

Aufgabenblatt 12

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2022

Tim Downie

IP: Branch & Bound Verfahren

mit Lösungen

Das Branch & Bound Verfahren braucht mehrfachen Lösungen Am besten benutzen Sie eine Online-Linear-Programmierung-Software oder das grafische Verfahren, um die folgenden LPs zu lösen. Es ist nicht so wichtig relevant welche Software Sie benutzen. Eine Möglichkeit ist die Webseite:

<https://www.emathhelp.net/calculators/linear-programming/simplex-method-calculator/>

Click Hier für das Code Beispiel aus Aufgabe 1

Alle Lösungenen der LP-Relaxierung sind zu 1 Nachkommestelle gegeben.

Die Anzahl von Unterprobleme ist abhängig von der Reihenfolge, in der sie gelöst sind.

Nur eine mögliche Lösungsweg ist für die jeweilige Aufgabe gegeben.

Lösen Sie folgenden IPs anhand des Branch and Bound Verfahrens, und stellen Sie das ergebenden Baum grafisch dar.

Aufgabe 1

$$\max Z(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

P_0 : LP-Relaxierung: $x_1^ = 2, x_2^* = 1.8, z^* = 11$*

P_1 : Spalte mit $x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, z = 7$. Ganzzahlig

P_2 : Spalte mit $x_2 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, z = 10$. Ganzzahlig

Opt IP Lösung: $x_1^ = 0, x_2^* = 2, z^* = 10$*

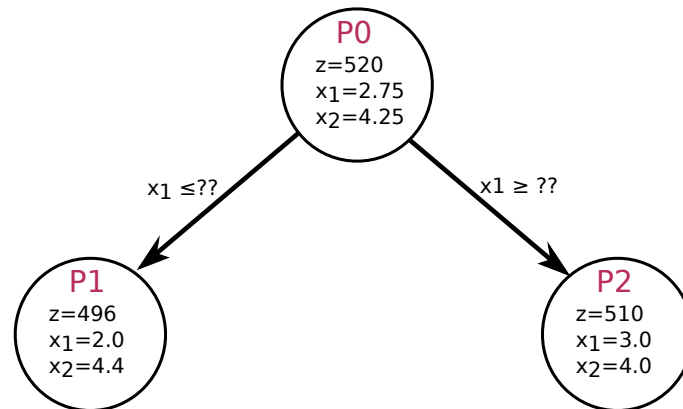
Aufgabe 2 Branch & Bound Verfahren

Diese ist ein Beispiel von der Format einer Aufgabe, die in der Klausur vorkommen könnte.

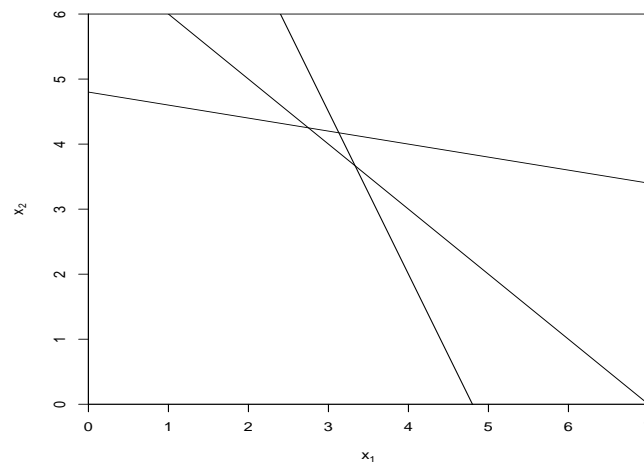
Gegeben ist die folgende ganzzahlige Programmierung (IP)

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & z = 50x_1 + 90x_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & 5x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 24 \\ & x_1 + x_2 \geq 7 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

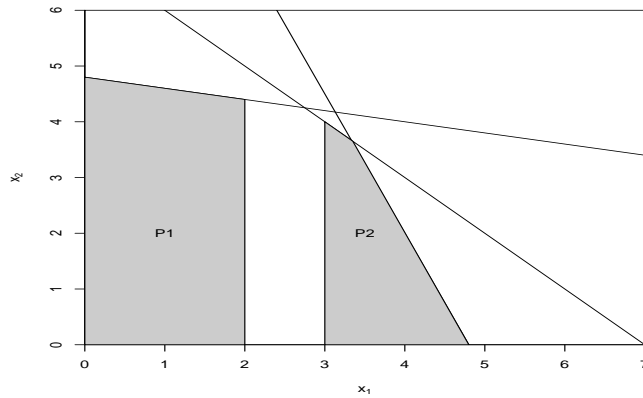
Ein Baumdiagramm des Branch & Bound Verfahrens ist im folgenden Diagramm dargestellt. Die Notation entspricht der im Skript.



- Vervollständigen Sie die Ungleichungen, die zu den jeweiligen Pfeilen gehören.
- Zeichnen Sie in das untere Diagramm den zulässigen Bereich von P1 und P2.
- Geben Sie vollständig die LP an, die Problem P1 entspricht.
- Warum ist es nicht nötig, das Problem P2 weiter zu unterteilen?
- Warum ist es nicht nötig, das Problem P1 weiter zu unterteilen?
- Geben Sie die optimale Lösung der IP an.



(a) $P1: x_1 \leq 2$. $P2: x_2 \leq 3$



(b)

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximiere} && z = 50x_1 + 90x_2 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} && 5x_1 + 2x_2 \leq 24 \\
 & && x_1 + 5x_2 \leq 24 \\
 & && x_1 + x_2 \geq 7 \\
 & && x_1 \leq 2 \\
 & && x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

(c)

(d) P2 besitzt eine Ganzzahlige Lösung.

(e) Der Z-Wert in P2 ist größer als der Z-Wert in P1. Da alle untere Probleme von P1 haben einen Z-Wert kleiner gleich 496, kann die optimale Lösung nicht unter P1 liegen.

(f) $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ und $z^* = 510$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 \max Z(x_1, x_2) &= 4x_1 - x_2 \\
 7x_1 - 2x_2 &\leq 14 \\
 x_2 &\leq 3 \\
 2x_1 - 2x_2 &\leq 3 \\
 x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned}$$

Zur Überprüfung: Die optimale ganzzahlige Lösung ist $Z^* = 7$, $x_1^* = 2$ und $x_2^* = 1$.

LP-Relaxierung: P_0 : $x_1 = 2.8$, $x_2 = 3$, $z = 8.4$

P_1 : Spalte mit $x_1 \leq 1 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 0.5$, $z = 7.5$

P_{11} : Spalte mit $x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1 = 1.5$, $x_2 = 0$, $z = 6$

P_{111} : Spalte mit $x_1 \leq 1 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $z = 4$. Ganzzahlig

P_{112} : Spalte mit $x_1 = 2 \Rightarrow$ Keine zulässige Lösung

P_{12} : Spalte mit $x_2 \geq 1 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z = 7$. Ganzzahlig

P_2 : Spalte mit $x_1 \geq 2 \Rightarrow$ Keine zulässige Lösung

Opt IP Lösung: $x_1^* = 2, x_2^* = 1, z^* = 7$

Aufgabe 4

$$\max Z(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2$$

$$-10x_1 + 20x_2 \leq 22$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 49$$

$$x_1 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

LP-Relaxierung: P_0 : $x_1 = 3.8, x_2 = 3, z = 8.2$

P_1 : Spalte mit $x_3 \leq 1 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 2.6, z = 7.4$

P_{11} : Spalte mit $x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1 = 1.8, x_2 = 2, z = 6.2$

P_{111} : Spalte mit $x_1 \leq 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1.6, z = 5.4$.

P_{112} : Spalte mit $x_1 \geq 2 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 2, z = 6$. Ganzzahlig

P_{12} : Spalte mit $x_2 \geq 3 \Rightarrow$ Keine zulässige Lösung

P_2 : Spalte mit $x_1 \geq 4 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2.9, z = 7.6$.

P_{21} : Spalte mit $x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 2, z = 4$. Ganzzahlig, nicht optimal.

P_{22} : Spalte mit $x_2 \geq 3 \Rightarrow$ Keine zulässige Lösung

Opt IP Lösung: $x_1^* = 2, x_2^* = 2, z^* = 6$ (P_{22})