Problema 4: Solución por Transformada de Laplace

Resolver la ED de tercer orden:

$$y^{(3)} - 6y'' + 9y' = 0$$

con condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Paso 1: Aplicar Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y^{(3)} - 6y'' + 9y'\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$\left[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)\right] - 6\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + 9\left[sY(s) - y(0)\right] = 0$$

Paso 2: Sustituir condiciones iniciales

$$s^3Y(s) - 2s^2 - s - 0 - 6s^2Y(s) + 12s + 6 + 9sY(s) - 18 = 0$$

Paso 3: Agrupar términos

$$(s^3 - 6s^2 + 9s)Y(s) - 2s^2 + 11s - 12 = 0$$

$$(s^3 - 6s^2 + 9s)Y(s) = 2s^2 - 11s + 12$$

Paso 4: Factorizar y despejar $Y(s)$

$$s(s-3)^2Y(s) = 2s^2 - 11s + 12$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 11s + 12}{s(s-3)^2}$$

Paso 5: Descomposición en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-3} + \frac{C}{(s-3)^2}$$

Calculamos los coeficientes:

- Para A (evaluando en $s = 0$):

$$2(0)^2 - 11(0) + 12 = A(0-3)^2 \Rightarrow 12 = 9A \Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

- Para C (evaluando en $s = 3$):

$$2(3)^2 - 11(3) + 12 = C(3) \Rightarrow 18 - 33 + 12 = 3C \Rightarrow -3 = 3C \Rightarrow C = -1$$

- Para B (comparando coeficientes):

$$2s^2 - 11s + 12 = A(s-3)^2 + Bs(s-3) + Cs$$

Sustituyendo A y C, y evaluando en $s = 1$:

$$2 - 11 + 12 = \frac{4}{3}(4) + B(1)(-2) - 1(1) \Rightarrow 3 = \frac{16}{3} - 2B - 1 \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

Paso 6: Transformada inversa

$$Y(s) = \frac{4/3}{s} + \frac{2/3}{s-3} - \frac{1}{(s-3)^2}$$

$$y(t) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} - te^{3t}$$

Solución final

$$\boxed{y(t) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^{3t} - te^{3t}}$$

Ejemplo Adicional 1: ED de segundo orden no homogénea

Resolver:

$$y'' + 4y = 8\sin(2t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Solución por Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y'' + 4y\} = \mathcal{L}\{8\sin(2t)\}$$

$$s^2Y(s) + 4Y(s) = \frac{16}{s^2+4}$$

$$Y(s) = \frac{16}{(s^2+4)^2}$$

$$y(t) = \boxed{\sin(2t) - 2t\cos(2t)}$$

Ejemplo Adicional 2: ED con raíces complejas

Resolver:

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Solución por Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 5y\} = 0$$

$$s^2Y(s) - s + 2sY(s) - 2 + 5Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4}$$

$$y(t) = \boxed{e^{-t}\cos(2t) + \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)}$$

Solución por Transformada de Laplace

Resolver la ED:

$$y'' + 2y' - 8y = 4e^{3t}$$

con condiciones iniciales $y(0) = 2$ y $y'(0) = -1$.

Paso 1: Aplicar Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' - 8y\} = \mathcal{L}\{4e^{3t}\}$$

$$(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 2(sY(s) - y(0)) - 8Y(s) = \frac{4}{s-3}$$

Paso 2: Sustituir condiciones iniciales

$$s^2Y(s) - 2s + 1 + 2sY(s) - 4 - 8Y(s) = \frac{4}{s-3}$$

Paso 3: Agrupar términos

$$(s^2 + 2s - 8)Y(s) - 2s - 3 = \frac{4}{s-3}$$

$$(s^2 + 2s - 8)Y(s) = \frac{4}{s-3} + 2s + 3$$

Paso 4: Factorizar y despejar $Y(s)$

$$(s+4)(s-2)Y(s) = \frac{4 + (2s+3)(s-3)}{s-3}$$

$$Y(s) = \frac{2s^2 - 3s - 5}{(s-3)(s+4)(s-2)}$$

Paso 5: Descomposición en fracciones parciales

$$Y(s) = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s-2}$$

Calculamos los coeficientes:

- Para A (evaluando en $s = 3$):

$$2(3)^2 - 3(3) - 5 = A(3+4)(3-2)$$

$$18 - 9 - 5 = A(7)(1) \Rightarrow 4 = 7A \Rightarrow A = \frac{4}{7}$$

- Para B (evaluando en $s = -4$):

$$2(-4)^2 - 3(-4) - 5 = B(-4-3)(-4-2)$$

$$32 + 12 - 5 = B(-7)(-6) \Rightarrow 39 = 42B \Rightarrow B = \frac{13}{14}$$

- Para C (evaluando en $s = 2$):

$$2(2)^2 - 3(2) - 5 = C(2-3)(2+4)$$

$$8 - 6 - 5 = C(-1)(6) \Rightarrow -3 = -6C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Paso 6: Transformada inversa

$$Y(s) = \frac{4/7}{s-3} + \frac{13/14}{s+4} + \frac{1/2}{s-2}$$

$$y(t) = \frac{4}{7}e^{3t} + \frac{13}{14}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t}$$

Solución final

$$\boxed{y(t) = \frac{4}{7}e^{3t} + \frac{13}{14}e^{-4t} + \frac{1}{2}e^{2t}}$$

Ejemplos Transformada Inversa de Laplace

Para Principiantes Absolutos

1. Ejemplo 1: La exponencial simple

Problema:

Encontrar la función original correspondiente a:

$$\frac{5}{s-2}$$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar la forma básica: La expresión $\frac{1}{s-a}$ siempre corresponde a e^{at}.

Paso 2: Comparar con nuestro problema:

$$\frac{5}{s-2}$$

Aquí $a = 2$ porque el denominador es $s - 2$.

Paso 3: Aplicar la regla:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$$

Paso 4: Incluir el numerador: El 5 está multiplicando, así que:

$$5 \times e^{2t} = 5e^{2t}$$

Respuesta Final:

$$\boxed{5e^{2t}}$$

2. Ejemplo 2: Función trigonométrica coseno

Problema:

Encontrar la función original para:

$$\frac{s}{s^2+16}$$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Recordar la forma estándar:

$$\frac{s}{s^2+a^2} \to \cos(at)$$

Paso 2: Identificar los valores:

$$s^2+16 = s^2+4^2 \Rightarrow a = 4$$

Paso 3: Aplicar directamente:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos(4t)$$

Respuesta Final:

$$\boxed{\cos(4t)}$$

3. Ejemplo 3: Fracciones parciales

Problema:

Resolver:

$$\frac{3s+2}{s^2+3s+2}$$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Factorizar el denominador:

$$s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

Paso 2: Separar en fracciones simples:

$$\frac{3s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Paso 3: Calcular A y B:

$$3s+2 = A(s+2) + B(s+1)$$

- Para $s = -1$: $3(-1)+2 = A(1) \Rightarrow A = -1$
- Para $s = -2$: $3(-2)+2 = B(-1) \Rightarrow B = 4$

Paso 4: Reescribir la expresión:

$$\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

Paso 5: Aplicar la transformada inversa:

$$-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = -e^{-t} + 4e^{-2t}$$

Respuesta Final:

$$\boxed{-e^{-t} + 4e^{-2t}}$$

4. Ejemplo 4: Con función escalón unitario

Problema:

Interpretar:

$$\frac{e^{-2s}}{s^2}$$

Solución Paso a Paso:

Paso 1: Identificar partes:

- e^{-2s} indica un retraso de 2 unidades
- $\frac{1}{s^2}$ corresponde a t

Paso 2: Aplicar la regla del escalón:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^n}\right\} = \frac{(t-a)^{n-1}}{(n-1)!}u(t-a)$$

Para nuestro caso ($a = 2$, $n = 2$):

$$(t-2)u(t-2)$$

Respuesta Final:

$$\boxed{(t-2)u(t-2)}$$

Donde $u(t-2)$ es una función que vale 0 para $t < 2$ y 1 para $t \geq 2$.