ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση Αγνώστων Παραμέτρων, Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

Ονοματεπώνυμο: Παπούλιας Μιχαήλ

ΑΕΜ: 10204

email: mpapouli@ece.auth.gr

Θέμα 1

α) Αρχικά θα βρούμε το μαθηματικό μοντέλο που εκφράζει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Παρατηρώντας το σύστημα, προκύπτει από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma F = m \cdot \ddot{y} =>$$

$$=> m \cdot \ddot{y} = u - b \cdot \dot{y} - ky =>$$
$$=> \ddot{y} = -\frac{b}{m} \cdot \dot{y} - \frac{k}{m} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot u$$

Χρησιμοποιούμε ένα φίλτρο 2ης τάξης, καθώς έχουμε διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού, έστω το εξής:

$$\Lambda(s) = (s+2)^2$$

Τότε:

$$\frac{s^2}{(s+2)^2} \cdot y = -\frac{b}{m} \cdot \frac{s}{(s+2)^2} \cdot y - \frac{k}{m} \frac{1}{(s+2)^2} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \cdot u =>$$

$$=> \ y = \left(-\frac{b}{m} + 4\right) \cdot \frac{s}{(s+2)^2} \cdot y + \left(-\frac{k}{m} + 4\right) \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \cdot y + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+2)^2} \cdot u =>$$

$$=> y = \begin{bmatrix} \frac{b}{m} - 4 & \frac{k}{m} - 4 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{s}{(s+2)^2} \cdot y \\ -\frac{1}{(s+2)^2} \cdot y \\ \frac{1}{(s+2)^2} \cdot u \end{bmatrix}$$

ή και: $$y = \theta^{*T} \cdot \zeta$$

β) Ο αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων αποτελείται από μία απλή συνάρτηση που δέχεται ως ορίσματα την έξοδο (μετατόπιση) y του συστήματος και τον βοηθητικό πίνακα Φ, ως έξοδο το ζητούμενο διάνυσμα εκτίμησης θ_0. Καθώς το $\theta_0 \in \mathbb{R}^3$, το ελάχιστο σφάλμα εκτίμησης των παραμέτρων $\hat{m}, \hat{k}\ και\ \hat{b}$ θα εμφανίζεται, με βάση τη θεωρία, από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\theta_0^T = y^T \cdot \Phi \cdot (\Phi^T \cdot \Phi)^{-1}$$

Επομένως, έχουμε:

```
% function methodos elaxistwn tetragwnwn
function [thita] = methodos_elaxistwn_tetragwnwn(Y, F)
    thita = Y'*F*inv(F'*F);
end
```

γ) Προσομοιώνουμε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων, υποθέτοντας ότι m = 10kg, b = 0.5kg/s, k = 2.5kg/s^2 και u = 15sin(3t) + 8 N, από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή t=10sec, με δείγματα ανά 0.1sec. Το διάνυσμα εκτίμησης $\theta_0 \in \mathbb{R}^3$ είναι, με βάση τα αποτελέσματα του Matlab:

$$\theta_0 = [\,-3.95093909 \quad -3.75025523 \quad 0.09999515\,]$$

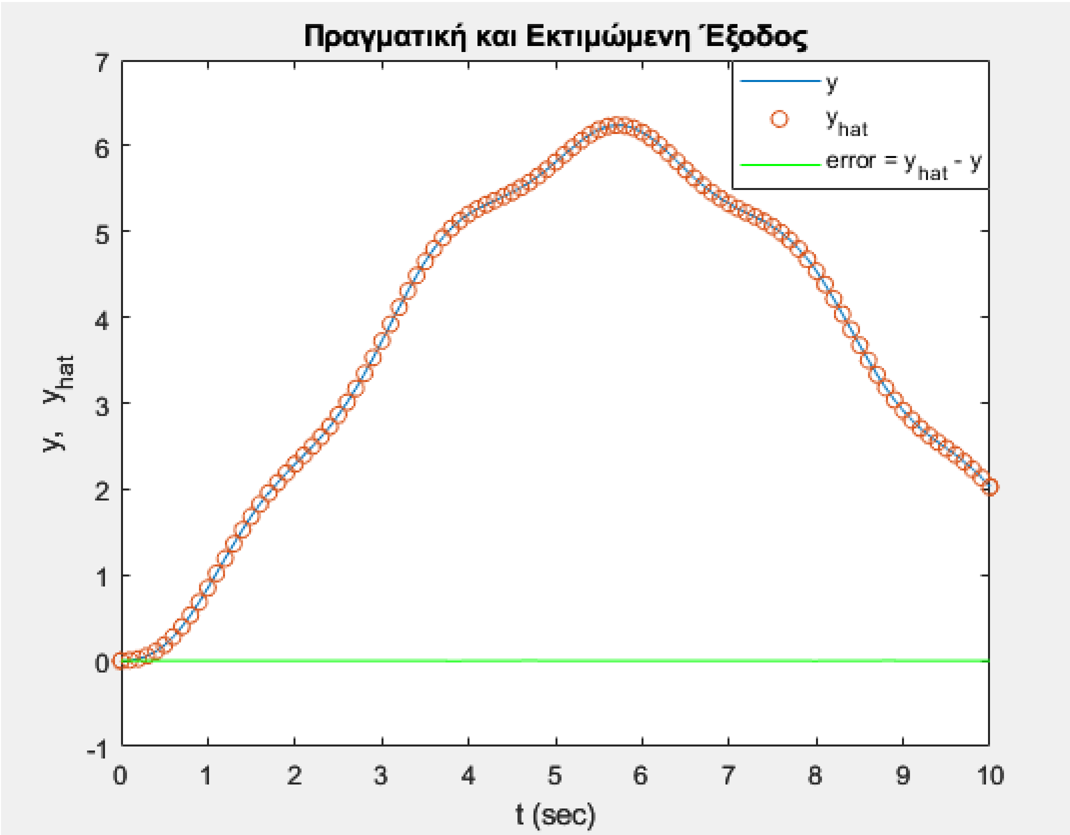
Επομένως, οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων θα είναι, εξισώνοντας το θ_0 με το ίσο του στο ερώτημα (α):

$$\hat{m} = 10.00048kg, \hat{k} = 2.497567kg/s^2\ \ και\ \ \hat{b}\ =\ 0.490632\ kg/s$$

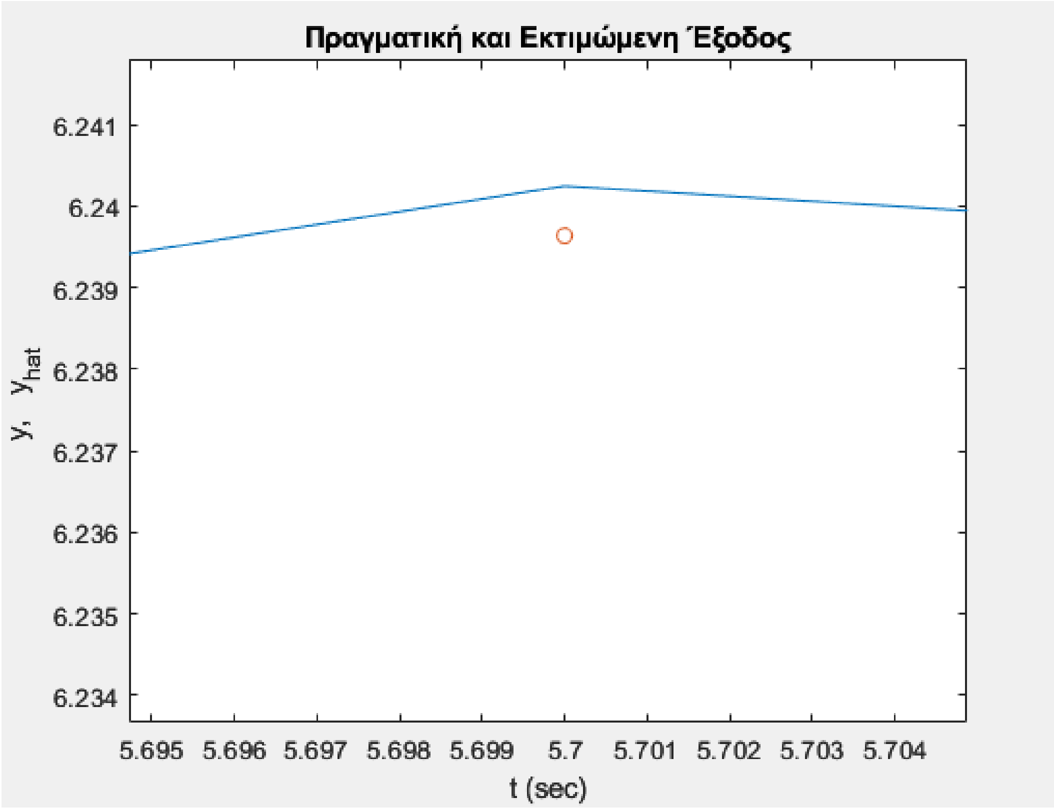
Με τον πίνακα θ_0 γνωστό, πλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\hat{y}$, μέσω του κλειστού τύπου:

$$\hat{y} = \theta_0 * \Phi$$

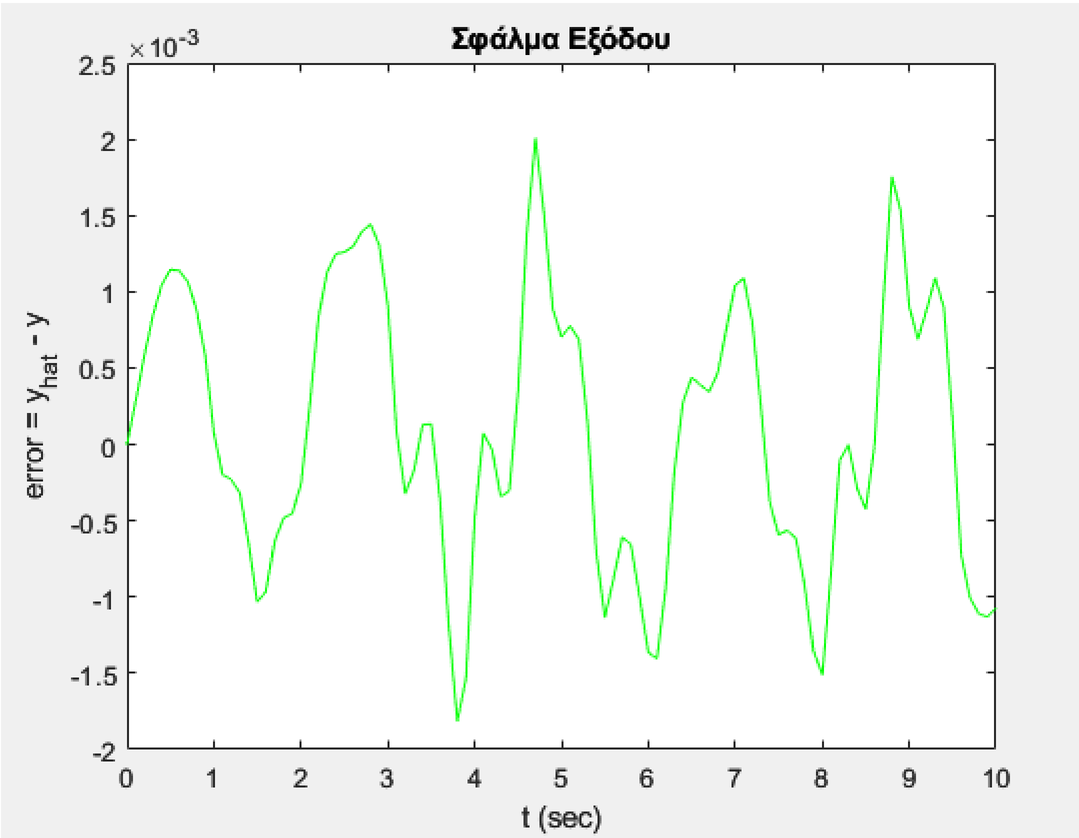
Επομένως, οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις της πραγματικής και της εκτιμώμενης εξόδου, καθώς και του σφάλματος μεταξύ αυτών είναι:



Παρατηρούμε ότι η εκτιμώμενη έξοδος $\hat{y}$ ακολουθεί την πραγματική έξοδο y με πολύ καλή ακρίβεια κάθε χρονική στιγμή. Βέβαια, αν μεγεθύνουμε το γράφημα πχ στην κορυφή του, θα διαπιστώσουμε ότι το σφάλμα δεν είναι μηδενικό, όπως φαίνεται εκ πρώτης όψεως από το παραπάνω γράφημα στην πράσινη καμπύλη. Δηλαδή με μεγέθυνση στην κορυφή του γραφήματος προκύπτει:



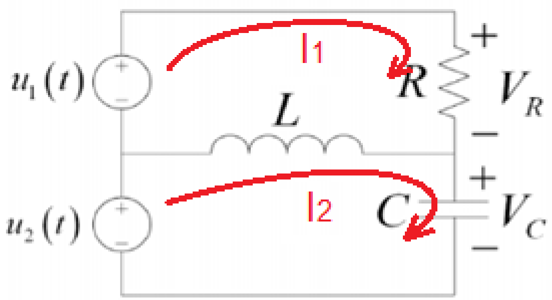
Επομένως, το σφάλμα μεταξύ της πραγματικής και της εκτιμώμενης εξόδου θα είναι, στην πραγματικότητα, το παρακάτω μη μηδενικό γράφημα:



Η παραπάνω κλίμακα είναι τάξης 10^-3, επομένως έχουμε πραγματικά πολύ καλή εκτίμηση των παραμέτρων $\widehat{\mathrm{m}}$, $\widehat{\mathrm{k}}$ και $\widehat{\mathrm{b}}$ και της εκτιμώμενης εξόδου $\hat{y}$, μιας και το σφάλμα βρίσκεται πολύ κοντά στο μηδέν.

Θέμα 2

α) Το κύκλωμα είναι το εξής:



Στο οποίο έχουμε δύο εισόδους U1 ,U2 και δύο εξόδους VR, VC. Από το κύκλωμα θα δημιουργήσουμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις των εξόδων, ώστε να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα. Έχουμε:

$$U_1 = V_R + L \cdot \dot{I}_1 - L \cdot \dot{I}_2$$
$$U_2 = V_C + L \cdot \dot{I}_2 - L \cdot \dot{I}_1$$

Και επειδή $I_1 = \frac{V_R}{R}$ και $I_2 = C \cdot \dot{V}_C$, οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$V_R = U_1 - L \cdot \frac{\dot{V}_R}{R} + L \cdot C \cdot \ddot{V}_C \qquad \text{(Σχέση 1)}$$
$$V_C = U_2 - L \cdot C \cdot \ddot{V}_C + L \cdot \frac{\dot{V}_R}{R} \qquad \text{(Σχέση 2)}$$

Όμως από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$U_1 = V_R + V_C - U_2$$

Οπότε εύκολα βρίσκουμε εξάγουμε τις βοηθητικές σχέσεις:

$$\dot{V}_R = \dot{U}_1 - \dot{V}_C + \dot{U}_2 \quad \text{(Σχέση 3)}$$

$$\ddot{V}_C = \ddot{U}_1 + \ddot{U}_2 - \ddot{V}_R \quad \text{(Σχέση 4)}$$

Η (1) γίνεται μέσω της (3):

$$U_1 - V_C + U_2 = U_1 - L \cdot \frac{\dot{U}_1 - \dot{V}_C + \dot{U}_2}{R} + L \cdot C \cdot \ddot{V}_C =>$$

$$\boxed{\ddot{V}_C = -\frac{1}{RC} \cdot \dot{V}_c - \frac{1}{LC} \cdot V_c + \frac{1}{LC} U_2 + \frac{1}{RC} \cdot \dot{U}_1 - \frac{1}{RC} \cdot \dot{U}_2}$$

Η (2) γίνεται μέσω της (4):

$$U_1 + U_2 - V_R = U_2 - LC \cdot \left(\ddot{U}_2 - \ddot{V}_R + \ddot{U}_2\right) + L \cdot \frac{\dot{V}_R}{R} =>$$

$$\boxed{\ddot{V}_R = -\frac{1}{RC} \dot{V}_R - \frac{1}{LC} \cdot V_R + \frac{U_1}{LC} + \ddot{U}_1 + \ddot{U}_2}$$

Και έτσι έχουμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις των εξόδων.

Χρησιμοποιούμε ένα φίλτρο $2^{ης}$ τάξης, καθώς έχουμε διαφορικές εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού:

$$\Lambda(s) = (s + \alpha)^2 \quad \text{με α>0}$$

Οπότε έχουμε $\lambda = [\, 2\alpha \quad a^2 \,]$

<u>Για την έξοδο VC:</u>

$$\theta_1^* = \left[\, \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \,\right] \quad \text{και} \quad \theta_2^* = \left[\, \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{RC} \,\right]$$

Επομένως $\theta^* = \left[\, \frac{1}{RC} - 2\alpha \quad \frac{1}{LC} - a^2 \quad \frac{1}{LC} \quad \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{RC} \,\right]$

και $\zeta = \left[\frac{-s}{(s+\alpha)^2} V_C \quad -\frac{1}{(s+\alpha)^2} V_C \quad \frac{1}{(s+\alpha)^2} U_2 \quad \frac{s}{(s+\alpha)^2} U_1 \quad \frac{-s}{(s+\alpha)^2} U_2 \right]$

ή και: $V_C = \theta^{*T} \cdot \zeta$

Για την έξοδο VR:

$$\theta_1^* = \left[\frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \right] \quad \text{και} \quad \theta_2^* = \left[\frac{1}{LC} \quad 1 \quad 1 \right]$$

Επομένως $\theta^* = \left[\frac{1}{RC} - 2\alpha \quad \frac{1}{LC} - a^2 \quad \frac{1}{LC} \quad 1 \quad 1 \right]$

και $\zeta = \left[\frac{-s}{(s+\alpha)^2} V_R \quad -\frac{1}{(s+\alpha)^2} V_R \quad \frac{1}{(s+\alpha)^2} U_1 \quad \frac{s^2}{(s+\alpha)^2} U_1 \quad \frac{s^2}{(s+\alpha)^2} U_2 \right]$

ή και: $V_R = \theta^{*T} \cdot \zeta$

Χρησιμοποιούμε στο φίλτρο πόλο 100.

Για την έξοδο VC:

Το διάνυσμα εκτίμησης $\theta_0 \in \mathbb{R}^5$ είναι, με βάση τα αποτελέσματα του Matlab:

θ_0 = *[-199.801663, 990008.26, 1000008.26, 0.200001, 0.00166477]*

από όπου εύκολα προκύπτει με καλή προσέγγιση ότι:

RC = 5 και LC = 9.999917*10^-7

Αγνοούμε ο 5ο στοιχείο του πίνακα θ_0, αφού φαίνεται ότι η παράγωγος της σταθερής τάσης εισόδου U2 θα είναι μηδέν.

Για την έξοδο VR:

Το διάνυσμα εκτίμησης $\theta_0 \in \mathbb{R}^5$ είναι, με βάση τα αποτελέσματα του Matlab:

θ_0 = *[-199.801522, 990008.26, 1000009.85, 1.099969, 0.999999]*

από όπου εύκολα επαληθεύουμε ότι:

RC = 5 και LC = 9.999917*10^-7

Έτσι, οι διαφορικές εξισώσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$\ddot{V}_C = -0.2\dot{V}_c - 1000009.85V_c + 1000009.85U_2 + 0.2\dot{U}_1 - 0.2\dot{U}_2$$

και

$$\ddot{V}_R = -0.2\dot{V}_R - 1000009.85V_R + 1000009.85U_1 + \ddot{U}_1 + \ddot{U}_2$$

Με μετασχηματισμό Laplace, προκύπτει:

$$(s^2 + 0.2s + 1000009.85)V_C = (0.2s)U_1 + (1000009.85 - 0.2s)U_2$$

και

$$(s^2 + 0.2s + 1000009.85)V_R = (s^2 + 1000009.85)U_1 + (s^2)U_2$$

Επομένως, ο πίνακας μεταφοράς του συστήματος θα είναι:

$$\begin{bmatrix} V_c \\ V_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.2s}{s^2 + 0.2s + 1000009.85} & \frac{1000009.85 - 0.2s}{s^2 + 0.2s + 1000009.85} \\ \frac{s^2 + 1000009.85}{s^2 + 0.2s + 1000009.85} & \frac{s^2}{s^2 + 0.2s + 1000009.85} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Προσομοιώνουμε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων, δεδομένου ότι U1=2*sin(4t) Volt και U2=4Volt, από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή t=10sec, με δείγματα ανά 1*10^-5 sec.

Με τον πίνακα θ_0 γνωστό, πλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε τα $\hat{V}_C$ και $\hat{V}_R$ μέσω του κλειστού τύπου:

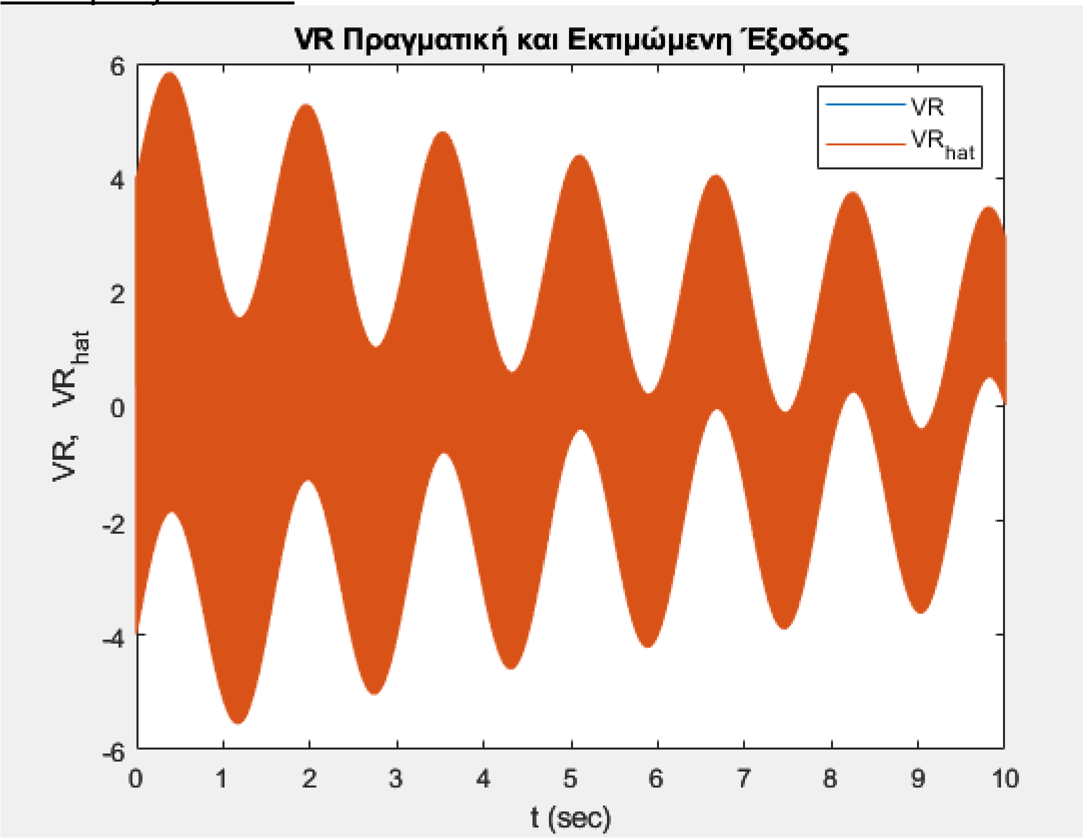
$$\hat{V}_C = \theta_0\_Vc * \text{F\_Vc}$$

και

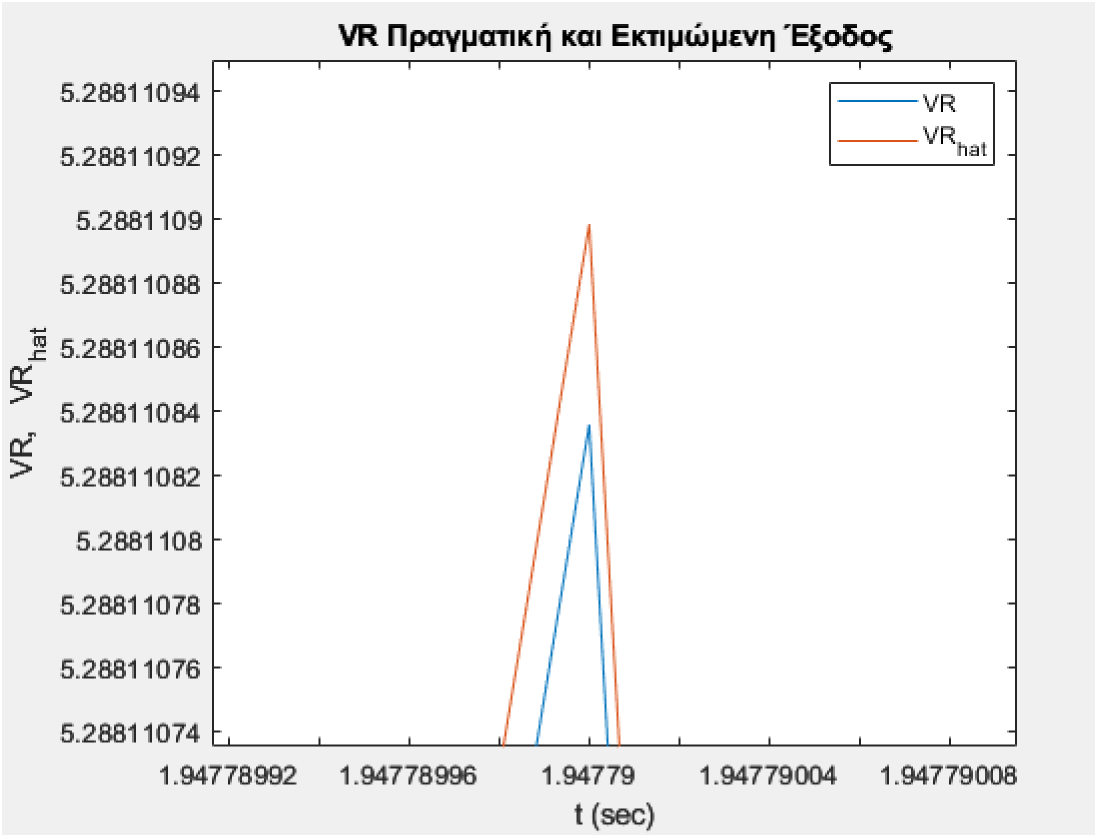
$$\hat{V}_R = \theta_0\_Vr * \text{F\_Vr}$$

Δημιουργούμε τα ζητούμενα διαγράμματα των πραγματικών και των εκτιμώμενων εξόδων, καθώς και τα σφάλματα αυτών:

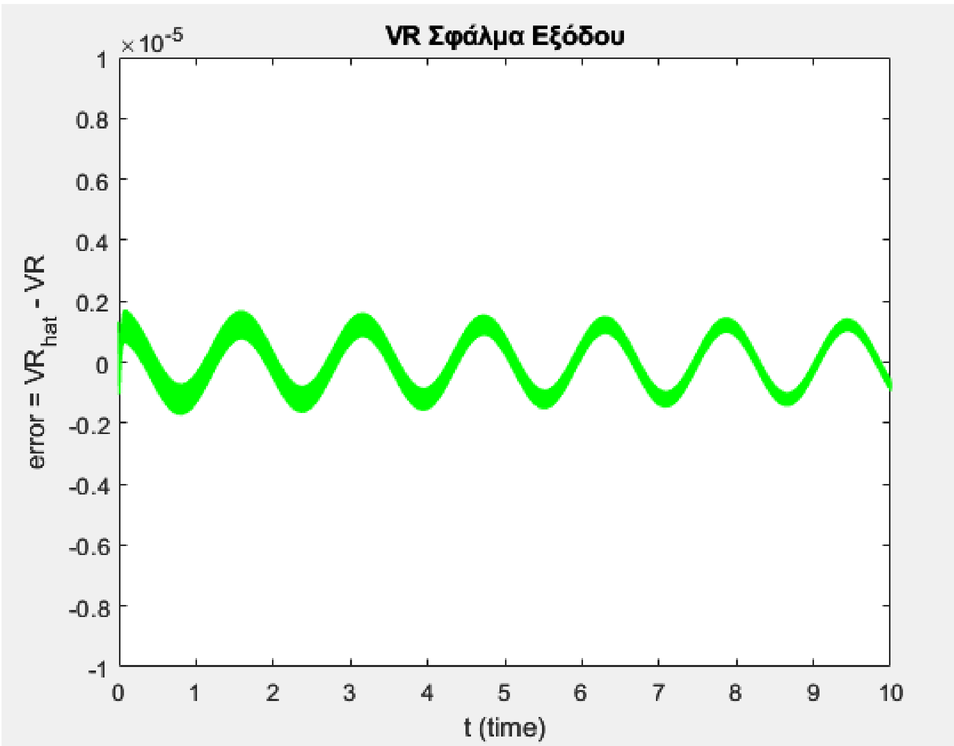
Για την έξοδο VR:



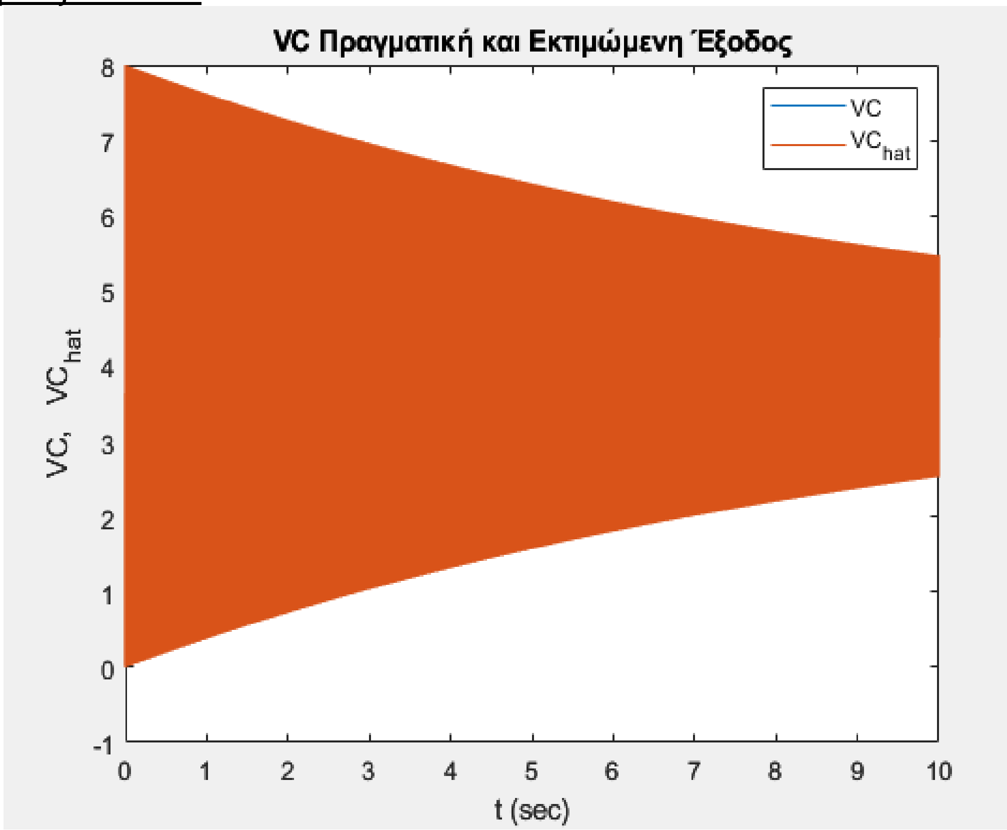
Φαίνεται ότι η πραγματική και η εκτιμώμενη έξοδος VR συμπίπτουν, ωστόσο αν μεγεθύνουμε σε μεγάλο βαθμό το γράφημα, έστω σε μια κορυφή του, προκύπτει το παρακάτω:



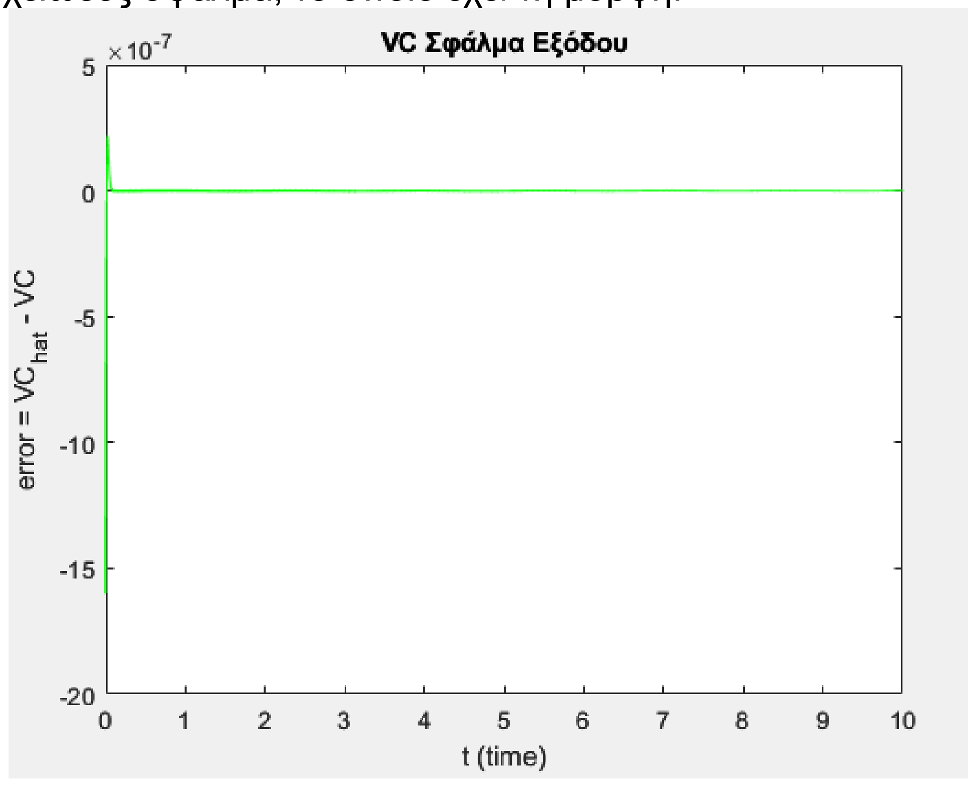
Από όπου βλέπουμε ότι το σφάλμα εκτίμησης, αν και πάρα πολύ μικρό, εν τούτοις δεν είναι μηδενικό:



Για την έξοδο VC:



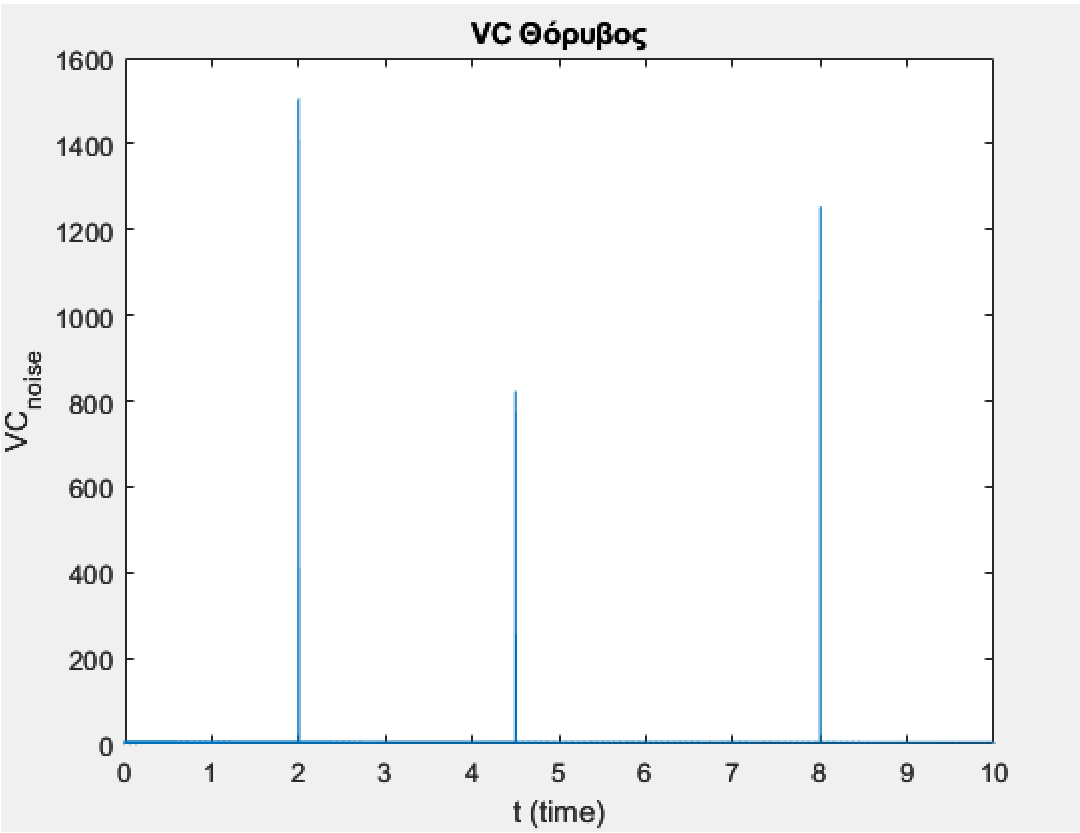
Κι εδώ φαίνεται ότι η πραγματική και η εκτιμώμενη έξοδος VC συμπίπτουν, ωστόσο αν μεγεθύνουμε σε μεγάλο βαθμό το γράφημα, έστω σε μια κορυφή του, φαίνεται ότι προκύπτει ένα στοιχειώδες σφάλμα, το οποίο έχει τη μορφή:



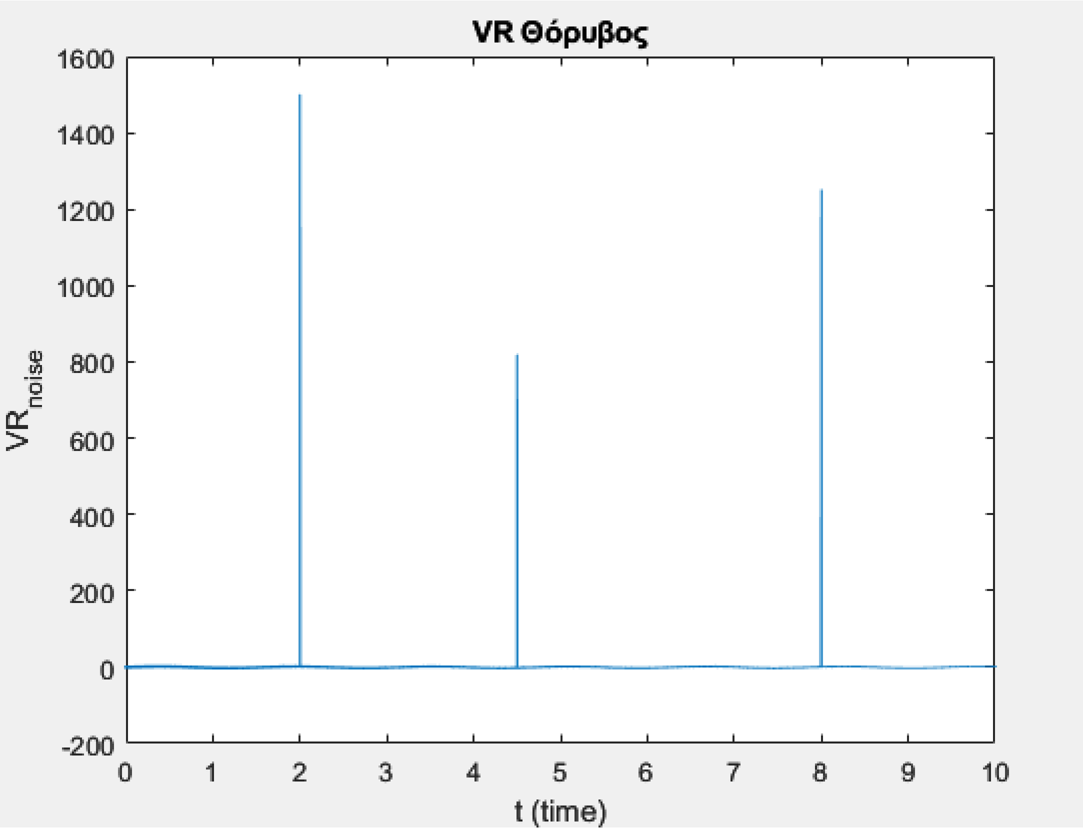
Φαίνεται ότι το σφάλμα εμφανίζει μια απότομη κορύφωση στην αρχή του χρόνου, και στη συνέχεια ταλαντώνεται πολύ κοντά στο μηδέν. Όπως και να έχει, η κλίμακα είναι τάξης 10^-7, επομένως έχουμε πάρα πολύ μικρό σφάλμα και άρα πολύ καλή εκτίμηση κι εδώ.

β) Θεωρούμε τώρα ότι θόρυβος επιδρά σε 3 τυχαίες χρονικές στιγμές των μετρήσεων εξόδων $V_R\ και\ V_C$, οι οποίες αποτελούνται από 10000001 τιμές η κάθε μία. Έστω πχ στις θέσεις 200000, 450000 και 800000 των πινάκων μετρήσεων, επιδρά προσθετικός θόρυβος με τιμές +1500, +820 και +1250, αντίστοιχα. Τότε, τα γραφήματα εξόδων θα είναι:

<u>Γράφημα θορύβου VC:</u>



Γράφημα θορύβου VR:



Αν εφαρμόσουμε για αυτές τις μετρήσεις εξόδων τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων, θα έχουμε για τα διανύσματα εκτίμησης παραμέτρων:

Για τον VR θόρυβο:

θ_0_noise = *[-196.35, 230781.35, 241148.84, 0.781827, 0.265198]*

Για τον VC θόρυβο:

θ_0_noise = *[-188.58, 233055.19, 243268.21, 78.497303, -4.398223]*

Φαίνεται ότι τα δύο αυτά διανύσματα θα δώσουν πολύ διαφορετικές εκτιμήσεις των παραμέτρων R, L και C, επομένως θα υπάρχει και μεγάλο σφάλμα στις εκτιμώμενες εξόδους.

(Για παράδειγμα, το πρώτο στοιχείο του VR θ_0_noise πίνακα ισούται με 1/RC – 200, δηλαδή προκύπτει RC = 0.274. Όμως, το πρώτο στοιχείο του VC θ_0_noise πίνακα ισούται με 1/RC – 200, δηλαδή προκύπτει RC = 0.0875. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτουν και στα υπόλοιπα στοιχεία σημαντικές αποκλίσεις).