ΕΡΓΑΣΙΑ 1

Ελαχιστοποίηση κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής σε δοσμένο διάστημα

Ονοματεπώνυμο: Παπούλιας Μιχαήλ

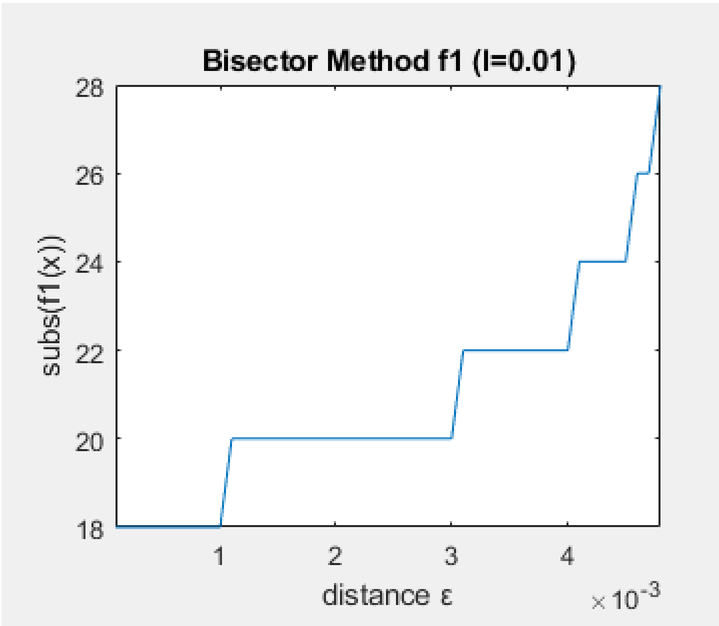
ΑΕΜ: 10204

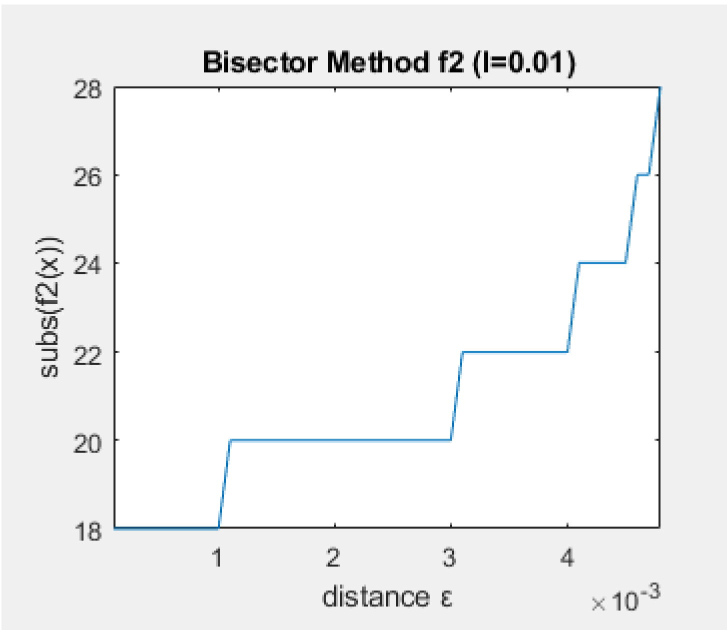
email: mpapouli@ece.auth.gr

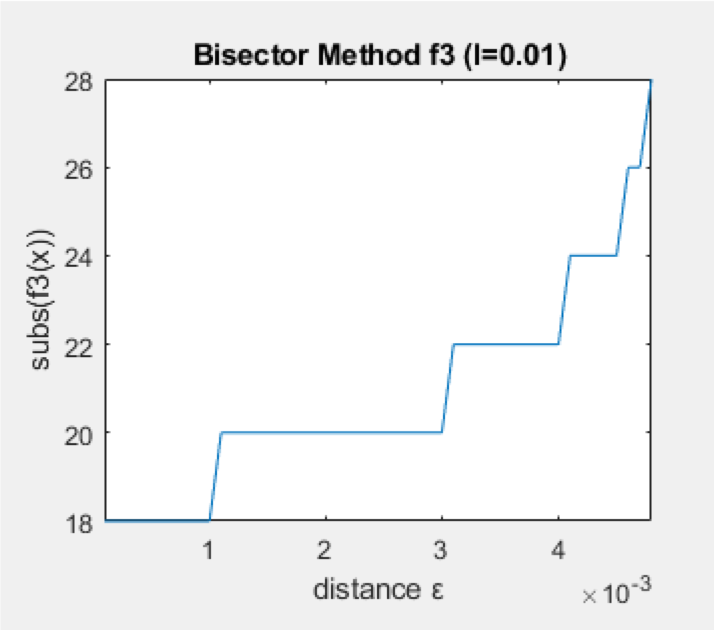
Θέμα 1

Υλοποιούμε τη μέθοδο της Διχοτόμου και την εφαρμόζουμε για τις τρεις δοθείσες συναρτήσεις.

Αρχικά, κρατώντας σταθερό το εύρος αναζήτησης l = 0.01, μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f(x) κατά την κλήση της μέσα στη μέθοδο της Διχοτόμου, συναρτήσει της μεταβολής της απόστασης από τη διχοτόμο, ε. Τα γραφήματα που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις μας για εύρος διαστήματος ε Ε [0.0001, 0.0048] είναι τα εξής:

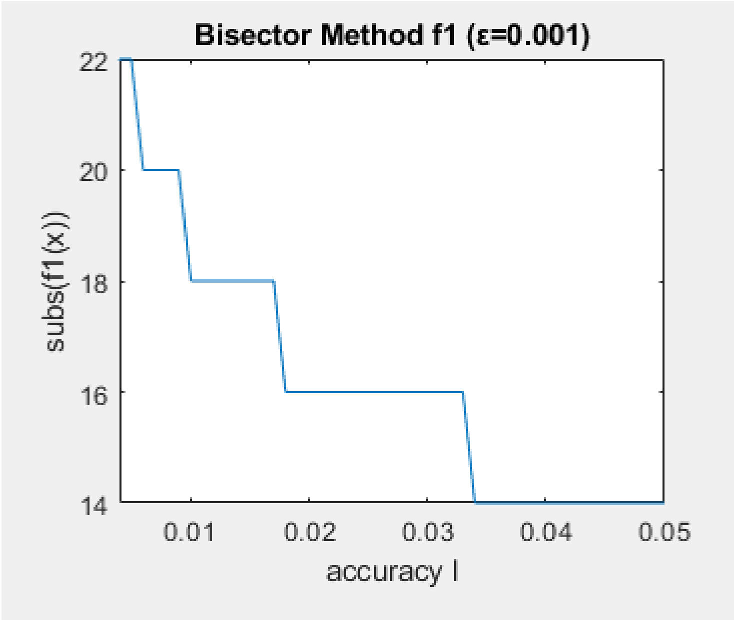




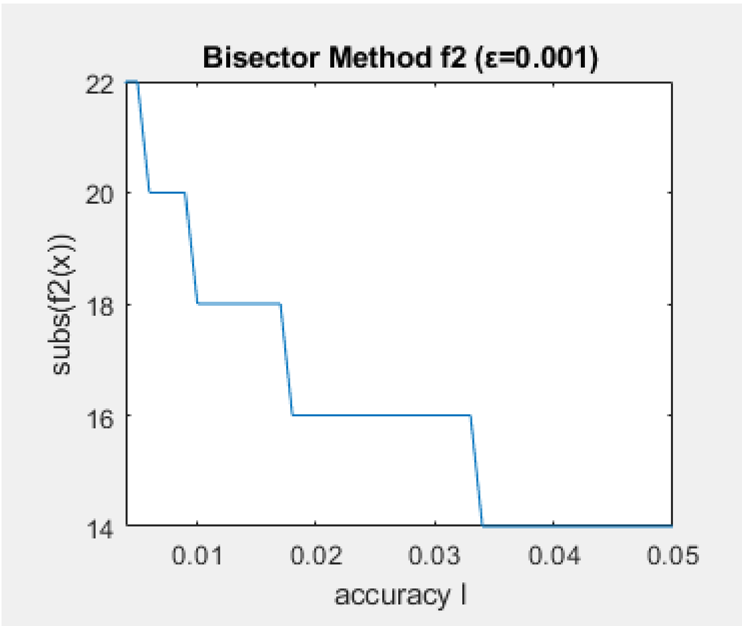


Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η απόσταση ε από τη διχοτόμο, τόσο αυξάνονται και οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Φαίνεται, βέβαια, ότι η αύξηση αυτή δεν είναι γραμμική, αλλά εκθετική. Αυτό συμβαίνει και για τις τρεις συναρτήσεις f1, f2 και f3. Τα παραπάνω γραφήματα φαίνεται ότι ταυτίζονται.

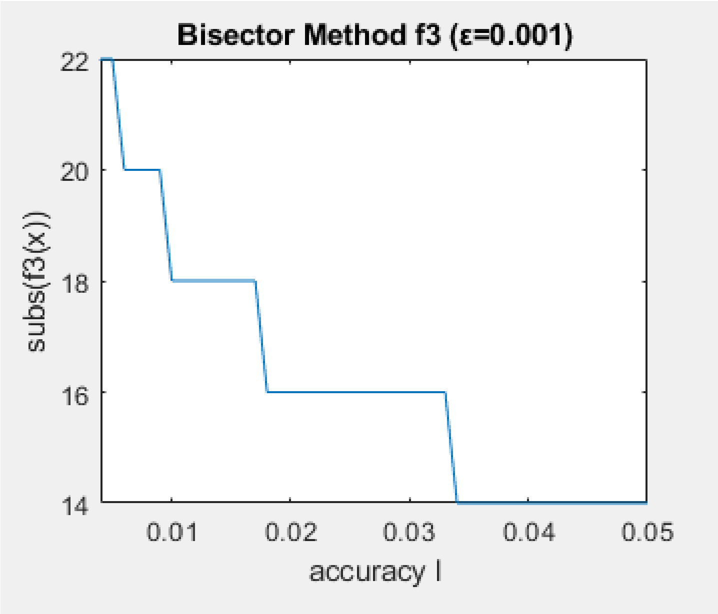
Στη συνέχεια, κρατώντας σταθερό το ε = 0.001, μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f(x) κατά την κλήση της μέσα στη μέθοδο της Διχοτόμου, συναρτήσει της μεταβολής του εύρους αναζήτησης, l. Τα γραφήματα που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις μας για εύρος διαστήματος l Ε [0.004, 0.05] είναι τα εξής:



Bisector Method f1 (ε=0.001)
22
20
18
16
14
subs(f1(x))
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
accuracy l

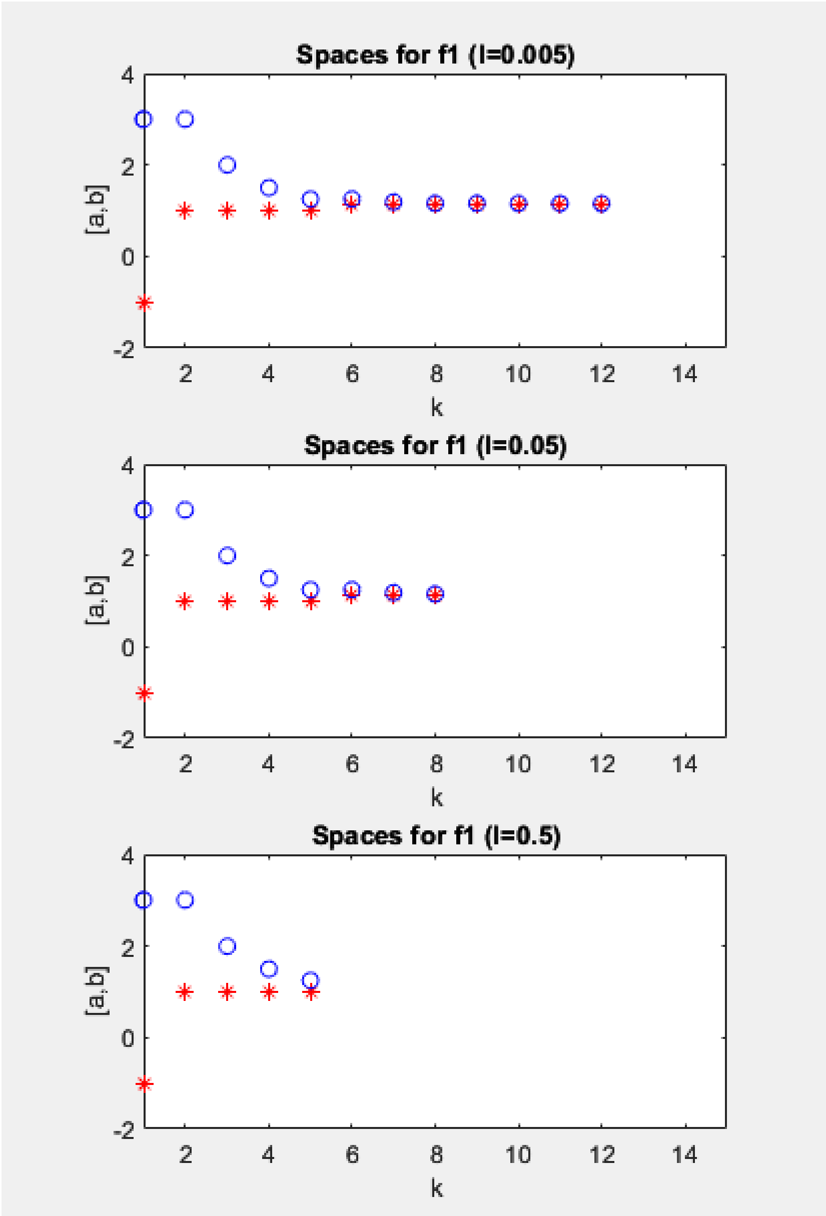


Bisector Method f2 (ε=0.001)
22
20
18
16
14
subs(f2(x))
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
accuracy l

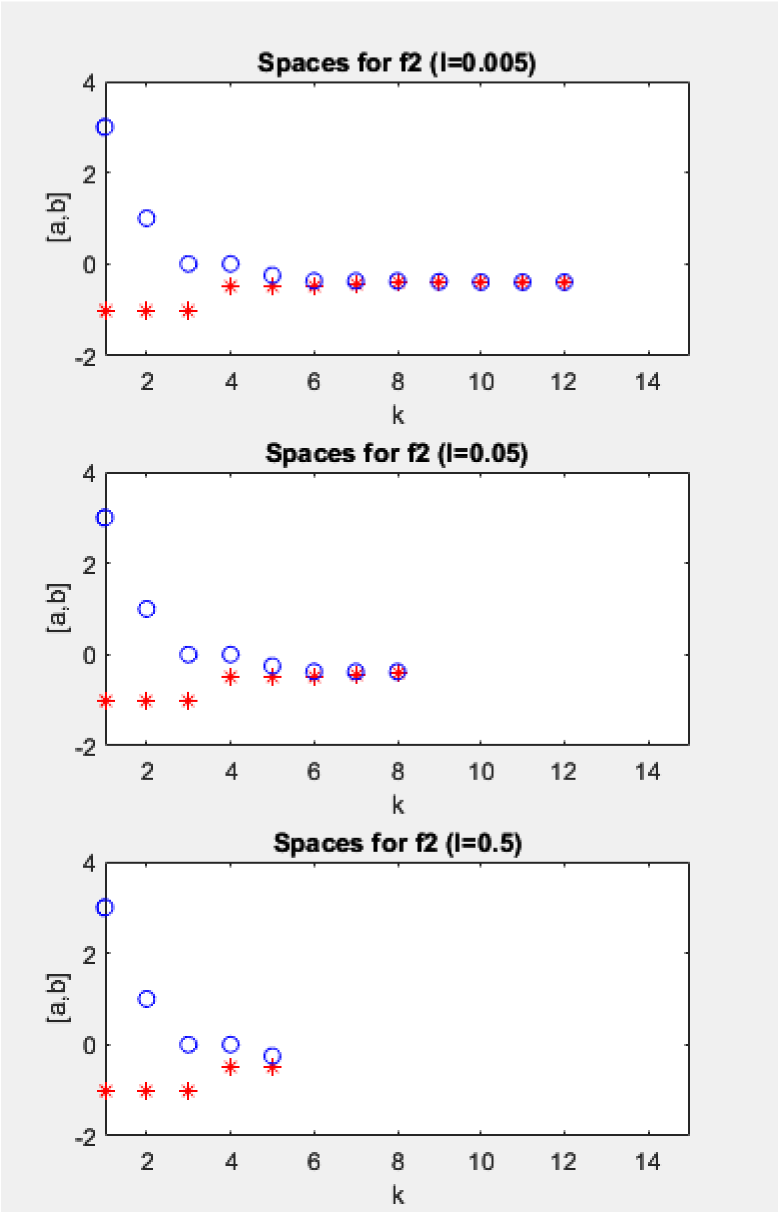


Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το εύρος αναζήτησης l, τόσο μειώνονται και οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Φαίνεται, βέβαια, ότι η μείωση αυτή δεν είναι γραμμική, αλλά εκθετική. Αυτό συμβαίνει και για τις τρεις συναρτήσεις f1, f2 και f3. Τα παραπάνω γραφήματα φαίνεται ότι ταυτίζονται.

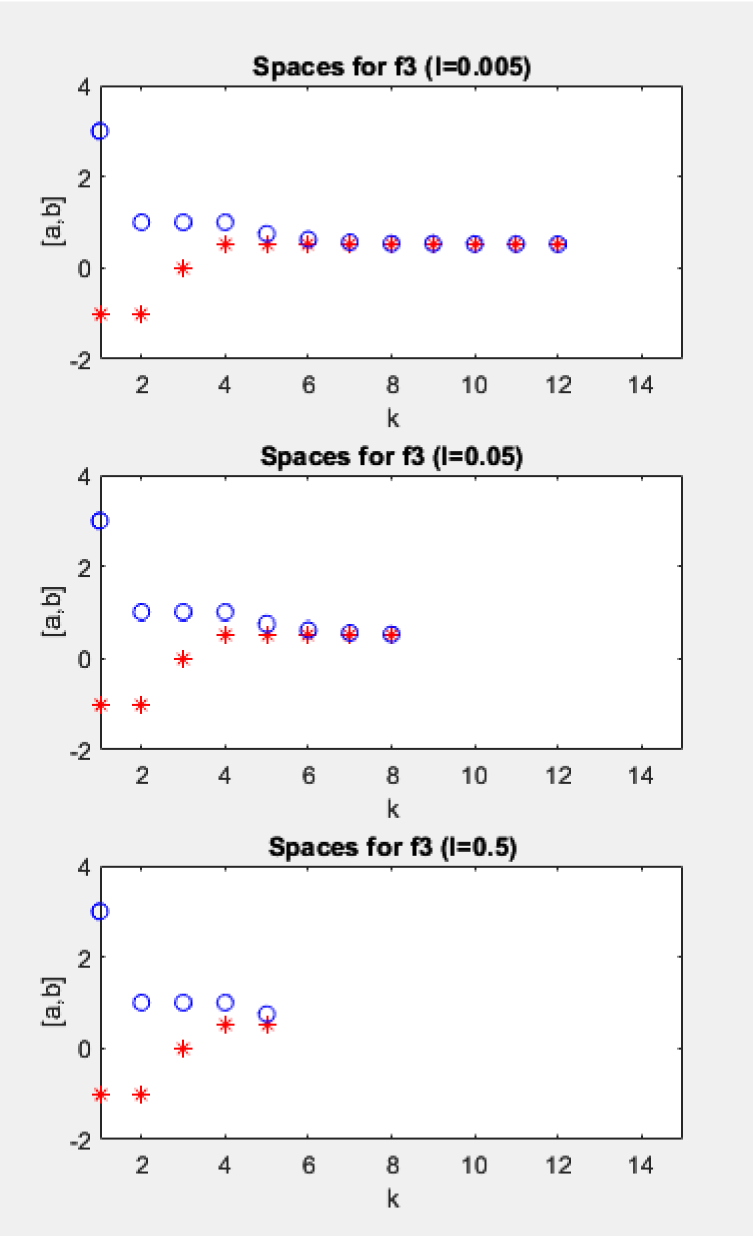
Επιπρόσθετα, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος $[a_k, b_k]$, συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για τις τρεις συναρτήσεις μας και για επιλογή l=0.005, l=0.05 και l=0.5. Προκύπτουν τα εξής γραφήματα:



Spaces for f1 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.5)
[a,b]
k



Spaces for f2 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.5)
[a,b]
k

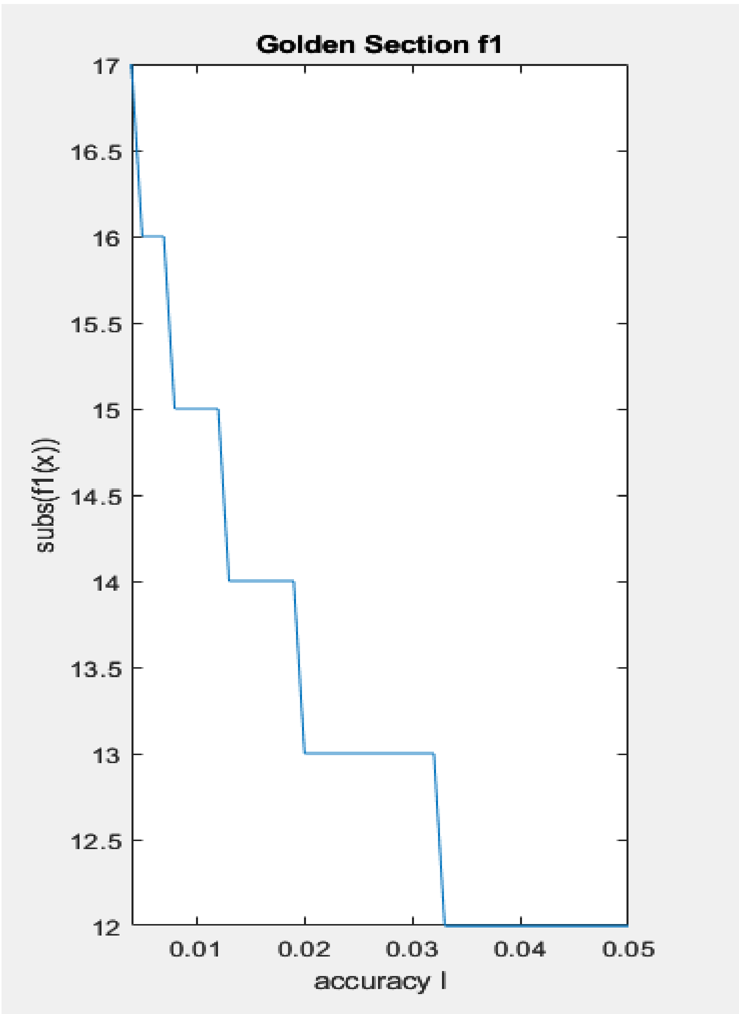


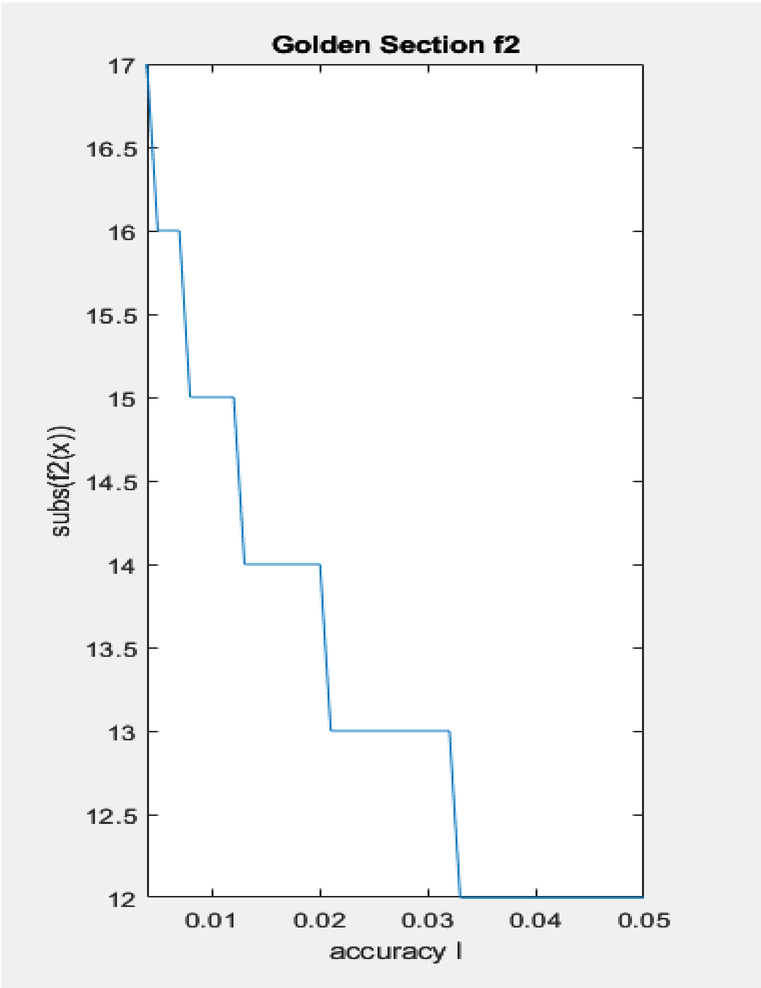
Σε όλες τις ομάδες γραφημάτων, παρατηρούμε ότι για μικρότερο εύρος αναζήτησης του ελαχίστου σημείου, υπάρχει προφανώς πολύ καλή σύγκλιση του κάτω ορίου a_k με το άνω όριο b_k, δηλαδή έχουμε πολύ καλή ακρίβεια. Αντιθέτως, όσο μεγαλώνει το εύρος αναζήτησης l, μειώνεται η ακρίβεια, δηλαδή αυξάνεται το τελικό διάστημα [a_k, b_k].

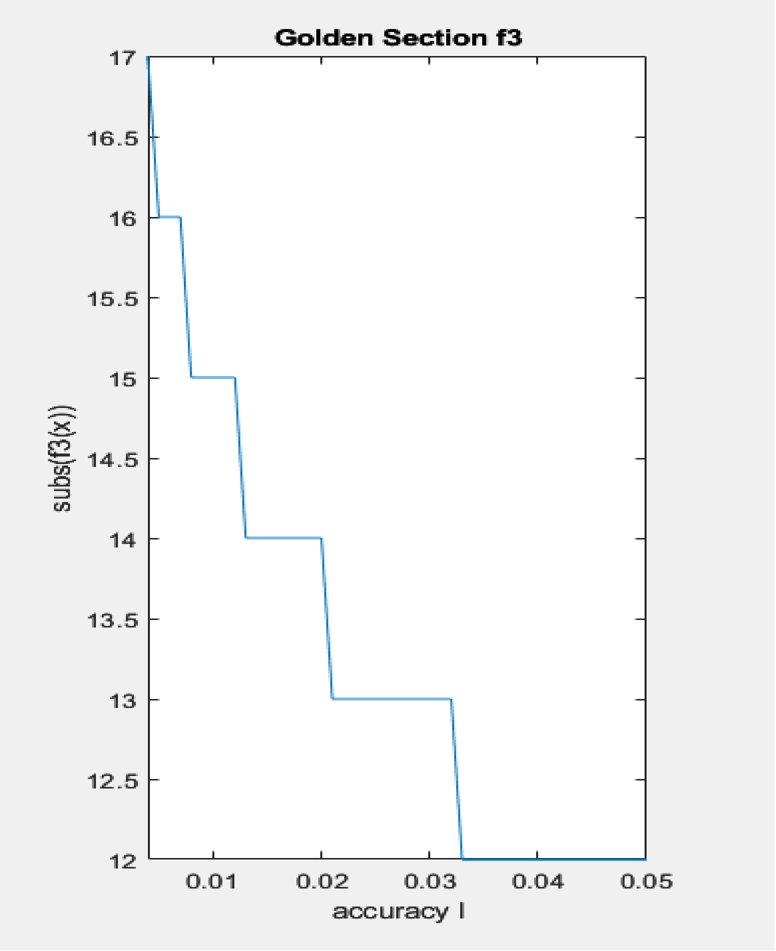
Θέμα 2

Υλοποιούμε τη μέθοδο του Χρυσού Τομέα και τον εφαρμόζουμε για τις τρεις δοθείσες συναρτήσεις.

Μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f(x) κατά την κλήση της μέσα στη μέθοδο του Χρυσού Τομέα, συναρτήσει της μεταβολής του εύρους αναζήτησης, l. Τα γραφήματα που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις μας για εύρος διαστήματος l Ε [0.004, 0.05] είναι τα εξής:

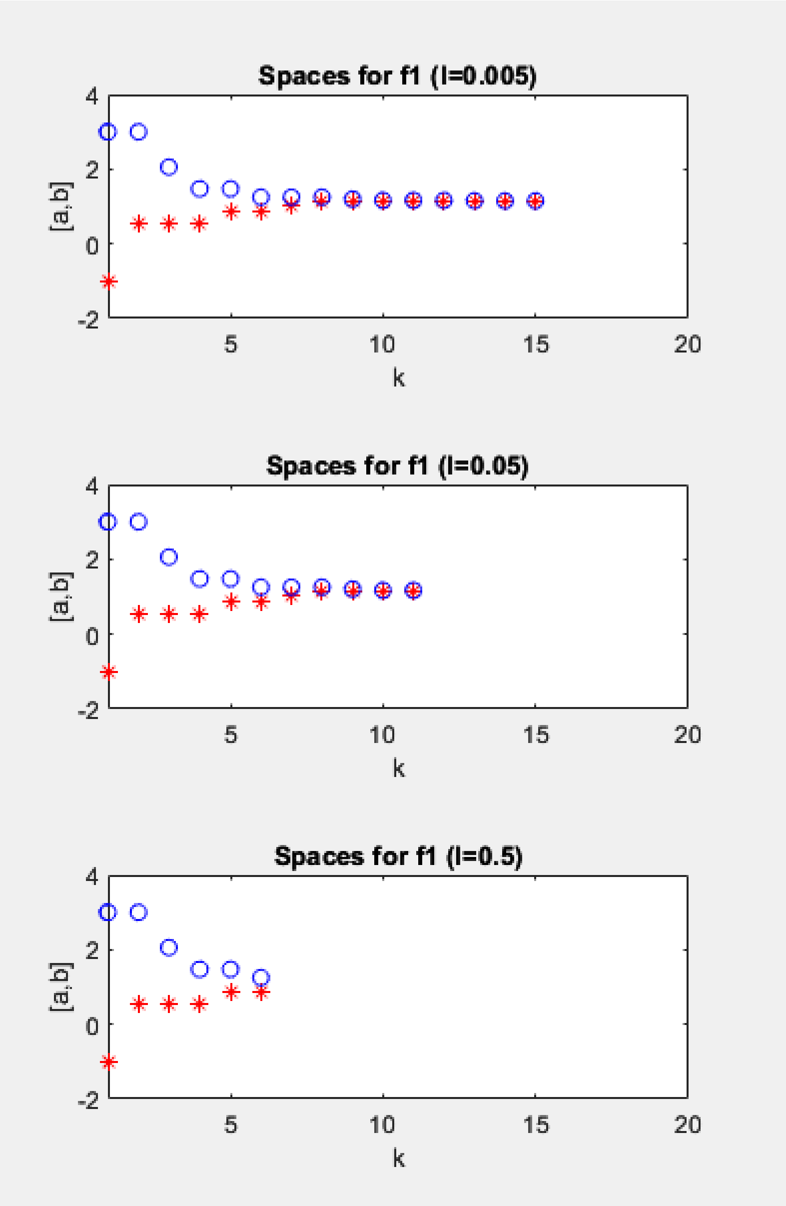


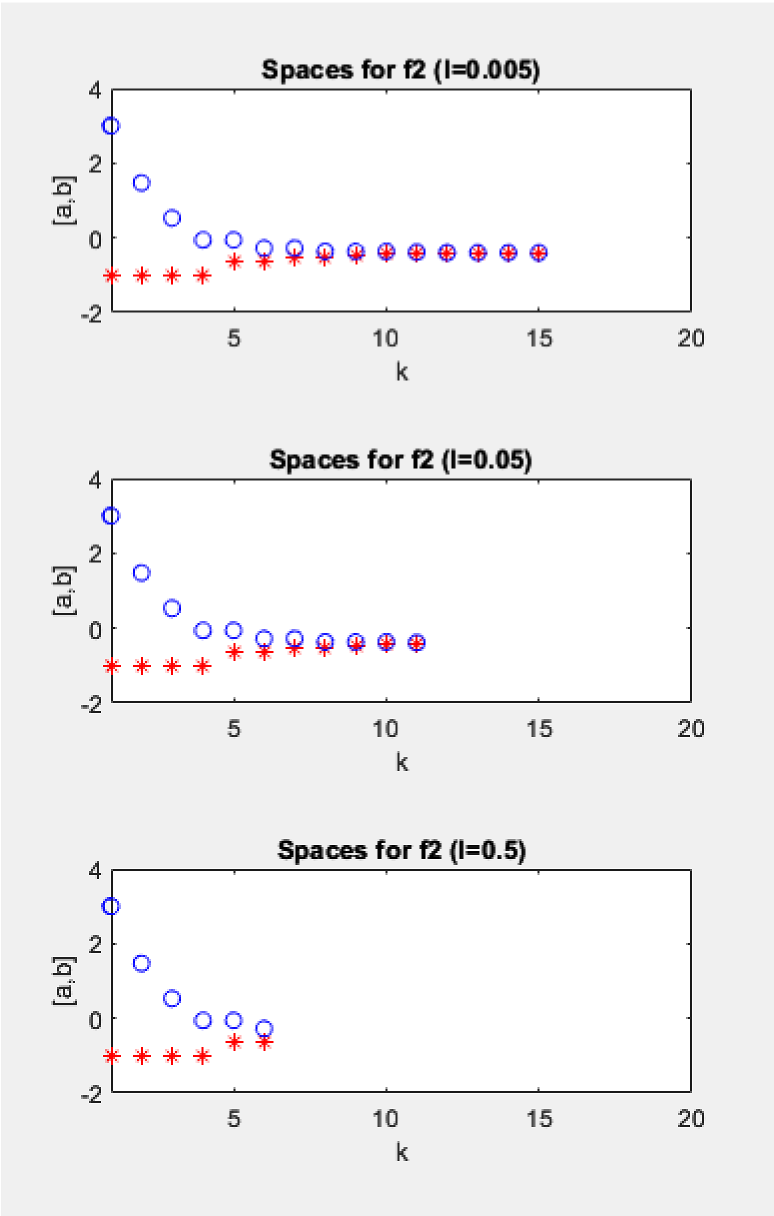

Golden Section f2
17
16.5
16
15.5
15
14.5
14
13.5
13
12.5
12
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
subs(f2(x))
accuracy l



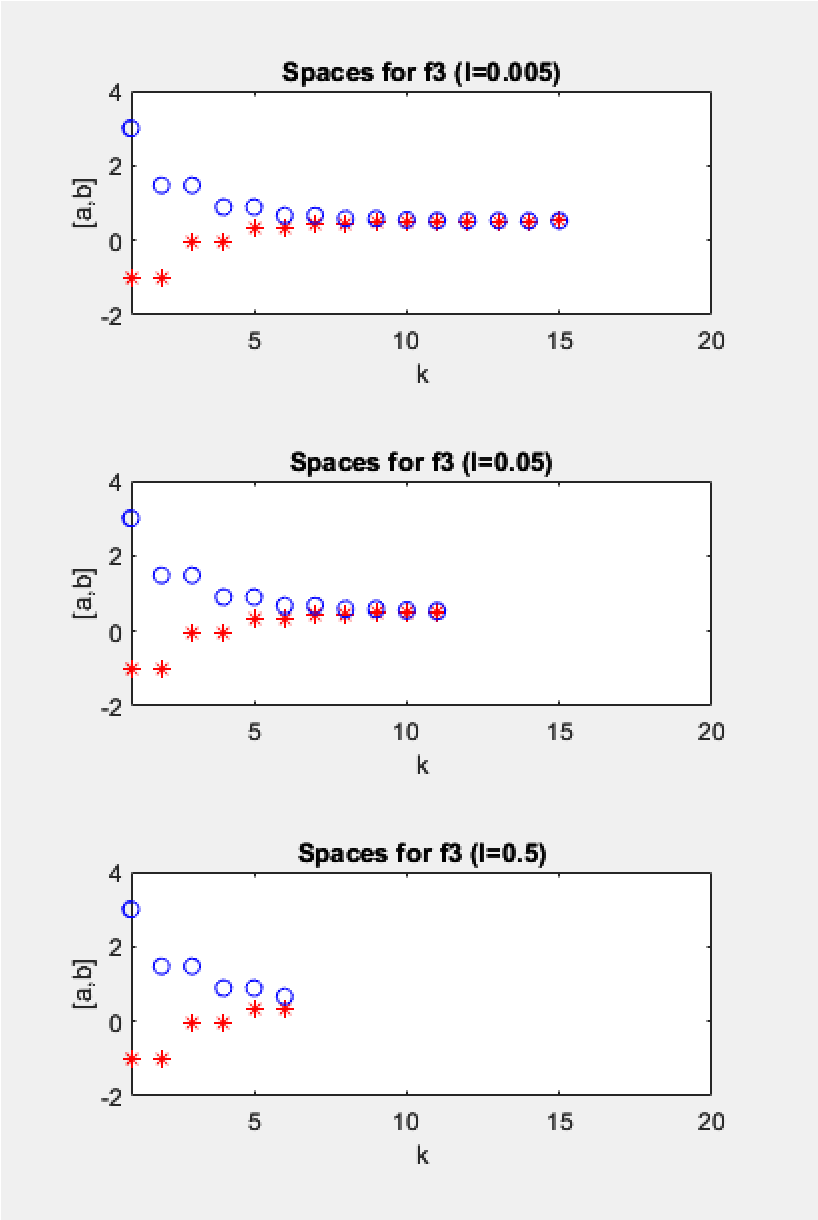
Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το εύρος αναζήτησης l, τόσο μειώνονται και οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Φαίνεται, βέβαια, ότι η μείωση αυτή δεν είναι γραμμική, αλλά εκθετική. Αυτό συμβαίνει και για τις τρεις συναρτήσεις f1, f2 και f3. Τα παραπάνω γραφήματα φαίνεται ότι ταυτίζονται.

Επιπρόσθετα, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος [a_k, b_k], συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για τις τρεις συναρτήσεις μας και για επιλογή l=0.005, l=0.05 και l=0.5. Προκύπτουν τα εξής γραφήματα:


Spaces for f1 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.5)
[a,b]
k



Spaces for f2 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.5)
[a,b]
k

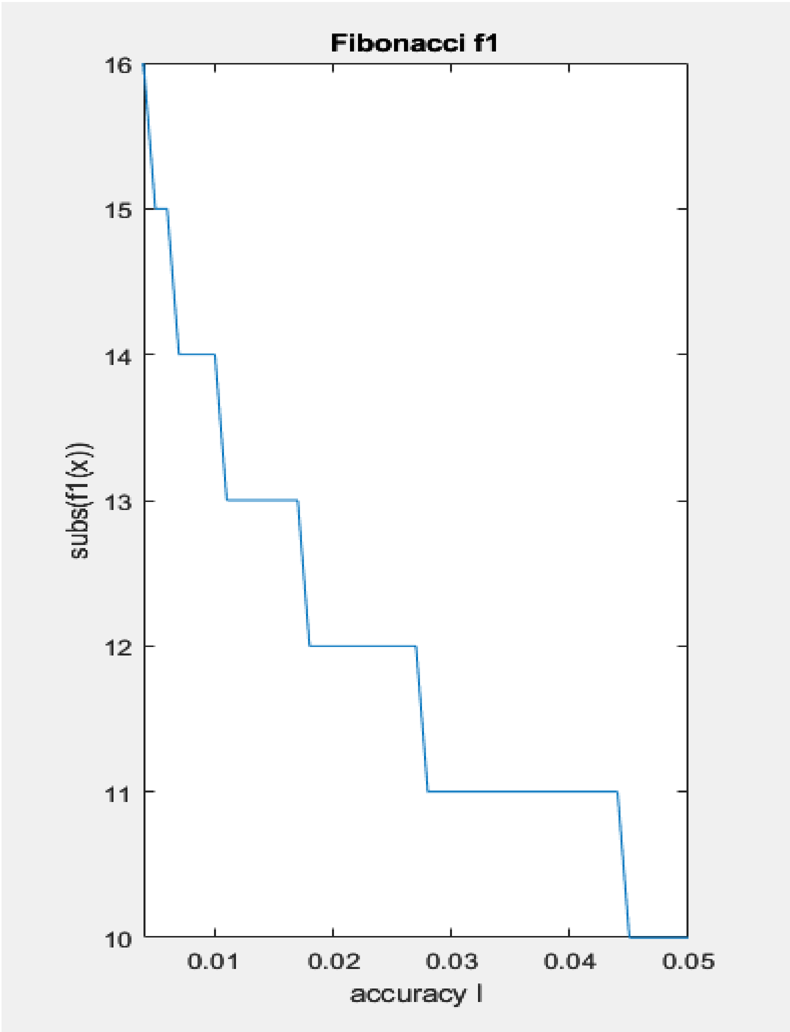


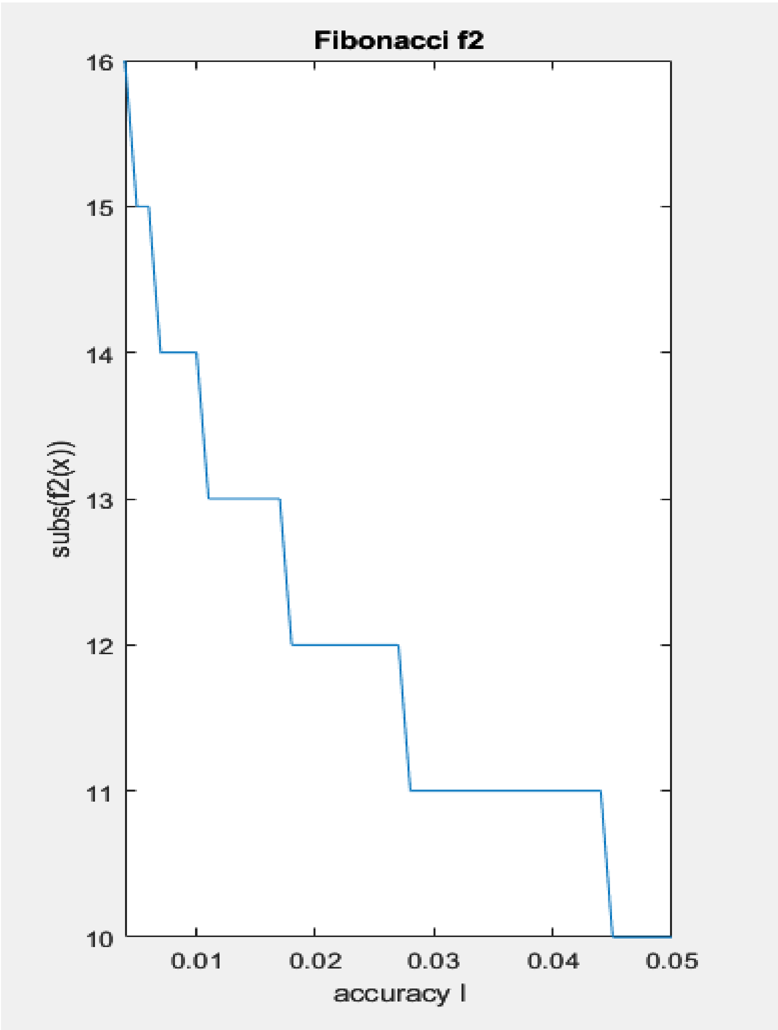
Σε όλες τις ομάδες γραφημάτων, παρατηρούμε ότι για μικρότερο εύρος αναζήτησης του ελαχίστου σημείου, υπάρχει προφανώς πολύ καλή σύγκλιση του κάτω ορίου a_k με το άνω όριο b_k, δηλαδή έχουμε πολύ καλή ακρίβεια. Αντιθέτως, όσο μεγαλώνει το εύρος αναζήτησης l, μειώνεται η ακρίβεια, δηλαδή αυξάνεται το τελικό διάστημα $[a_k, b_k]$.

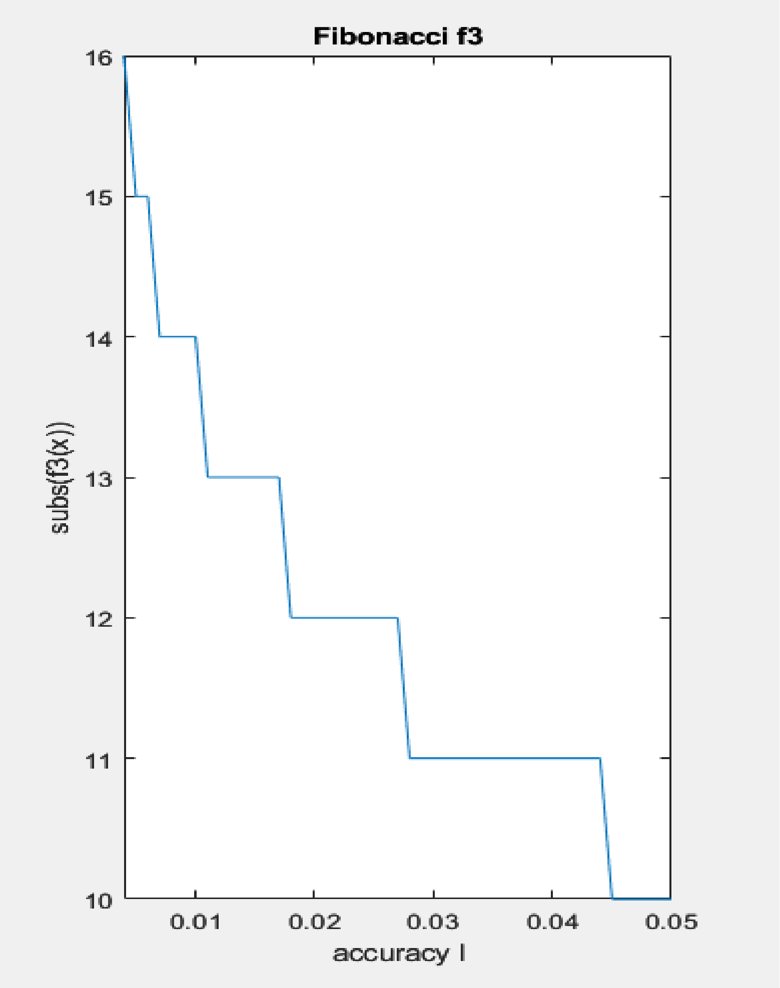
Θέμα 3

Υλοποιούμε τη μέθοδο Fibonacci και την εφαρμόζουμε για τις τρεις δοθείσες συναρτήσεις.

Μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f(x) κατά την κλήση της μέσα στη μέθοδο Fibonacci, συναρτήσει της μεταβολής του εύρους αναζήτησης, l. Τα γραφήματα που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις μας για εύρος διαστήματος l Ε [0.004, 0.05] είναι τα εξής:

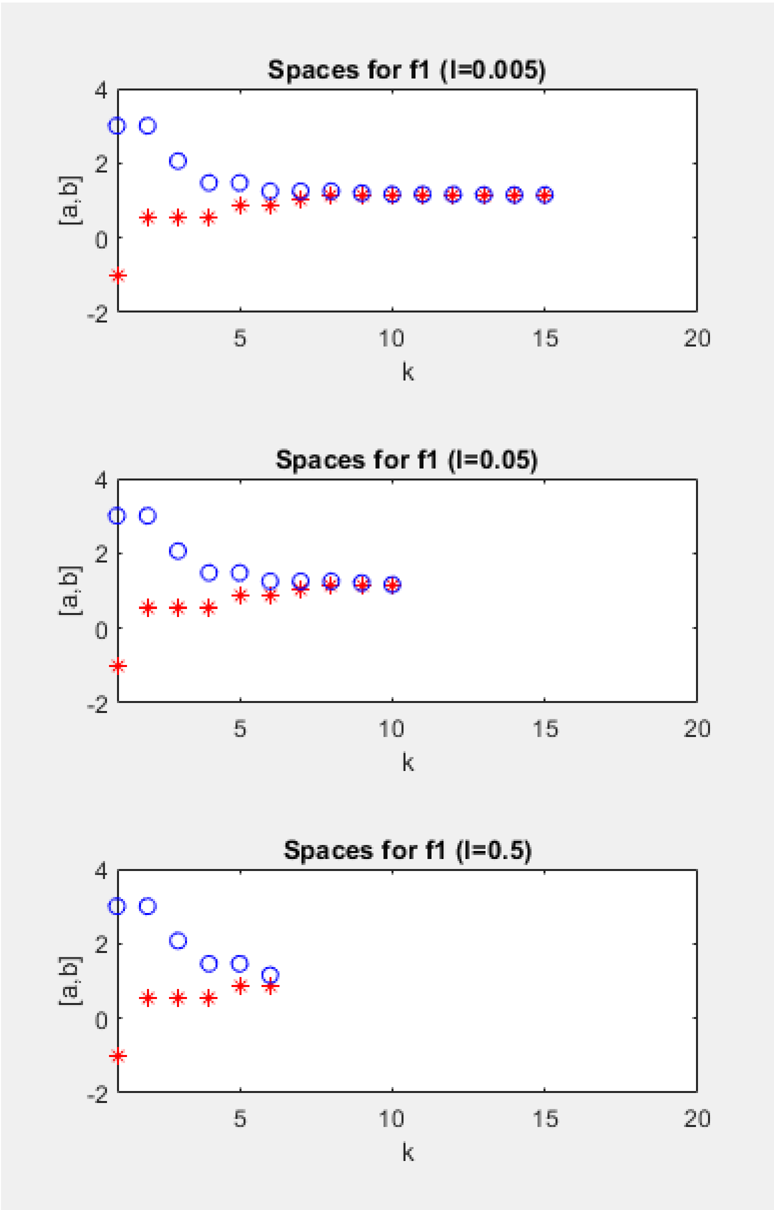


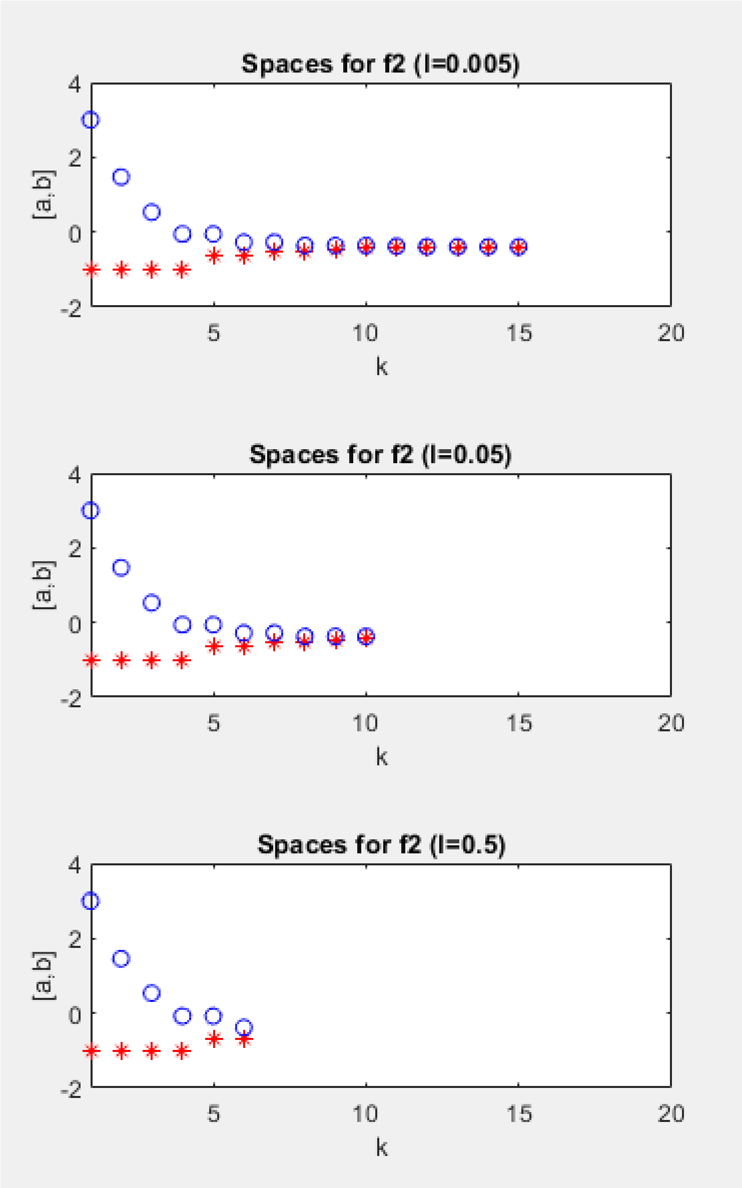

Fibonacci f2
16
15
14
13
12
11
10
subs(f2(x))
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
accuracy l



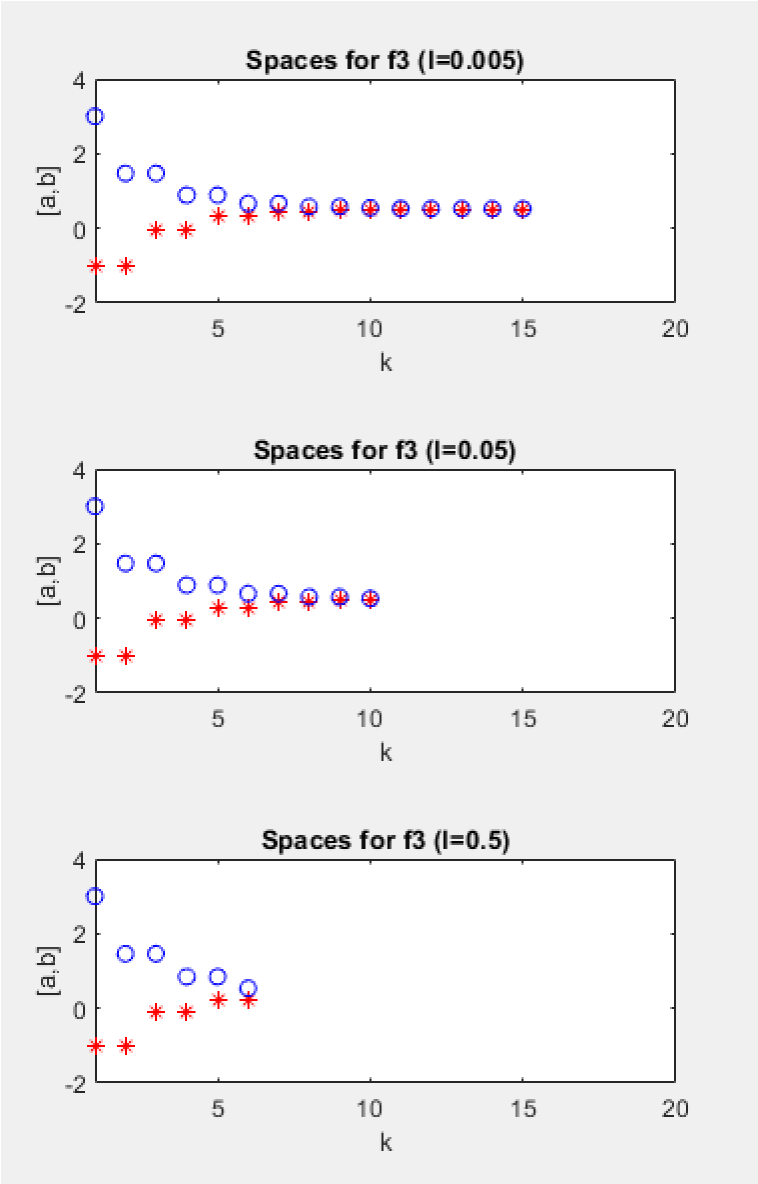
Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το εύρος αναζήτησης l, τόσο μειώνονται και οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Φαίνεται, βέβαια, ότι η μείωση αυτή δεν είναι γραμμική, αλλά εκθετική. Αυτό συμβαίνει και για τις τρεις συναρτήσεις f1, f2 και f3. Τα παραπάνω γραφήματα φαίνεται ότι ταυτίζονται.

Επιπρόσθετα, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος [a_k, b_k], συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για τις τρεις συναρτήσεις μας και για επιλογή l=0.005, l=0.05 και l=0.5. Προκύπτουν τα εξής γραφήματα:


Spaces for f1 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.5)
[a,b]
k



Spaces for f2 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.5)
[a,b]
k

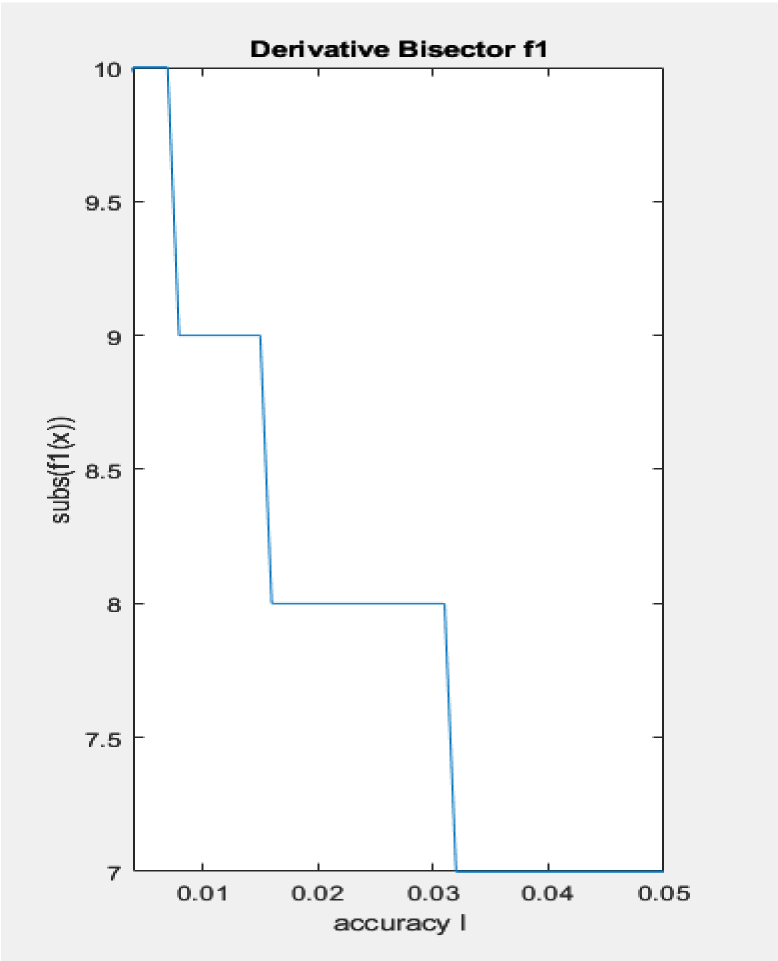


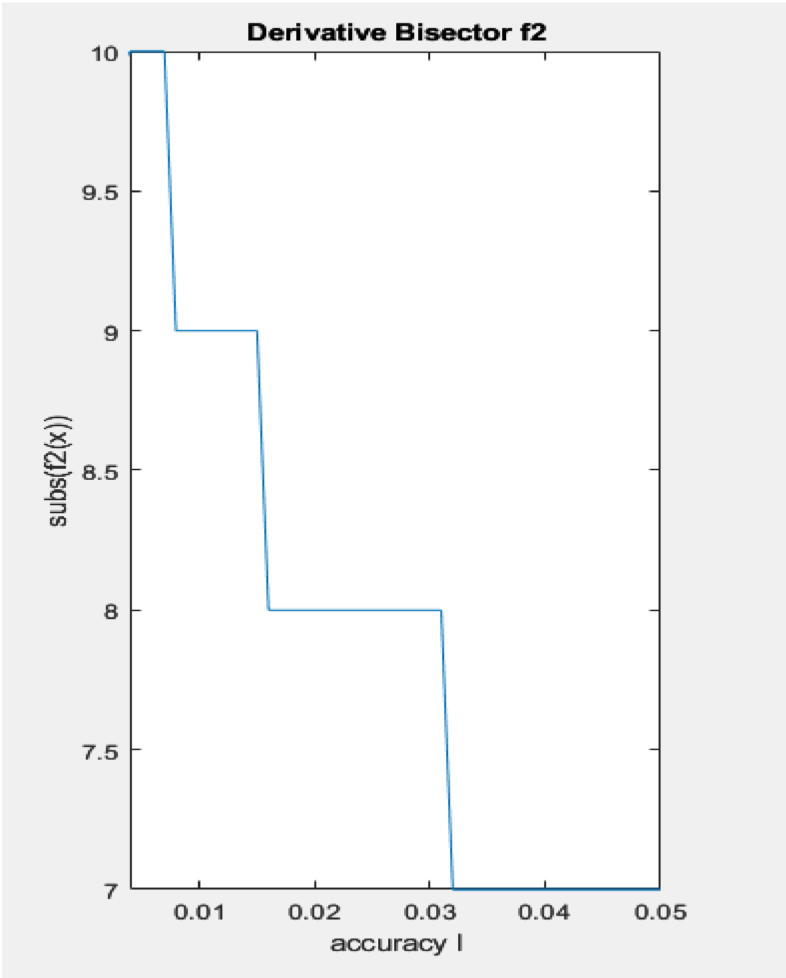
Σε όλες τις ομάδες γραφημάτων, παρατηρούμε ότι για μικρότερο εύρος αναζήτησης του ελαχίστου σημείου, υπάρχει προφανώς πολύ καλή σύγκλιση του κάτω ορίου a_k με το άνω όριο b_k, δηλαδή έχουμε πολύ καλή ακρίβεια. Αντιθέτως, όσο μεγαλώνει το εύρος αναζήτησης l, μειώνεται η ακρίβεια, δηλαδή αυξάνεται το τελικό διάστημα $[a_k, b_k]$.

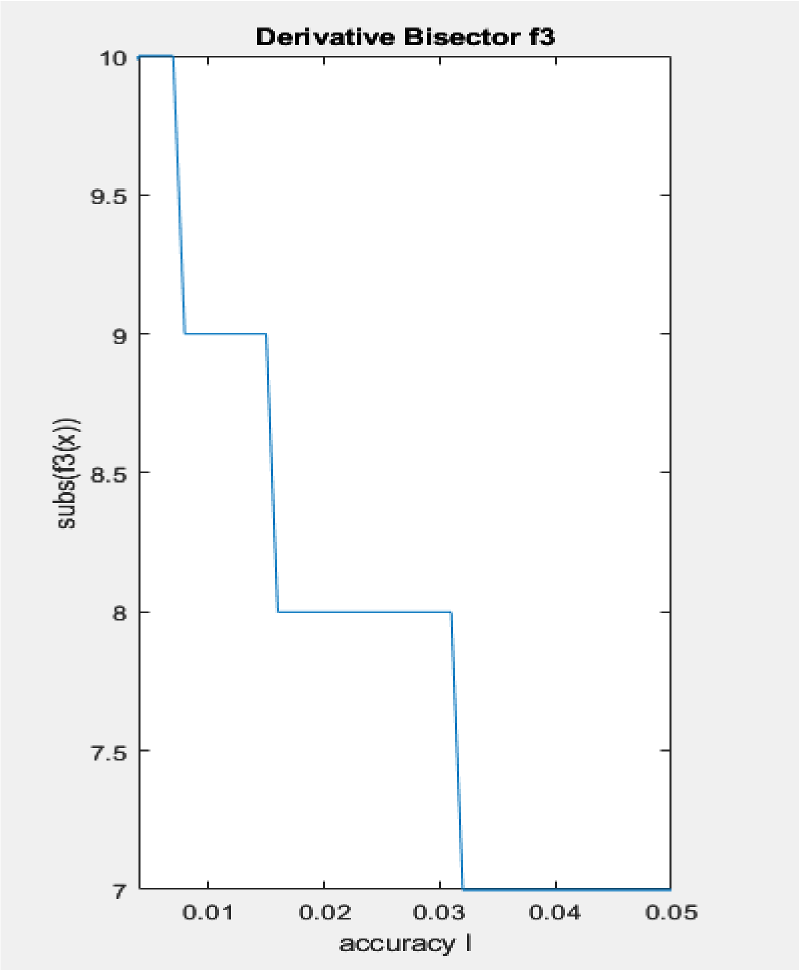
Θέμα 4

Υλοποιούμε τη μέθοδο Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου, και την εφαρμόζουμε για τις τρεις δοθείσες συναρτήσεις.

Μελετάμε τη μεταβολή των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f(x) κατά την κλήση της μέσα στη παραπάνω μέθοδο, συναρτήσει της μεταβολής του εύρους αναζήτησης, l. Τα γραφήματα που προκύπτουν για τις τρεις συναρτήσεις μας για εύρος διαστήματος l Ε [0.004, 0.05] είναι τα εξής:

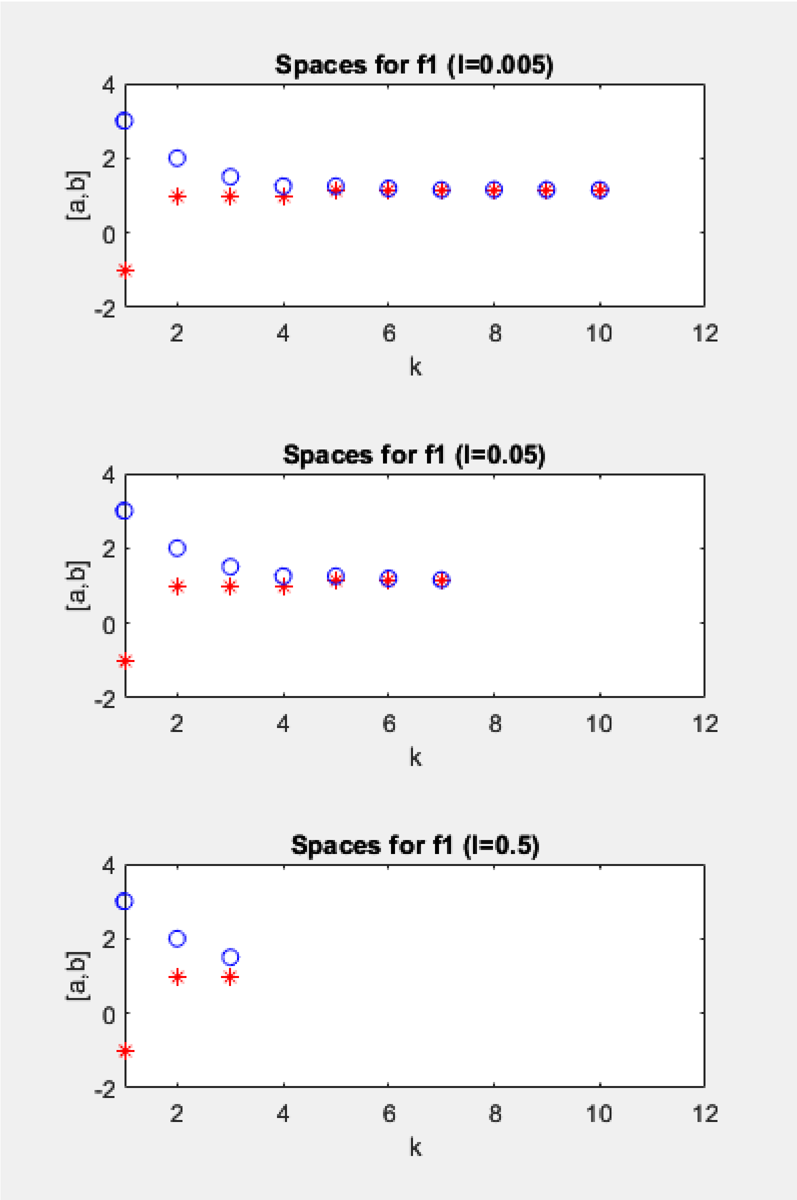


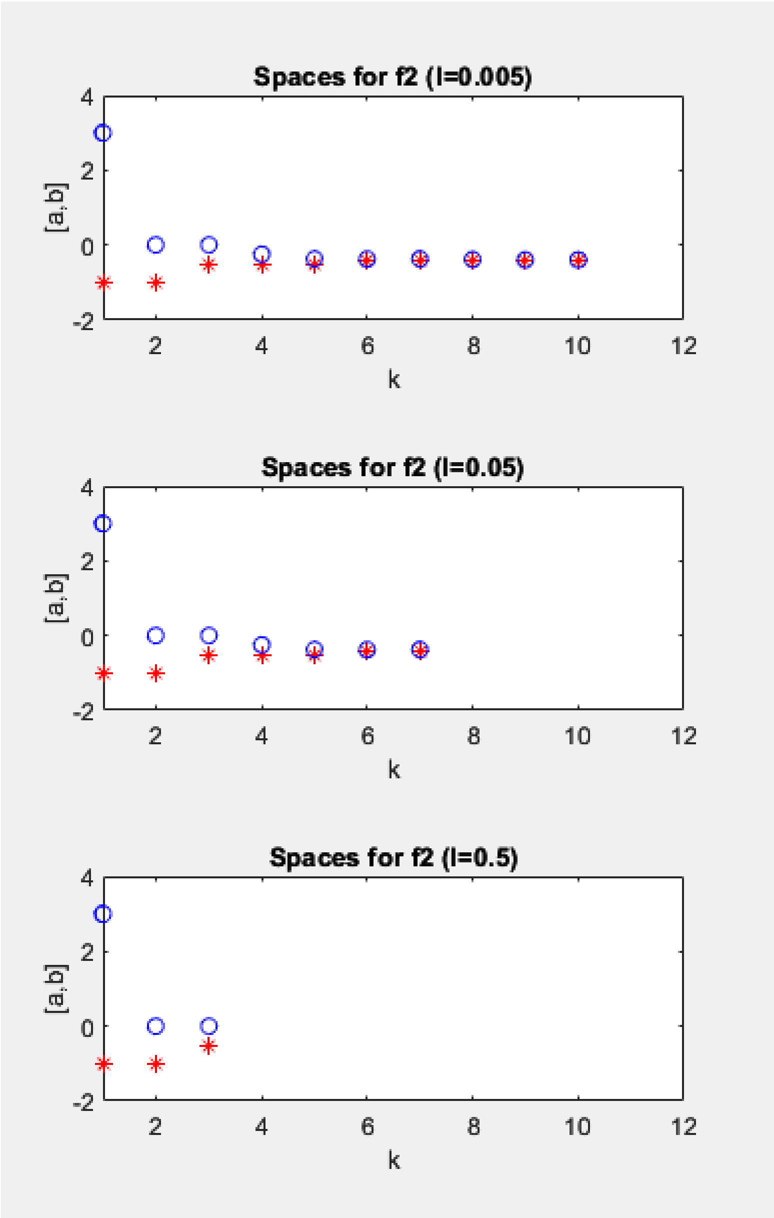

Derivative Bisector f2
10
9.5
9
8.5
8
7.5
7
subs(f2(x))
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
accuracy l



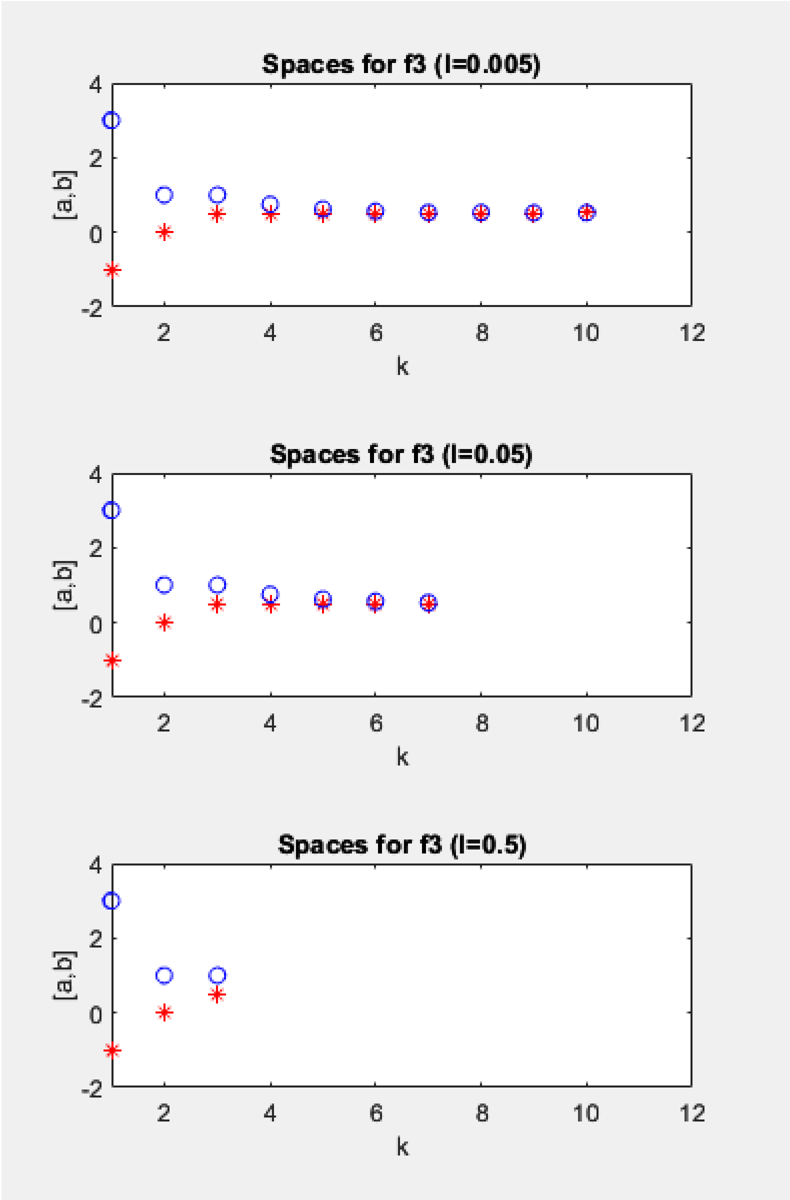
Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το εύρος αναζήτησης l, τόσο μειώνονται και οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης. Φαίνεται, βέβαια, ότι η μείωση αυτή δεν είναι γραμμική, αλλά εκθετική. Αυτό συμβαίνει και για τις τρεις συναρτήσεις f1, f2 και f3. Τα παραπάνω γραφήματα φαίνεται ότι ταυτίζονται.

Επιπρόσθετα, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των άκρων του διαστήματος [a_k, b_k], συναρτήσει του δείκτη βήματος k, για τις τρεις συναρτήσεις μας και για επιλογή l=0.005, l=0.05 και l=0.5. Προκύπτουν τα εξής γραφήματα:


Spaces for f1 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f1 (l=0.5)
[a,b]
k



Spaces for f2 (l=0.005)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.05)
[a,b]
k
Spaces for f2 (l=0.5)
[a,b]
k



Σε όλες τις ομάδες γραφημάτων, παρατηρούμε ότι για μικρότερο εύρος αναζήτησης του ελαχίστου σημείου, υπάρχει προφανώς πολύ καλή σύγκλιση του κάτω ορίου a_k με το άνω όριο b_k, δηλαδή έχουμε πολύ καλή ακρίβεια. Αντιθέτως, όσο μεγαλώνει το εύρος αναζήτησης l, μειώνεται η ακρίβεια, δηλαδή αυξάνεται το τελικό διάστημα $[a_k, b_k]$.

Από τα αρχικά γραφήματα σε κάθε θέμα, μπορούμε να εξάγουμε συμπέρασμα για την αποδοτικότητα των τεσσάρων μεθόδων που υλοποιήσαμε. Φαίνεται ότι ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης στη μέθοδο του Χρυσού Τομέα θα βρίσκεται πάντοτε κάτω από τον αντίστοιχο αριθμό στη μέθοδο Διχοτόμου, για ίδιο εύρος l. Δηλαδή, η μέθοδος του Χρυσού Τομέα είναι αποδοτικότερη από τη μέθοδο της Διχοτόμου. Με ακριβώς ίδιο σκεπτικό, η μέθοδος Fibonacci είναι αποδοτικότερη της μεθόδου Χρυσού Τομέα, και η μέθοδος Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου είναι αποδοτικότερη της μεθόδου Fibonacci.

Από τις τρεις μεθόδους χωρίς χρήση παραγώγου, λοιπόν, διαπιστώνουμε ότι ως προς την αποδοτικότητα θα ισχύει:

Fibonacci > Χρυσός Τομέας > Διχοτόμος

Μάλιστα, παρατηρώντας πιο προσεκτικά, θα δούμε ότι ο Χρυσός Τομέας βρίσκεται λίγο πάνω της Fibonacci σε υπολογισμούς αντικειμενικής συνάρτησης, ενώ η Διχοτόμος βρίσκεται αρκετά πιο πάνω από τον Χρυσό Τομέα σε αριθμό υπολογισμών. Δηλαδή πρακτικά ισχύει:

Fibonacci > Χρυσός Τομέας >> Διχοτόμος

Τέλος, συγκρίνοντας τις παραπάνω τρεις μεθόδους με τη μέθοδο Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου, φαίνεται ότι η τελευταία θα είναι πολύ πιο αποδοτική από όλες, δηλαδή:

Παράγωγος Διχοτόμος >> Fibonacci > Χρυσός Τομέας >> Διχοτόμος