ЗАДАЧА №1

Найти длины (нормы) элементов , и угол между ними в евклидовом пространстве всех многочленов с вещественными коэффициентами и скалярным произведением $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Дано:

$$f(x), g(x) \in \mathbb{R}_n[x];$$
$$f(x) = x;$$
$$g(x) = -x + 1;$$

Решение:

1. Найдём длину вектора f.

$$|f| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} f^2(x)dx} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} x^2dx} = \sqrt{\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

2. Найдём длину вектора g.

$$|g| = \sqrt{(g,g)} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} g^2(x)dx} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (1-x)^2dx} = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (1-2x+x^2)dx} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} dx - 2\int\limits_{-1}^{1} xdx + \int\limits_{-1}^{1} x^2dx} = \sqrt{2 - 2\cdot 0 + \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

3. Найдём скалярное произведение (f,g).

$$(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} (x-x^2)dx = \int\limits_{-1}^{1} xdx - \int\limits_{-1}^{1} x^2dx = -\frac{2}{3}$$

4. Найдём угол между векторами g и f.

$$\angle\widehat{g,f} = \arccos(\frac{(f,g)}{|f||g|}) = \arccos(\frac{2\cdot 3}{3\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}) = \arccos(\frac{-1}{2}) = \frac{4\pi}{3}$$

Ответ: $|f| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $|g| = \sqrt{\frac{8}{3}}$, $\angle\widehat{g,f} = \frac{4\pi}{3}$.

ЗАДАЧА №2

Найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора на подпространство $\mathbb{V} = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right\rangle$

Дано:

$$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Ортаганализируем вектора $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

$$\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{b} - \frac{(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a'})}{(\overrightarrow{a'}, \overrightarrow{a'})}\overrightarrow{a'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{c} - \frac{(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{b'})}{(\overrightarrow{b'}, \overrightarrow{b'})}\overrightarrow{b'} - \frac{(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a'})}{(\overrightarrow{a'}, \overrightarrow{a'})}\overrightarrow{a'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{-2}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ортаганальный базис $\mathbb{V} = \left\langle \overrightarrow{a'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

2. Найдём базис ортаганального дополнения $\mathbb{V}_\perp$.

$$(\overrightarrow{x}_{\mathbb{V}_\perp}, \overrightarrow{a'}) = (\overrightarrow{x}_{\mathbb{V}_\perp}, \overrightarrow{b'}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 2} - \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 3} + \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 4} = 0 \\ 3\overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 1} + \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 2} + \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 3} + 2\overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 1} = -\overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 4} \\ \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 2} = -\overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 3} + \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 4} = 0 \\ \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 3} = \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 3} \\ \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 4} = \overline{x}_{\mathbb{V}_\perp 4} \end{cases}$$

Базис ортаганального дополнения $\mathbb{V}^{\perp} = \left\langle \overrightarrow{a_{\perp}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b_{\perp}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

3. Так как $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_{\mathbb{V}}} + \overrightarrow{x}_{\mathbb{V}_{\perp}}$, то $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_{\mathbb{V}}} + \overrightarrow{x}_{\mathbb{V}_{\perp}} = \alpha_1 \overrightarrow{a'} + \alpha_2 \overrightarrow{b'} + \beta_1 \overrightarrow{a_{\perp}} + \beta_2 \overrightarrow{b_{\perp}}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{17}{3} \\ \alpha_2 = \dfrac{4}{3} \\ \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{x_{\mathbb{V}}} = -\dfrac{17}{3}\overrightarrow{a'} + \dfrac{4}{3}\overrightarrow{b'} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 7 & -3 \end{pmatrix}^T \\ \overrightarrow{x_{\mathbb{V}_{\perp}}} = \overrightarrow{a_{\perp}} + 5\overrightarrow{b_{\perp}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

Ответ: $\overrightarrow{x_{\mathbb{V}}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{x_{\mathbb{V}_{\perp}}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ЗАДАЧА №3

Является ли линейным оператором отображение φ? Ответ пояснить.

Дано:

$$\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x];$$
$$\varphi(f) = (f(1) + f(2))f', \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}_n[x]$$

Решение:

1. Проверим выполнение $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.

$$\varphi(f+g) = ((f+g)(1) + (f+g)(2))(f+g)' =$$
$$= (f(1) + g(1) + f(2) + g(2))f' + (f(1) + g(1) + f(2) + g(2))g' =$$
$$= f(1)g' + \mathbf{g(1)g'} + f(2)g' + \mathbf{g(2)g'} + \mathbf{f(1)f'} + g(1)f' + \mathbf{f(2)f'} + g(2)f' =$$
$$= f(1)g' + f(2)g' + g(1)f' + g(2)f' + \varphi(f) + \varphi(g) \Rightarrow \varphi(f+g) \neq \varphi(f) + \varphi(g)$$

Таким образом φ – не линейный оператор.

Ответ: φ - не линейный оператор.

ЗАДАЧА №4

В каждом варианте надо найти кроме матрицы оператора ещё и базис ядра оператора и базис образа оператора. по правилу . Найти матрицу оператора в естественном базисе.

Дано:

$$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x];$$
$$\varphi(f) = (2x + 2x^2)f''' + 2(1 + x)f'', \quad \forall f(x) \in \mathbb{R}_3[x]$$
$$\mathfrak{B} = [1, x, x^2, x^3]$$

Решение:

1. Проверим выполнение $\varphi(f + g) = \varphi(f) + \varphi(g)$.

$$\varphi(f + g) = (2x + 2x^2)(f + g)''' - 2(1 + x)(f + g)'' =$$
$$= (2x+2x^2)(f)'''-2(1+x)(f)''+(2x+2x^2)(g)'''-2(1+x)(g)'' = \varphi(f)+\varphi(g)$$

2. Проверим выполнение $\varphi(\alpha f) = \alpha\varphi(f)$.

$$\varphi(\alpha f) = (2x+2x^2)(\alpha f)'''-2(1+x)(\alpha f)'' = (2x+2x^2)\alpha(f)'''-2(1+x)\alpha(f)'' =$$
$$= \alpha((2x + 2x^2)f''' - 2(1 + x)f'') = \alpha\varphi(f)$$

3. Найдём матрицу оператора в естественном базисе.

   (a) Найдём образы базисных векторов. $\varphi(1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   $\varphi(x^2) = -4 - 4x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(x^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) Найдём матрицу конкатинации этих векторов, которая и будет матрицей оператора φ.

$$A = (\varphi(1)|\varphi(x)|\varphi(x^2)|\varphi(x^3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Найдём базис ядра. Для этого решим ОСЛУ $A \cdot \overline{x} = \overline{\theta}$ методом Гауса.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x}_1 = 0 \\ \overline{x}_2 = \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 = \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 = \overline{x}_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \end{pmatrix} = \overline{x}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \overline{x}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overline{x}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом базис $Ker(\varphi) = [\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}] = [x, x^2, x^3]$

5. В данном случае очевидно, что базис $Im(\varphi) = [\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}] = [1]$

ЗАДАЧА №5

Найти спектр и базисы собственных подпространств преобразования, заданного в естественном базисе матрицей А. Если возможно, найти подобную ей диагонального вида, указать диагонализирующий базис.

Дано:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Найдём корни характеристического многочлена.

2.
$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$-(1-\lambda)^2(5+\lambda) + 9(1-\lambda) + 9(1-\lambda) - 27 - 27 + 45 + 9\lambda =$$

$$= -(1-\lambda)^2(5+\lambda) + 9(1-\lambda) = (1-\lambda)(-(1-\lambda)(5+\lambda)+9) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2$$

Таким образом $\delta(\varphi) = \{1_1, -2_2\}$.

3. Найдём собственное подпространство S_1 для собственного значения 1.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x}_1 = \overline{x}_3 \\ \overline{x}_2 = -\overline{x}_3 \\ \overline{x}_3 = \overline{x}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \overline{x}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, базис $S_1 = [\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$

4. Найдём собственное подпространство S_{-2} для собственного значения -2.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x}_1 = -\overline{x}_2 - \overline{x}_3 \\ \overline{x}_2 = \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 = \overline{x}_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix} = \overline{x}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overline{x}_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, базис $S_{-2} = [\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$

5. Так как $dim(S_{-2}) + dim(S_1) = 3 = 1 + 2$, то диаганальная матрица существует.

   Диаганализирующий базис:

$$[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}]$$

   Диаганальная матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА №6

Найти нормальный вид следующих квадратичных форм и приводящее к нему линейное невырожденное преобразование.

Дано:

$$f(x) = 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4$$

Решение:

1. Произведём замену $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_1 - y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y_2 = x_1 - x_3 \\ 2y_1 = x_1 + x_3 \end{cases}$.

$$f(x) = 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + 4x_3x_4 =$$

$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1x_4 + 2y_2x_4 + 2y_1x_2 - 2y_2x_2 - 2x_2x_4 + 4y_1x_4 - 4y_2x_4 =$$

$$= 2(y_1^2 + 2y_1(\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)) - 2y_2^2 + 2y_2x_4 - 2y_2x_2 - 2x_2x_4 - 4y_2x_4 =$$

$$= 2(y_1^2 + 2y_1(\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)) - 2(y_2^2 + 2y_2(\frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_2 - x_4)) - 2x_2x_4 =$$

$$= 2(y_1 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)^2 - 2(\frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)^2 - 2(y_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2) + 2(\frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)^2 - 2x_2x_4 =$$

$$= 2(y_1 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)^2 - 2(y_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2) - 4x_4^2 - 2x_4x_2 - 2x_2x_4 =$$

$$= 2(y_1 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)^2 - 2(y_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2) - 4x_4^2 - 4x_4x_2 + x_2^2 - x_2^2 =$$

$$= 2(y_1 + \frac{3}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2)^2 - 2(y_2 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_2) - (2x_4 + x_2)^2 + x_2^2 =$$

$$= 2(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4)^2 - 2(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4)^2 -$$

$$-(2x_4 + x_2)^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + x_2 + 3x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_3 + x_2 + x_4)^2 -$$

$$-(2x_4 + x_2)^2 + x_2^2$$

Таким образом получаем:

$$\begin{cases} k_1 = x_1 + x_3 + x_2 + 3x_4 \\ k_2 = x_1 - x_3 + x_2 + x_4 \\ k_3 = 2x_4 + x_2 \\ k_4 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} K$$