Online Convex Optimization (OCO)

Михаил Лепехин и Роман Логинов, группа 694

24 декабря 2018 г.

Применение Online Convex Optimisation к задаче фильтрации спама

Предположим, что признаки email-сообщений принадлежат множеству $\mathcal{X}$. В качестве признаков будем рассматривать частоты вхождений слов (или групп слов, чтобы размерность мн-ва признаков не получилась слишком большой) в сообщение.

На каждом шаге t функция $a_t : \mathcal{X} \to [0,1]$, сопоставляет вектору $x \in \mathcal{X}$ значений признаков некоторое число из отрезка $[0,1]$. По смыслу это значение является оценкой вероятности (уверенности) того, что сообщение с данными значениями признаков является спамом.

На каждом шаге t соперник выбирает вектор значений признаков x_t и индикатор y_t того, что данное сообщение является спамом.

Для оценки точности метода принятия решений a_t нужно взять некоторую функцию потерь f_t. Например, квадратичную функцию потерь:

$$f_t(a_t) := (y_t - a_t(x_t))^2.$$

На каждом шаге функция $a_t(x)$ выбирается из некоторого множества так, чтобы минимизировать *regret*:

$$\sum_{t=1}^{T} f_t(a_t) - \min_{a\in\mathcal{A}} \sum_{t=1}^{T} f_t(a) = \sum_{t=1}^{T}(y_t - a_t(x_t))^2 - \min_{a\in\mathcal{A}} \sum_{t=1}^{T}(y_t - a(x_t))^2$$

Выбор функции $a_t(x)$

В машинном обучении для решения задачи классификации спама часто делают следующее. При помощи некоторого алгоритма находят вектор фильтра a из шара $B_R(0)$ относительно некоторой нормы. А после - для определения, является ли сообщение с вектором значений признаков x спамом, рассматривают скалярное произведение $< a, x >$.

Если $< a, x > > 0$, то сообщение является спамом. Если же знак скалярного произведения отрицательный, то сообщение не является спамом. А если получилось так, что скалярное произведение равно 0, то считается, что тип сообщения не определён.

Будем строить функцию a_t из похожих соображений. Будем также подбирать вектор фильтра w_t из $B_R(0)$ и большим значениям скалярного произведения $< w_t, x >$ будет сопоставлять большую вероятность.

В качестве $\mathcal{X}$ возьмём множество векторов x из ${\mathbb{R}_+}^d$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 100$ (здесь каждой группе слов сопоставляется процент количества слов из этой группы по отношению ко всем словам в сообщении).

Покажем, что скалярного произведение $< w_t, x >$ ограничено. По неравенству Коши-Буняковского:

$$< w_t, x >^2 \leq ||w_t||_2^2 * ||x||_2^2 \leq R^2 * ||x||_2^2 \leq R^2 * 100^2.$$

Причём, равенство здесь достигается, если сразу выполняются 3 ограничения:

1) x коллинеарен w_t - получим равенство в нер-ве К-Б,

2) $w_t = R$ - получим 2 равенство,

3) $\exists i \in \{1, \ldots, d\} : x_i = 100$.

Тогда определим $M := 100R$.

В качестве функции $a_t(x)$ возьмём

$$a_t(x) = \frac{< x, w_t > +M}{2M}.$$

Тогда функция f_t запишется следующим образом:

$$f_t(x) = \left(y_t - \frac{< x, w_t > +M}{2M} \right)^2$$

Свойства выбранной функции $a_t(x)$

Для нас очень важным свойством будет являться то, что выбранная функция $a_t(x)$ сильно выпукла. Покажем это.

Вычислим её градиент.

$$\frac{\partial f_t}{\partial x}(x) = \frac{2}{2M}(< x, w_t > +M)\frac{w_t}{2M} = \frac{< x, w_t > +M}{4M^2} w_t$$

Продифференцируем градиент по x и получим гессиан.

$$\frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2}(x) = \frac{1}{4M^2} w_t w_t^T \succeq 0$$

Положительная полуопределённость следует из того, что $\forall x \in \mathcal{X}$: $x^T w_t w_t^T x_t = (w_t^T x_t)^T w_t^T x_t =< w_t^T x_t, w_t^T x_t >\geq 0$ - по свойствам скалярного произведения.

По дифференциальному критерию выпуклости 2 порядка функция $f_t(x)$ выпукла.

Методы первого порядка

В данном разделе мы рассмотрим базовые алгоритмы для Online Convex Optimization, которые достаточно неплохо применимы на практике.

В целом данные методы похожи на соответствующие методы первого порядка для задач обычной выпуклой оптимизации. Но они принципиально отличаются целью применения. Ведь при помощи методов OCO мы стремимся минимизировать не ошибку оптимизации, а *regret*:

$$regret = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \min_{x \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} f_t(x)$$

Для сравнения *regret* с ошибкой оптимизации полезно рассмотреть среднее значение *regret*, т.е. $\frac{regret}{T}$.

Введём обозначение:

$$\overline{x}_T := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} x_t$$

Пусть все функции f_t равны некоторой функции $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$, то из неравенства Йенсена получим:

$$f(\overline{x}_T) - f(x^*) = f(\overline{x}_T) - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} f(x^*) \leq \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \big(f(x_t) - f(x^*) \big)$$

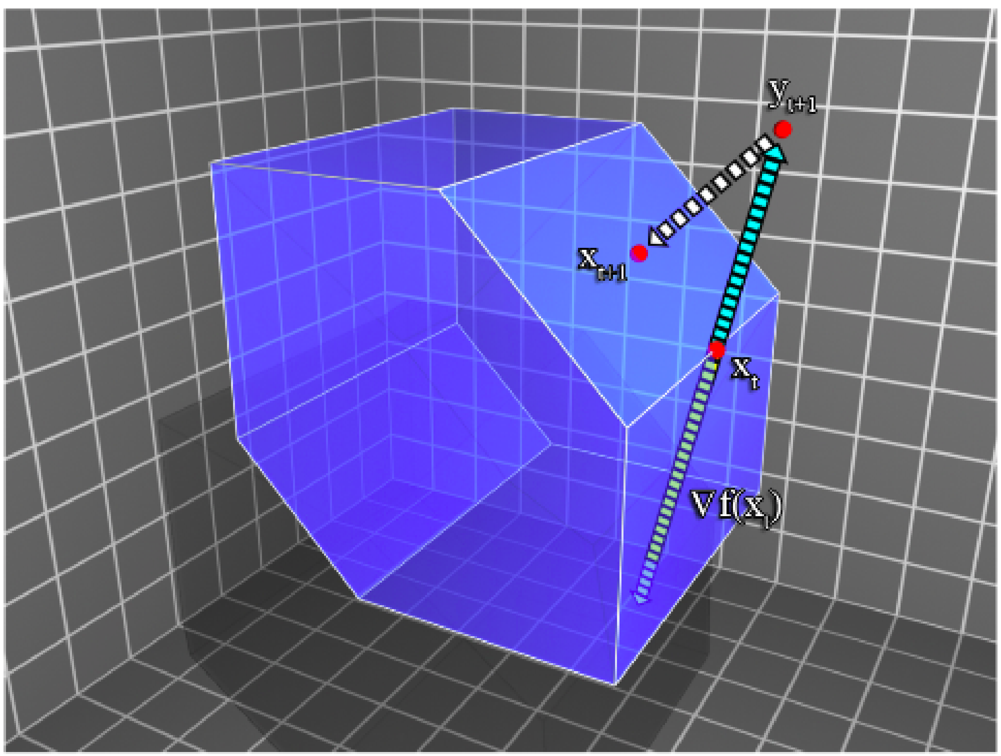
Таким образом мы показали следующий факт:

функция $f(x_T)$ сходится к $f(x*)$ не менее быстро, чем среднее значение *regret*.

Online gradient descent

Этот алгоритм, пожалуй, является одним из наиболее интуитивных и простых в Online Convex Optimization. Он базируется на известном нам методе градиентного спуска для offline выпуклой оптимизации.

На каждой итерации этот алгоритм делает шаг от предыдущей точки x_k в направлении градиента предыдущего веса. Но такой шаг может привести к выходу за границу допустимого выпуклого множества D. Для того, чтобы этого не произошло, алгоритм проецирует полученную точку обратно на множество D, находя ближайшую к ней в D.



Несмотря на то, что функция весов на следующем шаге может существенно отличаться от веса на предыдущем шаге, *regret*, получаемый алгоритмом все равно будет сублинейным.

Это следует из следующей теоремы.

Теорема. Online градиентный спуск с шагом, заданным по правилу $\alpha_t = \frac{D}{G\sqrt{t}}$, для любого $T \geq 1$ гарантирует:

$$regret = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \min_{x \in \mathcal{K}} \sum_{t=1}^{T} f_t(x) \leq \frac{3}{2} GD\sqrt{T}$$

Кроме того, при выборе шага по данному правилу метод online градиентного спуска является асимптотически оптимальным по значению $regret$.

Теорема. Любой алгоритм для OCO в худшем случае выдаёт $regret = \Omega(DG\sqrt{T})$. Это утверждение верно даже при выборе функции веса из некоторого фиксированного распределения.

Stochastic gradient descent