Методы оптимизации. Семинар 4. Условия оптимальности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий

25 сентября 2018 г.

Напоминание

- Выпуклые функции
- Неравенство Йенсена

Мотивация

Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

Существование решения

Теорема Вейерштрасса

Пусть $X \subset R^n$ компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на X. Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на X существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

Условия оптимальности

Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнимость которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Задача безусловной минимизации
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Задача безусловной минимизации

Задача: $f(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n}$.

Критерий для выпуклой гладкой функции

Если $f(x)$ выпукла и дифференцируема на $\mathbb{R}^n$. Тогда точка x^* решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow$ $\nabla f(x^*) = 0$.

Достаточное условие для невыпуклых функций

Пусть f дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и x^* такая что $\nabla f(x^*) = 0$. Тогда если $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$, то x^* точка строгого локального минимума $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$.

Примеры

- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \to \min$
- Функция Розенброка: $(1 - x_1)^2 + \alpha \sum\limits_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1}^2)^2 \to \min, \ \alpha > 0$
- $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$

Задача

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\text{s.t. } g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Возможные варианты

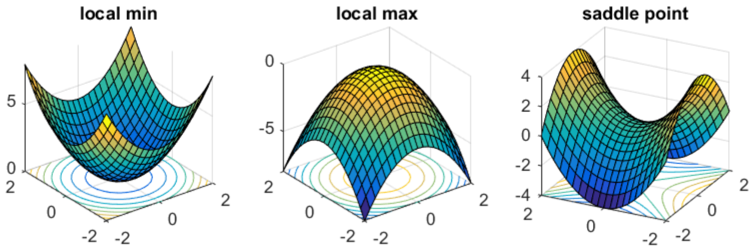

Рисунок взят из блога
http://www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/

Примеры

- Задача наименьших квадратов с линейными ограничениями

$$\min \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$$
$$\text{s.t. } Gx = h$$

Задача

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$\text{s.t. } g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m$$

$$h_j(x) \leq 0, \; j = 1, \ldots, p$$

Лагранжиан

$$L(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)$$

Условия оптимальности

Необходимое условие (Каруша-Куна-Такера)

Пусть x^* решение задачи математического программирования, и функции f, h_j, g_i дифференцируемы. Тогда найдутся такие $\boldsymbol{\mu}^*$ и $\boldsymbol{\lambda}^*$, что выполнены следующие условия:

- $g_i(x^*) = 0,\ i = 1, \ldots, m$
- $h_j(x^*) \leq 0,\ j = 1, \ldots, p$
- $\mu_j^* \geq 0,\ j = 1, \ldots, p$
- $\mu_j^* h_j(x^*) = 0,\ j = 1, \ldots, p$
- $\nabla_x L(x^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = 0$

Если задача выпуклая, то это же условие является достаточным.

Примеры

- $$\begin{aligned} &\min_x \sum_{i=1}^n x_i \log x_i \\ \text{s.t. } &x_i \ge 0 \\ &\sum_{i=1}^n x_i = 1 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} &\max_{x_1,x_2} 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } &2x_1 + x_2 \le 10 \\ &x_{1,2} \ge 0 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} &\min_{x_1,x_2} (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{s.t. } &x_1 + x_2 \le 4 \\ &x_1 + 3x_2 \le 9 \end{aligned}$$

Резюме

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
  - задачи безусловной оптимизации
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
  - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств