# Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙΙ
# Εργασία Μαθήματος 2022 – 2023

## ΤΜΗΜΑ Α


Ονοματεπώνυμο: Παπούλιας Μιχαήλ

ΑΕΜ: 10204

email: mpapouli@ece.auth.gr

i) Προκειμένου να σχεδιάσουμε το φασικό πορτρέτο του συστήματος, θεωρούμε τις μεταβλητές κατάστασης $x_1 = x$ και $x_2 = \frac{\dot{x}}{\omega}$ στη διαφορική μας εξίσωση: $m\ddot{x} + \mu g \cdot sign(\dot{x}) + kx = 0$, όπου γνωρίζουμε ότι:

$$sign(\dot{x}) = \begin{cases} 1, & \dot{x} > 0 \\ -1, & \dot{x} < 0 \\ απροσδιόριστο, & \dot{x} = 0 \end{cases}$$

επομένως, θα μελετήσουμε το σύστημα για δύο περιπτώσεις: $\dot{x} > 0$ και $\dot{x} < 0$:

**Περίπτωση 1: $\dot{x} > 0$**

Το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\mu g}{\omega} - \frac{k}{\omega m} \cdot x_1 \end{cases}$$

Για το φασικό πορτρέτο , θα είναι:

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = -\frac{\omega x_2}{\frac{\mu g}{\omega} + \frac{k}{\omega m} x_1} \quad => \quad \int \left(\frac{\mu g}{\omega} + \frac{k}{\omega m} x_1\right) dx_1 = -\int (\omega \cdot x_2)\, dx_2 \quad =>$$

$$=> \frac{\mu g}{\omega} x_1 + \frac{k}{2\omega m} x_1^2 = -\frac{\omega}{2} x_2^2 + c_1 \;=>$$

$$=> \left(\sqrt{\frac{k}{2\omega m}} x_1 + \frac{\mu g \sqrt{2\omega m}}{2\omega\sqrt{k}}\right)^2 + \frac{\omega}{2} x_2^2 = c_2 \;=>$$

και γνωρίζοντας ότι η συχνότητα ταλάντωσης, η σταθερά του ελατηρίου και η μάζα του σώματος συνδέονται από τη σχέση:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

έχουμε:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x_1 + \frac{\mu \cdot g \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\omega}}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega}{2} x_2^2 = c_2 \;=>$$

$$\frac{\omega}{2}\left[\left(x_1 + \frac{\mu \cdot g}{\omega^2}\right)^2 + x_2^2\right] = c_2 \;=>$$

$$\boxed{\left(x_1 + \frac{\mu \cdot g}{\omega^2}\right)^2 + x_2^2 = c}$$

Το οποίο παριστάνει κύκλο, με κέντρο το σημείο $\left(-\frac{\mu g}{\omega^2},\ 0\right)$ και ακτίνα τη σταθερά c, κάθε φορά.

**<u>Περίπτωση 2: $\dot{x} < 0$</u>**

Το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega x_2 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\mu g}{\omega} - \dfrac{k}{\omega m} \cdot x_1 \end{cases}$$

Για το φασικό πορτρέτο , θα είναι:

$$\frac{\frac{dx_1}{dt}}{\frac{dx_2}{dt}} = -\frac{\omega x_2}{-\frac{\mu g}{\omega} + \frac{k}{\omega m} x_1} \quad => \quad \int \left(-\frac{\mu g}{\omega} + \frac{k}{\omega m} x_1\right) dx_1 = -\int (\omega \cdot x_2)\, dx_2 \quad =>$$

$$=> \ -\frac{\mu g}{\omega} x_1 + \frac{k}{2\omega m} x_1^2 = -\frac{\omega}{2} x_2^2 + c_1 \ =>$$

$$=> \left(\sqrt{\frac{k}{2\omega m}} x_1 - \frac{\mu g \sqrt{2\omega m}}{2\omega\sqrt{k}}\right)^2 + \frac{\omega}{2} x_2^2 = c_2 =>$$

και γνωρίζοντας ότι η συχνότητα ταλάντωσης, η σταθερά του ελατηρίου και η μάζα του σώματος συνδέονται από τη σχέση:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

έχουμε:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega} x_1 - \frac{\mu \cdot g \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{\omega}}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega}{2} x_2^2 = c_2 =>$$

$$\frac{\omega}{2}\left[\left(x_1 - \frac{\mu \cdot g}{\omega^2}\right)^2 + x_2^2\right] = c_2 =>$$

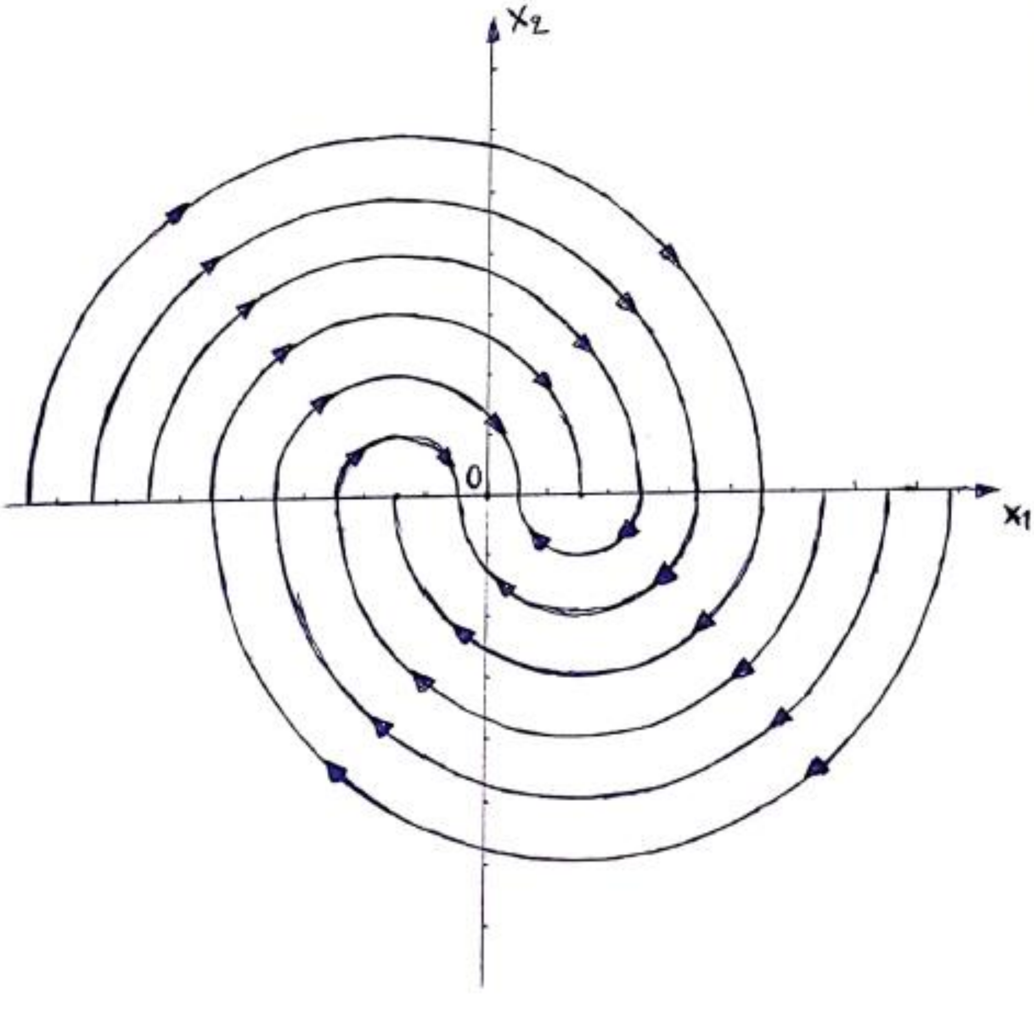
$$\boxed{\left(x_1 - \frac{\mu \cdot g}{\omega^2}\right)^2 + x_2^2 = c}$$

Το οποίο παριστάνει κύκλο, με κέντρο το σημείο $\left(\frac{\mu g}{\omega^2},\ 0\right)$ και ακτίνα τη σταθερά c, κάθε φορά.

Δηλαδή το φασικό πορτρέτο θα έχει την εξής μορφή:

$$\begin{cases} \left(x_1 + \dfrac{\mu g}{\omega^2}\right)^2 + x_2^2 = c, & x_2 > 0 \\ \left(x_1 - \dfrac{\mu g}{\omega^2}\right)^2 + x_2^2 = c, & x_2 < 0 \end{cases}$$

Σχεδιάζοντας πρόχειρα το φασικό αυτό πορτρέτο, προκύπτει:



ii) Για $\dot{x} = 0$, το σώμα θα ισορροπεί στιγμιαία, αφού εκεί η ταχύτητά του θα μηδενίζεται. Σε εκείνες τις θέσεις (οι ακριανές της αποσβενήμενης ταλάντωσης) η επιτάχυνση του σώματος θα είναι μέγιστη (μέγιστη δυναμική ενέργεια), ενώ η κινητική του ενέργεια θα είναι μηδέν.

Για το σύνολο των σημείων ισορροπίας, γνωρίζουμε ότι στα σημεία αυτά θα έχει επέλθει ισορροπία, όταν:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\sigma\tau\alpha\tau} \geq k \cdot |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_{\sigma\tau\alpha\tau} N \geq k \cdot |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_{\sigma\tau\alpha\tau} mg \geq k \cdot |x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| \leq \frac{\mu_{\sigma\tau\alpha\tau} g}{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| \leq 1.4715 \Rightarrow$$

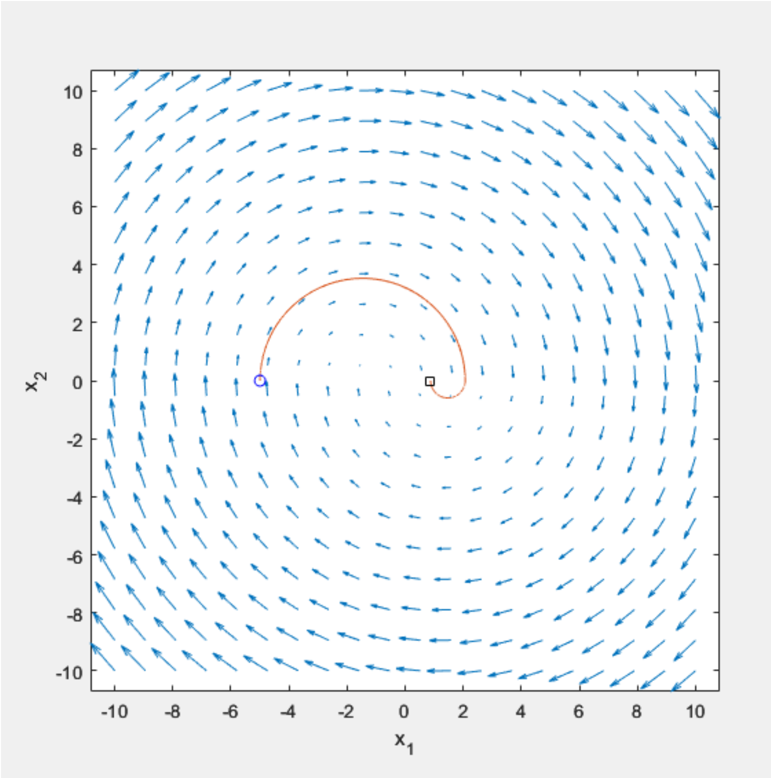
$$-1.4715 \leq x \leq 1.4715$$

Δηλαδή, το σύνολο των σημείων ισορροπίας του συστήματος θα είναι όλες οι θέσεις: $x \in$ (-1.4715, 1.4715). Όλα αυτά τα σημεία ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθή, αφού φαίνεται ότι πάντοτε θα βρεθώ εκεί σε πεπερασμένο χρόνο. Μάλιστα, το σύνορο του συνόλου αυτού αποτελείται από τα κέντρα των δύο κύκλων, όπως φαίνεται και στο παραπάνω φασικό πορτρέτο.

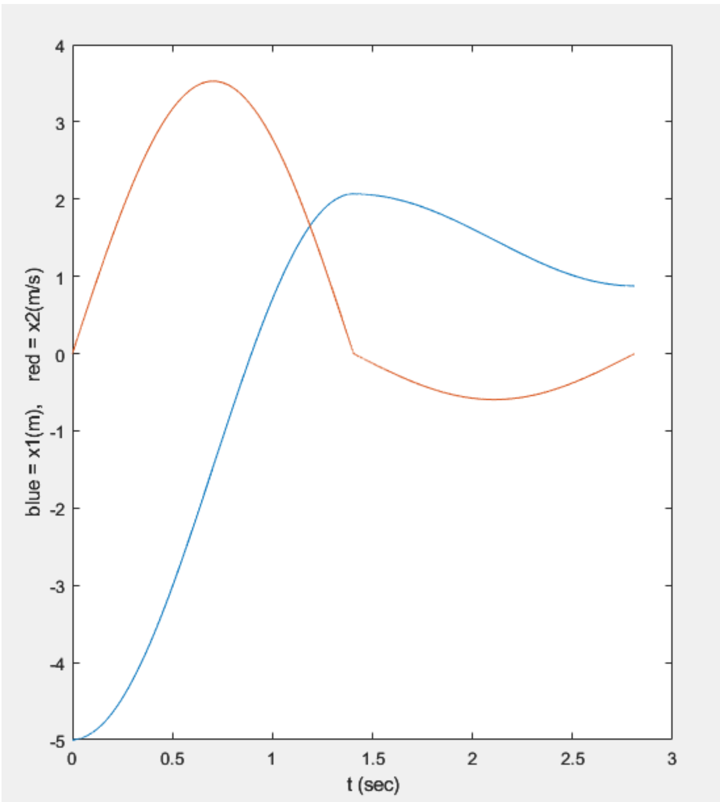
iii) Κατασκευάζουμε τις προσομοιώσεις που ζητούνται, για τις αρχικές τιμές των πινάκων που δίνονται, και εμφανίζουμε τα αποτελέσματα:

## Προσομοίωση 1

Για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = -5$ και $x_2(0) = 0$, εμφανίζουμε το φασικό πορτρέτο:

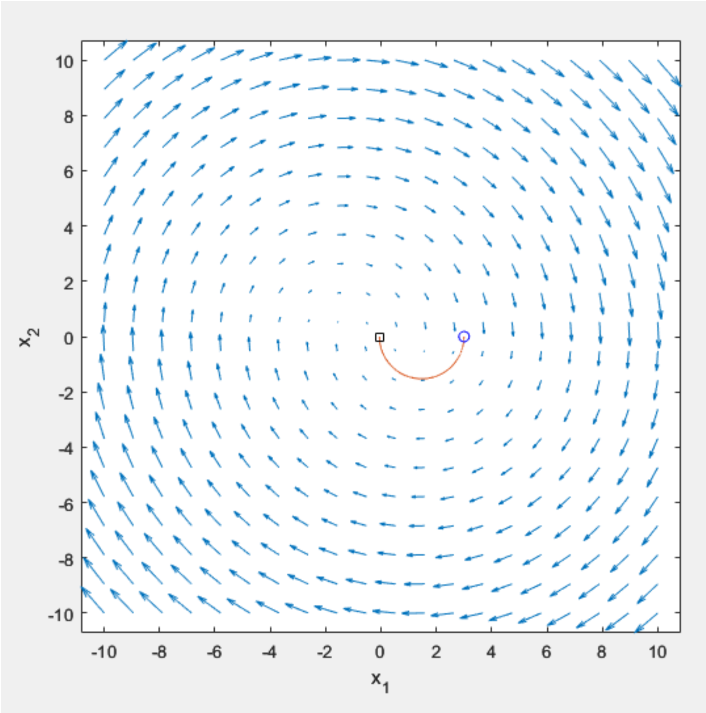



Ο ολικός χρόνος που χρειάζεται, για να έρθει το σύστημα σε ισορροπία, είναι t = 2.809782 sec. Εμφανίζουμε, ακόμα, το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας χρόνου:

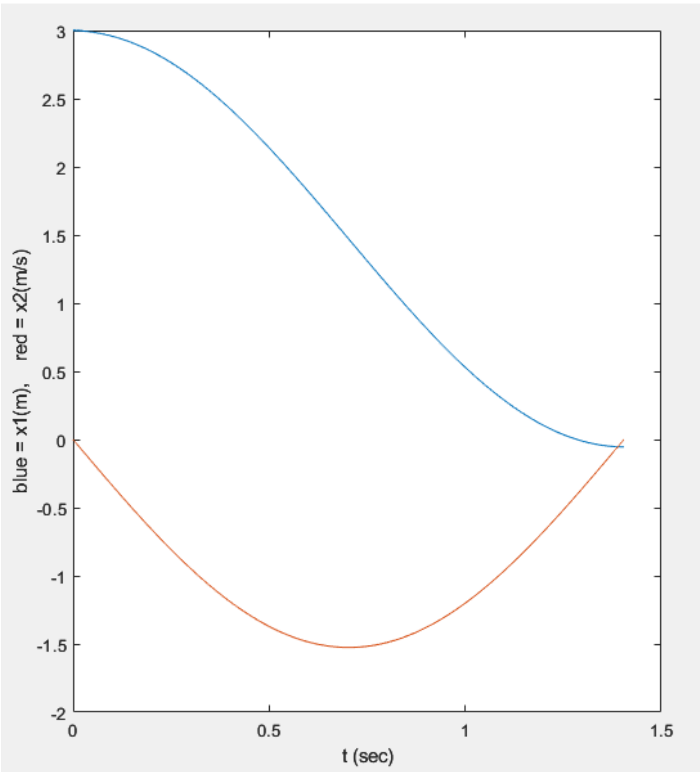


## Προσομοίωση 2

Για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 3$ και $x_2(0) = 0$, εμφανίζουμε το φασικό πορτρέτο:

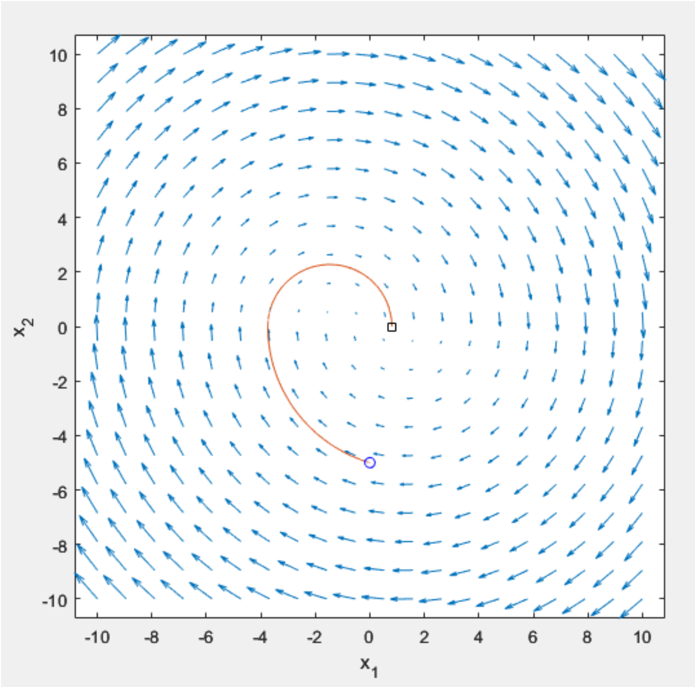



Ο ολικός χρόνος που χρειάζεται, για να έρθει το σύστημα σε ισορροπία, είναι t = 1.404695 sec. Εμφανίζουμε, ακόμα, το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας χρόνου:

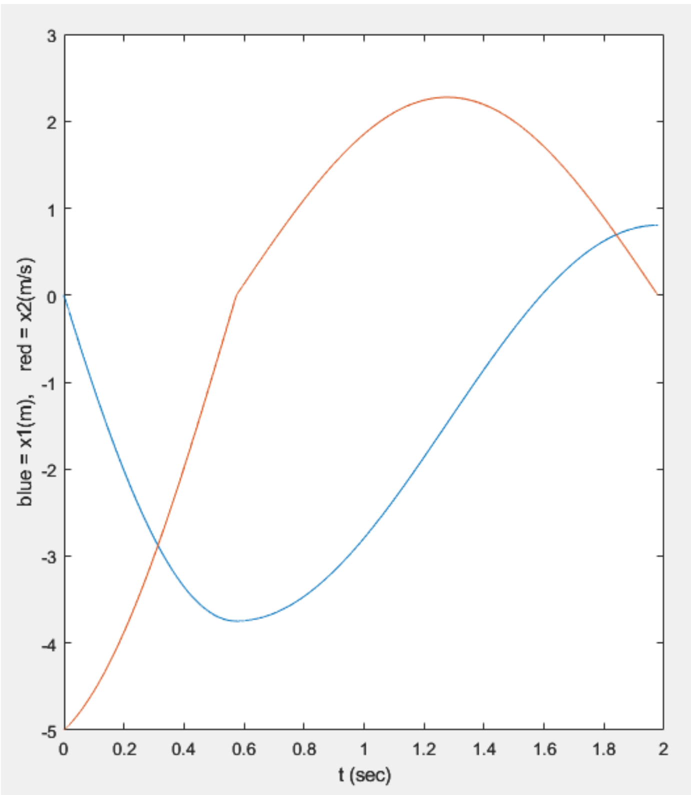


**<u>Προσομοίωση 3</u>**

Για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 0$ και $x_2(0) = -5$, εμφανίζουμε το φασικό πορτρέτο:

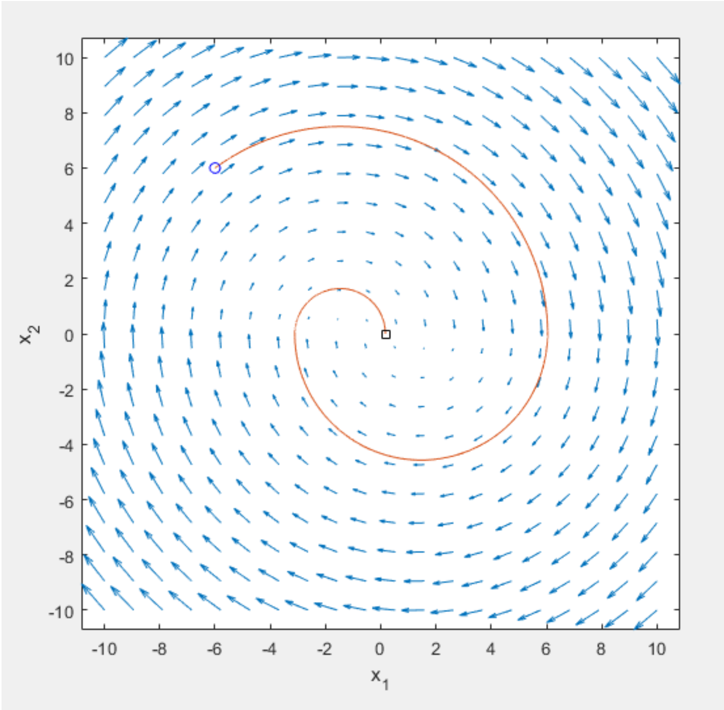



Ο ολικός χρόνος που χρειάζεται, για να έρθει το σύστημα σε ισορροπία, είναι t = 1.979190 sec. Εμφανίζουμε, ακόμα, το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας χρόνου:

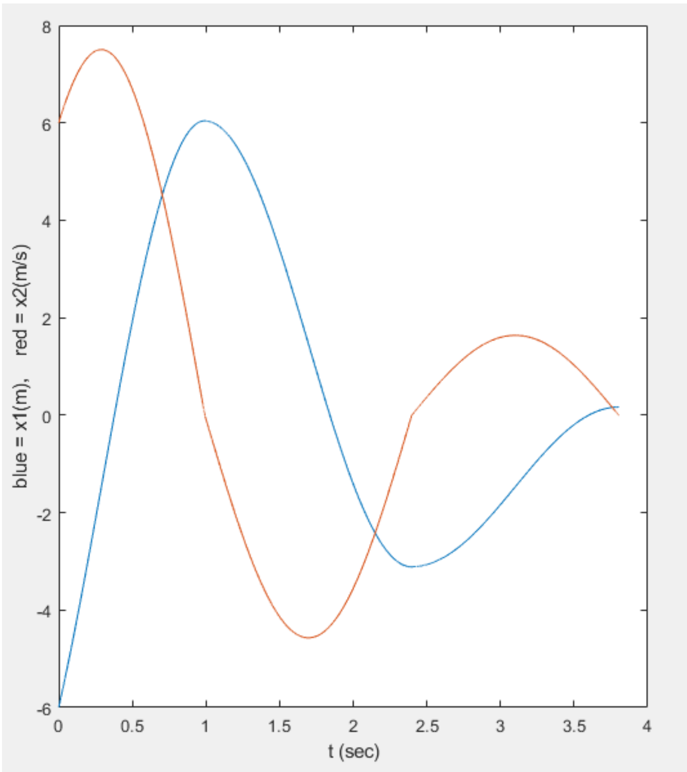


## Προσομοίωση 4

Για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = -6$ και $x_2(0) = 6$, εμφανίζουμε το φασικό πορτρέτο:

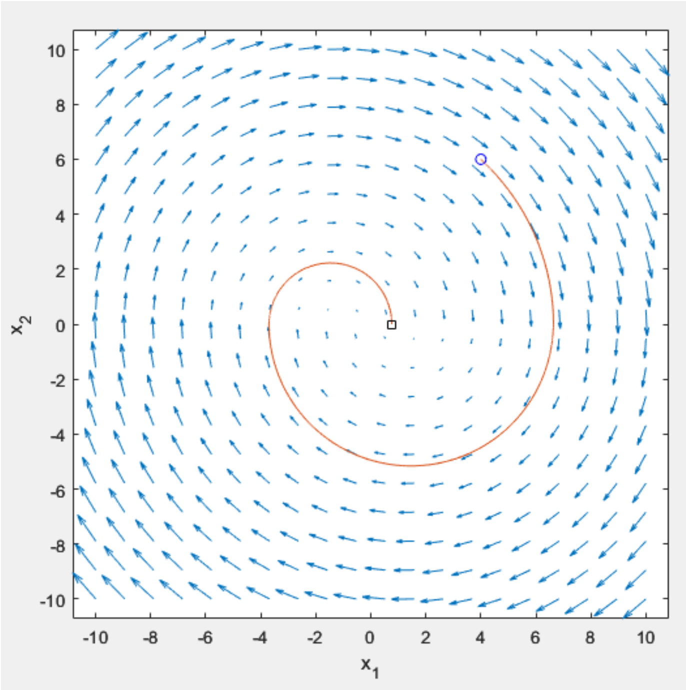



Ο ολικός χρόνος που χρειάζεται, για να έρθει το σύστημα σε ισορροπία, είναι t = 3.802348 sec. Εμφανίζουμε, ακόμα, το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας χρόνου:

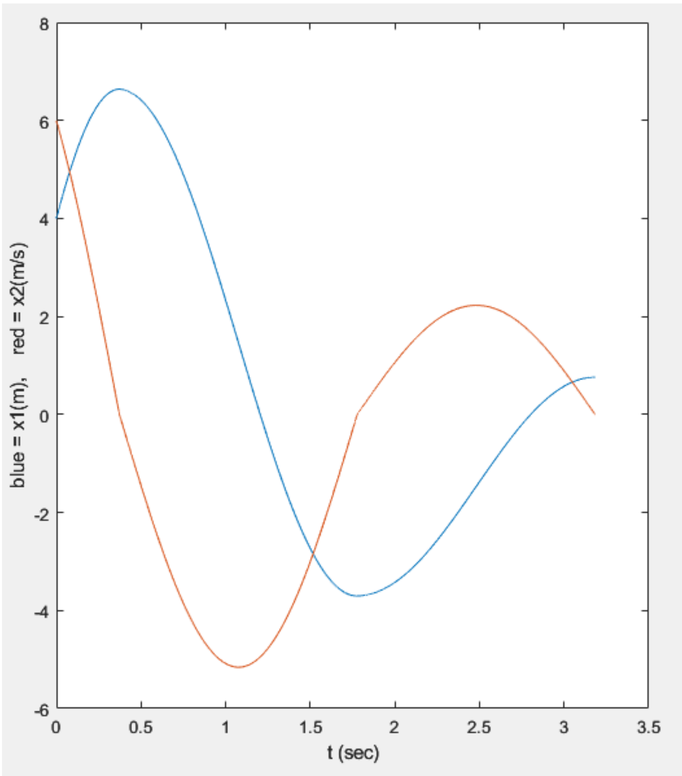


**Προσομοίωση 5**

Για αρχικές συνθήκες $x_1(0) = 4$ και $x_2(0) = 6$, εμφανίζουμε το φασικό πορτρέτο:




Ο ολικός χρόνος που χρειάζεται, για να έρθει το σύστημα σε ισορροπία, είναι t = 3.182786 sec. Εμφανίζουμε, ακόμα, το διάγραμμα θέσης και ταχύτητας χρόνου:



Παρατηρούμε ότι οι αναλυτικές λύσεις που προέκυψαν στο φασικό επίπεδο, για κάθε προσομοίωση, ακολουθούν τις τροχιές του φασικού πορτρέτου που σχεδιάσαμε πρόχειρα, με το χέρι. Οι αρχικές συνθήκες κάθε προσομοίωσης είναι αυτές που ορίζουν την ταχύτητα σύγκλισης στο σύνολο των σημείων ισορροπίας.

Προκειμένου να υπολογίσουμε το χρόνο που χρειάζεται το σύστημα για να φτάσει σε ηρεμία, θα επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση, έστω για ταχύτητες $\dot{x}(0) \geq 0$.

Έστω λοιπόν $x(0) = \mathrm{a}$ η θέση του σώματος και $\dot{x}(0) = \mathrm{b} \geq 0$ η ταχύτητά του, τη χρονική στιγμή t = 0. Η διαφορική εξίσωση θα έχει τη μορφή:

$$m \cdot \ddot{x} + kx + \mu m g = 0 \;=>$$

$$=> \ddot{x} + 5x + 7.3575 = 0$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace, παίρνουμε:

$$s^2 x(s) - s \cdot x(0) - \dot{x}(0) + 5x(\mathrm{s}) + \frac{7.3575}{\mathrm{s}} = 0 =>$$

$$=> \; s^2 x(s) - \mathrm{a} \cdot s - \mathrm{b} + 5x(\mathrm{s}) + \frac{7.3575}{\mathrm{s}} = 0 =>$$

$$=> X(\mathrm{s}) = -\frac{7.3575}{s(\mathrm{s}^2+5)} + \frac{\mathrm{as}}{s^2+5} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{s}^2+5} =>$$

Εφαρμόζουμε τώρα τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και έχουμε:

$$x(t) = 1.4715 \cdot cos(\sqrt{5}t) + acos(\sqrt{5}t) + \frac{\sqrt{5}b}{5} sin(\sqrt{5}t) - 1.4715$$

Η λύση αυτή αποτελεί τη θέση του σώματος κάθε χρονική στιγμή, για θετικές ταχύτητες. Αν παραγωγίσουμε, παίρνουμε την ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή:

$$\dot{x}(t) = -1.4715 \cdot \sqrt{5}\, sin(\sqrt{5}t) - a\sqrt{5} \cdot sin(\sqrt{5}t) + b \cdot cos(\sqrt{5}t)$$

Για να βρούμε το χρόνο που χρειάζεται το σώμα για να βρεθεί από μία ακραία θέση της τροχιάς του, στην απέναντι ακραία θέση, θεωρούμε αρχική ταχύτητα μηδέν ($\dot{x}(0) = \mathrm{b} = 0$) και θέση προφανώς του μηδενός($x(0) = \mathrm{a} \neq 0$). Θα μηδενίσουμε, στη συνέχεια, την εξίσωση ταχύτητας, ώστε να βρούμε το ζητούμενο χρόνο:

$$\dot{x}(t) = -1.4715 \cdot \sqrt{5}\, sin(\sqrt{5}t) - a\sqrt{5} \cdot sin(\sqrt{5}t) \;=\; 0 \quad =>$$

$$=> \quad \dot{x}(t) = -(1.4715 \cdot \sqrt{5} + a\sqrt{5})\, sin(\sqrt{5}t) \;=\; 0 \quad =>$$

$$=> \; sin(\sqrt{5}t) \;=\; 0 \quad =>$$

t = 1.404962·n με $n \in \mathbb{Z}$

Δηλαδή, το σώμα θα φτάσει στην απέναντι ακραία θέση για πρώτη φορά (n=1) σε χρόνο t = 1.404962 sec. Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι ο χρόνος που χρειάζεται για να βρεθεί το σώμα από τη μία άκρη της τροχιάς του, στην απέναντι άκρη, είναι σταθερός, ανεξάρτητος της αρχικής θέσης. Άρα, κάθε πλήρες ημικύκλιο στο φασικό πορτρέτο (που αντιστοιχεί σε μετάβαση του σώματος από μία ακραία θέση στην απέναντι ακραία θέση) θα ισοδυναμεί με διάρκεια χρόνου Δt=1.404962 sec.

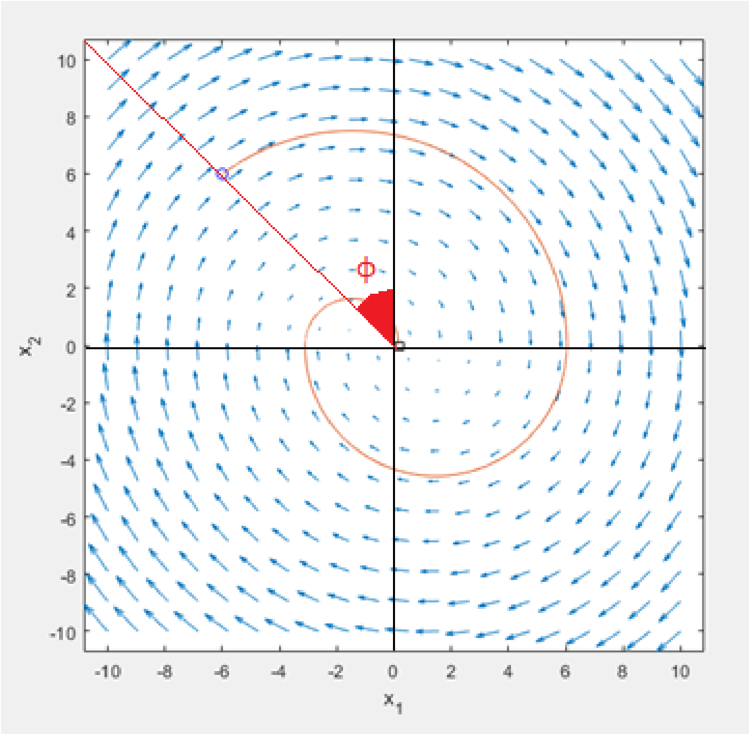
Έτσι, μετρώντας τα ημικύκλια στο φασικό επίπεδο κάθε προσομοίωσης και πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό τους με το 1.404962, βρίσκουμε τον συνολικό χρόνο που χρειάζεται για να βρεθεί το σύστημα σε ηρεμία.

Εάν, τώρα, η αρχική ταχύτητα του σώματος δεν είναι μηδενική, μπορούμε να θεωρήσουμε (προσεγγιστικά, κανονικά προκύπτει ένα σφάλμα) ότι το σώμα διανύει ίσες αποστάσεις σε ίσους χρόνους. Έτσι, ένα ημικύκλιο διαγράφεται σε χρόνο Δt=1.404962 sec, ενώ πχ ένα τέταρτο του ημικυκλίου διαγράφεται σε χρόνο 1/4 του Δt.

Για παράδειγμα, στην Προσομοίωση 4, όπου το σώμα έχει αρχική ταχύτητα $x_2(0) \;=\; 6$ m/sec και βρίσκεται στην αρχική θέση $x_1(0) = -6\,\mathrm{m}$, βλέπουμε από το φασικό πορτρέτο, παρακάτω, ότι το συνολικό αρχικό τμήμα του 'ημικυκλίου' θα διαγράψει γωνία:

$$90^0 + \hat{\phi}$$

όπου $\hat{\phi} = arctan\left(\frac{|x_2(0)|}{|x_1(0)|}\right) = arctan\left(\frac{|6|}{|-6|}\right) = 45^0$




Επομένως, το τμήμα του αρχικού ημικυκλίου θα είναι $135^0$, το οποίο αντιστοιχεί στα ¾ του όλου ημικυκλίου. Επίσης, παρατηρούμε ότι εκτός από το αρχικό, χρειάζονται ακόμη δύο πλήρη ημικύκλια, για να φτάσει το σύστημα σε ηρεμία. Άρα, ο συνολικός χρόνος αποκατάστασης θα είναι:

t = ¾ * 1.404962 + 2 * 1.404962 => t = 3.863645 sec

Το παραπάνω αποτέλεσμα επιβεβαιώνεται και μέσω της προσομοίωσης του Matlab.

Στη περίπτωση που δεν διαθέτουμε το φασικό πορτρέτο, θα πρέπει να υπολογίζουμε το χρόνο που χρειάζεται για κάθε μηδενισμό της ταχύτητας, να υπολογίζουμε το πλάτος τη χρονική στιγμή εκείνη, και, εάν είναι εκτός του διαστήματος ισορροπίας, να συνεχίζουμε τη διαδικασία, με νέες αρχικές συνθήκες, προσθέτοντας χρόνους, μέχρι το πλάτος να εισέλθει στο διάστημα ισορροπίας $-1.4715 \leq x \leq 1.4715$ για πρώτη φορά. Η διαδικασία αυτή, όμως, είναι αρκετά χρονοβόρα.