x,y)$ che restituisce 1 se $H(x,x,y)$ è 0; se per ogni y scelto H va a 0 allora $x \in \overline{K}$

Se $x \in K$ ($x \notin \overline{K}$) allora devo scegliere un valore y abbastanza grande per avere come risultato indefinito.

x SMN ho che $g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y)$ con f calc. tot.

$x \in \overline{K} \longrightarrow g(x,y) = 1 \ \forall y$ quindi $dom(f) = \mathbb{N}$ (definita per ogni valore)

$f(x) \in B$ perché $\mathbb{N} \supseteq Pr$

$x \notin \overline{K} \longrightarrow x \in K \longrightarrow g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = \uparrow$ per un valore y abbastanza grande

considero $x_0 \in Pr$ abbastanza grande t.c. $H(x,x,x_0) = 1$

$\varphi_{f(x)}(x_0) = \uparrow$, quindi $x_0 \notin dom(f) \Rightarrow f(x) \notin B$ OK, f è funz. di riduzione

RIPASSO TEORIA

11/3/2016

Funzione calcolabile: una funzione è calcolabile se esiste un programma che la calcola

URM: Unlimited Register Machine
È un modello di calcolo, che dispone di un numero infinito di registri all'interno dei quali c'è un Naturale.

Istruzioni URM:

zero	$Z(n)$	imposta R_n a 0
successore	$S(n)$	aumenta di 1 R_n
trasferimento	$T(m,n)$	copia R_m in R_n
salto	$J(m,n,t)$	se R_m ed R_n sono uguali allora salta all'istr. I_t altrimenti procede alla successiva

Per convenzione l'output del programma è in R_1

URM-Calcolabile: una funzione è URM-calcolabile se esiste un programma URM che la calcola.

$\mathcal{C}$: c-corsivo $\longrightarrow$ classe di funzioni URM-calcolabili

La macchina URM può fare a meno dell'istruzione $T(m,n)$ che si può realizzare utilizzando le altre:

I_1	$T(m,n)$	$Z(n)$	imposto a 0 R_n
I_2		$J(m,n,\text{end})$	se $R_n == R_m$ passo avanti
I_3		$S(n)$	incremento R_n
I_4		$J(1,1,2)$	torno all'istr. 2 per fare di nuovo il confronto

Dimostrazione che i programmi URM senza $T(m,n)$ calcolano le stesse funzioni di URM normale $\longrightarrow$ per induzione sull'istruzione h.

Predicato: un predicato $Q(x_1, \dots x_k)$ può essere visto come una relazione binaria $Q: \mathbb{N}^k \longrightarrow \{\text{vero}, \text{falso}\}$ che indica se tale affermazione è vera o falsa.

$\chi_Q : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ Funzione caratteristica: vale 1 se il predicato Q è vero
vale 0 se il predicato Q è falso

Un predicato è decidibile se la sua funzione caratteristica è calcolabile.
Le composizioni funzionali dei predicati decidibili sono decidibili:

$$\chi_{\neg Q}(\vec{x}) = \overline{sg}(\chi_Q(\vec{x}))$$

$$\chi_{Q \wedge Q'}(\vec{x}) = \chi_Q(\vec{x}) * \chi_{Q'}(\vec{x})$$

$$\chi_{Q \vee Q'}(\vec{x}) = sg(\chi_Q(\vec{x}) + \chi_{Q'}(\vec{x}))$$

Quantificazione limitata:
avendo un predicato decidibile $Q(\vec{x}, y)$ allora

$$Q_1(\vec{x}, y) = \forall z < y \; Q(\vec{x}, y)$$
$$Q_2(\vec{x}, y) = \exists z < y \; Q(\vec{x}, y)$$

Q_1 e Q_2 sono decidibili

Minimizzazione limitata: la ricerca di un punto in cui la funzione si annulla

Data una funzione $f(\vec{x}, z): \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale definisco $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ come

$$h(\vec{x}, y) = \mu z < y \cdot f(\vec{x}, z) = 0$$ (minimo $z<y$ tale che f si annulla)

h restituisce il minimo z oppure y se non trova uno z adatto.

Minimizzazione illimitata: non è limitata, quando non trova il parametro che azzera la funzione, restituisce indefinito.

Se una funzione f è calcolabile, allora anche la sua minimizzazione lo è

Ricorsione primitiva: data una funzione $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ e $g: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ definiamo $h: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$

$$h(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$$
$$h(\vec{x}, y+1) = g(\vec{x}, y, h(\vec{x}, y))$$

se f e g sono calcolabili allora anche h è calcolabile.

Dimostrazione che è URM-calcolabile:

```
m = max(ρ(PF), ρ(PG), K+2)
T([1, K+2], [m, m+K+2])
PF[m+1, ....., m+K → 1]        //eseguo f e ritorno il risultato in 1
Loop  T(m+K+1, m+K+2, Finito)
      PG[m+1, ....
```

ES. ② APPELLO 25/8/2014 11/9/2016

Può esistere una funzione non calcolabile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che per ogni funzione non calcolabile $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione $f+g$ definita da $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ sia calcolabile?

Non esiste, considero $g(x) = f(x)$ (deve valere per ogni g) allora la funzione che cerco sarebbe:

$$h(x) = f(x) + g(x) = f(x) + f(x) = 2f(x) \quad \text{con } h(x) \text{ calcolabile}$$

quindi posso scrivere la f come composizione di una funzione non calcolabile: $f(x) = h(x)/2$

ASSURDO, altrimenti $f(x)$ sarebbe calcolabile.

ES. ② APPELLO 25/1/2016

Definire una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totale non calcolabile tale che $f(x) = x$ per infiniti argomenti $x \in \mathbb{N}$ oppure dimostrare che una tale funzione non esiste.

f deve essere totale $\to$ sempre definita.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in K \\ x+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ipotizzo che f sia calcolabile, allora riuscirei a scrivere χ_K utilizzando $f(x)$:

$$\chi_K(x) = \overline{sg}(f(x) - x)$$

ho χ_K calcolabile per composizione $\Rightarrow$ ASSURDO =

Quindi $f(x)$ non-calcolabile.

ES. ② APPELLO 20/6/2012

Esiste una funzione totale non calcolabile $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con la proprietà che $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_x(x)\downarrow$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } \varphi_x(x)\downarrow \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ipotizzo f calcolabile, posso considerare la condizione $\varphi_x(x)\downarrow$ come $x \in K$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in K \\ 2 & \text{altrimenti} \end{cases} \Longrightarrow \chi_K = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K \\ 0 & \text{altrim} \end{cases} = \overline{sg}|f(x) - x^2|$$

quindi ho χ_K calcolabile per composizione

$\Downarrow$

ASSURDO $\Longrightarrow$ f non calcolabile

ES. 5 APPELLO 15/9/2015 12/9/2016

Enunciare il secondo teorema di ricorsione ed utilizzarlo per dimostrare che esiste un indice $n \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{p_n} = \varphi_n$ dove p_n è l'n-esimo numero primo.

2° T. di Ric. Data una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale esiste un indice $e \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$

$g(x,y) = p_x$ x-esimo numero primo (calcolabile perché visto a lezione)

x $S \to \mathbb{N}$ ho $g(x,y) = \varphi_{s(x)}(y)$ con $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calc. tot.

$\varphi_{s(x)}(y)$ restituisce l'x-esimo numero primo indifferentemente da y

Per il 2° T. di Ric. esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi_{s(e)} = \varphi_e$ dove $s(e)$ calcola l'e-esimo nr. primo.

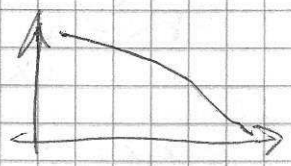
ES. 5 APPELLO 3/9/2015

Enunciare il 2° teorema di Ric. ed utilizzarlo per dimostrare che la funzione $\Delta: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definita da $\Delta(x) = \min\{y : \varphi_y \neq \varphi_x\}$ non è calcolabile

(Sol: non è definita su un punto fisso ....)

ES. 2 APPELLO 3/9/2015

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ decrescente: $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ f totale



Esiste una funz. decrescente non calcolabile?

Ogni funzione decrescente prima o poi diventa una costante, o perché arriva a zero oppure perché si ferma ad un valore costante

Possiamo scrivere f come:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < x_0 \\ K & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$$

f_1 ha dominio finito ed è decrescente (x_0 è la soglia)

Quindi f è calcolabile per ~~composizione~~ costruzione, infatti tutte le funzioni finite ($\forall f_1$) sono calcolabili (visto a lezione)

Posso scrivere una funzione finita come calcolabile così:

data $f(x) = \begin{matrix} y_1 & \text{se } x = x_1 \\ y_2 & \text{se } x = x_2 \\ \vdots & \\ y_n & \text{se } x = x_n \end{matrix}$

$$f(x) = y_1 \cdot \overline{sg}|x - x_1| + y_2 \cdot \overline{sg}|x - x_2| + \dots + y_n \cdot \overline{sg}|x - x_n|$$

ES. 4 APPELLO 3/9/2015 12/9/2016

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y > x .\ 2y \in W_x\}$ Non saturato.

$\overline{B} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y > x .\ 2y \notin W_x\}$

Riduzione $\overline{K} \leq B$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \overline{K} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } \neg H(x,x,y) \\ \uparrow & \text{se } H(x,x,y) \end{cases} = 1(\mu t. \chi(x,x,y))$$

* se $x \in \overline{K} \Rightarrow H(x,x,y)$ non restituisce mai 1 quindi

$g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = 1 \ \forall y \quad W_{f(x)} = \mathbb{N} \rightarrow f(x) \in B$

* se $x \notin \overline{K} \Rightarrow H(x,x,y)$ restituisce anche 1 (per un y sufficientemente grande)

$g(x,y) = \varphi_{f(x)}(y) = \uparrow$ per certi valori

quindi non tutti gli $y > x$ sono nel $W_{f(x)} \Rightarrow f(x) \notin B$

f è funz. di riduzione $\Rightarrow B$ è non r.e.

TEOREMA DI PROIEZIONE

Dato un predicato $P(\vec{x},y)$ semi-decidibile allora $\exists y . P(\vec{x},y)$ è semi-decidibile

Applico il teorema di struttura su $P(\vec{x},y)$: $P(\vec{x},y) = \cancel{\exists y . Q(\vec{x},y)}$ con $Q(\vec{x},y)$ decidibile

$P(\vec{x},y) = \exists t . Q(\vec{x},y,t)$ con Q decidibile.

$P'(\vec{x}) = \exists y . P(\vec{x},y) = \exists y . \exists t . Q(\vec{x},y,t)$ per l'equazione sopra

$= \exists w . Q_2(\vec{x},w)$ con Q decidibile $\rightarrow$ quindi $P'(\vec{x})$ semi-decidibile per il teorema di struttura

TEOREMA DI STRUTTURA:

Un predicato $P(\vec{x})$ è semi-decidib. sse $\exists . Q(t,\vec{x})$ decidibile tale che $P(\vec{x}) = \exists t . Q(t,\vec{x})$

Dim ($\Leftarrow$) Ho $P(\vec{x}) = \exists t . Q(t,\vec{x})$ e Q decidibile

Scrivo la sc_P:

$$sc_P = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in P \\ \uparrow & \text{se } x \notin P \end{cases} = 1(\mu t . sg\,\chi_Q(t,x))$$ calcolabile $\rightarrow P(\vec{x})$ semi-decidib.

Dim ($\Rightarrow$) Ho $P(\vec{x})$ semi-decidibile, quindi la sc_P calcolabile

Allora esiste un indice per il programma che calcola $sc_P = \varphi_e$

$sc_P \downarrow 1$ sse φ_e termina cioè $\exists t . H(e,x,t)$ termina

H decidibile quindi $\exists t . H(e,x,t) = \exists t . Q(t,x)$