# Aufgabenblatt 11

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2023 Prof. Dr. Tim Downie

## IP: Schnittebenenverfahren *mit Lösungen*

**Aufgabe 1** ★

Lösen sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory.

$$\begin{aligned} \max Z(x_1,x_2) &= x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 6x_2 &\leqslant 36 \\ 3x_1 + 8x_2 &\leqslant 60 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Das Simplex Endtableau der LP-Relaxierung ist:

| Tab. 2 | | $y_2$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| $Z$ | 26.4 | 0.2 | 0.4 |
| $x_2$ | 4.8 | -0.1 | 0.3 |
| $x_1$ | 7.2 | 0.6 | -0.3 |

Hinweis: Welche Strukturvariable hat den größten Bruchanteil?
Sie brauchen insgesamt zwei Gomory-Schnitt-Iterationen.

*Erste Gomory Schnitt auf $x_2$: $-0.9y_2 - 0.3y_1 + s_1 = -0.8$*

| *Tab. G1* | | $y_2$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| $Z$ | 26.4 | 0.2 | 0.4 |
| $x_2$ | 4.8 | -0.1 | 0.3 |
| $x_1$ | 7.2 | 0.6 | -0.3 |
| $s_1$ | -0.8 | -0.9 | -0.3 |

| *Tab. G2* | | $s_1$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $26\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{9}$ |
| $x_2$ | $4\frac{8}{9}$ | $-\frac{1}{9}$ | $\frac{3}{9}$ |
| $x_1$ | $6\frac{6}{9}$ | $\frac{6}{9}$ | $-1$ |
| $y_2$ | $\frac{8}{9}$ | $-1\frac{1}{9}$ | $\frac{3}{9}$ |

*Die aktuelle Lösung ist nicht ganzzahlig: $z = 26\frac{2}{9}$, $x_1 = 6\frac{6}{9}$, $x_2 = 4\frac{8}{9}$, $y_2 = \frac{8}{9}$*

*2. Gomory Schnitt auf $x_2$: $-\frac{8}{9}s_1 - \frac{3}{9}y_1 + s_2 = -\frac{8}{9}$*

| *Tab. G3* | | $s_1$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $26\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{9}$ |
| $x_2$ | $4\frac{8}{9}$ | $-\frac{1}{9}$ | $\frac{3}{9}$ |
| $x_1$ | $6\frac{6}{9}$ | $\frac{6}{9}$ | $-1$ |
| $y_2$ | $\frac{8}{9}$ | $-1\frac{1}{9}$ | $\frac{3}{9}$ |
| $s_2$ | $-\frac{8}{9}$ | $-\frac{8}{9}$ | $-\frac{3}{9}$ |

| *Tab. G4* | | $s_2$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | 26 | 0.250 | 0.250 |
| $x_2$ | 5 | $-0.125$ | 0.375 |
| $x_1$ | 6 | 0.750 | $-1.250$ |
| $y_2$ | 2 | $-1.250$ | 0.750 |
| $s_1$ | 1 | $-1.125$ | 0.375 |

*Diese ist ganzzahlig. Optimale Lösung ist* $z^* = 26$, $x_1^* = 6$, $x_2^* = 5$, $y_2^* = 2$

**Aufgabe 2**
Lösen sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2) &= 5x_1 + 6x_2 \\
10x_1 + 3x_2 &\leqslant 52 \\
2x_1 + 3x_2 &\leqslant 18 \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Das Simplex-End-Tableau der LP-Relaxierung ist:

| Tab. 2 | | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $Z$ | $40\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $1\frac{7}{8}$ |
| $x_1$ | $4\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{8}$ |
| $x_2$ | $3\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ |

| *Tab. G1* | | *y1* | *y2* |
|---|---|---|---|
| *z* | *40.25* | *0.12* | *1.88* |
| *x1* | *4.25* | *0.12* | *-0.12* |
| *x2* | *3.17* | *-0.08* | *0.42* |
| *s1* | *-0.25* | *-0.12* | *-0.88* |

| *Tab. G2* | | *s1* | *y2* |
|---|---|---|---|
| *z* | *40* | *1* | *1* |
| *x1* | *4* | *1* | *-1* |
| *x2* | *3.33* | *-0.67* | *1* |
| *y1* | *2* | *-8* | *7* |

| Tab. G3 | | s1 | y2 |
|---|---|---|---|
| z | 40 | 1 | 1 |
| x1 | 4 | 1 | -1 |
| x2 | 3.33 | -0.67 | 1 |
| y1 | 2 | -8 | 7 |
| s2 | -0.33 | -0.33 | 0 |

| Tab. G4 | | s2 | y2 |
|---|---|---|---|
| z | 39 | 3 | 1 |
| x1 | 3 | 3 | -1 |
| x2 | 4 | -2 | 1 |
| y1 | 10 | -24 | 7 |
| s1 | 1 | -3 | -0 |

*Optimale Lösung ist* $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$, $z^* = 39$

**Aufgabe 3**

Lösen sie die IP (Zimmermann Ronny, Skript Beisp. 1.3, Seite 8) mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory.

$$\max Z(x_1, x_2) = 120x_1 + 80x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ 7x_1 + 8x_2 &\leqslant 28 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

| Tab. 2 | | y1 | y2 |
|---|---|---|---|
| z | 391.11 | 44.44 | 4.44 |
| x1 | 2.22 | 0.89 | -0.11 |
| x2 | 1.56 | -0.78 | 0.22 |

*Lösung der LP Relaxierung:* $x_1 = 2\frac{2}{9}$ *und* $x_2 = 1\frac{5}{9}$.

*1. Gomory Schnitt mit* $x_2$ *ist:* $s_1 - \frac{2}{9}y_1 - \frac{2}{9}y_2 = -\frac{5}{9}$

| Tab. G1 | | y1 | y2 |
|---|---|---|---|
| z | 391.11 | 44.44 | 4.44 |
| x1 | 2.22 | 0.89 | -0.11 |
| x2 | 1.56 | -0.78 | 0.22 |
| s1 | -0.56 | -0.22 | -0.22 |

| Tab. G2 | | y1 | s1 |
|---|---|---|---|
| z | 380 | 40 | 20 |
| x1 | 2.50 | 1 | -0.50 |
| x2 | 1 | -1 | 1 |
| y2 | 2.50 | 1 | -4.50 |

*Aktuelle Lösung* $x_1 = 2\frac{1}{2}$ *und* $x_2 = 1$.

*2. Gomory Schnitt mit* $x_1$ *ist:* $s_2 - 0y_1 - \frac{1}{2}s_1 = -\frac{1}{2}$

| Tab. G3 | | y1 | s1 |
|---|---|---|---|
| z | 380 | 40 | 20 |
| x1 | 2.50 | 1 | -0.50 |
| x2 | 1 | -1 | 1 |
| y2 | 2.50 | 1 | -4.50 |
| s2 | -0.50 | 0 | -0.50 |

| Tab. G4 | | y1 | s2 |
|---|---|---|---|
| z | 360 | 40 | 40 |
| x1 | 3 | 1 | -1 |
| x2 | 0 | -1 | 2 |
| y2 | 7 | 1 | -9 |
| s1 | 1 | -0 | -2 |

*Optimale IP Lösung ist* $x_1^* = 3$ *und* $x_2^* = 0$ *,* $z^* = 360$.

**Aufgabe 4**
Benutzen Sie Ihre Lösung aus Aufgabe 3, um alle Gomory-Schnitte als Ungleichungen mit Variablen $x_1$ und $x_2$ zu bestimmen. D.h. Geben Sie jeder Gomory-Schnitt in der Form $ax_1 + bx_2 \leqslant c$ an.

*Die Schlupfvariablen sind*

$$\begin{aligned} y_1 &= 6 - 2x_1 - x_2 \\ y_2 &= 28 - 7x_1 - 8x_2 \end{aligned}$$

*Aus Aufgabe 3: 1. GS*

$$\begin{aligned} s_1 - \frac{2}{9}y_1 - \frac{2}{9}y_2 &= -\frac{5}{9} \\ s_1 - \frac{2}{9}(6 - 2x_1 - x_2) - \frac{2}{9}(28 - 7x_1 - 8x_2) &= -\frac{5}{9} \\ s_1 - \frac{68}{9} + 2x_1 + 2x_2 &= -\frac{5}{9} \\ s_1 + 2x_1 + 2x_2 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 7 \end{aligned}$$

*2. GS*

$$\begin{aligned} s_2 - \frac{1}{2}s_1 &= -\frac{1}{2} \\ s_2 - \frac{1}{2}(7 - 2x_1 - 2x_2) &= -\frac{1}{2} \\ s_2 - \frac{7}{2} + x_1 + x_2 &= -\frac{1}{2} \\ s_2 + x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 3 \end{aligned}$$