

# Методы оптимизации. Семинар 2. Векторное дифференцирование

Александр Катруца

Московский физико-технический институт  
Факультет Инноваций и Высоких Технологий

11 сентября 2018 г.

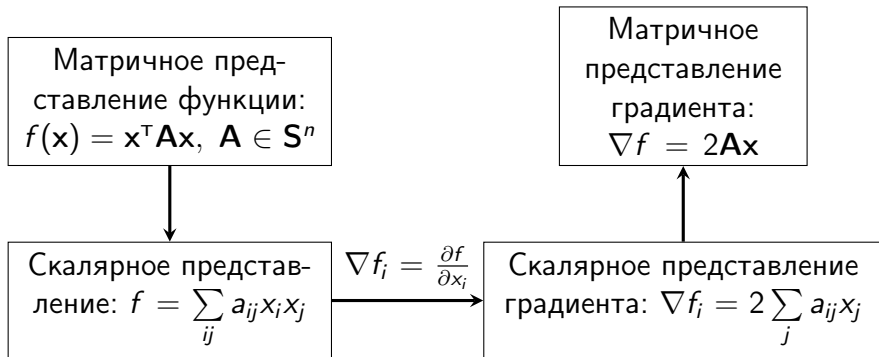
- Зачем нужно решать оптимизационный задачи?
- Постановки задач оптимизации
- Выпуклые множества и конусы

# Основные определения

Более подробно смотрите [здесь](#). Пусть  $f : D \rightarrow E$ ,  
производная  $\frac{\partial f}{\partial x} \in G$ :

$D$	$E$	$G$	Название
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Производная, $f'(x)$
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^n$	Градиент, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^m$	$\mathbb{R}^{n \times m}$	Матрица Якоби, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$
$\mathbb{R}^{m \times n}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{m \times n}$	$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}$

Также квадратная  $n \times n$  матрица вторых производных  
 $\mathbf{H} = [h_{ij}]$  в случае  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется гессиан и равна  
$$h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$



# Примеры

1. Линейная функция:  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$
2. Квадратичная форма:  $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x}$
3. Квадрат  $\ell_2$  нормы разности:  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$
4. Детерминант:  $f(\mathbf{X}) = \det \mathbf{X}$
5. След:  $f(\mathbf{X}) = \text{Tr}(\mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{B})$
6.  $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})$
7.  $f(\mathbf{A}) = (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})$
8.  $f(\mathbf{s}) = (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})^T \mathbf{W} (\mathbf{x} - \mathbf{A} \mathbf{s})$

# Сложная функция

Пусть  $f(\mathbf{x}) = g(u(\mathbf{x}))$ , тогда  $\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}$

Важно смотреть на размерности и понимать как записывать  $\frac{\partial g}{\partial u}$ .

Примеры:

1.  $\ell_2$  норма вектора:  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$
2. Экспонента:  $f(\mathbf{x}) = -e^{-\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$

- Производная по скаляру
- Производная по вектору
- Производная по матрице
- Производная сложной функции