Методы оптимизации. Семинар 3. Выпуклые функции.

Александр Катруца

Московский физико-технический институт,
Факультет инноваций и высоких технологий

18 сентября 2018 г.

Напоминание

- Производная по скаляру
- Производная по вектору
- Производная по матрице
- Производная сложной функции

Определения функций

Выпуклая функция

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется выпуклой (строго выпуклой), если X — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ ($\alpha \in (0, 1)$) выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \; (<) \; \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2)$$

Вогнутая функция

Функция f вогнутая (строго вогнутая), если $-f$ выпуклая (строго выпуклая).

Сильно выпуклая функция

Функция $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сильно выпуклой с константой $m > 0$, если X — выпуклое множество и для $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполнено:

$$f(\alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2) \leq \alpha f(\mathbf{x}_1) + (1 - \alpha) f(\mathbf{x}_2) - \frac{m}{2}\alpha(1 - \alpha)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2^2$$

Определения множеств

Надграфик (эпиграф)

Надграфиком функции f называется множество
$\mathrm{epi}f = \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ y \geq f(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Множество подуровней (множество Лебега)

Множество подуровня функции f называется следующее множество
$$C_\gamma = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) \leq \gamma\}.$$

Квазивыпуклая функция

Функция f называется квазивыпуклой, если её область определения и множество подуровней для любых γ выпуклые множества.

Критерии выпуклости

Дифференциальный критерий первого порядка

Функция f выпукла $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве X и $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}))^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

Дифференциальный критерий второго порядка

Непрерывная и дважды дифференцируемая функция f выпукла $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве X и $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{relint}(X) \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \succeq 0.$$

Связь с надграфиком

Функция выпукла $\Leftrightarrow$ её надграфик выпуклое множество.

Ограничение на прямую

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ выпукла тогда и только тогда, когда X выпуклое множество и выпукла функция $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ на множестве $\{t | \mathbf{x} + t\mathbf{v} \in X\}$ для всех $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Критерии сильной выпуклости

Дифференциальный критерий первого порядка

Функция f сильно выпукла с константой m $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве X и $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \subset \mathbb{R}^n$ выполнена:

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}))^\top (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{m}{2}\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2$$

Дифференциальный критерий второго порядка

Непрерывная и дважды дифференцируемая функция f сильно выпукла с константой m $\Leftrightarrow$ она определена на выпуклом множестве X и $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{relint}(X) \subset \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}) \succeq m\mathbf{I}.$$

Примеры

1. Квадратичная функция: $f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + r$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P} \in \mathbf{S}^n$
2. Нормы в $\mathbb{R}^n$
3. $f(\mathbf{x}) = \log\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — гладкое приближение максимума
4. Логарифм детерминанта: $f(\mathbf{X}) = -\log\det \mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathbf{S}^n_{++}$
5. Множество выпуклых функций — выпуклый конус
6. Поэлементный максимум выпуклых функций: $f(\mathbf{x}) = \max\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})\}$, $\mathrm{dom}\ f = \mathrm{dom}\ f_1 \cap \mathrm{dom}\ f_2$
7. Расширение на бесконечное множество функций: если для $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпуклая функция по $\mathbf{x}$, тогда $\sup\limits_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ выпукла по $\mathbf{x}$
8. Максимальное собственное значение: $f(\mathbf{X}) = \lambda_{\max}(\mathbf{X})$

Неравенство Йенсена

Для выпуклой функции f выполнено следующее неравенство:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{x}_i),$$

где $\alpha_i \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

или в бесконечномерном случае: $p(x) \geq 0$ и $\int\limits_X p(x) = 1$

$$f\left(\int\limits_X p(x) x dx\right) \leq \int\limits_X f(x) p(x) dx$$

при условии, что интегралы существуют.

Примеры

1. Неравенство Гёльдера
2. Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом
3. $f(\mathbf{E}(x)) \leq \mathbf{E}(f(x))$
4. Выпуклость множества $\{\mathbf{x} | \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \geq 1\}$

Резюме

- Выпуклая функция
- Надграфик и множество подуровня функции
- Критерии выпуклости функции
- Неравенство Йенсена