

Методы оптимизации.

Семинар 4. Условия оптимальности.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт
Факультет инноваций и высоких технологий

25 сентября 2018 г.

- Выпуклые функции
- Неравенство Йенсена

Вопрос 0

Когда существует решение оптимизационной задачи?

Вопрос 1

Как проверить, что точка является решением оптимизационной задачи?

Вопрос 2

Из каких условий можно найти решение оптимизационной задачи?

Теорема Вейерштрасса

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на X . Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на X существует.

Эта теорема гарантирует, что решение подавляющего большинства разумных задач существует.

Определение

Условием оптимальности будем называть некоторое выражение, выполнимость которого даёт необходимое и (или) достаточное условие экстремума.

Классы задач:

- Задача безусловной минимизации
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств
- Задача минимизации с ограничениями типа равенств и неравенств

Задача безусловной минимизации

Задача: $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$.

Критерий для выпуклой гладкой функции

Если $f(x)$ выпукла и дифференцируема на \mathbb{R}^n . Тогда точка x^* решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow \nabla f(x^*) = 0$.

Достаточное условие для невыпуклых функций

Пусть f дважды дифференцируема на \mathbb{R}^n и x^* такая что $\nabla f(x^*) = 0$. Тогда если $\nabla^2 f(x^*) \succ 0$, то x^* точка строгого локального минимума $f(x)$ на \mathbb{R}^n .

- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_1}) \cos x_2 \rightarrow \min$

- Функция Розенброка:

$$(1 - x_1)^2 + \alpha \sum_{i=2}^n (x_i - x_{i-1}^2)^2 \rightarrow \min, \alpha > 0$$

- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$

Задача

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$$

Возможные варианты

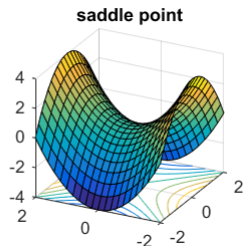
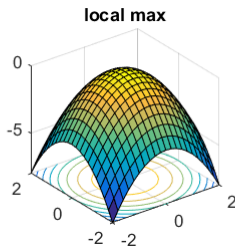
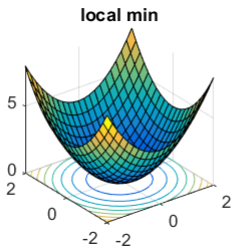


Рисунок взят из блога

<http://www.offconvex.org/2016/03/22/saddlepoints/>

- Задача наименьших квадратов с линейными ограничениями

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & Gx = h \end{aligned}$$

Задача

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ \text{s.t. } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Лагранжиан

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x)$$

Необходимое условие (Каруша-Куна-Такера)

Пусть x^* решение задачи математического программирования, и функции f, h_j, g_i дифференцируемы. Тогда найдутся такие μ^* и λ^* , что выполнены следующие условия:

- $g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$
- $h_j(x^*) \leq 0, j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* \geq 0, j = 1, \dots, p$
- $\mu_j^* h_j(x^*) = 0, j = 1, \dots, p$
- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$

Если задача выпуклая, то это же условие является достаточным.

Примеры

$$\min_x \sum_{i=1}^n x_i \log x_i$$

$$\text{s.t. } x_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\max_{x_1, x_2} 4x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t. } 2x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

$$\min_{x_1, x_2} (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$

- Существование решения оптимизационной задачи
- Условия оптимальности для
 - задачи безусловной оптимизации
 - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств
 - задачи оптимизации с ограничениями типа равенств и неравенств