ΕΡΓΑΣΙΑ 2

On line εκτίμηση άγνωστων παραμέτρων Μέθοδος Κλίσης - Μέθοδος Lyapunov

Ονοματεπώνυμο: Παπούλιας Μιχαήλ

ΑΕΜ: 10204

email: mpapouli@ece.auth.gr

Θέμα 1

α) Θα εφαρμόσουμε γραμμική παραμετροποίηση στο δοθέν σύστημα:

$$\dot{x} = -a \cdot x + b \cdot u$$

Όπου u η είσοδος του συστήματος, x η έξοδος, x(0)=0, a και b σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι, τις οποίες θέλουμε να προσδιορίσουμε με τη μέθοδο Μέγιστης κλίσης.

Έχουμε σύστημα 1ης τάξης, άρα θα χρησιμοποιήσουμε ευσταθές φίλτρο απλού πόλου, έστω της μορφής:

$$\Lambda(s) = \frac{1}{s+p}, \quad \text{με p>0 ο πόλος του φίλτρου}$$

Τότε:

$$\frac{s}{s+p} \cdot x = -\frac{a}{s+p} \cdot x + \frac{b}{s+p} \cdot u =>$$

$$=> x = (p - a) \cdot \frac{1}{s+p} x + b \cdot \frac{1}{s+p} \cdot u \quad =>$$

$$=> x = \begin{bmatrix} p - a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+p} \cdot x \\ \dfrac{1}{s+p} \cdot u \end{bmatrix}$$

ή και: $$x = \theta^{*T} \cdot \varphi$$

Δημιουργούμε το σύστημα αναγνώρισης:

$$\hat{x} = \hat{\theta}^T \cdot \phi$$

Τότε το σφάλμα εκτίμησης e θα είναι:

$$e = x - \hat{x} => \qquad e = x - \hat{\theta}^T \cdot \phi$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την κυρτή ως προς $\hat{\theta}$ συνάρτηση κόστους:

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \frac{\left(x - \hat{\theta}^T \cdot \phi\right)^2}{2}$$

Τότε:

$$\nabla K(\hat{\theta}) = (x - \hat{\theta}^* \cdot \phi) \cdot (-\phi) =>$$

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -e \cdot \phi$$

Η μέθοδος Μέγιστης Κλίσης ορίζει ότι:

$$\dot{\hat{\theta}} = -\gamma \cdot \nabla K(\hat{\theta}), \quad \text{με } \gamma>0$$

Δηλαδή:

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \cdot e \cdot \varphi$$

Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Matlab, ουσιαστικά έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 5 διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x} = -a \cdot x + b \cdot u$$

$$\phi_1 = \frac{x}{s+p} \Rightarrow \quad \dot{\phi}_1 = -p \cdot \phi_1 + x$$

$$\phi_2 = \frac{u}{s+\rho} \Rightarrow \quad \dot{\phi}_1 = -p \cdot \phi_2 + u$$

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma \cdot e \cdot \phi_1$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma \cdot e \cdot \phi_2$$

Όπου $\phi = [\,\phi_1 \quad \phi_2\,]$ και $\hat{\theta} = [\,\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2\,]$

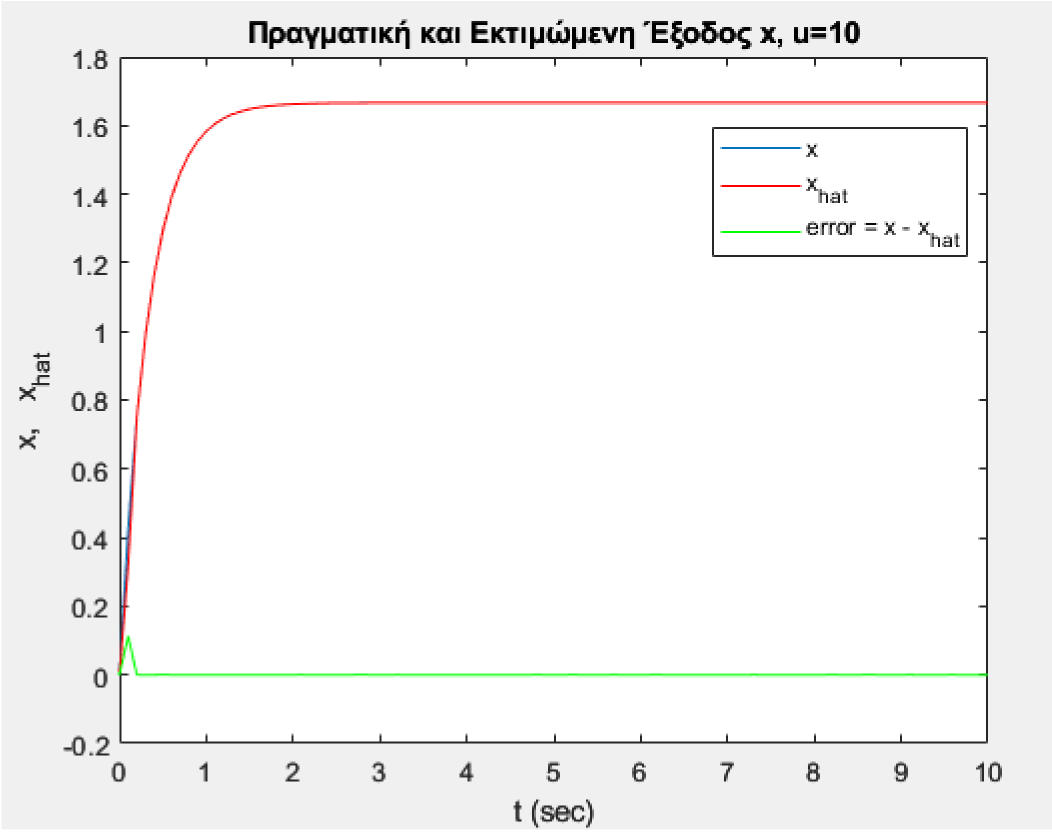
Στο ερώτημα αυτό θεωρούμε σταθερή είσοδο u=10. Οι εκτιμήσεις $\hat{a}, \hat{b}$ θα προκύψουν από την εύρεση του διανύσματος $\hat{\theta}$.

Τρέχουμε τον αλγόριθμο προσομοίωσης, για διακριτές χρονικές στιγμές, από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή t=10sec, με δείγματα ανά 0.1sec. Χρησιμοποιούμε πόλο p=3 και βήμα γ=50, οπότε και προκύπτει με βάση τα αποτελέσματα του Matlab ότι:

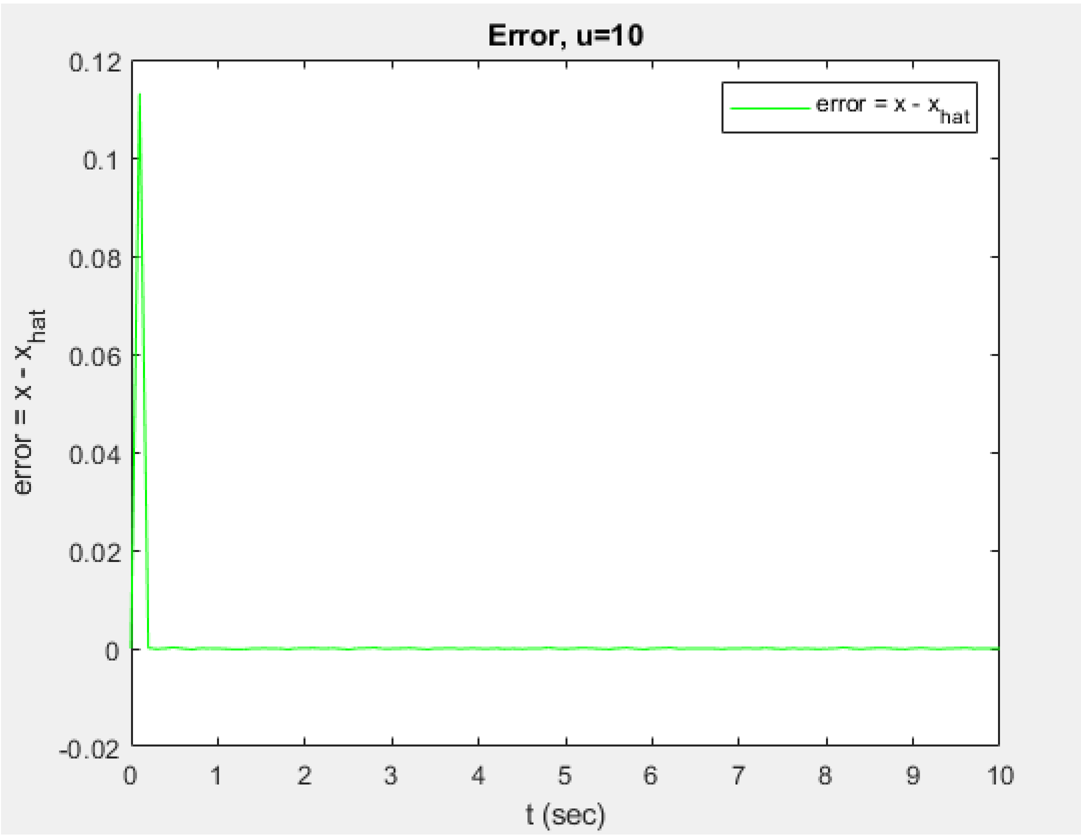
$$\hat{a} = 2.99053195 \quad \text{και} \quad \hat{b} = 0.49841511$$

Οι πραγματικές τιμές των α και b είναι α=3 και b=0.5. Φαίνεται, δηλαδή, ότι η εκτίμηση είναι πολύ καλή.

Δημιουργούμε τις γραφικές παραστάσεις της πραγματικής εξόδου x, της εκτιμώμενης εξόδου $\hat{x}$, καθώς και της διαφοράς αυτών των δύο (δηλαδή του σφάλματος e). Προκύπτει:

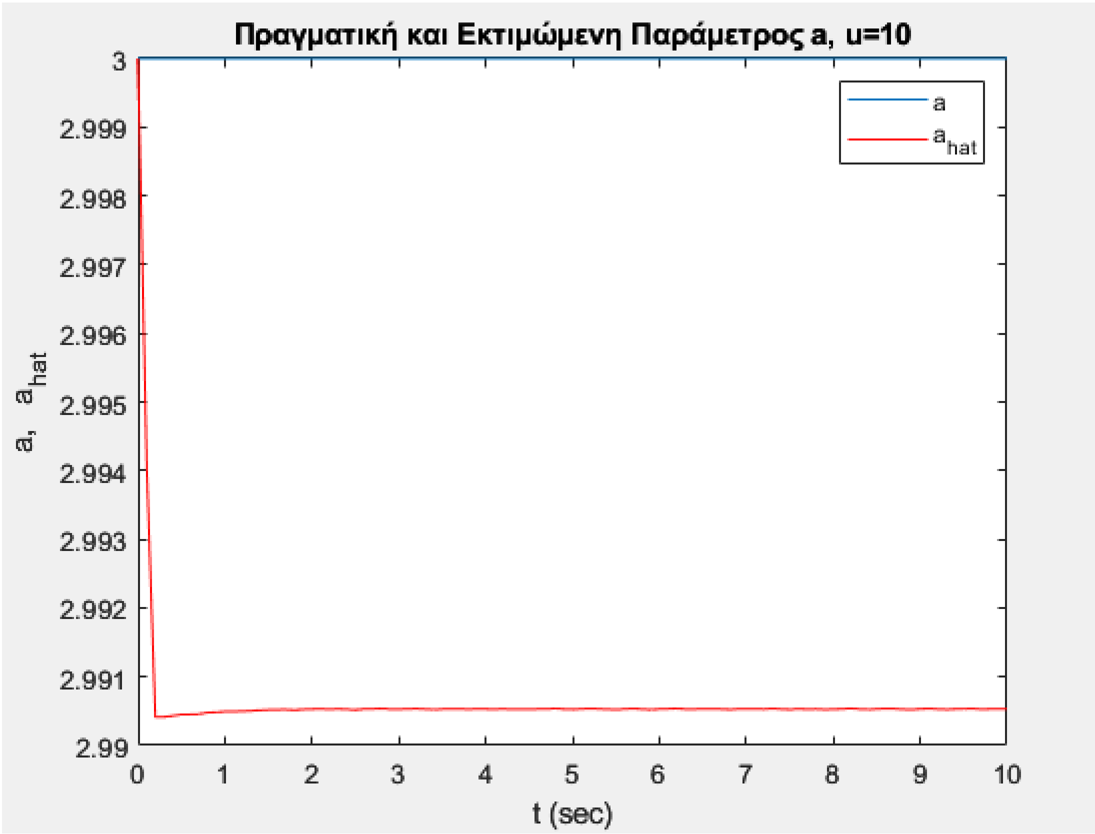


Παρατηρούμε ότι η εκτιμώμενη έξοδος $\hat{x}$ ακολουθεί την πραγματική έξοδο x με ολοένα και καλύτερη ακρίβεια, όσο περνάει ο χρόνος. Το σφάλμα e είναι διαρκώς μικρό, αλλά όχι μηδενικό:



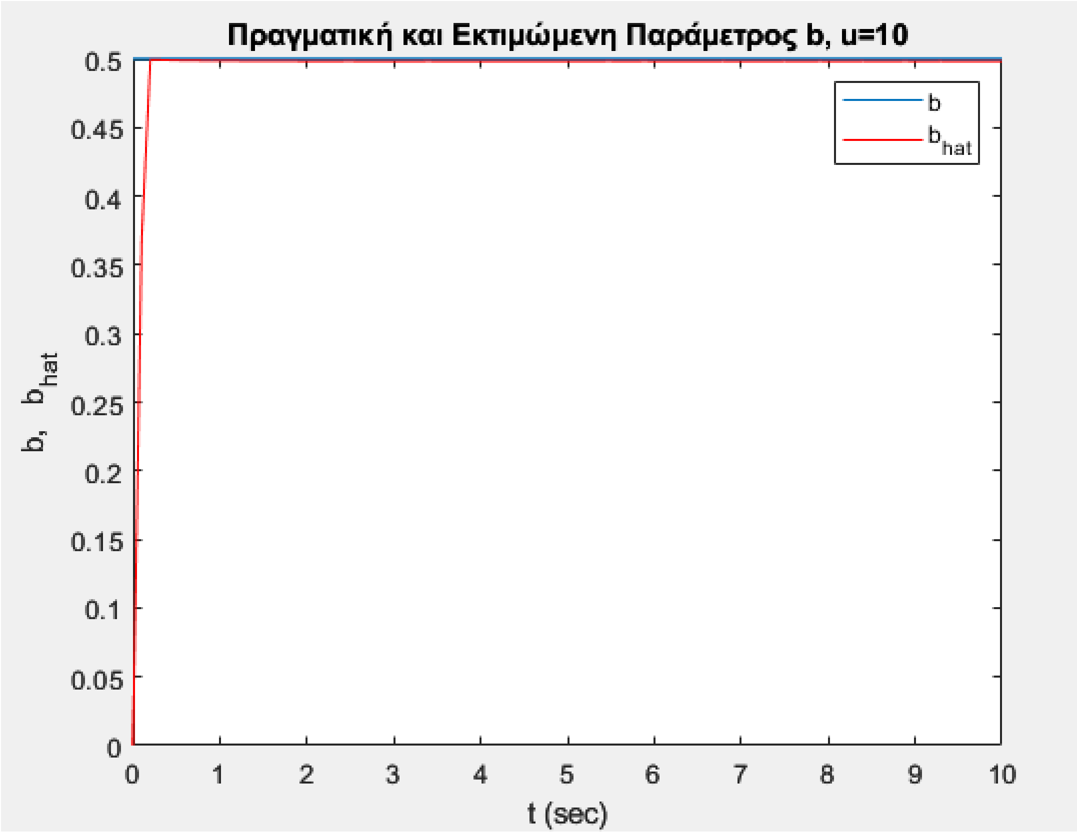
Αρχικά, δηλαδή, έχουμε σχετικά πιο μεγάλο σφάλμα, το οποίο τείνει στο μηδέν (για την ακρίβεια ταλαντώνει γύρω από αυτό) όσο περνάει ο χρόνος.

Ακόμη, εμφανίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των α, $\hat{a}$ και b, $\hat{b}$, στη διάρκεια του χρόνου:



Φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{a}$ αρχικά ταυτίζεται με την πραγματική της τιμή α=3, στη συνέχεια αποκλίνει ελάχιστα από αυτήν και επανέρχεται ελαφρώς όσο περνάει ο χρόνος.

Όσον αφορά την παράμετρο b:



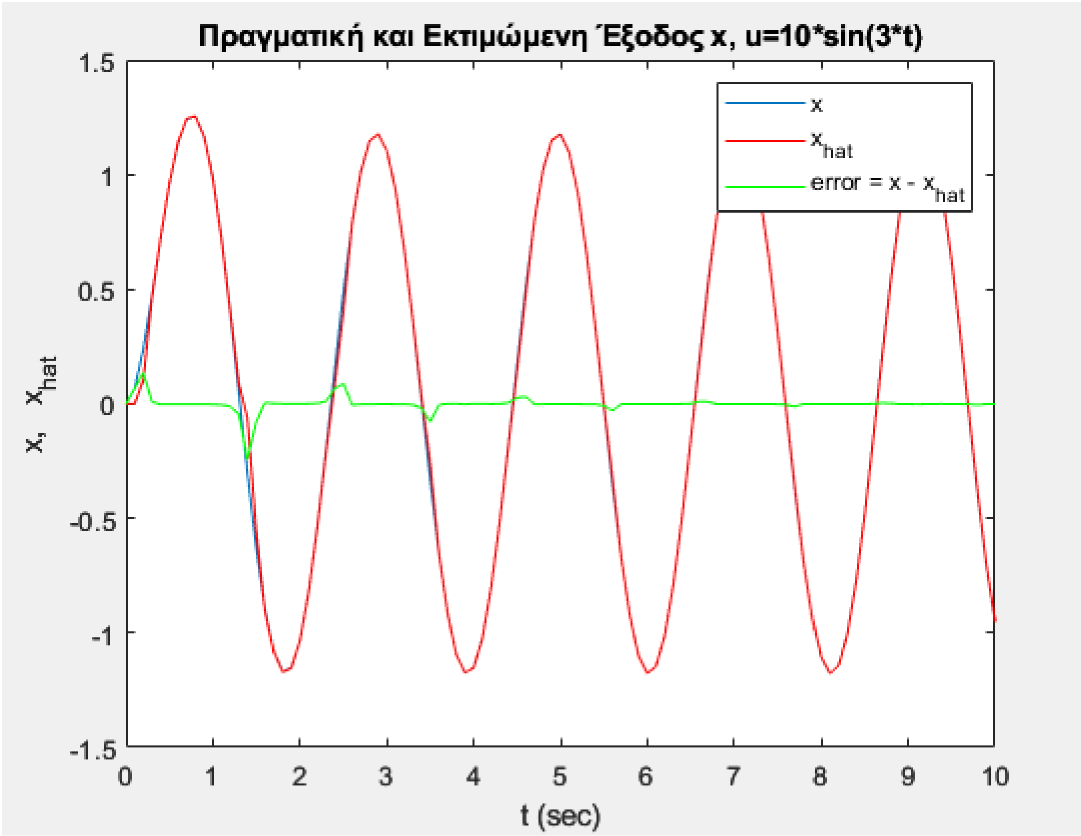
Εδώ φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{b}$ αρχικά βρίσκεται στο μηδέν και με εκθετικό ρυθμό συγκλίνει στην πραγματική της τιμή b=0.5.

β) Με ακριβώς την ίδια λογική που ακολουθήσαμε στο (α) ερώτημα, αλλά τώρα με είσοδο u=10*sin(3*t) εκτελούμε τον αλγόριθμο προσομοίωσης για τις ίδιες διακριτές χρονικές στιγμές, χρησιμοποιώντας νέο πόλο p=2 και βήμα γ=50. Με βάση τα αποτελέσματα του Matlab, προκύπτει ότι:

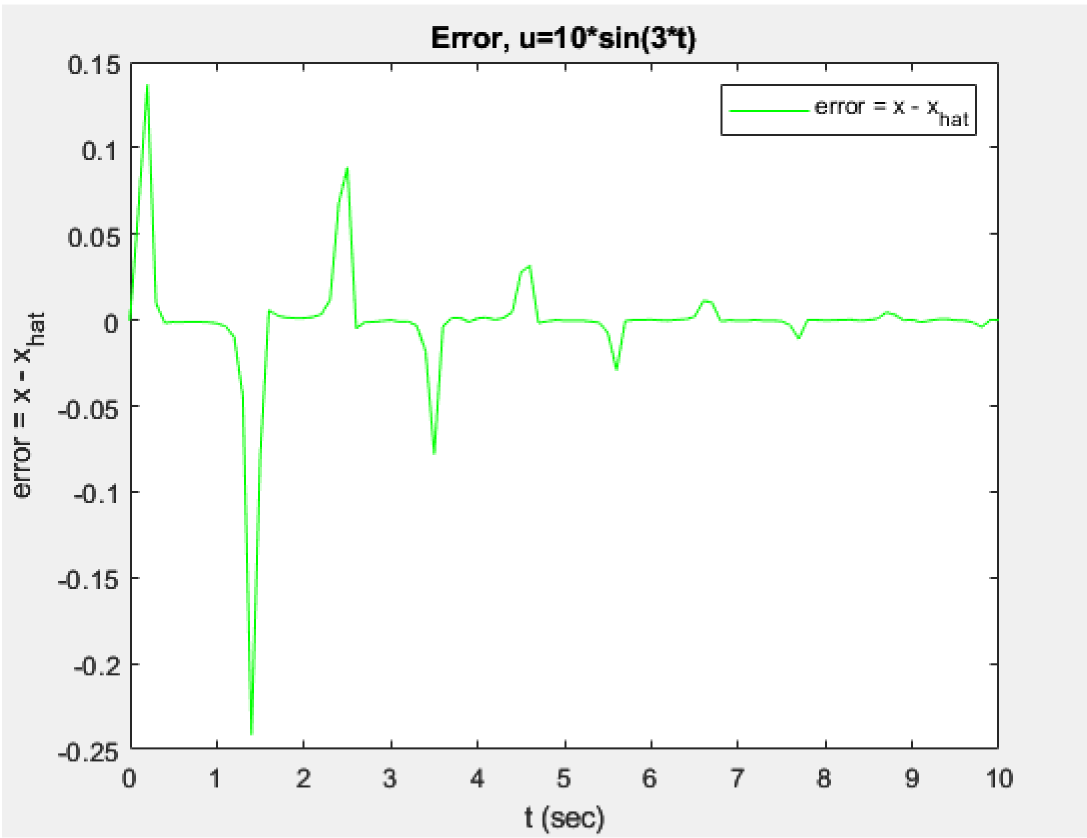
$$\hat{a} = 2.99063294 \quad \text{και} \quad \hat{b} = 0.50009643$$

Φαίνεται, δηλαδή, ότι η εκτίμηση είναι πολύ καλή.

Δημιουργούμε τις γραφικές παραστάσεις της πραγματικής εξόδου x, της εκτιμώμενης εξόδου $\hat{x}$, καθώς και της διαφοράς αυτών των δύο (δηλαδή του σφάλματος e). Προκύπτει:

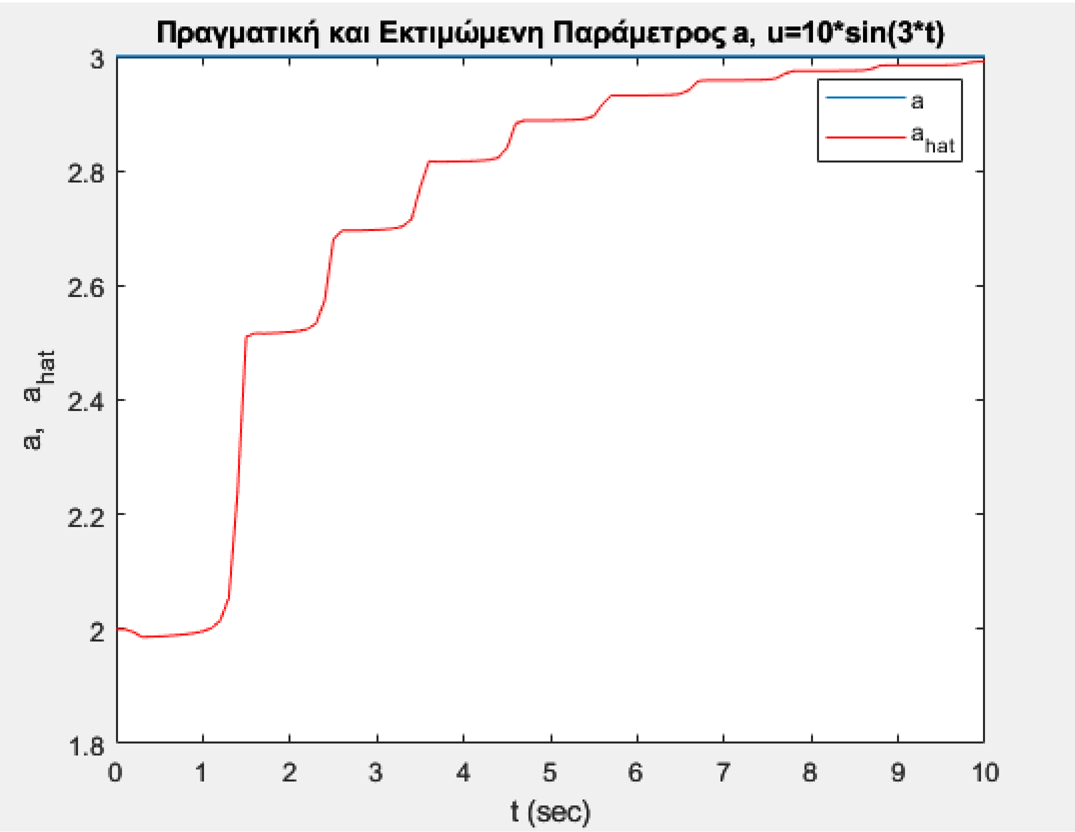


Παρατηρούμε ότι η εκτιμώμενη έξοδος $\hat{x}$ ακολουθεί την πραγματική έξοδο x με ολοένα και καλύτερη ακρίβεια, όσο περνάει ο χρόνος. Το σφάλμα e είναι διαρκώς μικρό, αλλά όχι μηδενικό:



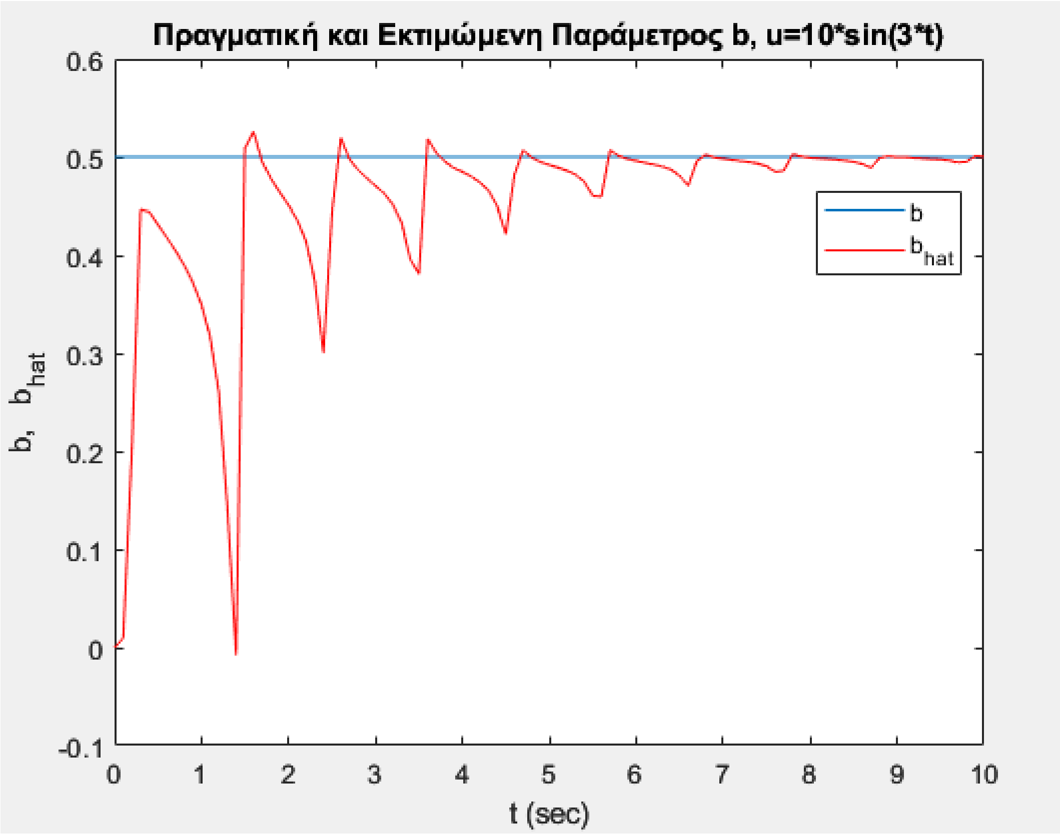
Αρχικά, δηλαδή, έχουμε σχετικά μεγαλύτερα pick σφάλματος, τα οποία τείνουν στο μηδέν όσο περνάει ο χρόνος.

Ακόμη, εμφανίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των α, $\hat{a}$ και b, $\hat{b}$, στη διάρκεια του χρόνου:



Φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{a}$ αρχικά απέχει σημαντικά από την πραγματική της τιμή α=3 και στη συνέχεια συγκλίνει με φθίνων ρυθμό σε αυτήν όσο περνάει ο χρόνος.

Όσον αφορά την παράμετρο b:



Εδώ φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{b}$ αρχικά απέχει σημαντικά από την πραγματική της τιμή b=0.5 και στη συνέχεια συγκλίνει σε αυτήν, με φθίνων πάντα ρυθμό, δίνοντας την αίσθηση μιας περίεργης ταλάντωσης γύρω από μία λογαριθμική συνάρτηση η οποία ξεκινάει από το μηδέν και συγκλίνει στην τιμή b=0.5.

Μεταξύ των δύο περιπτώσεων, παρατηρούμε ορισμένες διαφορές. Στην πρώτη περίπτωση, όπου η είσοδος u=10, επιλέξαμε πόλο p=3. Η επιλογή αυτή δεν ήταν τυχαία. Φαίνεται ότι υπάρχουν περιορισμένες τιμές του πόλου του ευσταθούς φίλτρου, για τις οποίες οι εκτιμώμενες παράμετροι $\hat{a}$ και $\hat{b}$ θα συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές.

Αντίθετα, στη δεύτερη περίπτωση, όπου u=10*sin(3*t), επιλέξαμε πόλο p διαφορετικό της τιμής 3 (συγκεκριμένα, p=2), και τώρα οι εκτιμώμενες παράμετροι $\hat{a}$ και $\hat{b}$ εξακολουθούν να συγκλίνουν στις σωστές τιμές. Δηλαδή, η ημιτονοειδής διέγερση της εισόδου u επιτρέπει την σύγκλιση των εκτιμώμενων παραμέτρων στις σωστές τους τιμές, ανεξαρτήτως της τιμής του πόλου του ευσταθούς φίλτρου, όσο ο χρόνος τείνει προς το άπειρο.

Επιπλέον, φαίνεται ότι υπάρχουν διαφορές και στον τρόπο σύγκλισης των εκτιμώμενων παραμέτρων $\hat{a}$ και $\hat{b}$, αφού με είσοδο u=10*sin(3*t) η σύγκλιση παρουσιάζει αποσβενήμενες ταλαντώσεις γύρω από την πραγματική τιμή της αντίστοιχης παραμέτρου, πράγμα το οποίο δε συμβαίνει για σταθερή είσοδο u=10 (συγκεκριμένα, μπορεί για σταθερή είσοδο, οι εκτιμήσεις να αποκλίνουν με την πάροδο του χρόνου, αναλόγως την τιμή του πόλου).

Επόμενο είναι να εμφανίζονται διαφορές και στα γραφήματα σφάλματος e, μεταξύ του x και $\hat{x}$.

Θέμα 2

i) Θα σχεδιάσουμε πρώτα έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου παράλληλης δομής βασισμένο στη μέθοδο Lyapunov, για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων του συστήματος του πρώτου θέματος.

Το σύστημά μας έχει τη μορφή:

$$\dot{x} = -\alpha \cdot x + b \cdot u$$

Οπότε η παράλληλη δομή εκτίμησης θα είναι η:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\alpha} \cdot \hat{x} + \hat{b} \cdot u$$

Τότε το σφάλμα εκτίμησης e θα είναι:

$$e = x - \hat{x} =>$$

$$=> \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} =>$$

$$=> \dot{e} = -\alpha \cdot x + bu + \hat{\alpha}\hat{x} - \hat{b}u =>$$

$$=> \dot{e} = -\alpha(x - \hat{x}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot \hat{x} - \left(\hat{b} \, - \, b\right) \cdot u =>$$

Αν θέσουμε $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$ και $\tilde{b} = \hat{b} - b$, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\dot{e} = -\alpha e + \tilde{\alpha} \cdot \hat{x} - \tilde{b} \cdot u$$

Έστω τώρα η εξής συνάρτηση Lyapunov:

$$V\left(e, \tilde{\alpha}, \tilde{b}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\alpha}^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \cdot \tilde{b}^2$$

Με γ_1, γ_2 θετικά, άρα και η συνάρτηση Lyapunov θα είναι θετική. Τότε η παράγωγός της θα είναι:

$$\dot{V} = e \cdot \dot{e} + \frac{a \cdot \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b} \cdot \dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}$$

$$\dot{V} = -\alpha \cdot e^2 + \tilde{\alpha} \cdot e \cdot \hat{x} - e \cdot \tilde{b} \cdot u + \frac{a \cdot \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b} \cdot \dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}$$

Αν επιλέξουμε $\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma_1 \cdot e \cdot \hat{x}$ και $\dot{\hat{b}} = \gamma_2 \cdot e \cdot u$ τότε έχουμε:

$$\dot{V} = -\alpha \cdot e^2 \leq 0$$

Δηλαδή, η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov θα είναι αρνητικά ημιορισμένη και άρα εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Matlab, ουσιαστικά έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 4 διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x} = -a \cdot x + b \cdot u$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\alpha} \cdot \hat{x} + \hat{b} \cdot u$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma_1 \cdot e \cdot \hat{x}$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 \cdot e \cdot u$$

Στο ερώτημα αυτό θεωρούμε ημιτονοειδή είσοδο u=10*sin(3*t). Οι εκτιμήσεις $\hat{a}, \hat{b}$ θα προκύψουν από την επίλυση των αντίστοιχων διαφορικών εκφράσεών τους.

Προσομοιώνουμε τη λειτουργία του συστήματος, όταν η πραγματική έξοδος x του συστήματος μετριέται με θόρυβο η(t) = η_0*sin(2π*f*t) με η_0 = 0.5 και f = 40. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι στις παραπάνω διαφορικές, όπου x εισάγουμε την έκφραση x + η(t), εκτός της αρχικής $\dot{x}$, όπου θα βρούμε την πραγματική τιμή της εξόδου x κάθε διακριτή χρονική στιγμή. Δηλαδή, το σφάλμα e θα είναι τώρα:

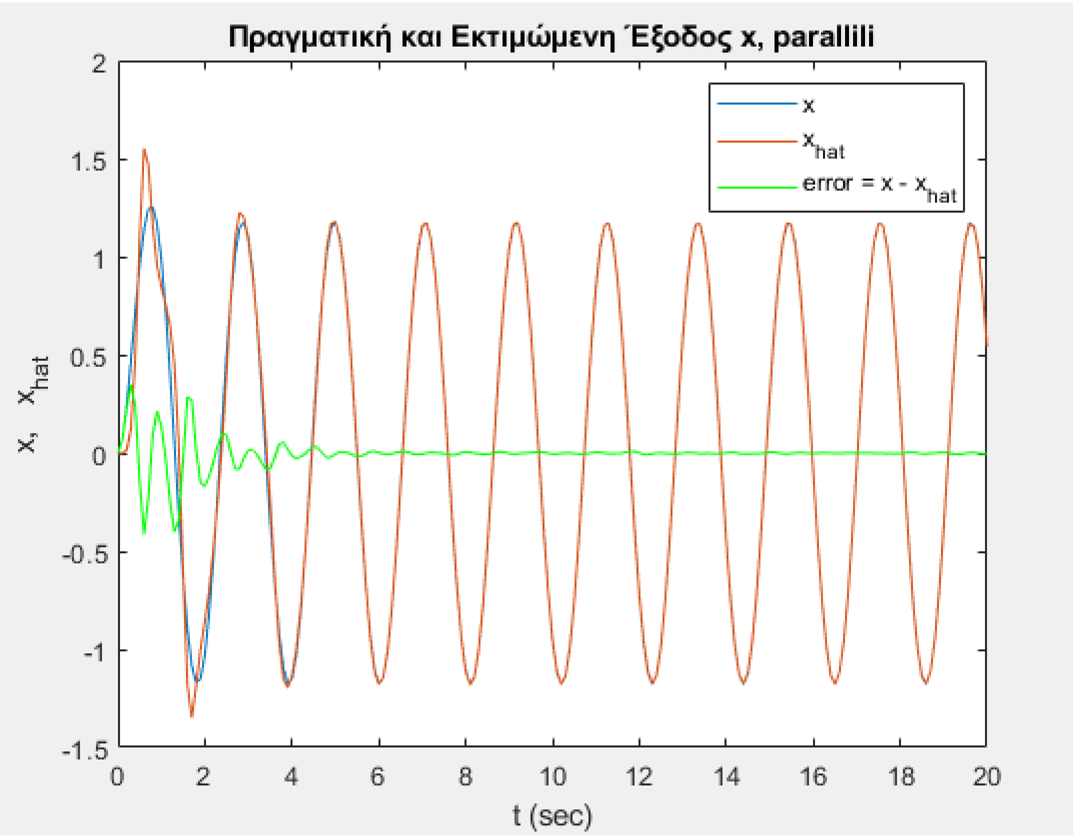
$$e = x - \hat{x} + \eta(t)$$

Τρέχουμε τον αλγόριθμο προσομοίωσης, για διακριτές χρονικές στιγμές, από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή t=20sec, με δείγματα ανά 0.1sec. Χρησιμοποιούμε βήματα $\gamma_1 = 20$ και $\gamma_2 = 1$, οπότε και προκύπτει με βάση τα αποτελέσματα του Matlab ότι:

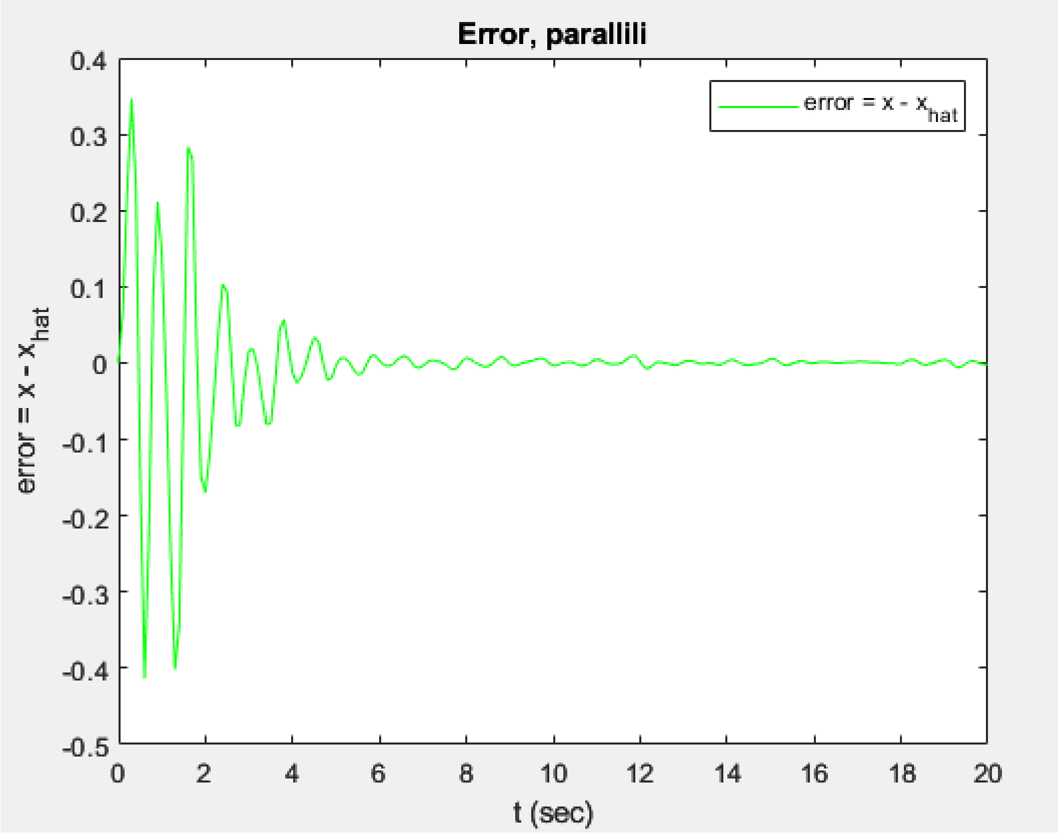
$$\hat{a} = 3.02253032 \quad \text{και} \quad \hat{b} = 0.50409470$$

Οι πραγματικές τιμές των α και b είναι α=3 και b=0.5. Φαίνεται, δηλαδή, ότι η εκτίμηση είναι πολύ καλή.

Δημιουργούμε τις γραφικές παραστάσεις της πραγματικής εξόδου x, της εκτιμώμενης εξόδου $\hat{x}$, καθώς και της διαφοράς αυτών των δύο (δηλαδή του σφάλματος e). Προκύπτει:

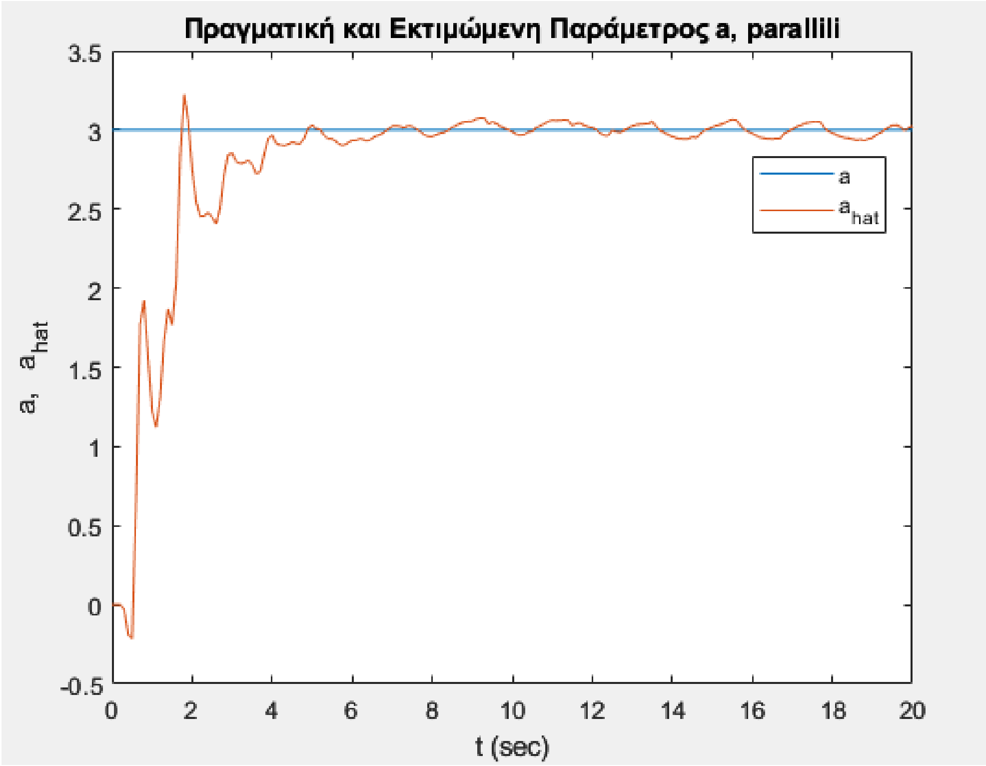


Παρατηρούμε ότι η εκτιμώμενη έξοδος $\hat{x}$ ακολουθεί την πραγματική έξοδο x με ολοένα και καλύτερη ακρίβεια, όσο περνάει ο χρόνος. Το σφάλμα e είναι διαρκώς μικρό, αλλά όχι μηδενικό:



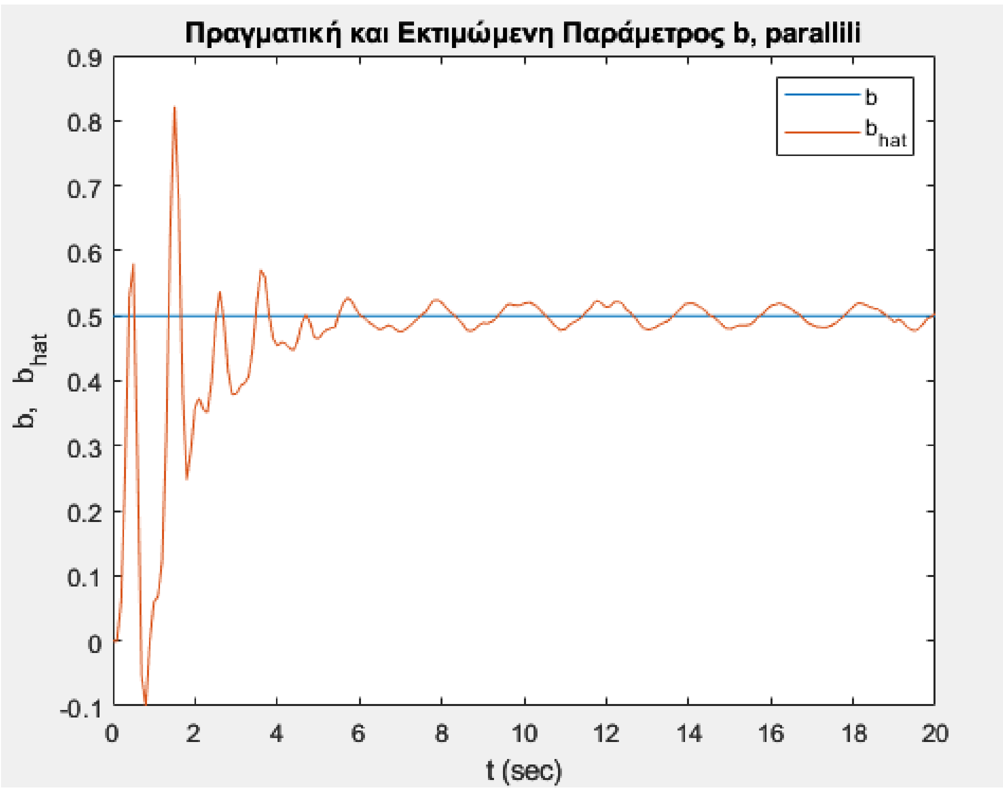
Αρχικά, δηλαδή, έχουμε σχετικά μεγάλο σφάλμα, το οποίο τείνει σχεδόν στο μηδέν (για την ακρίβεια ταλαντώνει γύρω από αυτό) όσο περνάει ο χρόνος. Τα πλάτη της ταλάντωσης του σφάλματος γύρω από το μηδέν εξαρτώνται άμεσα από την επίδραση του θορύβου στη μέτρηση της κατάστασης x.

Ακόμη, εμφανίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των α, $\hat{a}$ και b, $\hat{b}$, στη διάρκεια του χρόνου:



Φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{a}$ θα συγκλίνει στην πραγματική της τιμή α=3, όσο περνάει ο χρόνος, και θα ταλαντώνει γύρω από αυτήν με πλάτος το οποίο εξαρτάται άμεσα από το πλάτος του θορύβου.

Όσον αφορά την παράμετρο b:



Κι εδώ φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{b}$ θα συγκλίνει στην πραγματική της τιμή b=0.5, όσο περνάει ο χρόνος, και θα ταλαντώνει γύρω από αυτήν, όπως ακριβώς συμβαίνει και με την σύγκλιση της παραμέτρου α.

ii) Θα σχεδιάσουμε τώρα έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου μεικτής δομής βασισμένο στη μέθοδο Lyapunov, για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων του συστήματος του πρώτου θέματος.

Το σύστημά μας έχει τη μορφή:

$$\dot{x} = -\alpha \cdot x + b \cdot u$$

Οπότε η μεικτή δομή εκτίμησης θα είναι η:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\alpha} \cdot x + \hat{b} \cdot u + \theta_m \cdot (x - \hat{x})$$

Τότε το σφάλμα εκτίμησης e θα είναι:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -\alpha \cdot x + bu + \hat{\alpha}x - \hat{b}u - \theta_m \cdot (x - \hat{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -\theta_m(x - \hat{x}) + (\hat{\alpha} - \alpha) \cdot x - \left(\hat{b} - b\right) \cdot u \Rightarrow$$

Αν θέσουμε $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha$ και $\tilde{b} = \hat{b} - b$, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\dot{e} = -\theta_m e + \tilde{\alpha} \cdot x - \tilde{b} \cdot u$$

Έστω τώρα η εξής συνάρτηση Lyapunov:

$$V\left(e, \tilde{\alpha}, \tilde{b}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\alpha}^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \cdot \tilde{b}^2$$

Με γ_1, γ_2 θετικά, άρα και η συνάρτηση Lyapunov θα είναι θετική. Τότε η παράγωγός της θα είναι:

$$\dot{V} = e \cdot \dot{e} + \frac{a \cdot \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b} \cdot \dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}$$

$$\dot{V} = -\alpha \cdot e^2 + \tilde{\alpha} \cdot e \cdot x - e \cdot \tilde{b} \cdot u + \frac{a \cdot \dot{\tilde{\alpha}}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{b} \cdot \dot{\tilde{b}}}{\gamma_2}$$

Αν επιλέξουμε $\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma_1 \cdot e \cdot x$ και $\dot{\hat{b}} = \gamma_2 \cdot e \cdot u$ τότε έχουμε:

$$\dot{V} = -\theta_m \cdot e^2 \leq 0$$

Δηλαδή, η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov θα είναι αρνητικά ημιορισμένη και άρα εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Matlab, ουσιαστικά έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 4 διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x} = -a \cdot x + b \cdot u$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{\alpha} \cdot x + \hat{b} \cdot u + \theta_m \cdot (x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{\alpha}} = -\gamma_1 \cdot e \cdot x$$

$$\dot{\hat{b}} = \gamma_2 \cdot e \cdot u$$

Με ίδια είσοδο u=10*sin(3*t), αναζητούμε τις εκτιμήσεις $\hat{a}, \hat{b}$ οι οποίες θα προκύψουν από την επίλυση των αντίστοιχων διαφορικών εκφράσεών τους.

Προσομοιώνουμε τη λειτουργία του συστήματος, όταν η πραγματική έξοδος x του συστήματος μετριέται με θόρυβο η(t) = η_0*sin(2π*f*t) με η_0 = 0.5 και f = 40.

Το σφάλμα e θα είναι:

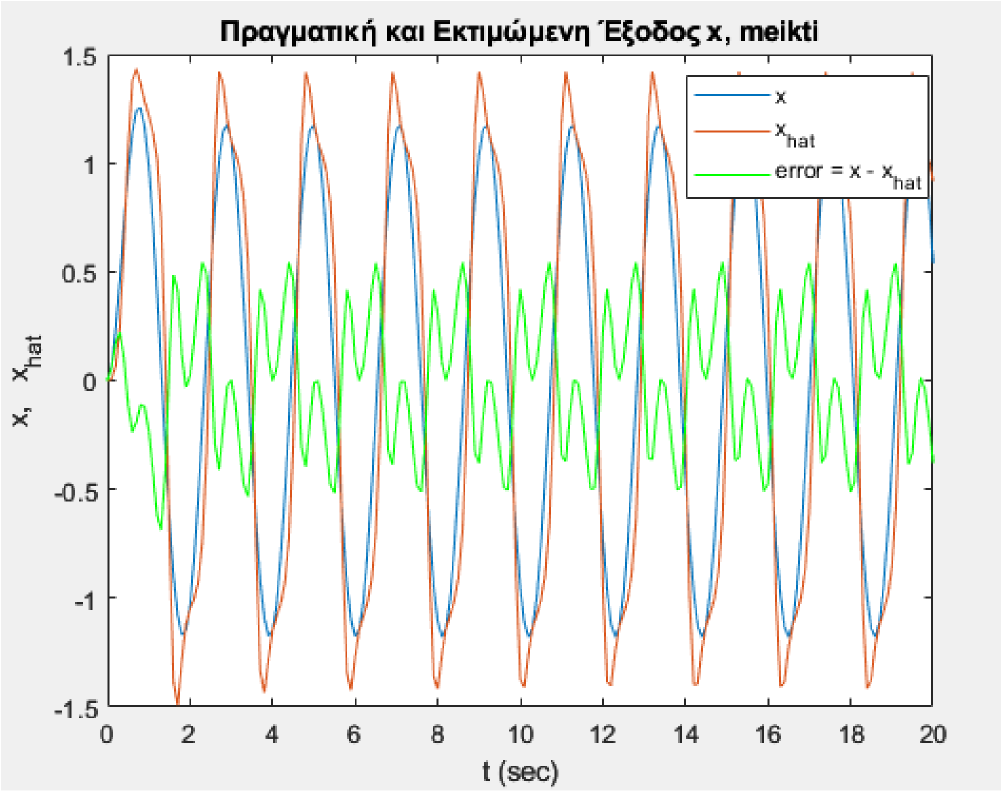
$$e = x - \hat{x} + \eta(t)$$

Τρέχουμε τον αλγόριθμο προσομοίωσης, για διακριτές χρονικές στιγμές, από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή t=20sec, με δείγματα ανά 0.1sec. Χρησιμοποιούμε βήματα $\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 1$, καθώς και θ_m= 4, οπότε και προκύπτει με βάση τα αποτελέσματα του Matlab ότι:

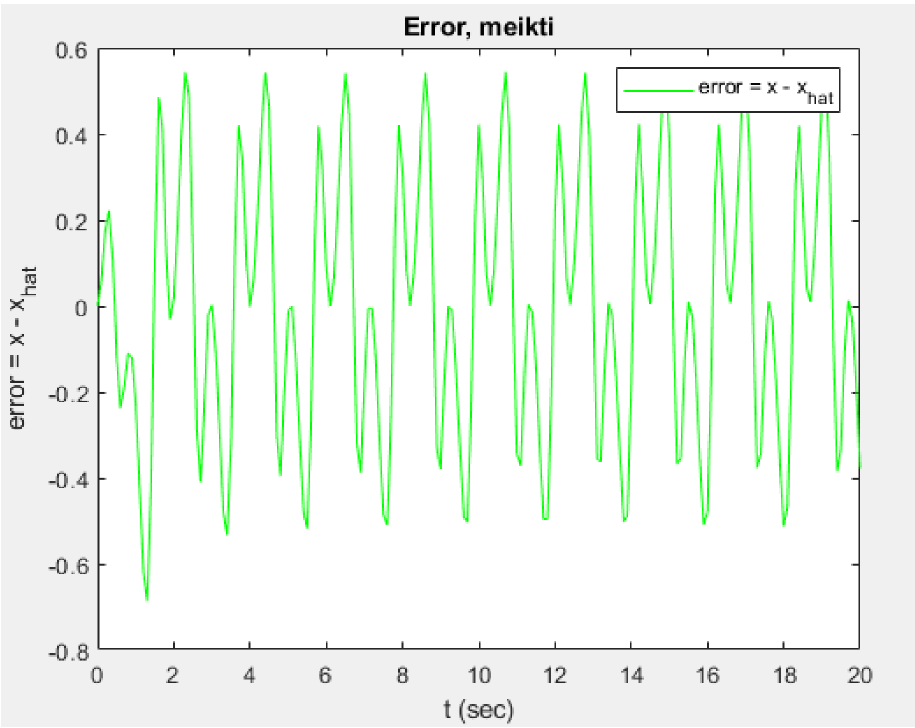
$\hat{a}$ = 0.09314889 και $\hat{b}$ = -0.08626488

Οι πραγματικές τιμές των α και b είναι α=3 και b=0.5. Αυτό δείχνει ότι υπάρχει πολύ μεγάλη απόκλιση από τις πραγματικές τιμές, μιας και ο θόρυβος εμποδίζει την ομαλή λειτουργία της μεθόδου μεικτής δομής.

Δημιουργούμε τις γραφικές παραστάσεις της πραγματικής εξόδου x, της εκτιμώμενης εξόδου $\hat{x}$, καθώς και της διαφοράς αυτών των δύο (δηλαδή του σφάλματος e). Προκύπτει:

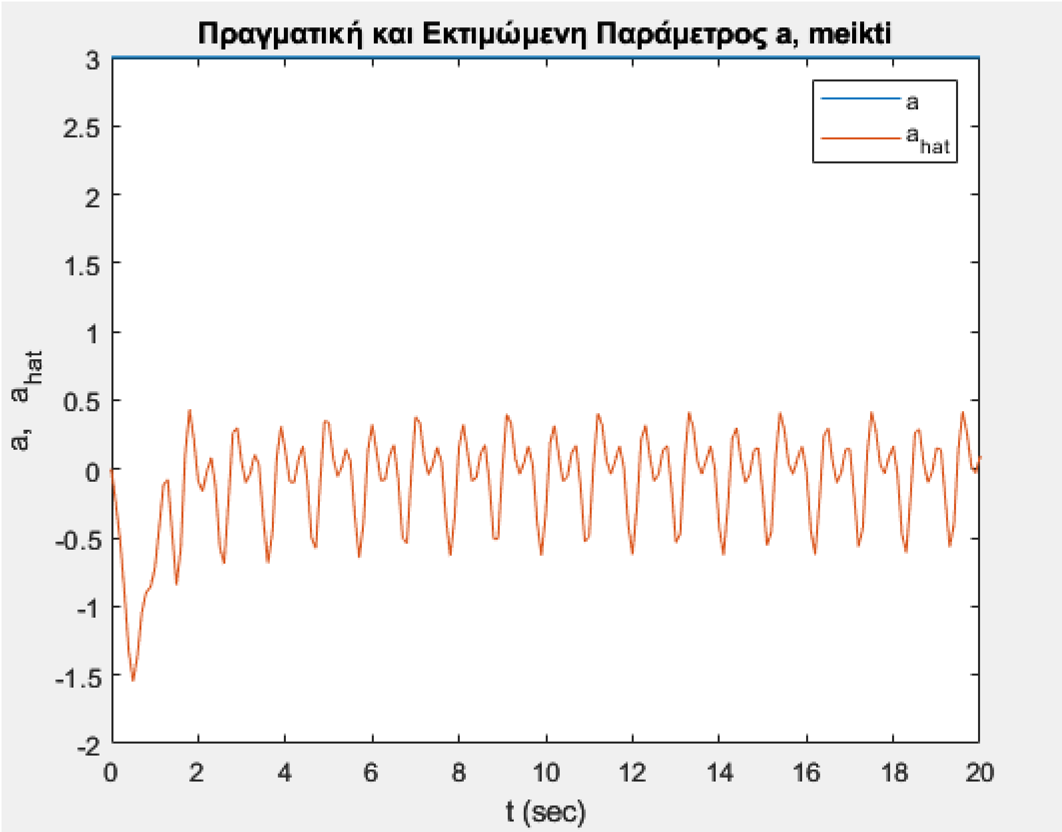


Φαίνεται ότι η εκτιμώμενη έξοδος $\hat{x}$ δεν μπορεί να ακολουθήσει την πραγματική έξοδο x με ακρίβεια, ακόμη και για μεγάλο πέρας του χρόνου. Το σφάλμα e είναι διαρκώς μεγάλο:



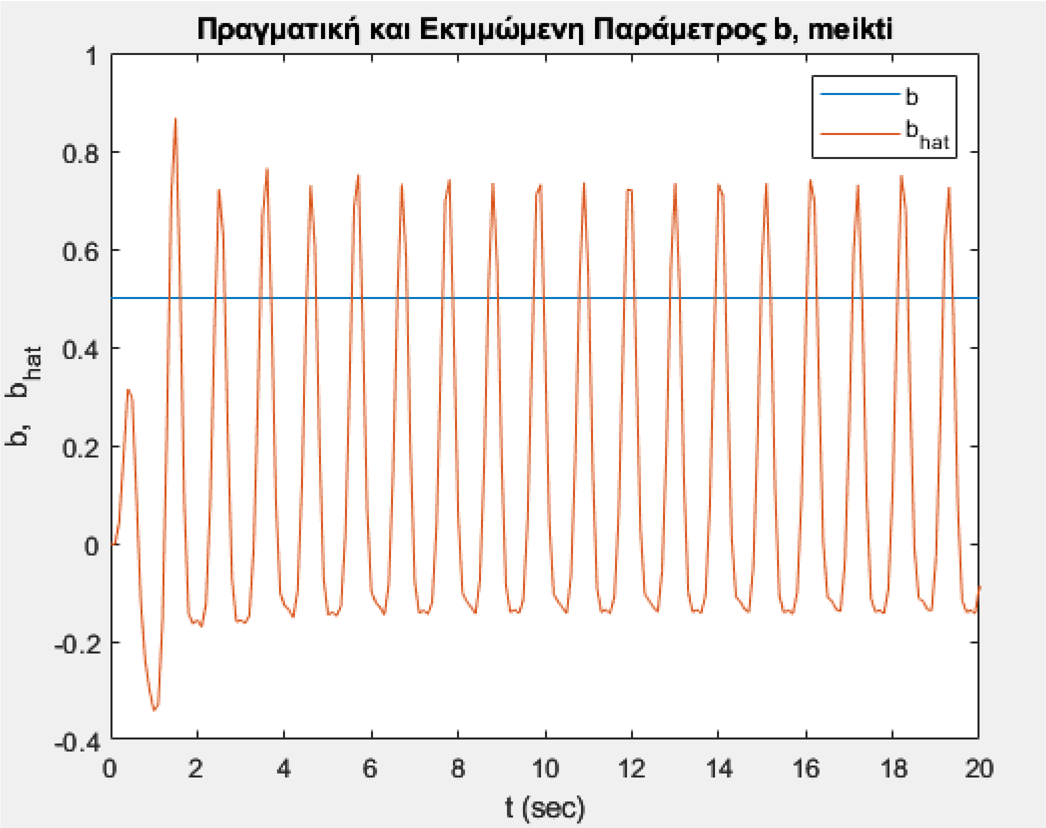
Έχουμε, δηλαδή, διαρκώς μεγάλο σφάλμα. Τα πλάτη της ταλάντωσης του σφάλματος γύρω από το μηδέν εξαρτώνται άμεσα από την επίδραση του θορύβου στη μέτρηση της κατάστασης x.

Ακόμη, εμφανίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των α, $\hat{a}$ και b, $\hat{b}$, στη διάρκεια του χρόνου:



Φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{a}$ δε συγκλίνει ποτέ στην πραγματική της τιμή α=3, αλλά ταλαντώνει γύρω από κάποια αρνητική τιμή. Η επίδραση του θορύβου οδηγεί στην απόκλιση από την πραγματική τιμή.

Όσον αφορά την παράμετρο b:



Κι εδώ φαίνεται ότι η εκτιμώμενη παράμετρος $\hat{b}$ δε συγκλίνει ποτέ στην πραγματική της τιμή b=0.5, αλλά ταλαντώνει γύρω από κάποια θετική τιμή. Η επίδραση του θορύβου οδηγεί στην απόκλιση από την πραγματική τιμή.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι υπό την επίδραση θορύβου η παράλληλη δομή υπερισχύει εμφανώς την μεικτής δομής, καθώς στην πρώτη περίπτωση η μέθοδος καταφέρνει και συγκλίνει σχετικά ικανοποιητικά στις πραγματικές τιμές των x, α και b παρά τον θόρυβο που προσθέσαμε. Αντίθετα, στη περίπτωση της μεικτής δομής, η μέθοδος δε λειτουργεί τόσο αποτελεσματικά υπό τον θόρυβο αυτό.

Αυτό συμβαίνει, διότι η μεικτή μέθοδος κατά Lyapunov χρησιμοποιεί στην εκτίμηση της εξόδου $\hat{x}$ μετρήσεις και της πραγματικής εξόδου x, σε αντίθεση με τη παράλληλη μέθοδο. Αυτό συνεπάγεται ότι και η παράμετρος α, στη μεικτή μέθοδο, θα έχει επίσης την μέτρηση x στην έκφρασή της, πράγμα που δε συμβαίνει στη παράλληλη μέθοδο. Έτσι, η μεικτή μέθοδος είναι σαφώς πιο ευαίσθητη στην επίδραση θορύβου.

Μεταβάλουμε αρχικά το πλάτος η_0 του θορύβου, διατηρώντας σταθερή τη συχνότητα f στα 40hz. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε το η_0, τόσο χειρότερα αποτελέσματα λαμβάνουμε από τα γραφήματα της παράλληλης και της μεικτής δομής. Ιδιαίτερα η μεικτή δομή, η οποία είναι πιο ευαίσθητη στον θόρυβο, παρουσιάζει γρήγορα ακόμη πιο σημαντικές αποκλίσεις. Η απόκλιση στα γραφήματα της παράλληλης δομής γίνεται εμφανής, όταν αυξήσουμε αρκετά το πλάτος η_0.

Προφανώς, μείωση του πλάτους αυτού, υπό σταθερή συχνότητα f, οδηγεί σε ποιοτικότερα αποτελέσματα και στις δύο δομές.

Μεταβάλουμε τώρα τη συχνότητα f, διατηρώντας σταθερό το πλάτος η_0 του θορύβου στην τιμή 0.5. Εδώ τα αποτελέσματα παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Καθώς αυξάνουμε τη συχνότητα f, τα αποτελέσματα της παράλληλης δομής χειροτερεύουν, ωστόσο μέχρι ένα σημείο. Από εκεί και πέρα, περαιτέρω αύξηση της f οδηγεί σε όχι τόσο μεγάλες αποκλίσεις. Η μεικτή δομή δε φαίνεται να επηρεάζεται ιδιαίτερα από την αύξηση της συχνότητας – οι αποκλίσεις είναι ήδη μεγάλες εδώ.

Στη συνέχεια μειώνουμε τη συχνότητα f, υπό σταθερό πάντα πλάτος η_0. Ξανά τα αποτελέσματα της παράλληλης δομής χειροτερεύουν αισθητά, σε σχέση με τα αρχικά. Η μεικτή δομή εδώ χειροτερεύει επίσης.

Με ταυτόχρονη μεταβολή των παραμέτρων η_0 και f δεν μπορούμε να έχουμε εξ' αρχής εικόνα της βελτίωσης ή μη των αποτελεσμάτων.

Θέμα 3

Σχεδιάζουμε τώρα έναν εκτιμητή μεικτής δομής βασισμένο στη μέθοδο Lyapunov για σύστημα 2ης τάξης, δηλαδή σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} u \qquad \text{με} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δηλαδή, σε πιο απλή μορφή:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

Όπου $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times1}$ οι καταστάσεις του συστήματος και $u \in \mathbb{R}$ η είσοδός του. Ακόμη, $A < 0 \in \mathbb{R}^{2\times2}$ και $B \in \mathbb{R}^{2\times1}$ οι πίνακες.

Ο εκτιμητής θα έχει μορφή:

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{A} \cdot x + \hat{B} \cdot u + \theta_m \cdot (x - \hat{x})$$

όπου $\theta_m \in \mathbb{R}$ και οι αντίστοιχες εκτιμήσεις θα έχουν προφανώς τις αντίστοιχες διαστάσεις.

Το σφάλμα εκτίμησης e θα είναι:

$$e = x - \hat{x} =>$$

$$=> \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} =>$$

$$=> \dot{e} = A \cdot x + Bu - \hat{A}x - \hat{B}u - \theta_m \cdot (x - \hat{x}) =>$$

$$=> \dot{e} = -\theta_m (x - \hat{x}) - \left(\hat{A} - A\right) \cdot x - \left(\hat{B} \ - \ B\right) \cdot u =>$$

Αν θέσουμε $\tilde{A} = \hat{A} - A$ και $\tilde{B} = \hat{B} - B$, τότε η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\dot{\mathrm{e}} = -\theta_{\mathrm{m}} \mathrm{e} + \widetilde{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{x} - \widetilde{\mathrm{B}} \cdot \mathrm{u}$$

Έστω τώρα η εξής συνάρτηση Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} e^T e + \frac{1}{2} \cdot tr\left\{\tilde{A}^T \cdot \Gamma_1^{-1} \cdot \tilde{A}\right\} + \frac{1}{2} \cdot tr\{\tilde{B}^T \cdot \Gamma_2^{-1} \cdot \tilde{B}\}$$

Ως tr{ } συμβολίζουμε την πράξη trace{ }, οι ιδιότητες της οποίας είναι οι εξής:

Για δύο τετραγωνικούς πίνακες Γ, Δ ιδίας διάστασης ισχύει:

$$tr\{\Gamma \cdot \Delta\} = tr\{\Delta \cdot \Gamma\}$$

$$tr\{\Gamma + \Delta\} = tr\{\Gamma\} + tr\{\Delta\}$$

Για δύο διανύσματα γραμμή x, y ίδιας διάστασης ισχύει:

$$tr\{y \cdot x^T\} = x^T \cdot y$$

Επιλέγουμε Γ_1, Γ_2 θετικά ορισμένους πίνακες, οπότε η V είναι θετική.

Τότε η παράγωγός της θα είναι:

$$\dot{V} = e^T \cdot \dot{e} + tr\left\{\tilde{A}^T \cdot \Gamma_1^{-1} \cdot \dot{\tilde{A}}\right\} + tr\left\{\tilde{B}^T \cdot \Gamma_2^{-1} \cdot \dot{\tilde{B}}\right\} =>$$

$$=> \dot{V} = -e^T\theta_m e - e^T\tilde{A}x - e^T\tilde{B}u + tr\left\{\tilde{A}^T \cdot \Gamma_1^{-1} \cdot \dot{\tilde{A}}\right\} +$$

$$+ tr\left\{\tilde{B}^T \cdot \Gamma_2^{-1} \cdot \dot{\tilde{B}}\right\} =>$$

Για τους δύο τονισμένους όρους ισχύει, από τις ιδιότητες του trace:

$$e^T\tilde{A}x = tr\{\tilde{A}xe^T\} = tr\left\{\left(ex^T\tilde{A}^T\right)^T\right\} = tr\{ex^T\tilde{A}^T\} = tr\{\tilde{A}^Tex^T\}$$

$$e^T\tilde{B}u = tr\{\tilde{B}ue^T\} = tr\left\{\left(eu^T\tilde{B}^T\right)^T\right\} = tr\{eu^T\tilde{B}^T\} = tr\{\tilde{B}^Teu^T\}$$

Επομένως, η παράγωγος της Lyapunov γίνεται:

$$\dot{V} = -e^T\theta_m e + tr\left\{\tilde{A}^T\Gamma_1^{-1}\dot{\tilde{A}} + \tilde{B}^T\Gamma_2^{-1}\dot{\tilde{B}} - \tilde{A}^Tex^T - \tilde{B}^Teu^T\right\}$$

Αν επιλέξουμε $\dot{\hat{A}} = \Gamma_1 ex^T$ και $\dot{\hat{B}} = \Gamma_2 eu^T$ τότε έχουμε:

$$\dot{V} = -e^T\theta_m e \le 0$$

Δηλαδή, η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov θα είναι αρνητικά ημιορισμένη και άρα εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος. Χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Matlab, ουσιαστικά έχουμε να λύσουμε ένα σύστημα 4 διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$$

$$\dot{\hat{x}} = -\hat{A} \cdot x + \hat{B} \cdot u + \theta_m \cdot (x - \hat{x})$$

$$\dot{\hat{A}} = \Gamma_1 ex^T$$

$$\dot{\hat{B}} = \Gamma_2 eu^T$$

Με είσοδο u = 3.5*sin(7.2*t) + 2*sin(11.7*t), αναζητούμε τις εκτιμήσεις $\hat{A}$ και $\hat{B}$, οι οποίες θα προκύψουν από την επίλυση των αντίστοιχων διαφορικών εκφράσεών τους.

Τρέχουμε τον αλγόριθμο προσομοίωσης, για διακριτές χρονικές στιγμές, από τη χρονική στιγμή t=0 έως τη χρονική στιγμή t=20sec, με δείγματα ανά 0.1sec. Χρησιμοποιούμε ως βήματα τους θετικά ορισμένους πίνακες:

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

καθώς και θ_m= 4, οπότε και προκύπτει με βάση τα αποτελέσματα του Matlab ότι:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{\alpha_{1,1}} & \widehat{\alpha_{1,2}} \\ \widehat{\alpha_{2,1}} & \widehat{\alpha_{2,2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.241879 & 2.997334 \\ -4.998615 & -0.000454 \end{bmatrix}$$

και

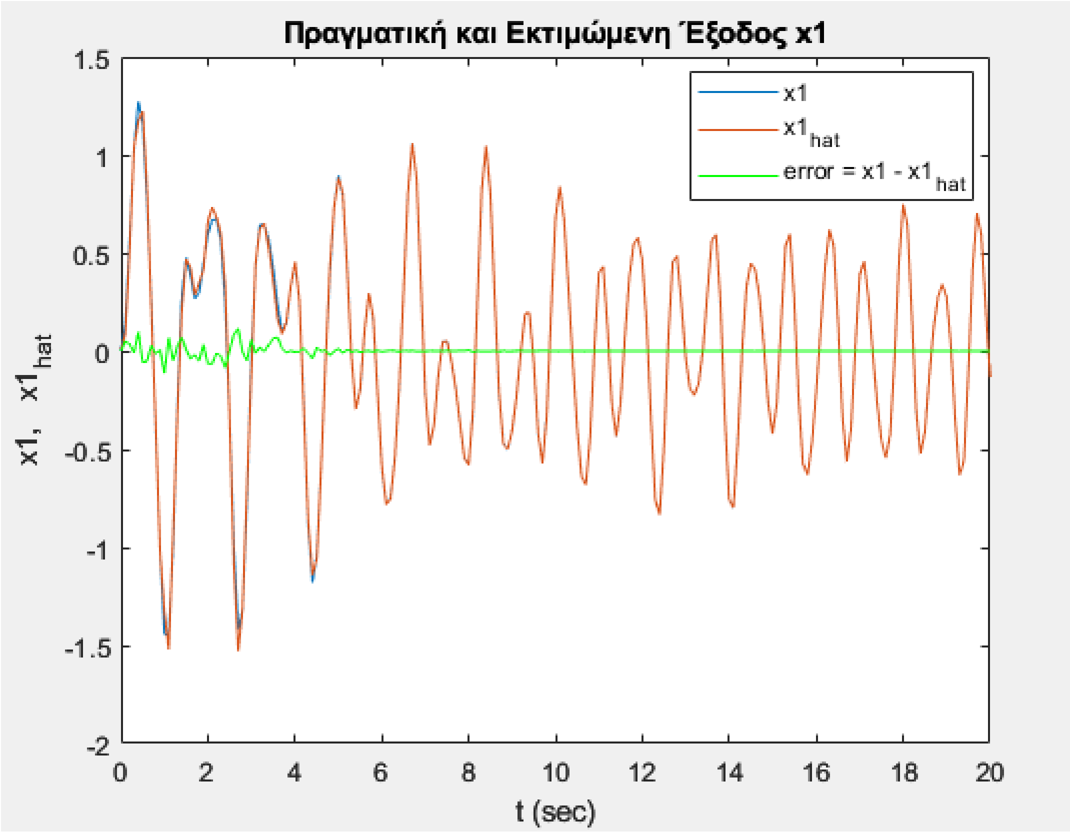
$$\widehat{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta_1} \\ \widehat{\beta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.502072 \\ 1.500353 \end{bmatrix}$$

Οι πραγματικές τιμές των πινάκων A και B είναι:

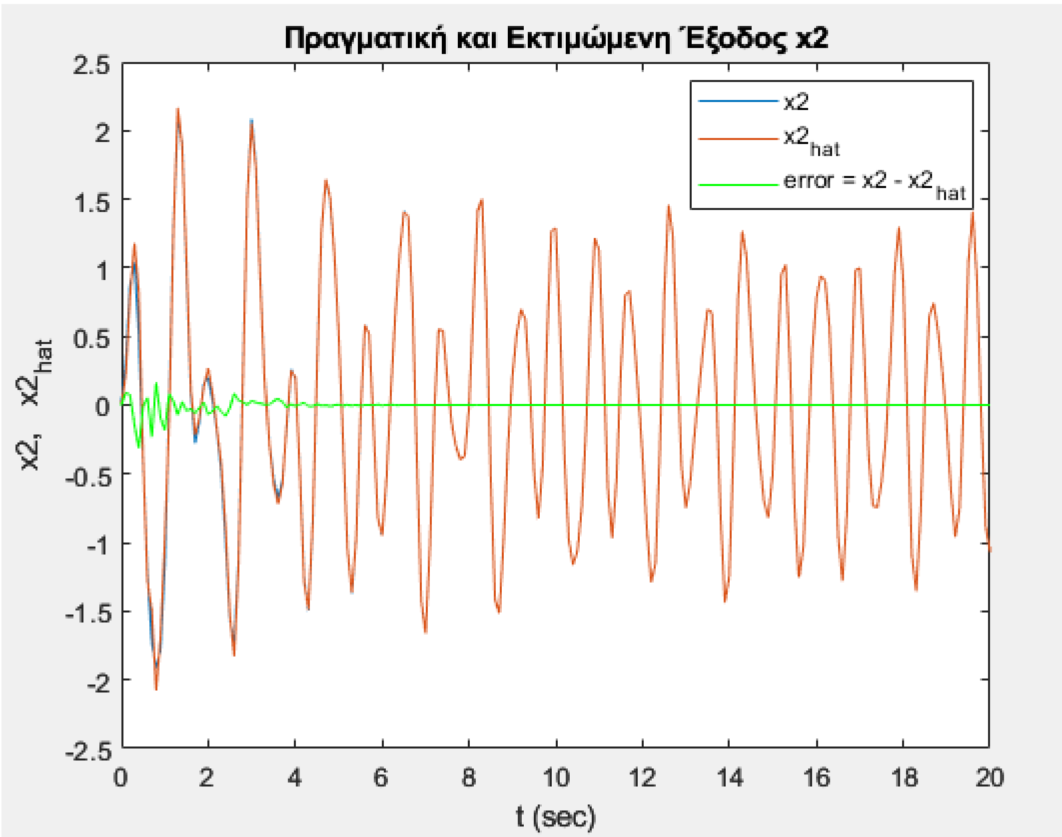
A = $\begin{bmatrix} -0.25 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ και B = $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

Οι πραγματικές τιμές των α και b είναι α=3 και b=0.5. Φαίνεται, δηλαδή, ότι η εκτίμηση είναι πολύ καλή.

Δημιουργούμε τις γραφικές παραστάσεις της πραγματικής εξόδου $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, της εκτιμώμενης εξόδου $\hat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix}$, καθώς και της διαφοράς αυτών των δύο (δηλαδή του σφάλματος e). Προκύπτει:

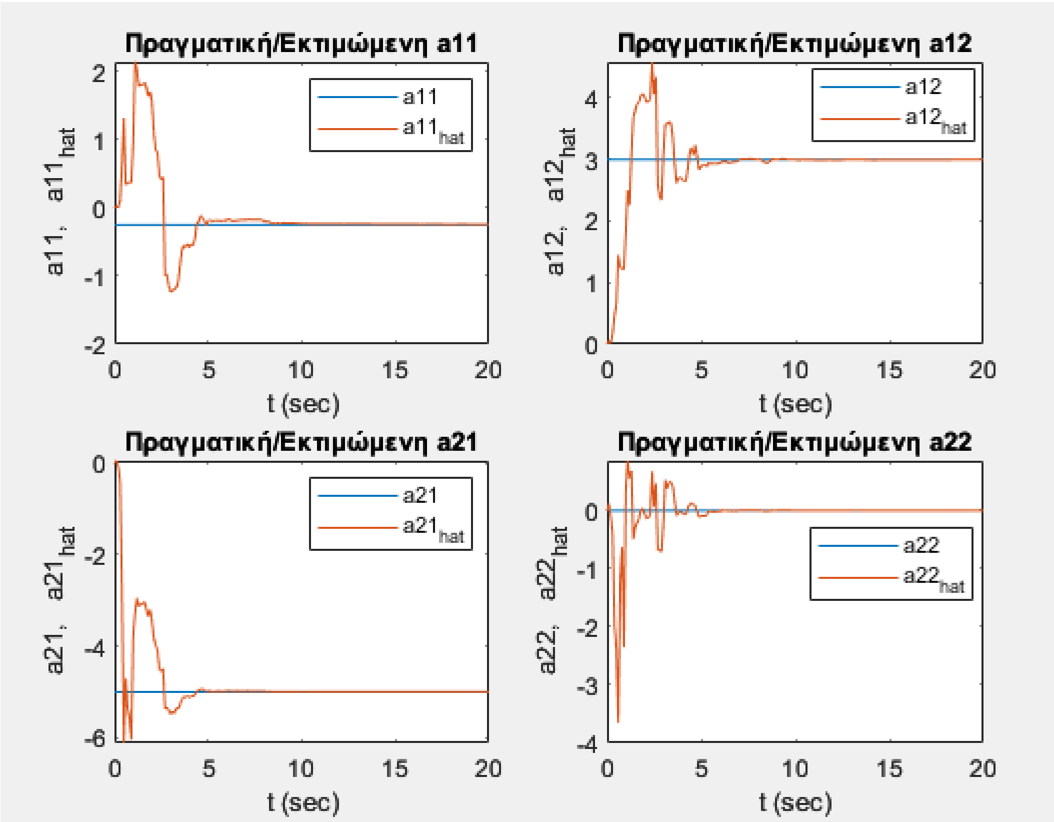

Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος x1
x1
x1hat
error = x1 - x1hat
x1, x1hat
t (sec)

και

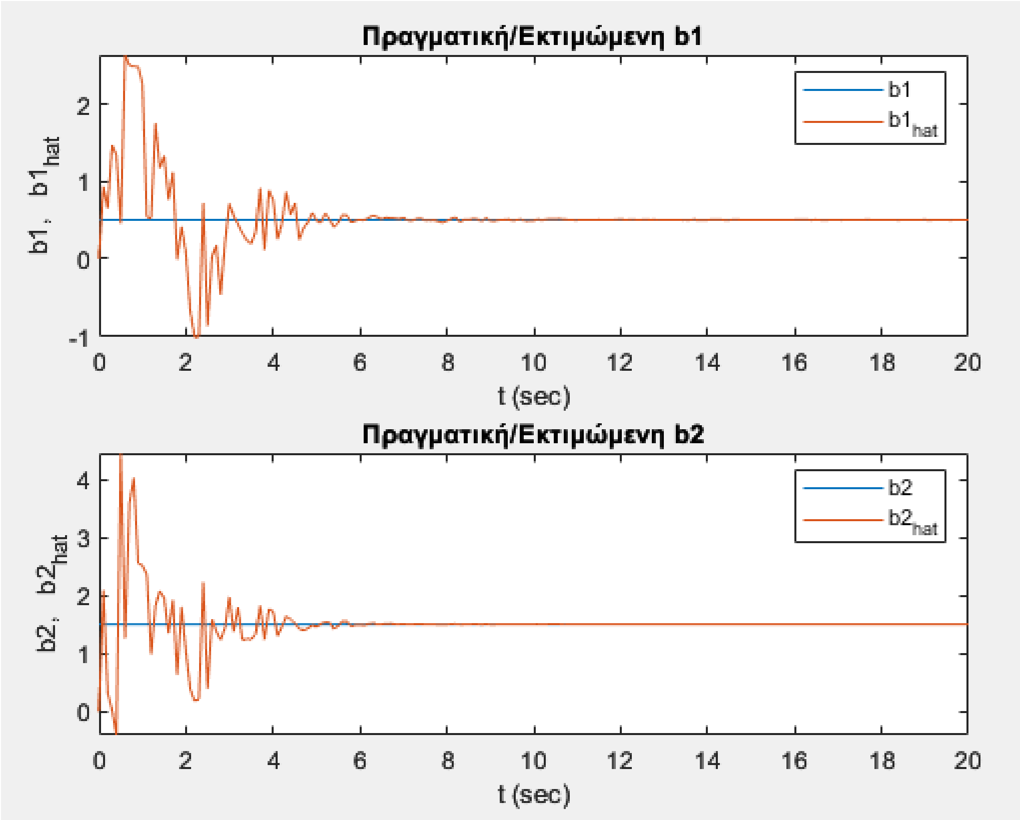

Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος x2
x2
x2hat
error = x2 - x2hat
x2, x2hat
t (sec)

Φαίνεται ότι μετά από σύντομο χρονικό διάστημα, η εκτιμώμενη έξοδος $\hat{x} = \begin{bmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{bmatrix}$ ακολουθεί την πραγματική έξοδο $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Ακόμη, εμφανίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των A, $\widehat{\mathrm{A}}$ και B, $\widehat{\mathrm{B}}$, στη διάρκεια του χρόνου:



και



Προκύπτει δηλαδή η σύγκλιση όλων των παραμέτρων στις πραγματικές τους τιμές, μετά από μικρό χρονικό διάστημα, το οποίο είναι και το επιθυμητό των μεθόδων Lyapunov.

Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους των πινάκων Γ_1 και Γ_2, καθώς και του θ_m, μπορούμε να πετύχουμε πιο γρήγορη ή πιο αργή σύγκλιση στις πραγματικές τιμές.