



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΜΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

# ΕΥΦΥΗ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

## ΕΡΓΑΣΙΑ



Ονοματεπώνυμο: Παπούλιας Μιχαήλ

AEM: 10204

Email: [mpapouli@ece.auth.gr](mailto:mpapouli@ece.auth.gr)

Επιβλέπων καθηγητής: Ροβιθάκης Γεώργιος

Θεσσαλονίκη

Δεκέμβριος 2023

α) Το σύστημα που δίνεται είναι το:

$$M \cdot \ddot{q} + G \cdot \sin(q) + C \cdot \dot{q} = u$$

όπου  $u \in \mathbb{R}$  η είσοδος ελέγχου (ροπή σε  $N \cdot m$ ),  $q \in \mathbb{R}$  η έξοδος του συστήματος (γωνία περιστροφής σε  $\text{rad}$ ),  $\dot{q}$  και  $\ddot{q}$  η γωνιακή ταχύτητα (σε  $\text{rad} / s$ ) και η γωνιακή επιτάχυνση (σε  $\text{rad} / s^2$ ), αντίστοιχα. Τα  $M$ ,  $G$ ,  $C$  είναι γνήσια θετικές αλλά άγνωστες σταθερές.

Ζητείται να γραμμικοποιήσουμε το παραπάνω σύστημα γύρω από το σημείο λειτουργίας που είναι το μηδέν.

Το σύστημα είναι 2<sup>ης</sup> τάξης, επομένως θα θέσουμε δύο μεταβλητές κατάστασης  $x_1$  και  $x_2$  ως εξής:

$$x_1 = q \quad \text{και} \quad x_2 = \dot{q}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M} \cdot u - \frac{G}{M} \cdot \sin(x_1) - \frac{C}{M} \cdot x_2 \end{cases}$$

από όπου φαίνεται ότι για μηδενική είσοδο ( $u = 0$ ) ένα από τα σημεία ισορροπίας είναι το  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ .

Ορίζουμε τώρα το ανάπτυγμα Taylor του  $\sin(x)$  γύρω από σημείο  $A$ :

$$\sin(x) = \sin(A) + \sin'(A) \cdot (x - A) + \frac{\sin''(A)}{2!} \cdot (x - A)^2 + \frac{\sin^{(3)}(A)}{3!} \cdot (x - A)^3 + \dots$$

Για  $A=0$ , έχουμε:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Πολύ κοντά στο μηδέν, λοιπόν, θα ισχύει ότι  $\sin(x_1) \approx x_1$  αφού οι όροι μεγαλύτερης τάξης προσεγγίζουν το μηδέν.

Έτσι, το παραπάνω σύστημα παίρνει την εξής γραμμική μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M} \cdot u - \frac{G}{M} \cdot x_1 - \frac{C}{M} \cdot x_2 \end{cases}$$

ή, σε μορφή πίνακα, ως:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{G}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot u$$

με έξοδο τη γωνία περιστροφής, άρα το  $x_1 = q$  οπότε:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Για ευκολία θα γράψουμε πιο απλά το σύστημα στη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C \cdot x \end{cases}$$

όπου  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{G}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$   
 $u \in \mathbb{R}$  η είσοδος και  $y \in \mathbb{R}$  η έξοδος.

**β)** Θέλουμε να σχεδιάσουμε άμεσο προσαρμοστικό ελεγκτή μοντέλου αναφοράς χρησιμοποιώντας ανάδραση εξόδου για το γραμμικοποιημένο μας σύστημα. Δηλαδή η έξοδος του συστήματος θέλουμε να παρακολουθεί την έξοδο ενός συστήματος αναφοράς το οποίο και επιλέγουμε εμείς. Το σύστημά μας είναι μιας εισόδου και μιας εξόδου (MEME).

Αρχικά, θα εξετάσουμε αν το (γραμμικοποιημένο) σύστημα είναι ελέγξιμο, ώστε να μπορεί να σχεδιαστεί ελεγκτής τέτοιος ώστε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας. Όπως είπαμε παραπάνω, το σύστημα έχει τη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C \cdot x \end{cases}$$

Ορίζουμε τον πίνακα  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & -\frac{C}{M^2} \end{bmatrix}$ . Για να είναι ελέγξιμο το σύστημα, πρέπει  $\det(\mathbf{M}) \neq 0$ . Πράγματι, ισχύει  $\det(\mathbf{M}) = -\frac{1}{M^2} \neq 0$ , αφού  $M > 0 \in \mathbb{R}$ . Άρα  $\text{rank}(\mathbf{M}) = n = 2$  και το σύστημα είναι ελέγξιμο.

Θα βρούμε τώρα τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace για μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} \ddot{q} &= \frac{1}{M} \cdot u - \frac{C}{M} \cdot \dot{q} - \frac{G}{M} \cdot q \Rightarrow \\ \Rightarrow s^2 \cdot y(s) &= \frac{1}{M} \cdot u(s) - \frac{C}{M} \cdot s \cdot y(s) - \frac{G}{M} \cdot y(s) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G_p(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1/M}{s^2 + \frac{C}{M} \cdot s + \frac{G}{M}}$$

$$\text{ή και } G_p(s) = k_p \cdot \frac{Z_p(s)}{R_p(s)} \quad \mu\epsilon \quad k_p = \frac{1}{M}, \quad Z_p(s) = 1, \quad R_p(s) = s^2 + \frac{C}{M} \cdot s + \frac{G}{M}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς  $G_p(s)$  του συστήματος είναι σχετικού βαθμού  $n^* = 2$ . Επομένως, υποχρεούμαστε να επιλέξουμε μοντέλο αναφοράς το οποίο να έχει σχετικό βαθμό επίσης 2.

Βλέπουμε ότι οι παρακάτω τέσσερις προϋποθέσεις (για το ελεγχόμενο σύστημα) ικανοποιούνται:

- 1) Το  $Z_p(s)$  είναι κανονικό και ευσταθές κατά Hurwitz πολυώνυμο (τα κανονικά πολυώνυμα έχουν τη μονάδα για συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τους).
- 2) Ένα άνω φράγμα του βαθμού  $n_p$  του  $R_p(s)$  είναι γνωστό, βλέπουμε ότι το  $R_p(s)$  έχει βαθμό 2.
- 3) Ο σχετικός βαθμός  $n^*$  του  $G_p(s)$  είναι γνωστός και ίσος με 2.
- 4) Το πρόσημο του κέρδους υψηλής συχνότητας  $k_p$  είναι γνωστό και συγκεκριμένα θετικό, αφού  $k_p = \frac{1}{M} > 0$ .

Για το σύστημα αναφοράς που θα επιλέξουμε εμείς, απαραίτητες προϋποθέσεις είναι οι εξής:

- 1) Τα  $Z_m(s)$  και  $R_m(s)$  είναι κανονικά και ευσταθή κατά Hurwitz πολυώνυμα και αντίστοιχα ένα άνω φράγμα του βαθμού  $n_m$  του  $R_m(s)$  είναι γνωστό.
- 2) Ο σχετικός βαθμός του  $G_p(s)$  είναι ίδιος με τον σχετικό βαθμό του  $G_m(s)$ .

Επιλέγουμε λοιπόν το μοντέλο αναφοράς με συνάρτηση:

$$G_m(s) = \frac{y_m(s)}{r(s)} = \frac{9}{(s+3)^2}$$

$$\text{ή και } G_m(s) = k_m \cdot \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad \mu\epsilon \quad k_m = 9, \quad Z_m(s) = 1, \quad R_m(s) = s^2 + 6 \cdot s + 9$$

το οποίο και ικανοποιεί τις δύο απαραίτητες προϋποθέσεις. Ακόμη, η  $G_m(s)$  σχεδιάζεται έτσι ώστε η  $(s+p_0) \cdot G_m(s)$  να είναι Αυστηρά Θετική Πραγματική (όπου  $p_0 > 0$ , θα επιλεγεί από εμάς).

Επιλέγουμε  $p_0 = 1$ , επομένως ορίζουμε την  $G(s)$  να είναι:

$$G(s) = (s+p_0) \cdot G_m(s) = \frac{9(s+1)}{(s+3)^2}$$

Βλέπουμε ότι:

- 1) Η  $G(s)$  είναι παραγωγίσιμη ως προς  $\sigma$  (αφού  $s = \sigma + j \cdot \omega$ ).
- 2)  $\text{Re}\{G(j\omega)\} > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Πράγματι:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{9(j\omega + 1)}{(j\omega + 3)^2}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{9(j\omega + 1)(9 - \omega^2 - 6j\omega)}{(9 - \omega^2 + 6j\omega)(9 - \omega^2 - 6j\omega)}\right\} = \frac{81 + 45\omega^2}{(9 - \omega^2)^2 + 36\omega^2}$$

$$3) \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \omega^2 \cdot \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = 45 > 0$$

Επομένως η  $G(s)$  είναι Αυστηρά Θετική Πραγματική, με βάση το θεώρημα. Το σύστημα  $G_m(s)$  με μετασχηματισμό Laplace έρχεται στη μορφή:

$$\ddot{y}_m + 6 \cdot \dot{y}_m + 9y_m = 9r$$

Θέτουμε τις μεταβλητές κατάστασης  $z_1$  και  $z_2$ :

$$z_1 = y_m \quad \text{και} \quad z_2 = \dot{y}_m$$

Οπότε προκύπτει:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 9r - 6z_2 - 9z_1 \end{cases}$$

ή, σε μορφή πίνακα, ως:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \cdot r$$

με έξοδο την κατάσταση  $z_1$ :

$$y_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

ή ακόμα πιο απλά ως:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_m \cdot z + B_m \cdot r \\ y_m &= C_m \cdot z \end{aligned}$$

όπου  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ,  $r \in \mathbb{R}$  η είσοδος και  $y_m \in \mathbb{R}$  η έξοδος του συστήματος αναφοράς.

Με βάση τη θεωρία, ο ελεγκτής που θα υλοποιήσουμε είναι ο εξής:

$$u = \theta^T \cdot \omega + \dot{\theta}^T \cdot \phi$$

$$\omega = [\omega_1^T \quad \omega_2^T \quad y \quad r]^T$$

$$\dot{\omega}_1 = F \cdot \omega_1 + g \cdot u, \quad \omega_1(0) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 = F \cdot \omega_2 + g \cdot y, \quad \omega_2(0) = 0$$

$$\dot{\phi} = -p_0 \cdot \phi + \omega, \quad \phi(0) = 0$$

$$\dot{\theta} = -\Gamma \cdot \varepsilon \cdot \phi \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{k_p}{k_m}\right)$$

$$\varepsilon = y - y_m$$

Στα παραπάνω επιλέξαμε ευσταθές πολυώνυμο  $\Lambda(s) = s + 1$  (τάξεως  $n - 1$  σε σχέση με το  $R_p(s)$ ) οπότε προκύπτει και  $F = -1$ ,  $g = 1$  και  $p_0 = 1$  (όπως επιλέχθηκε παραπάνω).

Καθώς γνωρίζουμε ότι  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y_m \in \mathbb{R}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}$ ,  $F \in \mathbb{R}$  και  $g \in \mathbb{R}$ , από τις παραπάνω εξισώσεις του ελεγκτή προκύπτει διαδοχικά ότι:

$\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_2 \in \mathbb{R}$  (άρα και  $\dot{\omega}_1 \in \mathbb{R}$  και  $\dot{\omega}_2 \in \mathbb{R}$ ) οπότε  $\omega \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  (άρα και  $\dot{\theta} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ),  $\phi \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  (άρα και  $\dot{\phi} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ ) και  $\Gamma \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

Ο παραπάνω ελεγκτής εγγυάται ότι όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα και το σφάλμα παρακολούθησης  $\varepsilon(t)$  συγκλίνει ασυμπτωτικά στο μηδέν. Αν επιπλέον τα  $R_p(s)$  και  $Z_p(s)$  δεν έχουν κοινούς παράγοντες και η είσοδος αναφοράς  $r(t)$  είναι ικανά πλούσια τάξεως  $2n$ , τότε το παραμετρικό σφάλμα  $\tilde{\theta} = \theta - \theta^*$  και το σφάλμα παρακολούθησης  $\varepsilon(t)$  θα συγκλίνουν εκθετικά στο μηδέν.

**γ)** Για το αρχικό σύστημα, χωρίς να κάνουμε γραμμικοποίηση, θα σχεδιάσουμε άμεσο προσαρμοστικό ελεγκτή μοντέλου αναφοράς ανάδρασης καταστάσεων, έτσι ώστε το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης  $x$  του αρχικού συστήματος να παρακολουθεί ασυμπτωτικά το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης  $x_{ref}$  του μοντέλου αναφοράς:

$$\dot{x}_{ref} = A_{ref} \cdot x_{ref} + B_{ref} \cdot r(t)$$

Επιθυμούμε επίσης το μοντέλο αναφοράς να εμφανίζει συντελεστή απόσβεσης  $\zeta=0.7$  και φυσική συχνότητα  $\omega_n = 1 \text{ rad/sec}$ , καθώς και όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο να είναι φραγμένα κατά τη διάρκεια παρακολούθησης.

i) Το αρχικό μας σύστημα είναι:

$$M \cdot \ddot{q} + G \cdot \sin(q) + C \cdot \dot{q} = u$$

Θέτουμε δύο μεταβλητές κατάστασης  $x_1$  και  $x_2$ , οπότε το σύστημα έρχεται στη μορφή:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M} \cdot u - \frac{G}{M} \cdot \sin(x_1) - \frac{C}{M} \cdot x_2 \end{cases}$$

ή, σε μορφή πίνακα, ως:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot (u + f(x))$$

ή και:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + f(x)) \\ y &= C \cdot x \end{aligned}$$

όπου  $f(x) = f(x_1) = -G \cdot \sin(x_1)$ , με  $f(x): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ακόμη, είναι  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ .

Στη περίπτωση αυτή, ο πίνακας ελεγχσιμότητας  $\mathbf{M} = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \\ \frac{1}{M} & -\frac{C}{M^2} \end{bmatrix}$ , και

$\det(\mathbf{M}) = -\frac{1}{M^2} \neq 0$ , αφού  $M > 0 \in \mathbb{R}$ . Άρα  $\text{rank}(\mathbf{M}) = n = 2$  και το σύστημα είναι ελέγξιμο. Οπότε μπορεί να σχεδιαστεί ελεγκτής που να ικανοποιεί τις απαιτήσεις μας.

Για το μοντέλο αναφοράς, θα βρούμε τη γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς, η οποία για σύστημα 2x2 έχει τη μορφή:

$$G_{ref}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

Το οποίο μπορεί να γραφεί γραμμικά ως:

$$\dot{x}_{ref} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{ref1} \\ \dot{x}_{ref2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ref1} \\ x_{ref2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_n^2 \end{bmatrix} \cdot r$$

Οπότε για  $\zeta = 0.7$  και  $\omega_n = 1 \text{ rad/sec}$ , προκύπτει:

$$\dot{x}_{ref} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{ref1} \\ \dot{x}_{ref2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ref1} \\ x_{ref2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot r$$

ή και:

$$\dot{x}_{ref} = A_{ref} \cdot x_{ref} + B_{ref} \cdot r$$

όπου  $A_{ref} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1.4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  και  $B_{ref} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ .

Το χρονικό διάστημα επίτευξης του στόχου παρακολούθησης (δηλαδή  $x_1 \rightarrow x_{ref1}$  και  $x_2 \rightarrow x_{ref2}$  όσο  $t \rightarrow +\infty$ ) εξαρτάται τόσο από την επιλογή της εισόδου αναφοράς  $r(t)$  όσο και από την επιλογή των κερδών των διαφορικών

εξισώσεων, όπως θα δούμε παρακάτω. Ο στόχος παρακολούθησης θα είναι εφικτός εφόσον η είσοδος αναφοράς  $r(t)$  είναι σήμα φραγμένο στο άπειρο.

ii) Έστω ότι τα μεγέθη  $M$ ,  $G$ ,  $C$  ήταν γνωστά, άρα και ο πίνακας  $A$  του αρχικού συστήματος θα ήταν γνωστός. Τότε ο ελεγκτής που θα επιλέγαμε θα είχε τη μορφή:

$$u = -k^* \cdot x - L^* \cdot r - N^* \cdot \Phi(x)$$

όπου  $N^* \cdot \Phi(x) = \theta^T \cdot \Phi(x) = f(x)$ , με  $N^* = -G$  και  $\Phi(x) = \sin(x)$

και  $k^* \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $L^* \in \mathbb{R}$ ,  $N^* \in \mathbb{R}$

οπότε το αρχικό σύστημα θα γινόταν:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B \cdot (-k^* \cdot x - L^* \cdot r + f(x) - N^* \cdot \Phi(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{x} = (A - Bk^*)x - BL^* \cdot r \end{aligned}$$

Οπότε θα επιλέγαμε  $Bk^* = A - A_{ref}$  και  $BL^* = -B_{ref}$  και θα είχαμε επιλύσει το πρόβλημα.

Όμως, τα μεγέθη  $M$ ,  $G$ ,  $C$  είναι άγνωστα, επομένως θα επιλέξουμε τον εξής ελεγκτή:

$$u = -k(t) \cdot x - L(t) \cdot r - N(t) \cdot \Phi(x)$$

με  $k \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $L \in \mathbb{R}$  και  $N \in \mathbb{R}$ .

Προσθαφαιρούμε στο αρχικό σύστημα το επιθυμητό μοντέλο αναφοράς, έτσι παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(u + N^* \cdot \Phi(x)) \pm (A_{ref} \cdot x_{ref} + B_{ref} \cdot r) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{x} = A_{ref} \cdot x + B_{ref} \cdot r + (A - A_{ref})x - B_{ref} \cdot r + B(u + N^* \cdot \Phi(x)) \Rightarrow \\ \dot{x} &= A_{ref} \cdot x + B_{ref} \cdot r + Bk^*x + BL^* \cdot r + B(-k \cdot x - L \cdot r - N \cdot \Phi(x) + N^* \cdot \Phi(x)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{x} = A_{ref} \cdot x + B_{ref} \cdot r + B(k^*x - k \cdot x + L^* \cdot r - L \cdot r + N^* \cdot \Phi(x) - N \cdot \Phi(x)) \end{aligned}$$

θέτουμε  $\tilde{k} = k - k^*$ ,  $\tilde{L} = L - L^*$  και  $\tilde{N} = N - N^*$ , επομένως:

$$\dot{x} = A_{ref} \cdot x + B_{ref} \cdot r + B(-\tilde{k} \cdot x - \tilde{L} \cdot r - \tilde{N} \cdot \Phi(x))$$

Το σφάλμα παρακολούθησης θα είναι:

$$e = x - x_{ref} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_{ref}$$

Σε αυτό το σημείο υποθέτουμε ότι η εξίσωση  $BL^* = -B_{ref}$  θα έχει πάντοτε λύση, προκειμένου να μπορέσουμε να συνεχίσουμε την ανάλυση. Δηλαδή θα



ισχύει ότι  $B = -B_{re}(L^*)^{-1}$ . Επίσης, θεωρούμε τον αριθμό  $\Gamma = (L^*)^{-1} \text{sgn}(L)$ . Τα  $\Gamma$  και  $L$  είναι αριθμοί και όχι πίνακες, λόγω του ότι  $u \in \mathbb{R}$ .

Οπότε συνεχίζουμε:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= A_{ref} \cdot x + B_{ref} \cdot r - B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \left( -\tilde{k} \cdot x - \tilde{L} \cdot r - \tilde{N} \cdot \Phi(x) \right) - A_{ref} \cdot x_{ref} - B_{ref} \cdot r \\ \dot{e} &= A_{ref} \cdot e + B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \cdot (\tilde{k} \cdot x + \tilde{L} \cdot r + \tilde{N} \cdot \Phi(x))\end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση Lyapunov:

$$V = e^T P e + tr \left\{ \frac{\tilde{k}^T \Gamma \tilde{k}}{\gamma_1} \right\} + tr \left\{ \frac{\tilde{L}^T \Gamma \tilde{L}}{\gamma_2} \right\} + tr \left\{ \frac{\tilde{N}^T \Gamma \tilde{N}}{\gamma_3} \right\} > 0 \quad \mu\epsilon \quad \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$$

και  $P = P^T > 0$ , τέτοιος ώστε για  $Q = Q^T > 0$  η εξίσωση Lyapunov να έχει λύση:

$$A_{ref}^T P + P A_{ref} = -Q$$

Η παράγωγος της  $V$  είναι:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + tr \left\{ \frac{\dot{\tilde{k}}^T \Gamma \tilde{k}}{\gamma_1} \right\} + tr \left\{ \frac{\tilde{k}^T \Gamma \dot{\tilde{k}}}{\gamma_1} \right\} + tr \left\{ \frac{\dot{\tilde{L}}^T \Gamma \tilde{L}}{\gamma_2} \right\} + tr \left\{ \frac{\tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}}{\gamma_2} \right\} \\ &\quad + tr \left\{ \frac{\dot{\tilde{N}}^T \Gamma \tilde{N}}{\gamma_3} \right\} + tr \left\{ \frac{\tilde{N}^T \Gamma \dot{\tilde{N}}}{\gamma_3} \right\}\end{aligned}$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τρεις ιδιότητες του trace ( $\text{tr}\{\}$ ):

- 1)  $\text{tr}\{\Gamma \Delta\} = \text{tr}\{\Delta \Gamma\}$ , για  $\Gamma, \Delta \in \mathbb{R}^{m \times m}$
- 2)  $\text{tr}\{y \cdot x^T\} = x^T y$ , για  $x, y \in \mathbb{R}^m$  διανύσματα με το ίδιο μέγεθος
- 3)  $\text{tr}\{y \cdot x^T\} = \text{tr}\{x \cdot y^T\}$ , για  $x, y \in \mathbb{R}^m$  διανύσματα με το ίδιο μέγεθος

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \left[ A_{ref} \cdot e + B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \cdot (\tilde{k}x + \tilde{L}r + \tilde{N} \cdot \Phi(x)) \right]^T P e \\ &\quad + e^T P \left[ A_{ref} \cdot e + B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \cdot (\tilde{k}x + \tilde{L}r + \tilde{N} \cdot \Phi(x)) \right] \\ &\quad + 2 tr \left\{ \frac{\tilde{k}^T \Gamma \dot{\tilde{k}}}{\gamma_1} \right\} + 2 tr \left\{ \frac{\tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}}{\gamma_2} \right\} + 2 tr \left\{ \frac{\tilde{N}^T \Gamma \dot{\tilde{N}}}{\gamma_3} \right\} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & e^T A_{ref}^T P e + x^T \tilde{k}^T ((L^*)^{-1})^T B_{ref}^T P e + r^T \tilde{L}^T ((L^*)^{-1})^T B_{ref}^T P e \\
& + \Phi(x)^T \tilde{N}^T ((L^*)^{-1})^T B_{ref}^T P e + e^T P A_{ref} \cdot e + e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{k} x \\
& + e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{L} r + e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{N} \cdot \Phi(x) + 2 \operatorname{tr} \left\{ \frac{\tilde{k}^T \Gamma \dot{\tilde{k}}}{\gamma_1} \right\} \\
& + 2 \operatorname{tr} \left\{ \frac{\tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}}{\gamma_2} \right\} + 2 \operatorname{tr} \left\{ \frac{\tilde{N}^T \Gamma \dot{\tilde{N}}}{\gamma_3} \right\} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & e^T (A_{ref}^T P + P A_{ref}) e + 2 e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{k} x + 2 e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{L} r \\
& + 2 e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{N} \cdot \Phi(x) + 2 \operatorname{tr} \left\{ \frac{\tilde{k}^T \Gamma \dot{\tilde{k}}}{\gamma_1} \right\} + 2 \operatorname{tr} \left\{ \frac{\tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}}{\gamma_2} \right\} \\
& + 2 \operatorname{tr} \left\{ \frac{\tilde{N}^T \Gamma \dot{\tilde{N}}}{\gamma_3} \right\}
\end{aligned}$$

Καθώς έχουμε ορίσει ότι  $\Gamma = (L^*)^{-1} \operatorname{sgn}(L)$ , με  $\Gamma > 0 \in \mathbb{R}$  αφού  $L^* \in \mathbb{R}$ , έχουμε:

$$\begin{aligned}
\triangleright e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{k} x &= e^T P B_{ref} \Gamma \tilde{k} x \operatorname{sgn}(L) = \operatorname{tr} \{ x e^T P B_{ref} \Gamma \tilde{k} \} \operatorname{sgn}(L) \\
&= \operatorname{tr} \{ \tilde{k}^T \Gamma B_{ref}^T P e x^T \} \operatorname{sgn}(L) \\
\triangleright e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{L} r &= e^T P B_{ref} \Gamma \tilde{L} r \operatorname{sgn}(L) = \operatorname{tr} \{ r e^T P B_{ref} \Gamma \tilde{L} \} \operatorname{sgn}(L) \\
&= \operatorname{tr} \{ \tilde{L}^T \Gamma B_{ref}^T P e r^T \} \operatorname{sgn}(L) \\
\triangleright e^T P B_{ref} \cdot (L^*)^{-1} \tilde{N} \Phi(x) &= e^T P B_{ref} \Gamma \tilde{N} \Phi(x) \operatorname{sgn}(L) \\
&= \operatorname{tr} \{ \Phi(x) e^T P B_{ref} \Gamma \tilde{N} \} \operatorname{sgn}(L) = \operatorname{tr} \{ \tilde{N}^T \Gamma B_{ref}^T P e \Phi(x)^T \} \operatorname{sgn}(L)
\end{aligned}$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov γράφεται ως:

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -e^T Q e + 2 \operatorname{tr} \left\{ \tilde{k}^T \Gamma B_{ref}^T P e x^T \operatorname{sgn}(L) + \frac{\tilde{k}^T \Gamma \dot{\tilde{k}}}{\gamma_1} \right\} \\
& + 2 \operatorname{tr} \left\{ \tilde{L}^T \Gamma B_{ref}^T P e r^T \operatorname{sgn}(L) + \frac{\tilde{L}^T \Gamma \dot{\tilde{L}}}{\gamma_2} \right\} \\
& + 2 \operatorname{tr} \left\{ \tilde{N}^T \Gamma B_{ref}^T P e \Phi(x)^T \operatorname{sgn}(L) + \frac{\tilde{N}^T \Gamma \dot{\tilde{N}}}{\gamma_3} \right\}
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= -\gamma_1 B_{ref}^T P e x^T \operatorname{sgn}(L) \\
\dot{L} &= -\gamma_2 B_{ref}^T P e r^T \operatorname{sgn}(L) \\
\dot{N} &= -\gamma_3 B_{ref}^T P e \Phi(x)^T \operatorname{sgn}(L)
\end{aligned}$$

Τότε:

$$\dot{V} = -e^T Q e \leq 0$$

Φαίνεται λοιπόν ότι η παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov είναι αρνητικά ημιορισμένη για τη συγκεκριμένη επιλογή των  $\dot{k}, \dot{L}$  και  $\dot{N}$ . Άρα τα σήματα  $e, \tilde{k}, \tilde{L}, \tilde{N}$  είναι φραγμένα στο άπειρο ( $e, \tilde{k}, \tilde{L}, \tilde{N} \in \mathcal{L}^\infty$ ). Επίσης, τα  $k, L, N \in \mathcal{L}^\infty$  και επειδή και  $u \in \mathcal{L}^\infty$ , προκύπτει ότι  $\dot{e} \in \mathcal{L}^\infty$ . Θα αποδείξουμε ακόμα ότι  $e \in \mathcal{L}^2$ :

$$\int_0^t \dot{V} dt = \int_0^t -e^T Q e dt \Rightarrow - \int_0^t e^T Q e dt = -V_0 + V_\infty$$

Καθώς ισχύει:  $\lambda_{\min}(Q) \cdot \|e\|^2 \leq e^T Q e \leq \lambda_{\max}(Q) \cdot \|e\|^2$ , έχουμε:

$$\int_0^t \dot{V} dt \leq -\lambda_{\min}(Q) \cdot \int_0^t e^T e dt \Rightarrow$$

$$\int_0^t e^T e dt \leq \frac{V_0 - V_\infty}{\lambda_{\min}(Q)} \Rightarrow e \in \mathcal{L}^2$$

Άρα, έχουμε ότι  $e \in \mathcal{L}^2 \cap \mathcal{L}^\infty$  και  $\dot{e} \in \mathcal{L}^\infty$ , οπότε με βάση το Λήμμα Barbalat ισχύει:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0$$

Συνοψίζοντας, ο ελεγκτής που θα εφαρμόσουμε στο αρχικό μας σύστημα είναι υλοποιήσιμος και ορίζεται ως:

$$u = -k \cdot x - L \cdot r - N \cdot \Phi(x)$$

$$\dot{k} = -\gamma_1 B_{ref}^T P e x^T \operatorname{sgn}(L)$$

$$\dot{L} = -\gamma_2 B_{ref}^T P e r^T \operatorname{sgn}(L)$$

$$\dot{N} = -\gamma_3 B_{ref}^T P e \Phi(x)^T \operatorname{sgn}(L)$$

όπου  $k \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $L \in \mathbb{R}$ ,  $N \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(x) = \Phi(x_1) = \sin(x_1)$ ,  $P = P^T > 0$  η λύση της εξίσωσης Lyapunov και  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 > 0$ .

**δ)** Για λόγους προσομοίωσης θεωρούμε  $M = 1 N \cdot m \cdot s^2 / rad$ ,  $G = 10 N \cdot m$  και  $C = 1 N \cdot m \cdot s / rad$ , προκειμένου να πάρουμε τις αριθμητικές τιμές των

μεταβλητών κατάστασης και της εξόδου του πραγματικού συστήματος κάθε χρονική στιγμή. Θα προσομοιώσουμε στο περιβάλλον Matlab τη λειτουργία των ελεγκτών των ερωτημάτων (β) και (γ).

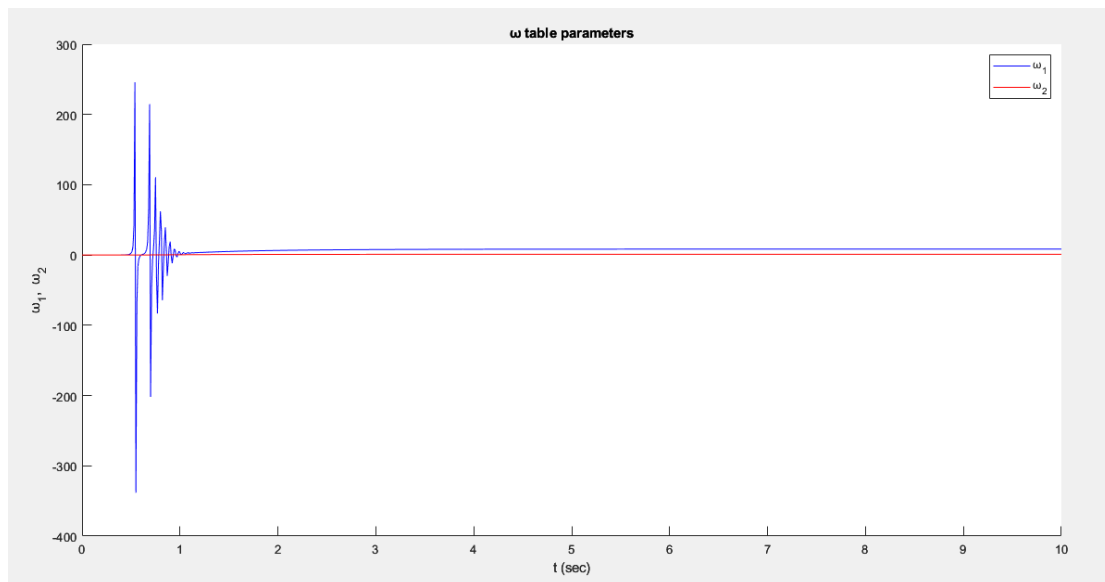
### ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟ (β) ΕΡΩΤΗΜΑ

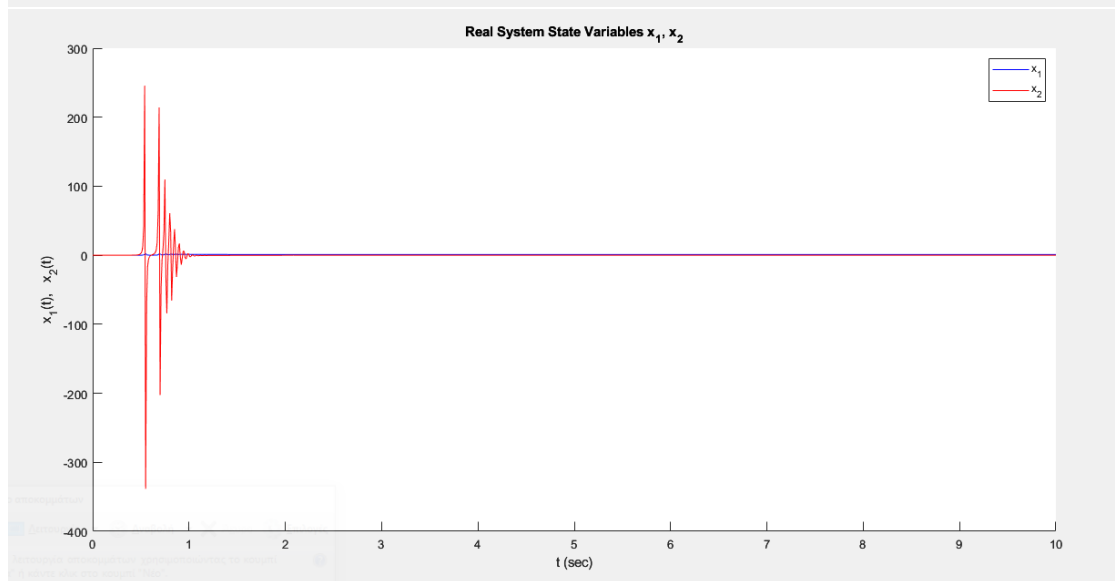
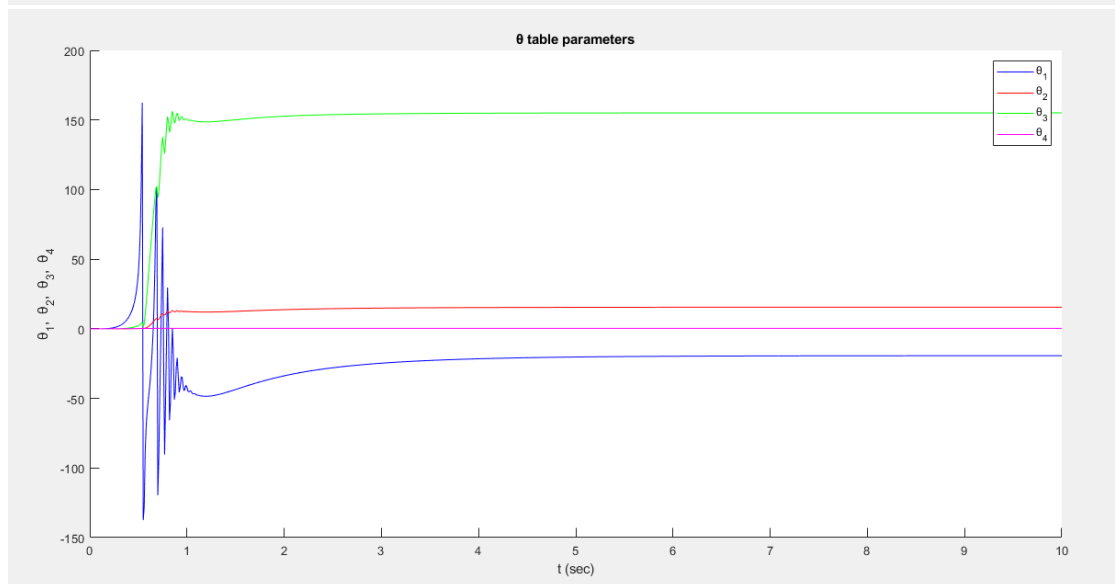
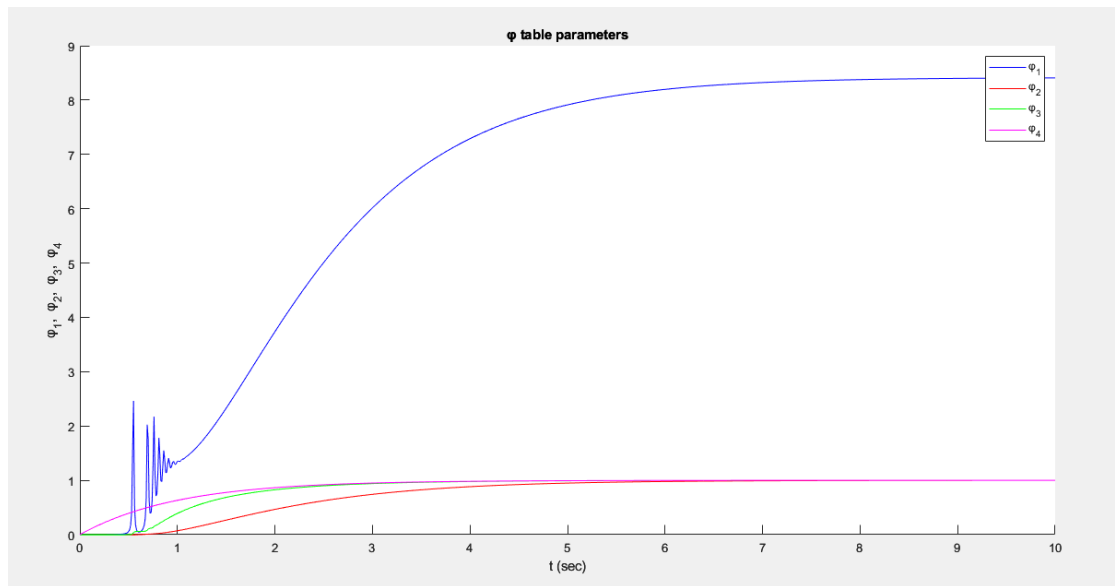
Ορίζουμε το χρονικό διάστημα  $t$  από το 0 έως το 10, με βήμα 0.01. Έχουμε ήδη επιλέξει το μοντέλο αναφοράς οπότε οι παράμετροί του είναι πλήρως γνωστές.

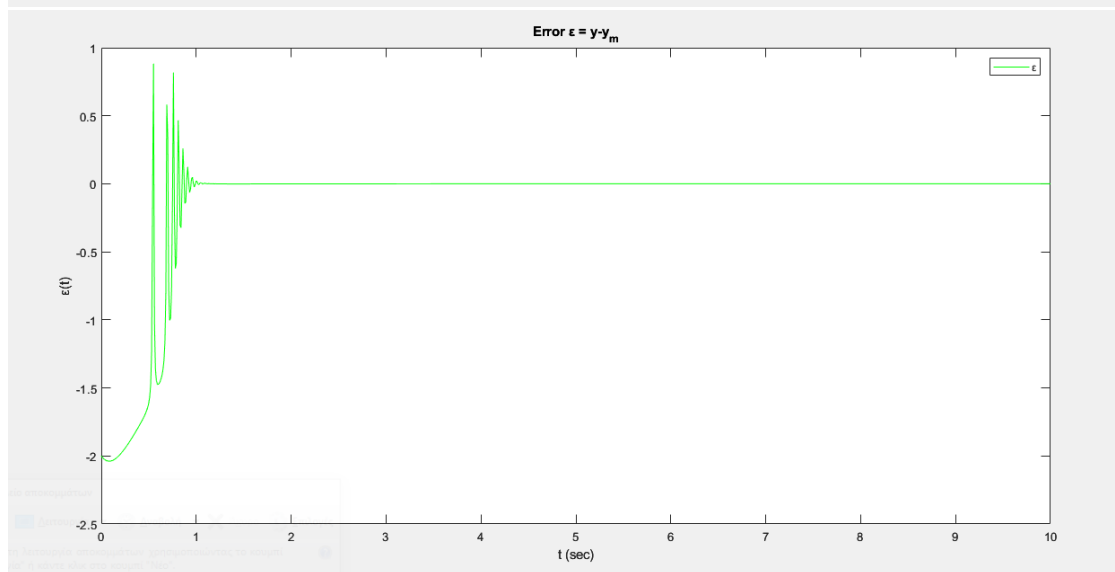
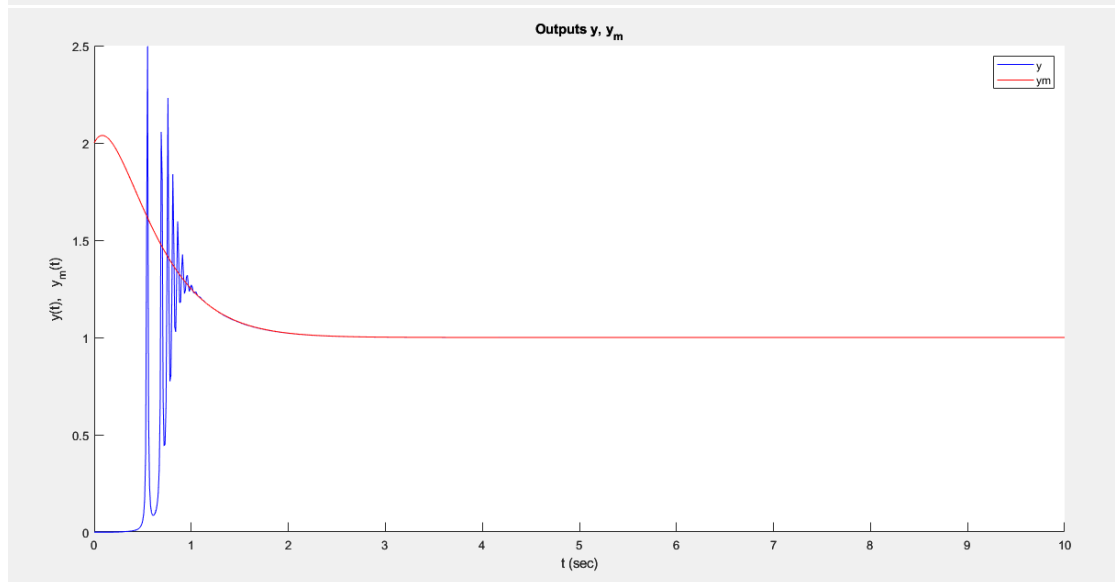
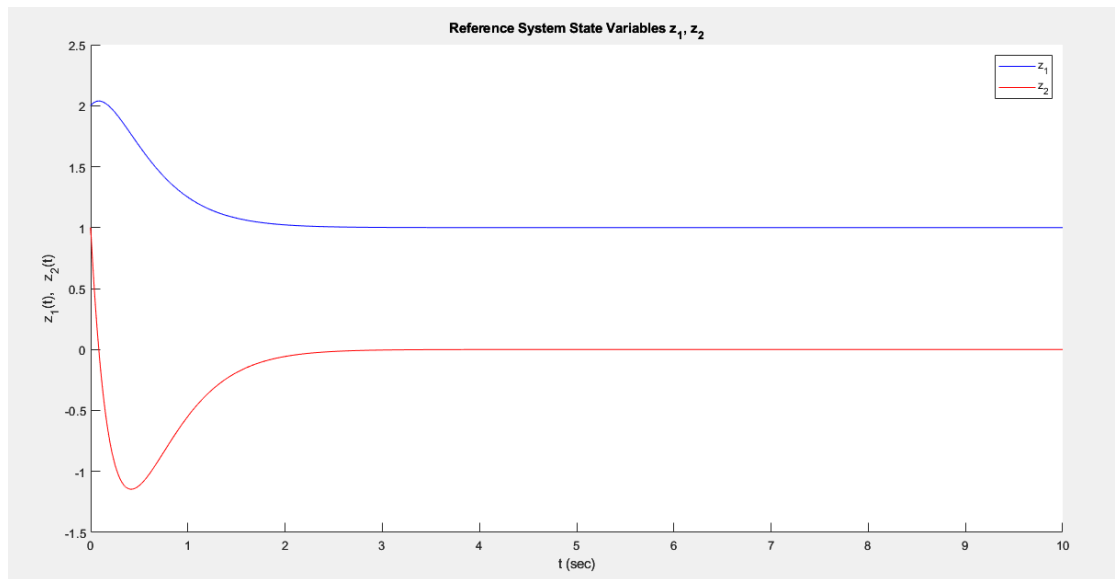
Ως είσοδο αναφοράς  $r(t)$  επιλέγουμε τη βηματική  $r(t) = 1, t \geq 0$ . Η επιλογή του πίνακα  $\Gamma$  προέκυψε έπειτα από δοκιμές πάνω στο σύστημα για ορισμένες ημιτονοειδής εισόδους  $r(t)$ , ώστε τότε να έχουμε σχετικά μικρά σφάλματα σε σύντομο χρονικό διάστημα. Επιλέξαμε λοιπόν τον διαγώνιο πίνακα  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όλες οι αρχικές συνθήκες των σημάτων επιλέχθηκαν μηδέν, εκτός του συστήματος αναφοράς, όπου  $z_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τα εξής:

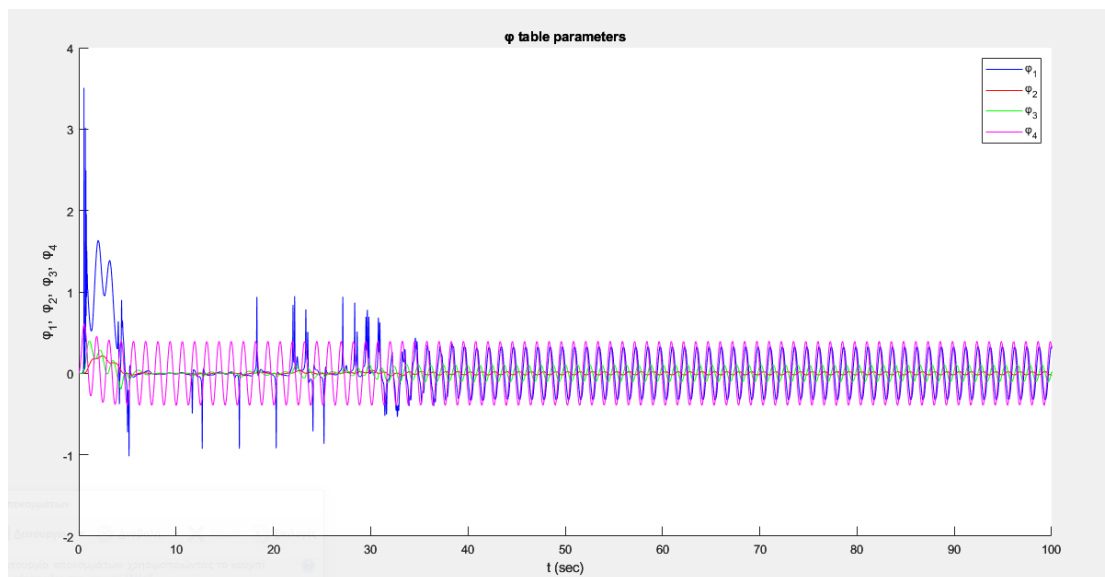
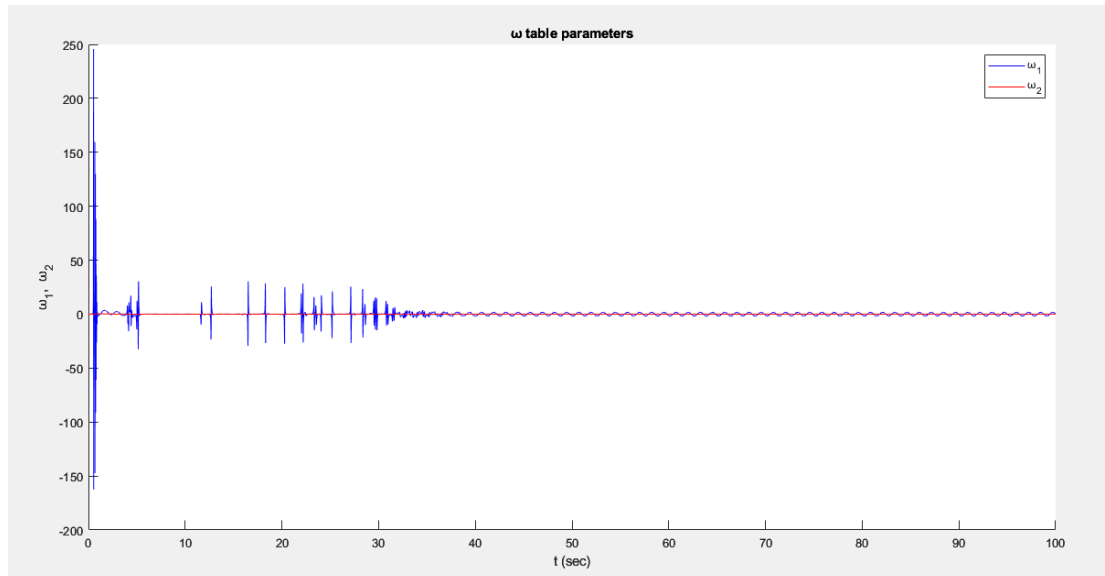


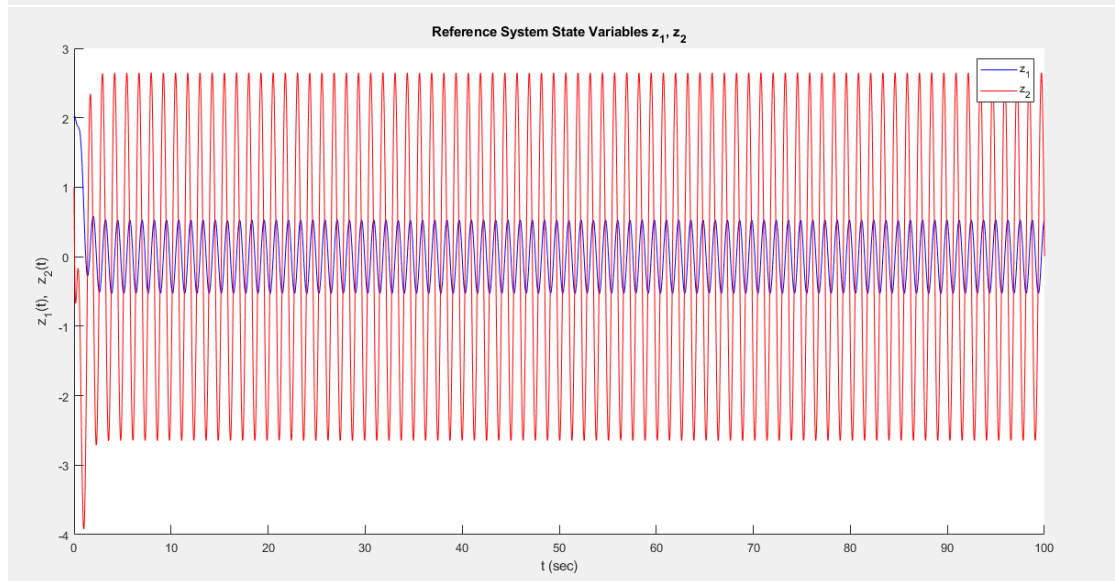
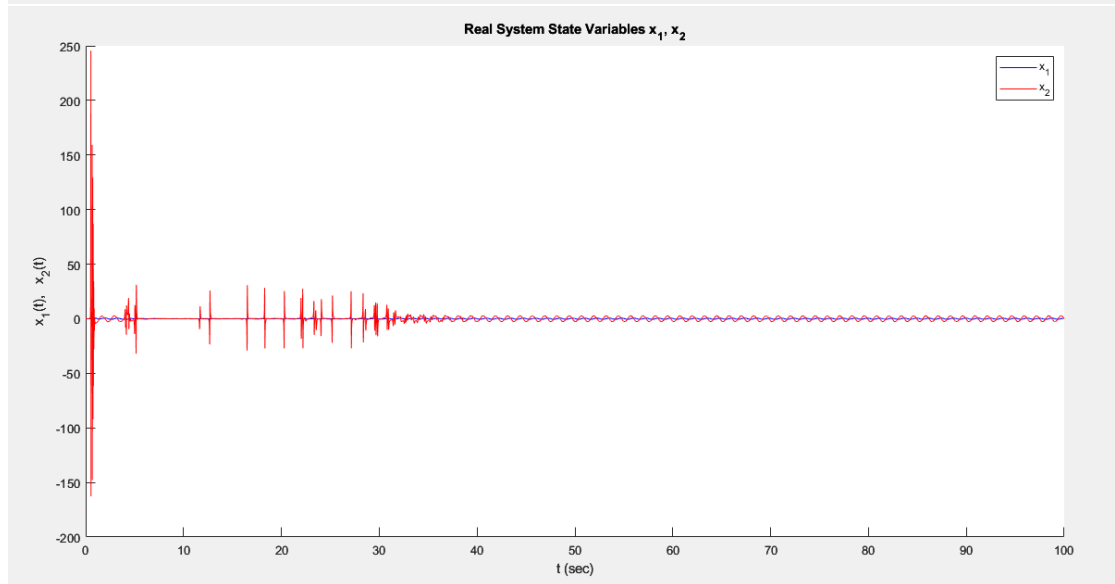
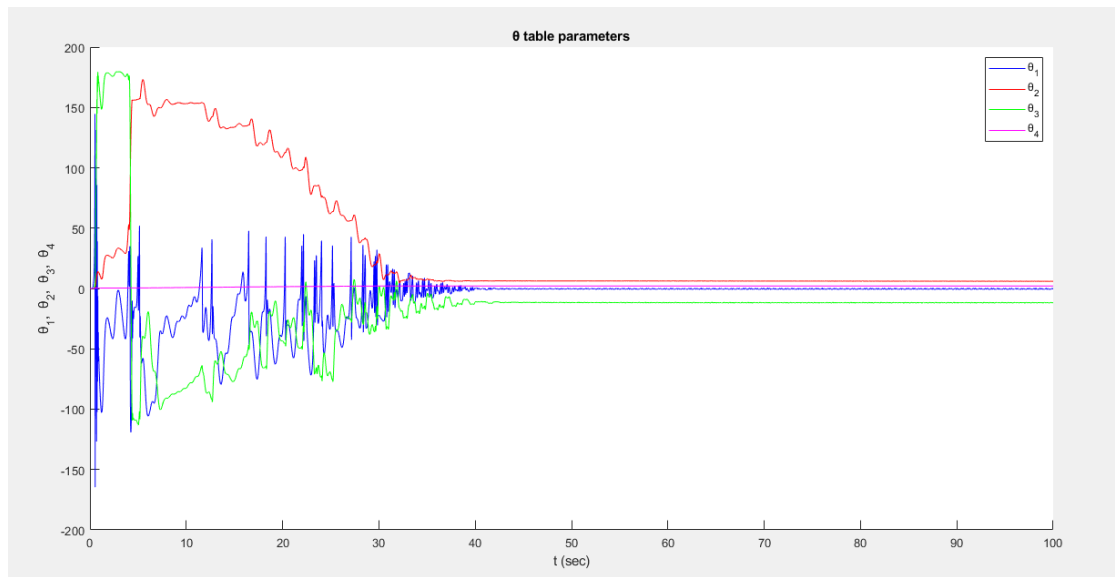




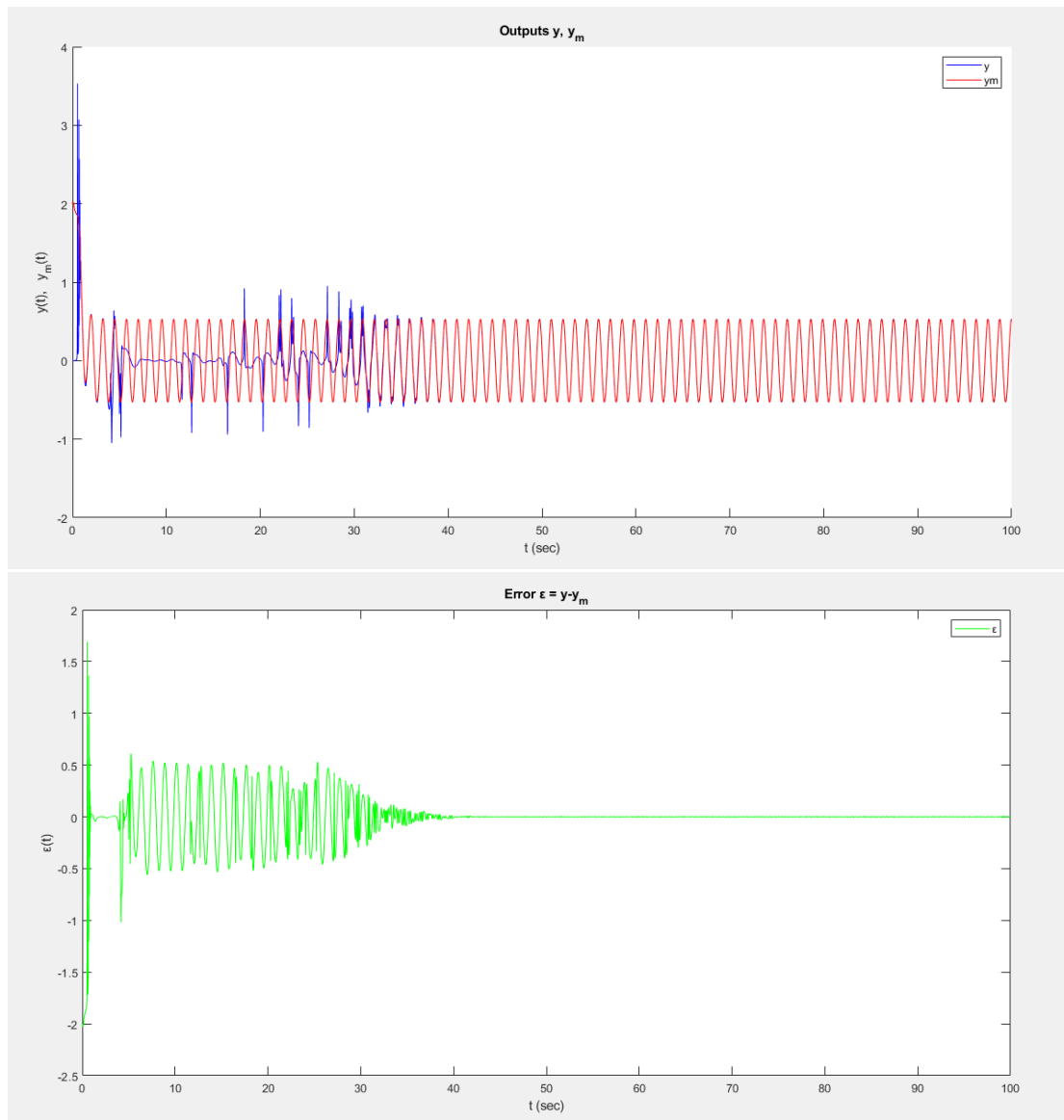
Παρατηρούμε ότι όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα, καθώς και ότι το σφάλμα εξόδου  $\varepsilon = y - y_m$  τείνει στο μηδέν, όσο περνά ο χρόνος.

Θα δοκιμάσουμε τώρα ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου  $r(t)$ . Ορίζουμε λοιπόν  $r(t) = 2 \sin(5t)$  και το χρονικό διάστημα  $t$  από το 0 έως το 100, με βήμα 0.01. Όλες οι υπόλοιπες αρχικές συνθήκες παραμένουν ίδιες με πριν. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τώρα:









Σε αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι το σφάλμα  $\varepsilon$  τείνει στο μηδέν σε μεγαλύτερο χρονικό διάστημα, σε σχέση με αυτό της περίπτωσης βηματικής εισόδου. Επιπλέον, η ακρίβεια του σφάλματος εδώ δεν είναι τόσο καλή όσο πριν, μιας και εμφανίζονται μικρές ταλαντώσεις (πολύ μικρού πλάτους) γύρω από το μηδέν ακόμη και μετά από πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα  $t$ . Όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα.

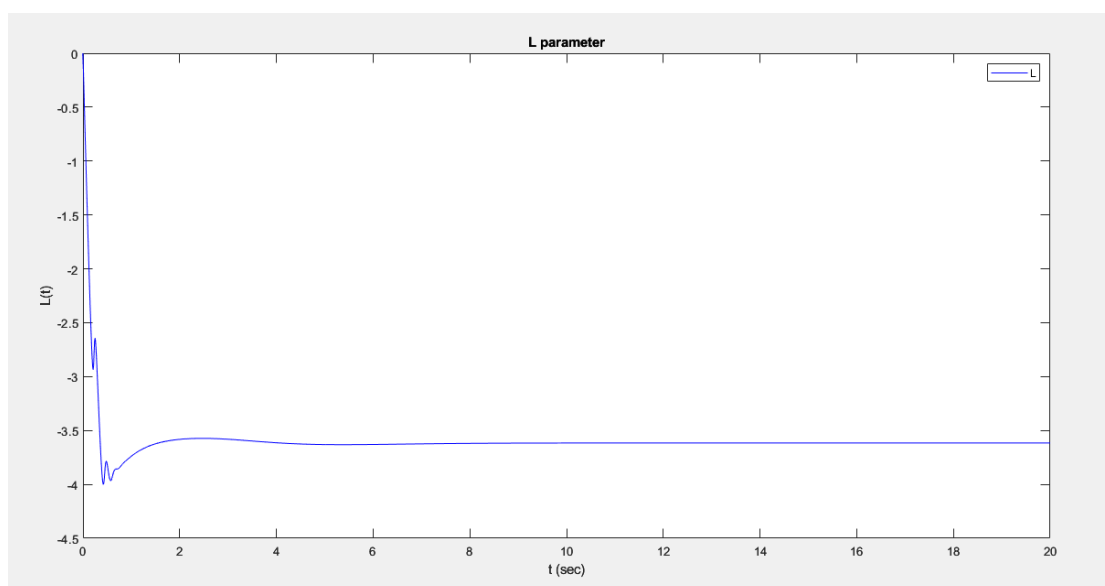
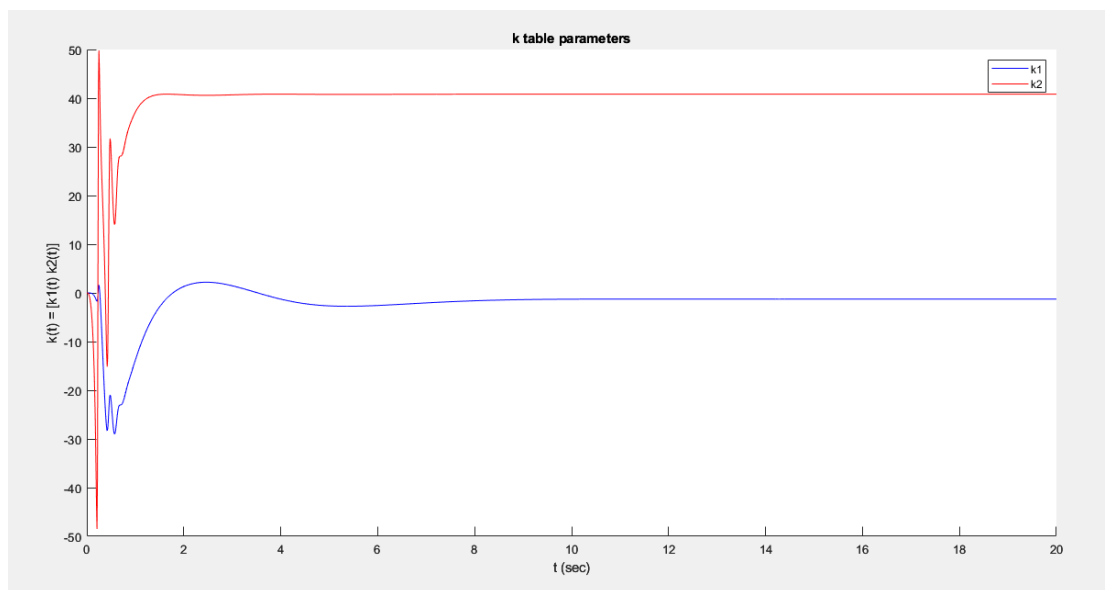
### ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟ (γ) ΕΡΩΤΗΜΑ

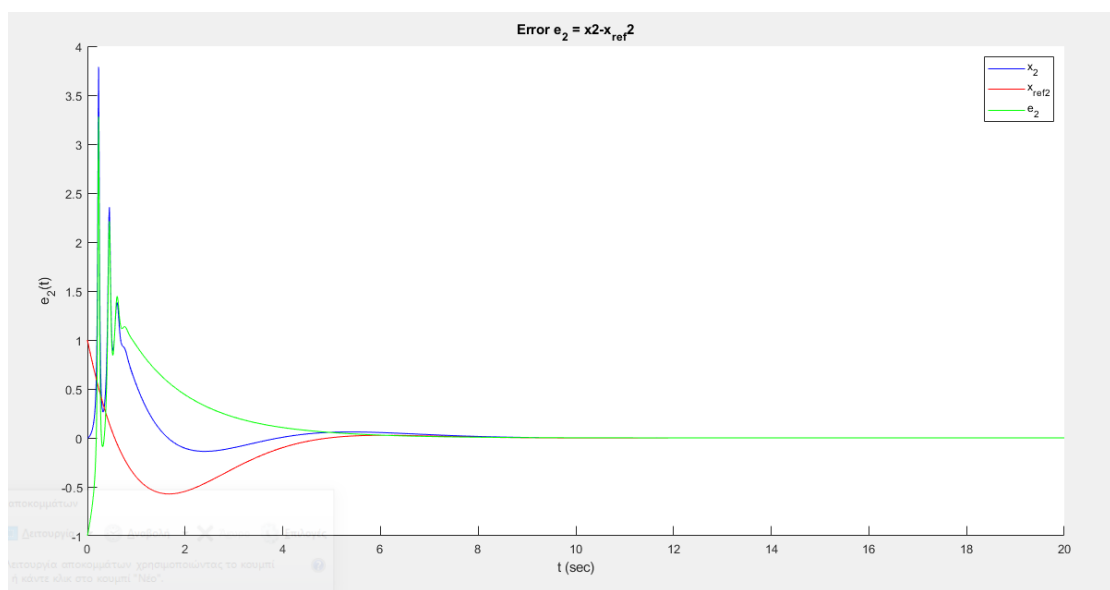
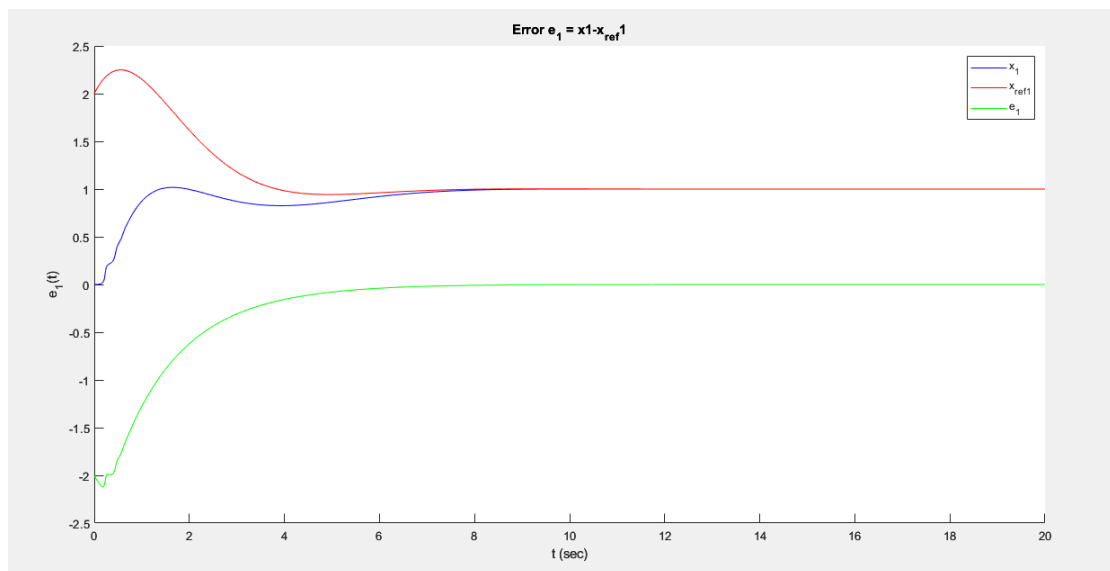
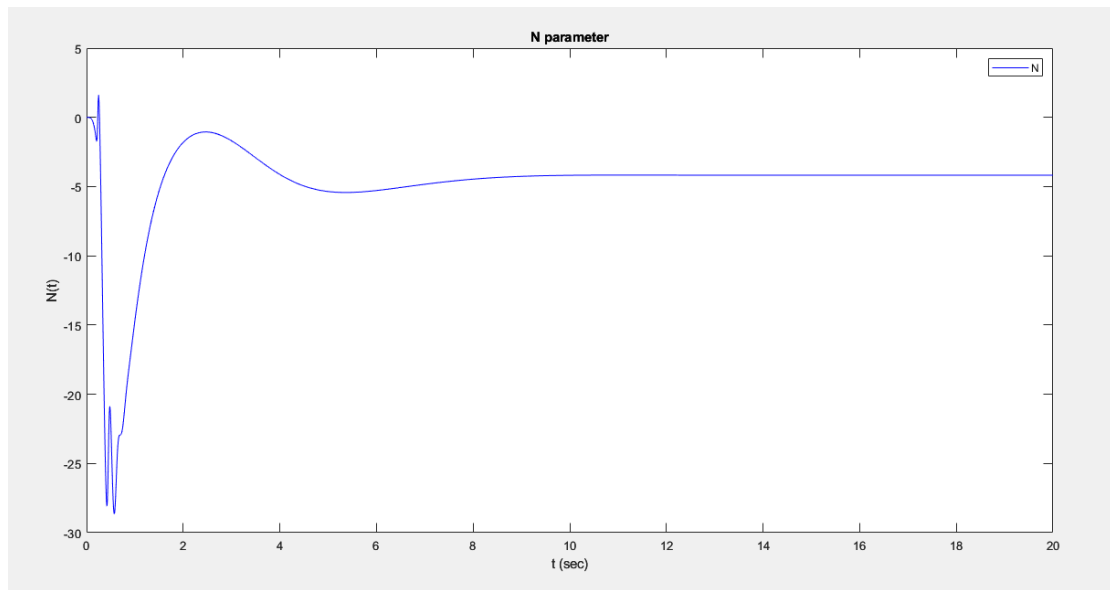
Ορίζουμε το χρονικό διάστημα  $t$  από το 0 έως το 20, με βήμα 0.01. Έχουμε ήδη επιλέξει το μοντέλο αναφοράς οπότε οι παράμετροί του είναι πλήρως γνωστές.

Ως είσοδο αναφοράς  $r(t)$  επιλέγουμε τη βηματική  $r(t) = 1, t \geq 0$ . Για τον πίνακα  $Q$  της εξίσωσης Lyapunov επιλέγουμε τον μοναδιαίο (από εκεί προκύπτει ο πίνακας  $P$ ). Για τα κέρδη  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  επιλέγουμε τις τιμές:

$$\gamma_1 = 1000, \quad \gamma_2 = 10, \quad \gamma_3 = 1000$$

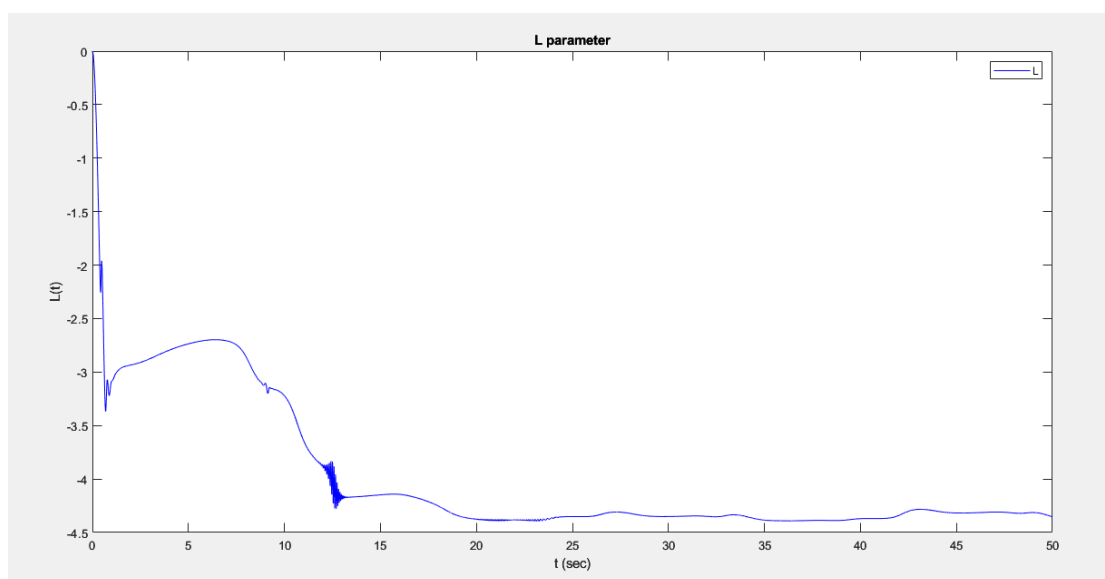
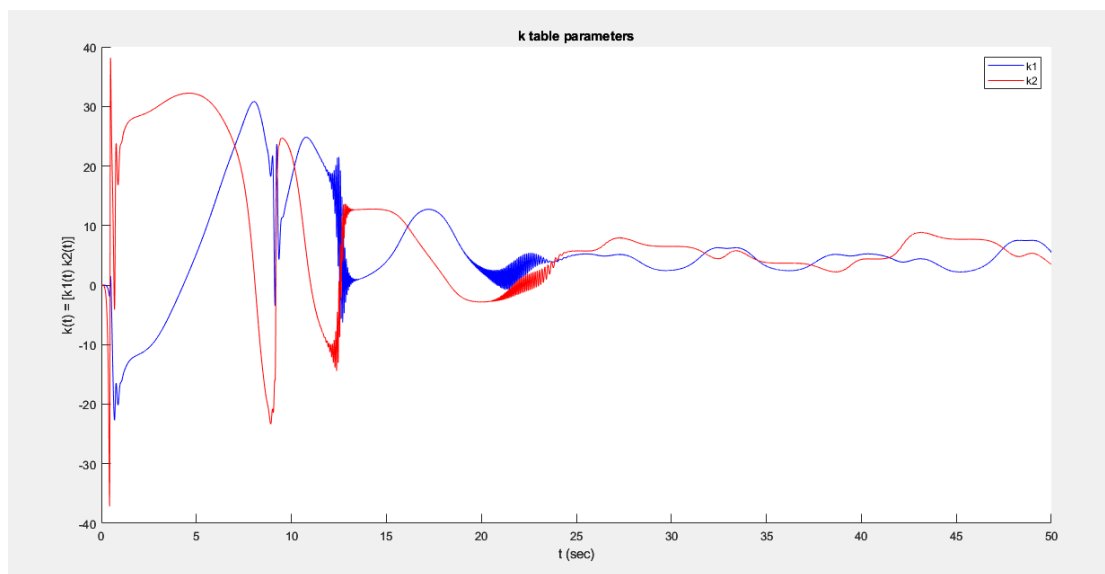
Η επιλογή των παραμέτρων  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  προέκυψε έπειτα από δοκιμές πάνω στο σύστημα για ορισμένες ημιτονοειδής εισόδους  $r(t)$ , ώστε τότε να έχουμε σχετικά μικρά σφάλματα. Όλες οι αρχικές συνθήκες των σημάτων επιλέχθηκαν μηδέν, εκτός του συστήματος αναφοράς, όπου  $x_{ref,0} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τα εξής:

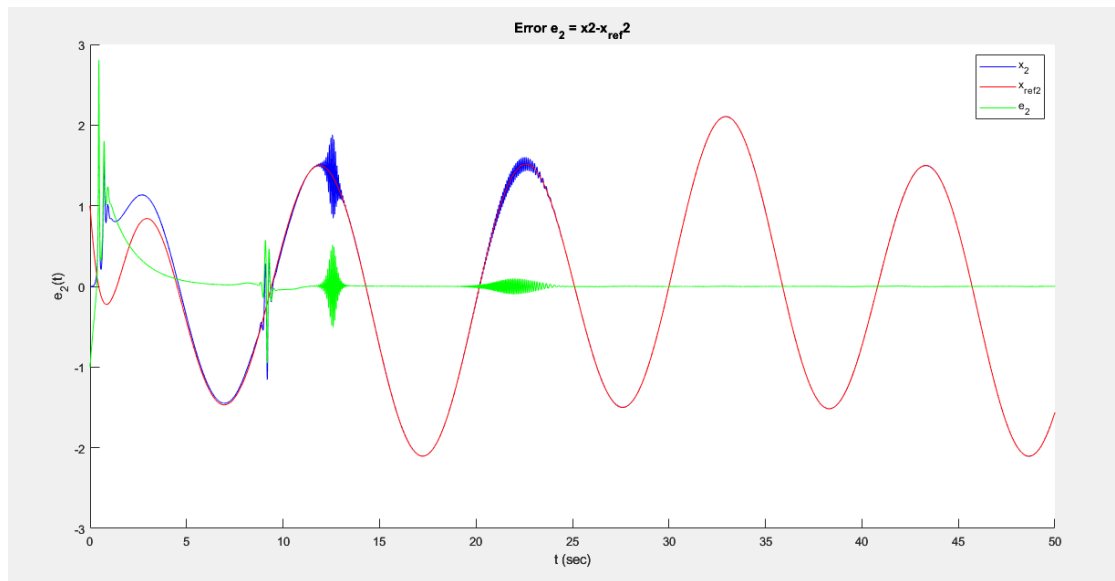
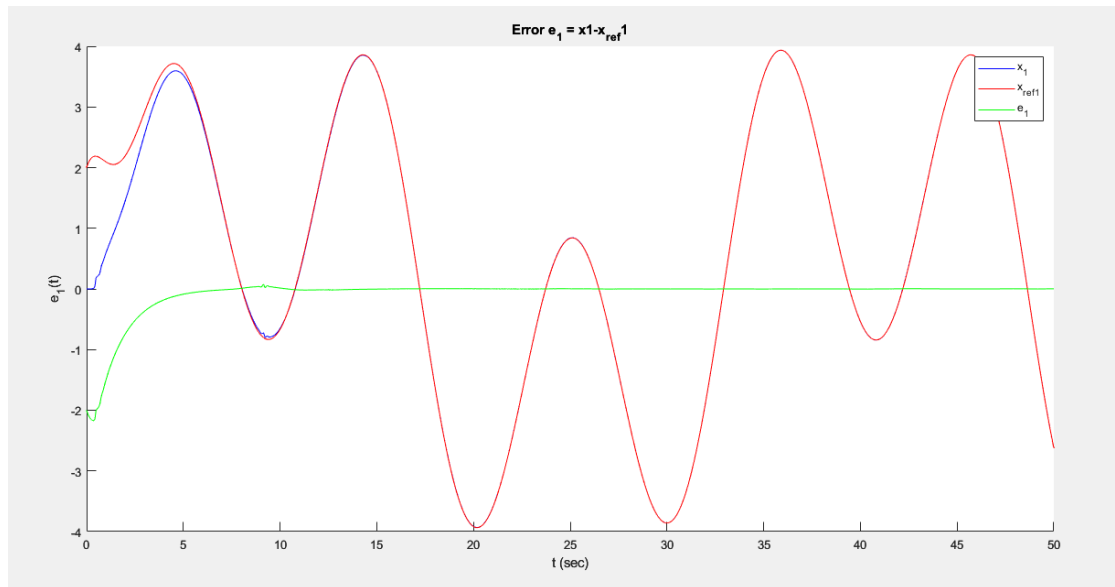
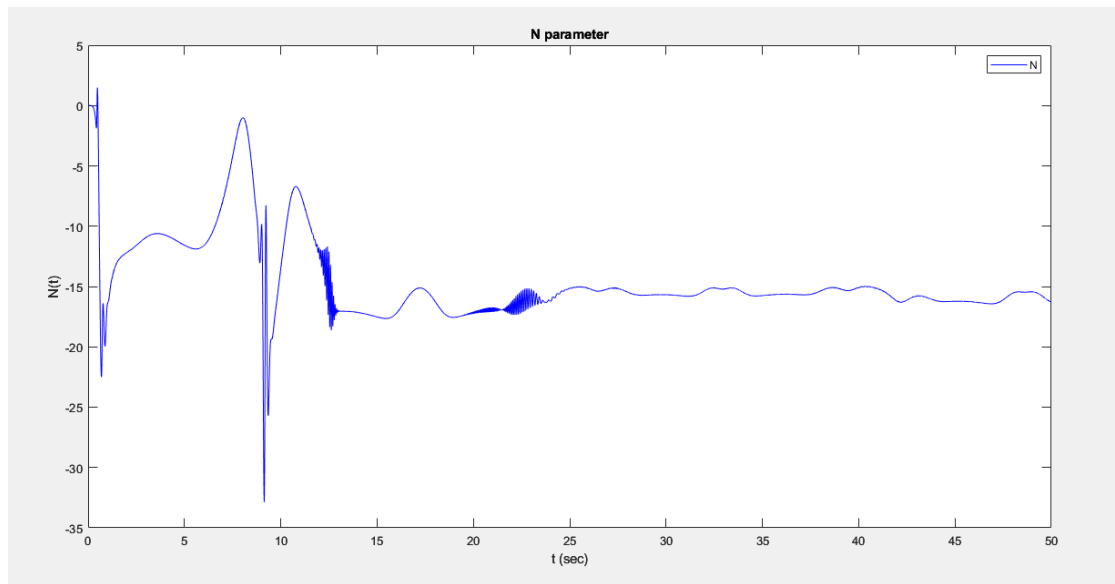




Παρατηρούμε ότι όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα, καθώς και ότι το σφάλμα  $e = x - x_{ref}$  τείνει στο μηδέν, όσο περνά ο χρόνος.

Θα δοκιμάσουμε τώρα ένα ημιτονοειδές σήμα εισόδου  $r(t)$ . Ορίζουμε λοιπόν  $r(t) = 2 \sin(0.2t) + 3 \sin(0.6t)$  και το χρονικό διάστημα  $t$  από 0 έως το 50, με βήμα 0.01. Όλες οι υπόλοιπες αρχικές συνθήκες παραμένουν ίδιες με πριν. Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης είναι τώρα:





Σε αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι το σφάλμα  $e$  τείνει στο μηδέν σε μεγαλύτερο χρόνο, καθώς αρχικά υπάρχουν «διαταραχές» πιθανόν λόγω της ημιτονοειδούς εισόδου. Όλα τα σήματα στον κλειστό βρόχο είναι φραγμένα.

ε) Αφού επέλθει ισορροπία, το σύστημα διαταράσσεται από φραγμένες εξωτερικές διαταραχές  $d(t)$  παλμικής μορφής και διάρκειας 5 sec:

$$M \cdot \ddot{q} + G \cdot \sin(q) + C \cdot \dot{q} = u + d(t)$$

Θέλουμε να μελετήσουμε την ευρωστία των συστημάτων κλειστού βρόχου των ερωτημάτων (β) και (γ), για αυξανόμενο πλάτος του παλμού (το οποίο και παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της κάθε προσομοίωσης).

Επιλέγουμε το σήμα της διαταραχής  $d(t)$  να είναι:

$$d(t) = \begin{cases} A, & t \in [50, 55] \cup [60, 65] \cup [80, 85] \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

όπου  $A$  το πλάτος του παλμού.

Θα παρουσιάσουμε μόνο τα γραφήματα των σφαλμάτων σε κάθε περίπτωση, καθώς οι τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή θα είναι προφανώς ξανά φραγμένες και δεν μας απασχολούν ως ζητούμενο.

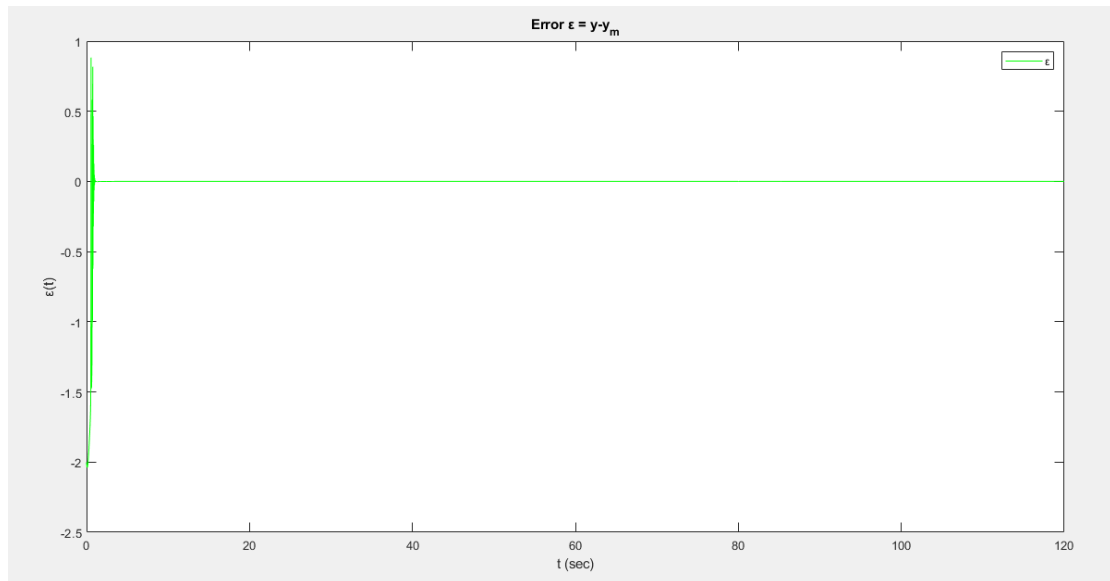
### ΕΥΡΩΣΤΙΑ ΓΙΑ ΤΟ (β) ΕΡΩΤΗΜΑ

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως και στο (β) ερώτημα, παίρνουμε το σύστημα:

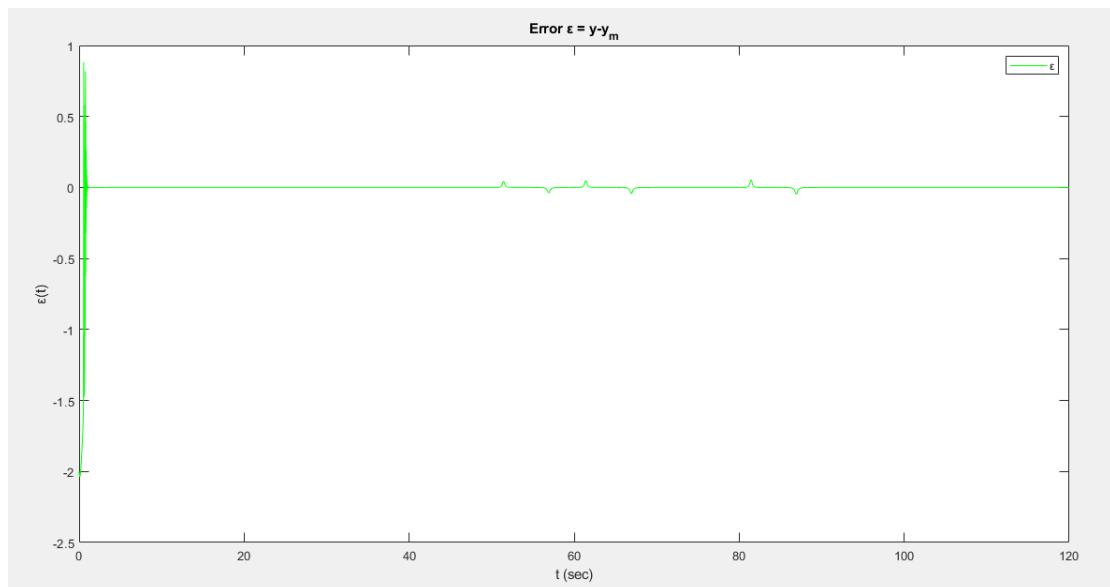
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot (u - G \cdot \sin(x_1) + d(t))$$

Για ίδιες αρχικές συνθήκες και χρονικό διάστημα  $t$  από το 0 έως το 120, έχουμε:

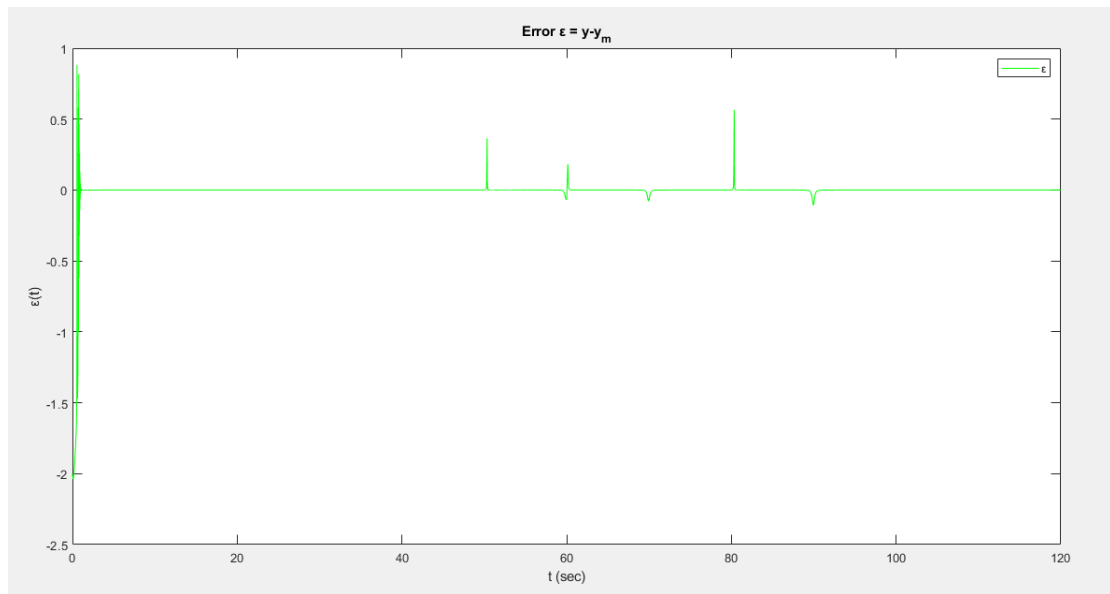
1) Είσοδος  $r(t) = 1, t \geq 0$  και πλάτος παλμού  $A = 2$ :



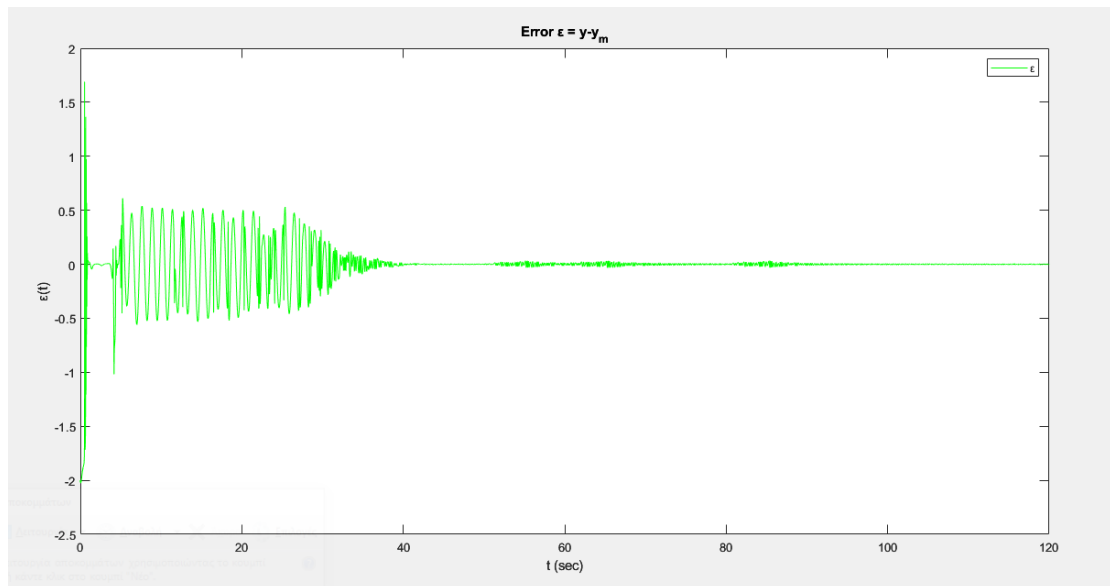
2) Είσοδος  $r(t) = 1, t \geq 0$  και πλάτος παλμού  $A = 20$ :



3) Είσοδος  $r(t) = 1, t \geq 0$  και πλάτος παλμού  $A = 200$ :

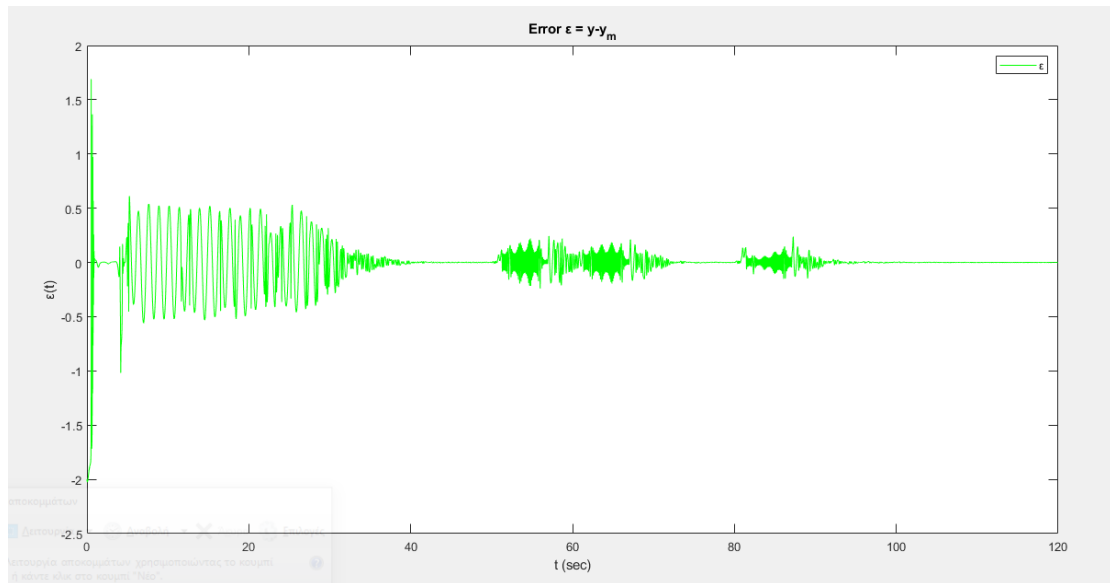


4) Είσοδος  $r(t) = 2 \sin(5t)$  και πλάτος παλμού  $A = 0.1$ :

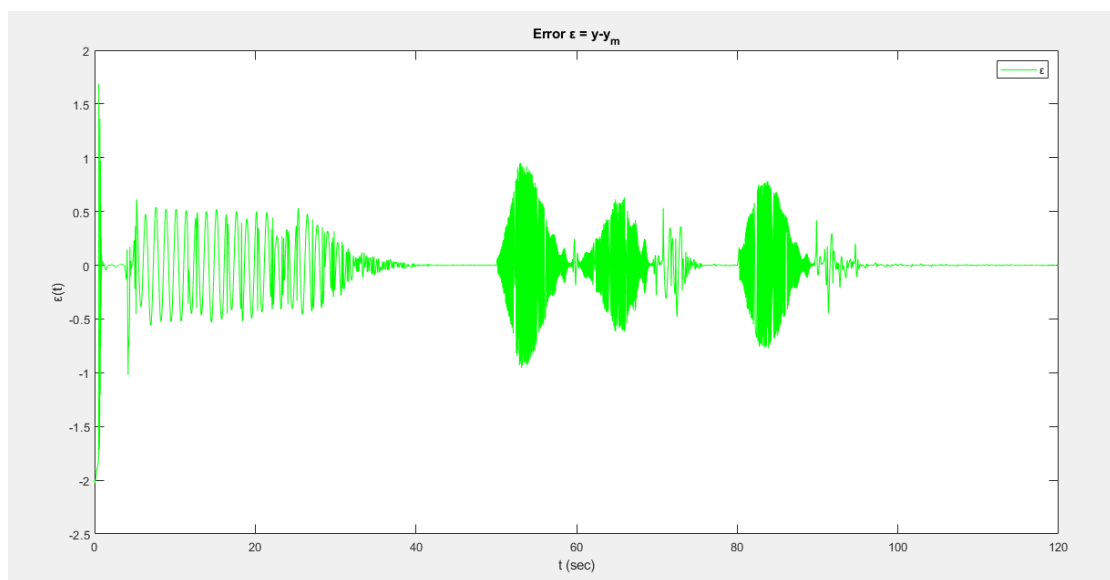




5) Είσοδος  $r(t) = 2 \sin(5t)$  και πλάτος παλμού  $A = 1$ :



6) Είσοδος  $r(t) = 2 \sin(5t)$  και πλάτος παλμού  $A = 10$ :



Το σύστημα παρουσιάζει σίγουρα πολύ «μεγαλύτερη» ευρωστία για σταθερά σήματα εισόδου, διότι ακόμα και για μεγάλο πλάτος θορύβου, οι διαταραχές στο σφάλμα αποσβένουν αρκετά γρήγορα. Για ημιτονοειδή σήματα εισόδου, ακόμα και για μικρό πλάτος θορύβου, οι διαταραχές στο σφάλμα αργούν αρκετά να αποσβέσουν, οπότε δε θα χαρακτηρίσουμε την ευρωστία του συστήματος «καλή» σε αυτή την περίπτωση.

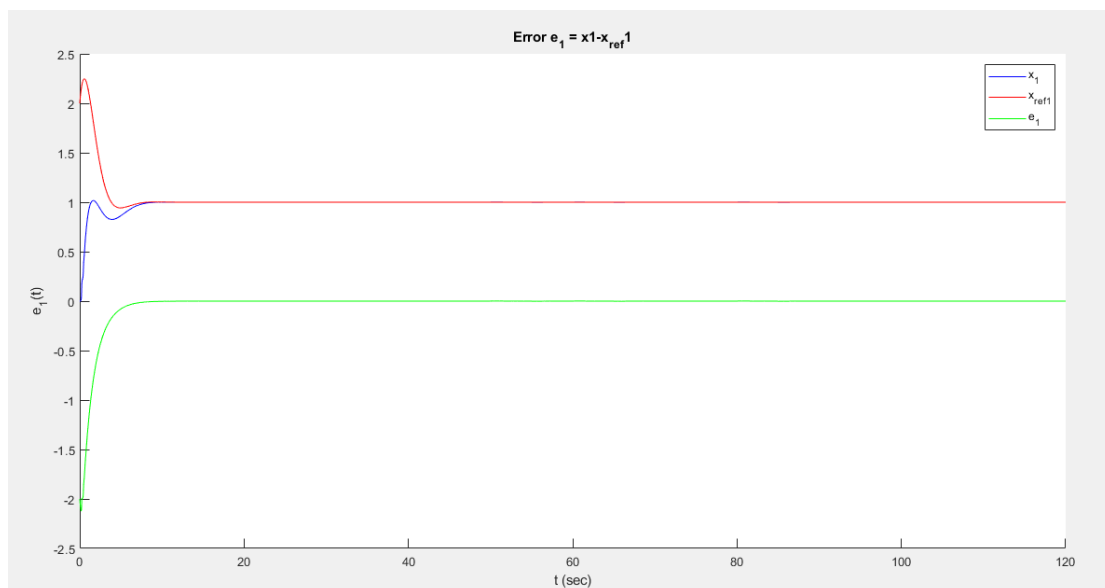
### ΕΥΡΩΣΤΙΑ ΓΙΑ ΤΟ (γ) ΕΡΩΤΗΜΑ

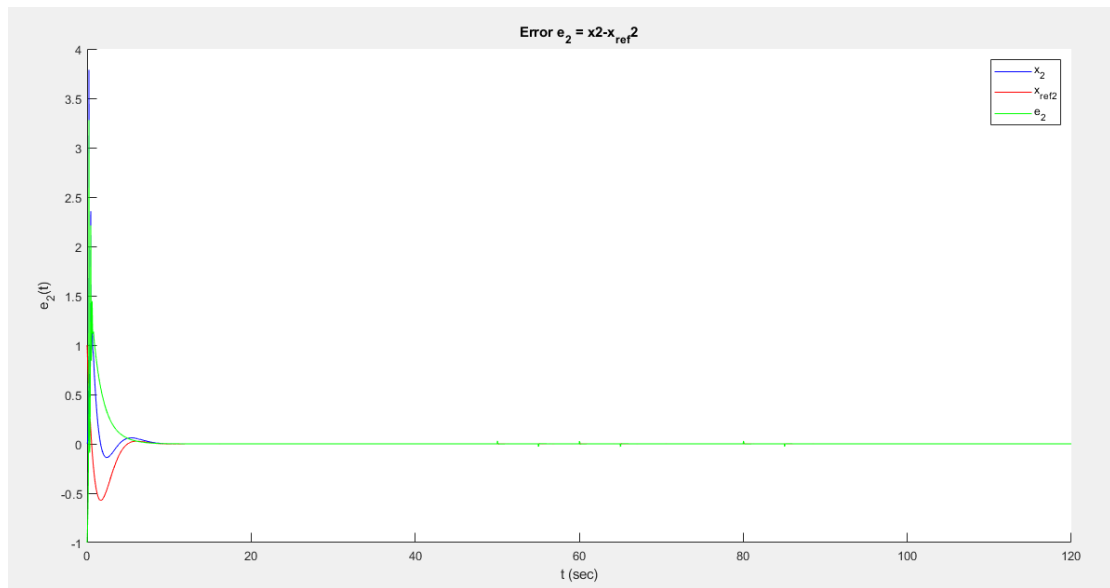
Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως και στο (γ) ερώτημα, παίρνουμε το σύστημα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot (u + d(t) + f(x))$$

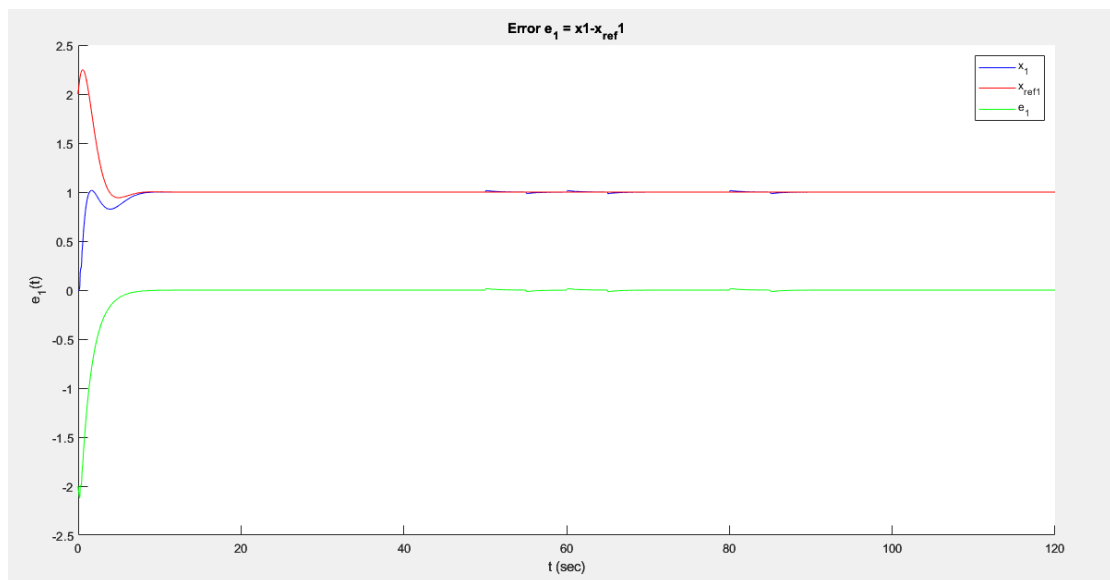
Για ίδιες αρχικές συνθήκες και χρονικό διάστημα  $t$  από το 0 έως το 120, έχουμε:

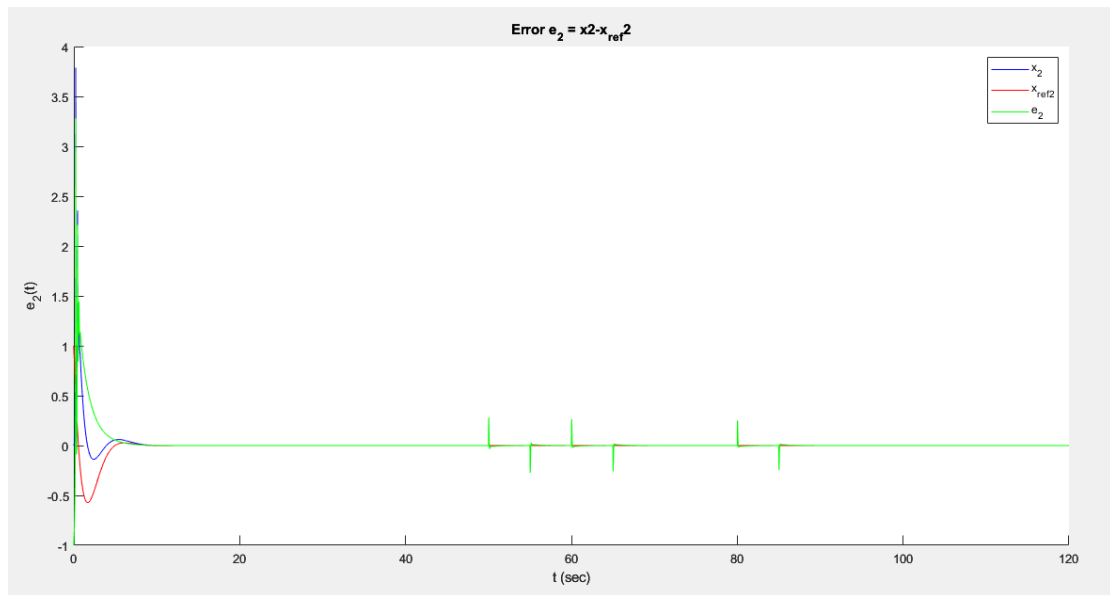
1) Είσοδος  $r(t) = 1, t \geq 0$  και πλάτος παλμού  $A = 2$ :



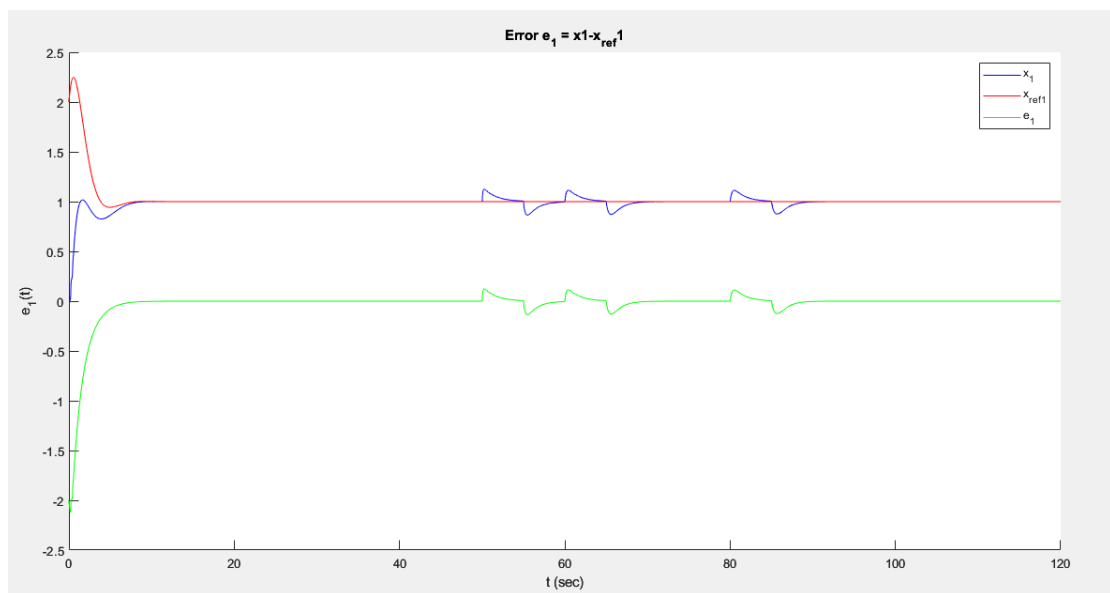


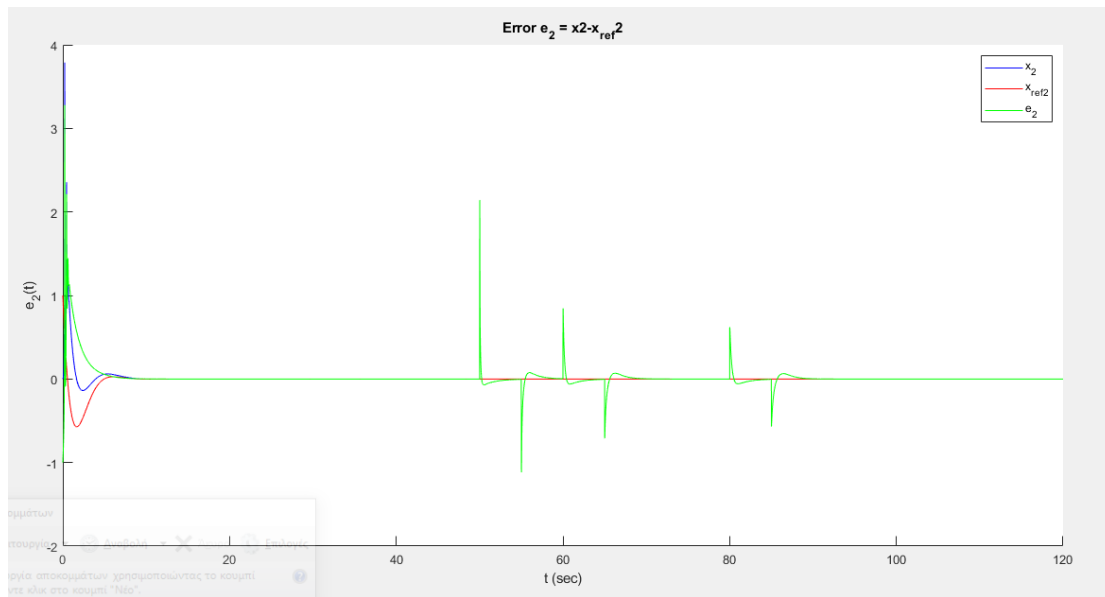
2) Είσοδος  $r(t) = 1, t \geq 0$  και πλάτος παλμού  $A = 20$ :



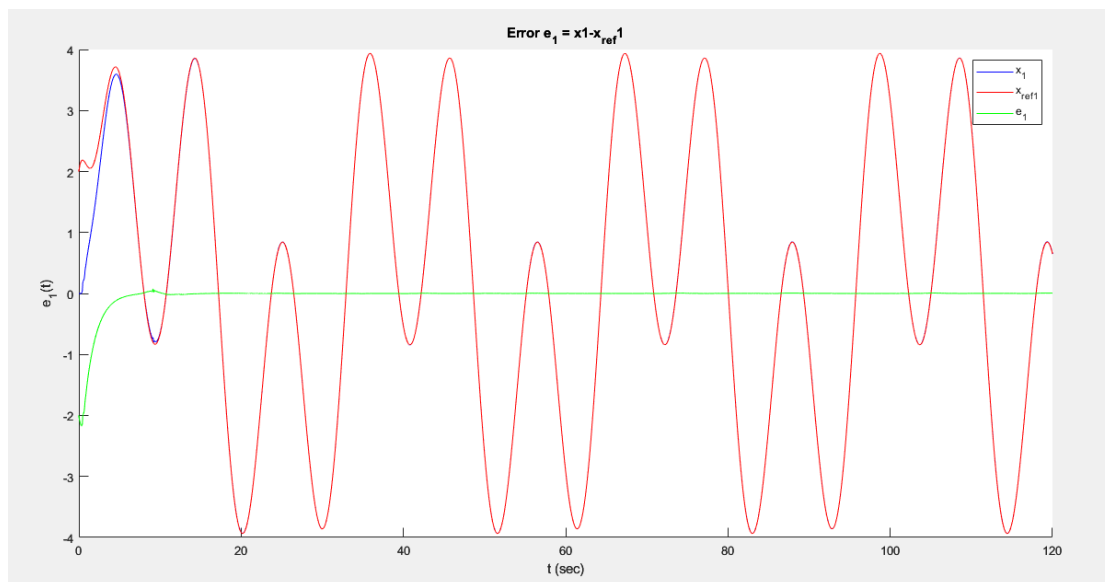


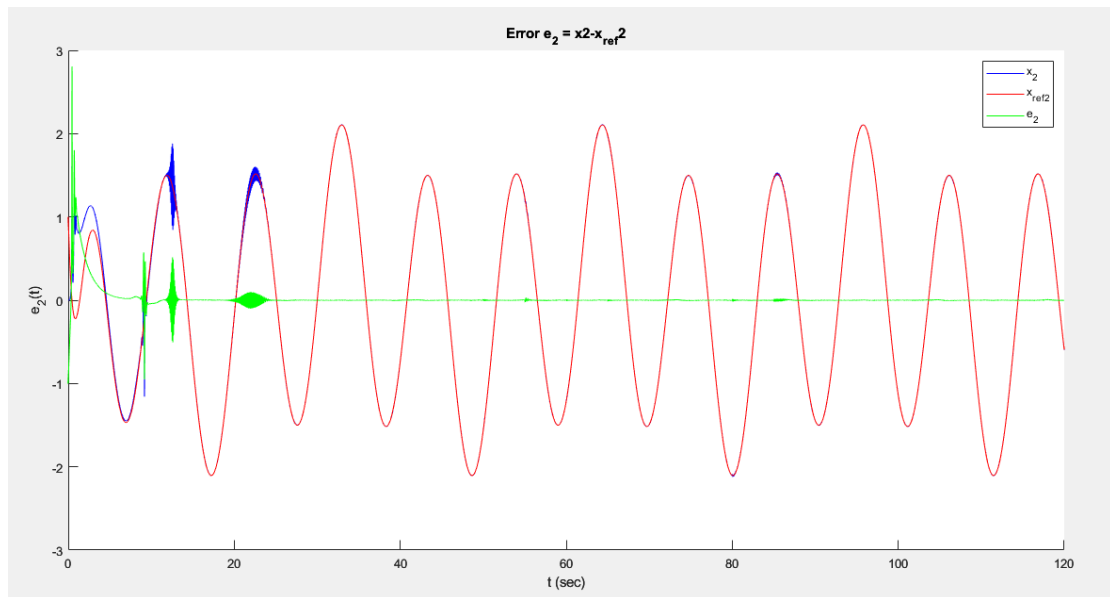
3) Είσοδος  $r(t) = 1, t \geq 0$  και πλάτος παλμού  $A = 200$ :



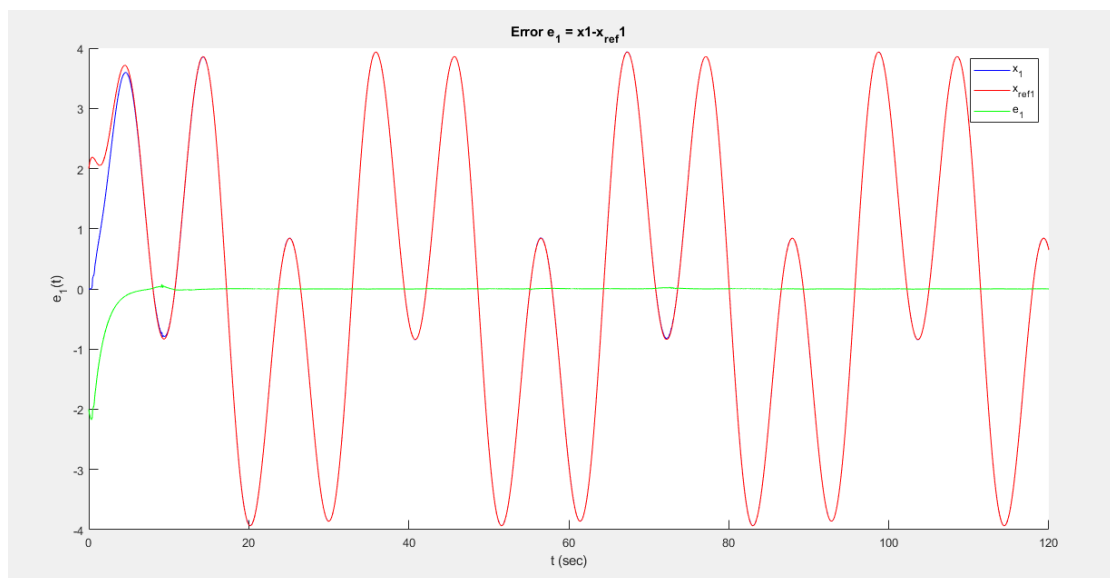


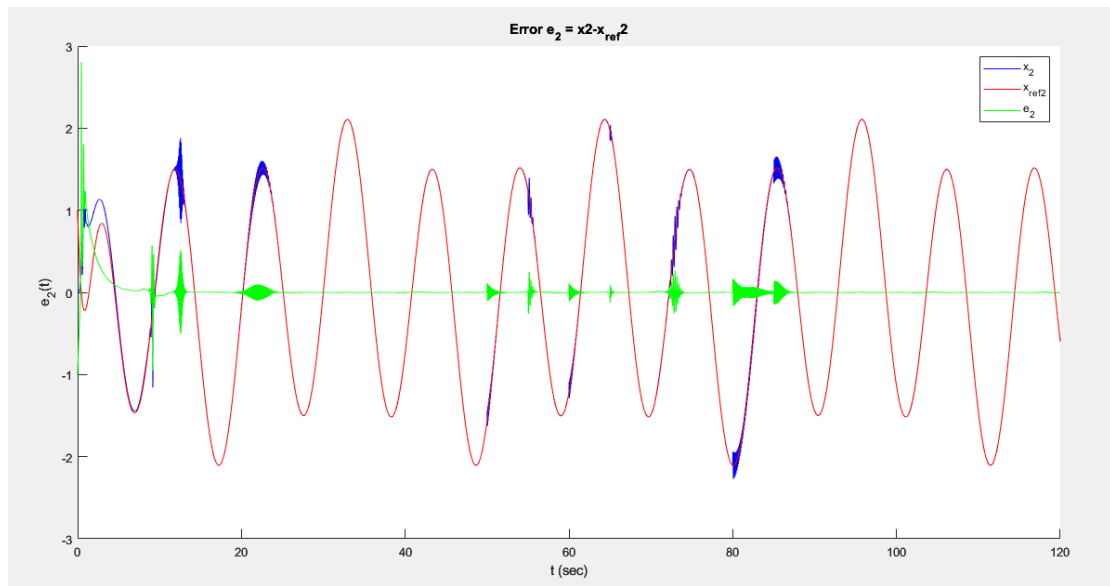
4) Είσοδος  $r(t) = 2 \sin(0.2t) + 3 \sin(0.6t)$  και πλάτος παλμού  $A = 1$ :



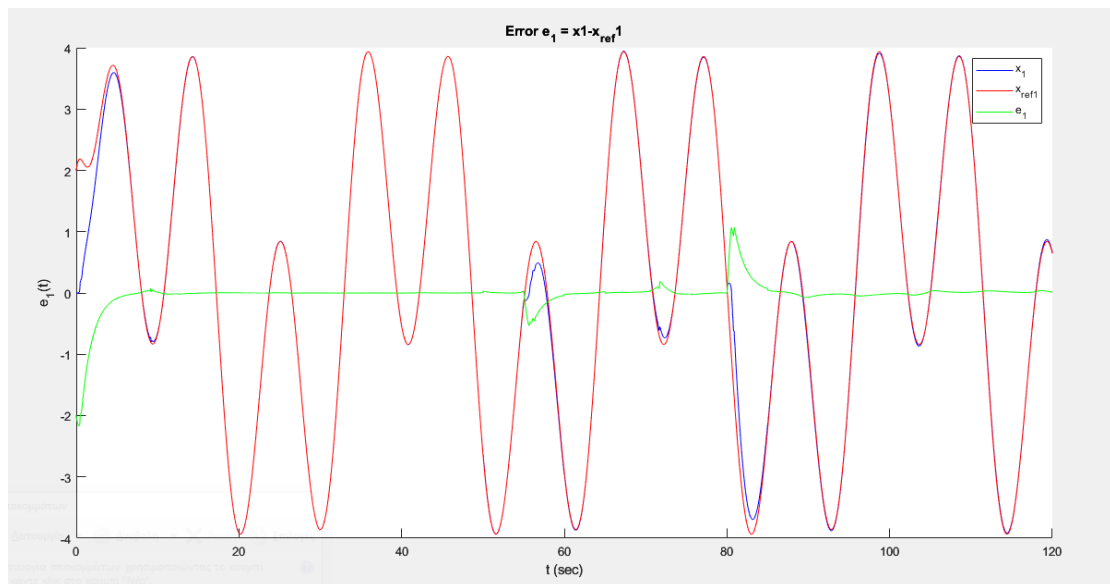


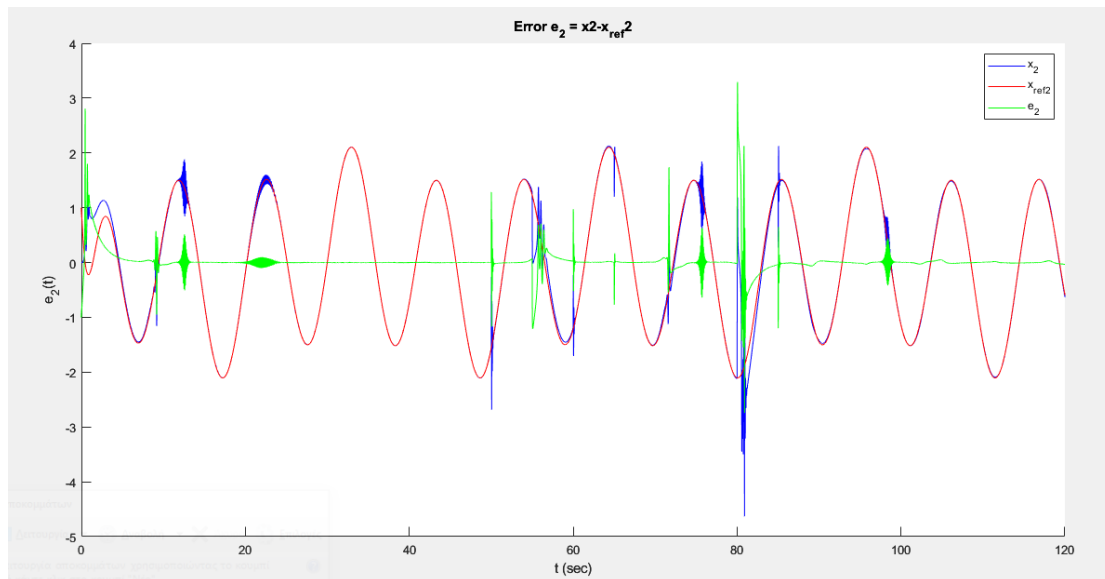
5) Είσοδος  $r(t) = 2 \sin(0.2t) + 3 \sin(0.6t)$  και πλάτος παλμού  $A = 10$ :





6) Είσοδος  $r(t) = 2 \sin(0.2t) + 3 \sin(0.6t)$  και πλάτος παλμού  $A = 100$ :





Εδώ, τόσο στην περίπτωση της βηματικής εισόδου όσο και σε αυτήν της ημιτονοειδούς εισόδου, για μεγαλύτερο πλάτος θορύβου έχουμε όλο και πιο εμφανές σφάλμα  $e$  τις στιγμές που επιδρά ο θόρυβος στο σύστημα.

Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την ευρωστία του συστήματος αρκετά «καλή», μιας χρειάζεται αρκετά μεγάλο πλάτος θορύβου για να έχουμε απόκλιση του σφάλματος από το μηδέν για αρκετά μεγάλο διάστημα. Ωστόσο, πάλι η περίπτωση της βηματικής εισόδου οδηγεί σε πιο εύρωστο σύστημα.