

# Aufgabenblatt 3

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Tim Downie

## Naiver Algorithmus und LP in Normalform

### Aufgabe 1 ★ LP Optimierung: Naiver Algorithmus

Gegeben ist die folgende LP.

maximiere  $Z(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$   
 unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 6 & R1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 & R2 \\ x_1 &\geq 0 & R3 \\ x_2 &\geq 0 & R4 \end{aligned}$$

*z.B. 2)  $x_2 = 0$   
 $2x_1 + x_2 = 8 \quad | :2$   
 $x_1 = 4$*

*Schlupf  
 $y_1$   
 $y_2$*

Verwenden Sie den naiven Algorithmus durch die folgenden Schritte. Am jeden Schritt ergänzen Sie die Tabelle unten.

- Für jede Kombination zweier Nebenbedingungen  $R1, \dots, R4$ . Bestimmen Sie den Schnittpunkt der entsprechenden Gleichungen.
- Bestimmen, ob der Eckpunkt zulässig ist.
- Rechnen Sie den Zielfunktionswert für die zulässigen Eckpunkte.
- Bestimmen Sie die optimale Lösung.

*R1  $x_1 + 2x_2 = 6$   
 $x_1 = 6 - 2x_2$   
 $x_1 = 6 - 8$   
 $x_1 = -2$   
 $x_1 = \frac{10}{3}$   
 R2  $2x_1 + x_2 = 8$   
 $12 - 4x_2 + x_2 = 8$   
 $-3x_2 = -4$   
 $x_2 = \frac{4}{3}$*

Bedingungen	Schnittpunkt $(x_1, x_2)$	Zulässig?	$Z(x, y)$
1 R3, R4	$(0, 0)$	ja	0
2 R2, R4	$(4, 0)$	ja	8
3 R1, R4	$(6, 0)$	nein	—
4 R2, R3	$(0, 8)$	nein	—
5 R1, R3	$(0, 3)$	ja	9
6 R1, R2	$(3, 4)$	ja	$10\frac{2}{3}$

*Zulässig?*

*$x_1, x_2$ -Wert  
 in allen R einsetzen  
 Bsp. R1, R4  
 $x_1$  f. R1 = 6  
 $x_2$  f. R4 = 0*

### Aufgabe 2 ★ LP in Normalform

- Zur LP in Aufgabe 1 fügen Sie die Schlupfvariablen  $y_1$  und  $y_2$  hinzu um die LP in Normalform zu stellen.
- Für jede Punkt aus der obigen Tabelle (sowohl zulässig als auch unzulässig) bestimmen Sie  $y_1$  und  $y_2$  und ergänzen Sie die folgende Tabelle. Stellen Sie sicher, dass genau zwei Werte von  $x_1, x_2, y_1$  und  $y_2$  gleich Null sind, und die nicht zulässige Punkte haben negativen Schlupf.

*Die optimale Lösung ist  
 $x_1^* = 3\frac{1}{3}, x_2^* = 1\frac{1}{3}, z^* = 10\frac{2}{3}$*

*$x_1, x_2$   
 in R2*

*$2 \cdot 6 + 0 = 12$*

*R2*

*$2x_1 + x_2 \leq 8$*

*$12 > 8$  daher ist Schnittpunkt  $6,0$  nicht zulässig*



$$y_1 = 6 - x_1 + 2x_2$$

$$y_2 = 8 - 2x_1 + x_2$$

$$y_1 = 6 - 4 + 0 = 2$$

$$y_2 = 8 - 2 \cdot 4 + 0 = 0$$

$$y_1 = 6 - 0 + 16 = 22$$

$$y_2 = 8 - 0 + 8 = 16$$

Bedingungen	Eckpunkt ( $x_1, x_2$ )	Schlupf $y_1, y_2$	Zulässig?
R3, R4	(0,0)	6, 8	X
R2, R4	(4,0)	2, 0	X
R1, R4	(6,0)	0, -4	-
R2, R3	(0,8)	-10, 0	-
R1, R3	(0,5)	0, 5	X
R1, R2	(3,4)	3, 0	✓

$$y_1 = 6 - 0 + 0$$

$$y_2 = 8 - 0 + 0$$

$$y_1 = 6 - 6 + 0 = 0$$

$$y_2 = 8 - 12 + 0 = -4$$

$$y_1 = 0, y_2 = 0$$

Bei der Optimierung ist  $slack = 0$

### Aufgabe 3 Anwendungsbeispiel: Damen- und Herrentiefel

Eine Stiefelfabrik herstellt Damen- und Herrentiefel. Für die nächste Produktionsperiode sind 10 000 Arbeitsstunden der Mitarbeiter und 2 000 Arbeitsstunden der Maschinen geplant. Dabei braucht ein Damentiefel 25 Std Verarbeitung und 6 Std Maschinenarbeit, und ein Herrentiefel 18 Std Verarbeitung und 3 Std Maschinenlaufzeit. Zur Verfügung steht insgesamt 200 000 cm<sup>2</sup> Leder. Ein Damentiefel benötigt 400 cm<sup>2</sup> und ein Herrentiefel 450 cm<sup>2</sup> Leder. Der Gewinn pro Damentiefel beträgt € 25 und pro Herrentiefel € 20.

- Fassen Sie die Produktionsdaten in der Tabelle zusammen.
- Geben Sie das LP in Grundform an.
- Geben Sie das LP in Normalform an.

Es ist nicht nötig die optimale Lösung zu finden. Diese werden Sie später im Kurs lösen.

	$x_1$ Damentiefel	$x_2$ Herrentiefel	Verfügbarkeit
Produktionszeit (Std)	25	18	10 000
Maschinenlaufzeit (Std)	6	3	2 000
Lederbedarf (cm <sup>2</sup> )	400	450	200 000
Gewinn (€)	25	20	

Grundform

$$\max z(x_1, x_2) = 25x_1 + 20x_2$$

$$R1 \quad 25x_1 + 18x_2 \leq 10.000$$

$$R2 \quad 6x_1 + 3x_2 \leq 2.000$$

$$R3 \quad 400x_1 + 450x_2 \leq 200.000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Produktionszeit  
in Std.  
Maschinenlaufzeit in Std  
Lederbedarf in cm<sup>2</sup>

## Normalform

$$\max z(x_1, x_2) = 25x_1 + 20x_2$$

$$\begin{array}{ll} R1 & 25x_1 + 18x_2 + y_1 = 10.000 \quad \text{Prod.zeit in Std} \\ R2 & 6x_1 + 3x_2 + y_2 = 2000 \quad \text{Geh. d. Maschine in Std} \\ R3 & 400x_1 + 450x_2 + y_3 = 200.000 \quad \text{Ladefäh. in cm}^2 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Unterschied zwischen Grundform und Normalform

Grundform	Normalform
lineare Ungleichung	lineare Gleichung enthält Schlupfvariable $y_n$