# Operations Research
# Simplex Algorithmus

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

Folien für das Video der 4. Woche

Berliner Hochschule für Technik

# Inhalt

- Basisvariablen und Nichtbasisvariablen
- Lineare Gleichungssysteme einer LP
- Simplex Algorithmus - Methode des Gleichungssystems
- Aufgabe: Lösung in ein anderes Video

## Die Normalform eines LPs

Betrachten wir ein LP in der Grundform:

$$
\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & & \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n & \leqslant & b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n & \leqslant & b_2 \\
& \vdots & \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n & \leqslant & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n & \geqslant & 0.
\end{aligned}
$$

LP in **Normalform**:

Die **Schlupfvariablen** ergeben ein lineares Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + y_1 &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + y_2 &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + y_m &= b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m &\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Die Schlupfvariablen werden in der Zielfunktion mit 0 bewertet.

Aus dem Präsenzunterricht: Alle Eckpunkte des Beispiels:

Gewinn-Maximierung-LP

| Gleichungen | Eckpunkt $(x_1, x_2)$ | Schlupf $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | zulässig? | $Z(x_1, x_2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| R4 R5 | (0,0) | 6 | 7 | 18 | ✓ | 0 |
| R3 R5 | (6,0) | 6 | 1 | 0 | ✓ | 24 |
| R2 R5 | (7,0) | 6 | 0 | -3 | ✗ | — |
| R1 R5 | keine | – | – | – | — | — |
| R3 R4 | (0,9) | -3 | -2 | 0 | ✗ | — |
| R2 R4 | (0,7) | -1 | 0 | 4 | ✗ | — |
| R1 R4 | (0,6) | 0 | 1 | 6 | ✓ | 18 |
| R2 R3 | (4,3) | 3 | 0 | 0 | ✓ | 25 |
| R1 R3 | (2,6) | 0 | -1 | 0 | ✗ | — |
| R1 R2 | (1,6) | 0 | 0 | 3 | ✓ | 22 |

Bemerkungen:

- Jeder unzulässige Lösung hat mindestens einen negativen Schlupfwert.
- Jede zulässige Lösung hat genau 3 positive Werte und zwei Nullen in der erweiterte Koordinaten $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$
- Die 1. Zeile ist $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 6$, $y_2 = 7$, $y_3 = 18$ und ist zulässig. x-Werte sind Null und y-Werte sind die Restriktionswerte.

Eine Iteration des Simplex-Algorithmus tauscht eine Null Variable mit einer nicht null variable.

Die $m$ nicht-Null Einträge von $\boldsymbol{x}$ heißen **Basisvariablen** (BV).

Die $n$ Null Einträge von $\boldsymbol{x}$ heißen **Nichtbasisvariablen** (NBV).

Eine zulässige Lösung eines LPs in Normalform ist:
Alle Entscheidungsvariablen gleich Null und die Schlupfvariablen gleich die Restriktionswerte

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \qquad y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m$$

In dem Fall

alle Entscheidungsvariablen sind Nichtbasisvariablen und
alle Schlupfvariablen sind Basisvariablen.

# Der Simplex-Algorithmus: Methode des Gleichungssystems

Ein LP in Normalform lässt sich in Matrixform schreiben.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

$A$ ist eine $m \times (n+m)$ Matrix, $\boldsymbol{x}$ ist ein $(n+m)$-dim. Vektor und $\boldsymbol{b}$ ist ein $m$-dim. Vektor

Dies ist ein unterbestimmtes Lineares Gleichungssystem in $n+m$ Variablen und $m$ Gleichungen.

## Der Simplex-Algorithmus: Methode des Gleichungssystems

Ein LP in Normalform lässt sich in Matrixform schreiben.

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{1}$$

$A$ ist eine $m \times (n+m)$ Matrix, $\boldsymbol{x}$ ist ein $(n+m)$-dim. Vektor und
$\boldsymbol{b}$ ist ein $m$-dim. Vektor

Dies ist ein unterbestimmtes Lineares Gleichungssystem in $n+m$ Variablen und $m$ Gleichungen.

Wenn $n$ Einträge von $\boldsymbol{x}$ Null und $m$ Einträge nicht-Null sind, reduzierte (**??**) zu

$$A^{(0)}\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

wobei $A$ eine $m \times m$ Matrix ist und $\boldsymbol{x}$ ein $m$-Dim. Vektor ist.

Soweit $A^{(0)}$ eine singuläre Matrix ist hat Gleichung (**??**) eine eindeutige Lösung.

# Beispiel forts.

Die Gewinn-Maximierung-LP in Grundform:

$$\max Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Nach der Einführung der Schlupfvariablen ist die LP in Normalform:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_2 + y_1 &= 6 \\ x_1 + x_2 + y_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + y_3 &= 18 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Die Restriktionen lassen sich in Matrixform schreiben

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Eine gültige Lösung ist

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Die reduzierte $3 \times 3$ LGS ist

$$A^{(0)}\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{b}$$

mit

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Diese LGS hat eine eindeutige Lösung

## Eine Simplex-Iteration:

1) Die aktuelle Lösung besteht aus $m$ Basisvariablen und $n$ Nichtbasisvariablen, die die aktuelle Ecke bestimmen.
2) Die aktuelle Isozielwertgerade (Z-Wert) wird durch die Basisvariablen gelegt.

## Eine Simplex-Iteration:

1) Die aktuelle Lösung besteht aus *m* Basisvariablen und *n* Nichtbasisvariablen, die die aktuelle Ecke bestimmen.
2) Die aktuelle Isozielwertgerade (Z-Wert) wird durch die Basisvariablen gelegt.
3) Man tauscht eine Basisvariable mit eine Nichtbasisvariable, um eine benachbarte Ecke zu bestimmen, die den höchst möglichen Anstieg der Zielfunktion verspricht.

## Eine Simplex-Iteration:

1) Die aktuelle Lösung besteht aus *m* Basisvariablen und *n* Nichtbasisvariablen, die die aktuelle Ecke bestimmen.
2) Die aktuelle Isozielwertgerade (Z-Wert) wird durch die Basisvariablen gelegt.
3) Man tauscht eine Basisvariable mit eine Nichtbasisvariable, um eine benachbarte Ecke zu bestimmen, die den höchst möglichen Anstieg der Zielfunktion verspricht.
   Ist kein Anstieg mehr möglich, so **bricht das Verfahren ab**: die aktuelle Ecke liefert die optimale Lösung.

## Eine Simplex-Iteration:

1) Die aktuelle Lösung besteht aus *m* Basisvariablen und *n* Nichtbasisvariablen, die die aktuelle Ecke bestimmen.

2) Die aktuelle Isozielwertgerade (Z-Wert) wird durch die Basisvariablen gelegt.

3) Man tauscht eine Basisvariable mit eine Nichtbasisvariable, um eine benachbarte Ecke zu bestimmen, die den höchst möglichen Anstieg der Zielfunktion verspricht.
   Ist kein Anstieg mehr möglich, so **bricht das Verfahren ab**: die aktuelle Ecke liefert die optimale Lösung.

4) Als nächste Näherung der Optimallösung verschiebt man die Isozielwertgerade parallel durch die neue Ecke. Dabei findet ein *Eckentausch* bzw. ein Basiswechsel statt.

## Simplex Algorithmus - Methode des Gleichungssystems

### Beispiel (forts.)

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_2 + y_1 &= 6 \\ x_1 + x_2 + y_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + y_3 &= 18 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} z &= 0 + 4x_1 + 3x_2 \\ y_1 &= 6 - x_2 && \textbf{(I)} \\ y_2 &= 7 - x_1 - x_2 && \textbf{(II)} \\ y_3 &= 18 - 3x_1 - 2x_2 && \textbf{(III)} \end{aligned}$$

Die Zielfunktion bzw. die 3 Basisvariablen sind als Funktionen der Nichtbasisvariablen geschrieben. Die Nichtbasisvariablen sind gleich Null.

$\Rightarrow y_3 = 18 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 18$ usw.

Der Algorithmus startet in der Ecke $(0, 0)$.

## 1. Schritt

**A. Wahl der Eintrittsvariable** Der größte Zielfunktionskoeffizient ist 4, der zum $x_1$ gehört. $x_1$ verspricht einen größeren Zuwachs der Zielfunktion (per Einheit). Wir wählen $x_1$ als die Eintrittsvariable.

## 1. Schritt

**A. Wahl der Eintrittsvariable** Der größte Zielfunktionskoeffizient ist 4, der zum $x_1$ gehört. $x_1$ verspricht einen größeren Zuwachs der Zielfunktion (per Einheit). Wir wählen $x_1$ als die Eintrittsvariable.

**B. Wahl der Austrittsvariable:** Welche Variable verlässt nun die Basis? Die Eintrittsvariable $x_1$ tauscht jeweils mit der betreffenden Basisvariable und $x_2$ bleibt gleich 0.

- In (I) tritt $x_1$ gar nicht auf, kein Austausch ist möglich.
- In (II) tausche $x_1$ mit $y_2$, $\Rightarrow x_1 = 7$ und $y_2 = 0$.
- In (III) tausche $3x_1$ mit $y_3$, $\Rightarrow x_1 = 6$ und $y_3 = 0$.

Wenn $x_1$ tauscht mit $y_2$, ist $x_1 = 7$.

Problem: Gleichung **(III)** ist nun unzulässig

$y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2 = 18 - 3 \cdot 7 - 2 \cdot 0 = -3 < 0 \Rightarrow$ **unzulässig**, da $y_3 \geqslant 0$!

Wenn $x_1$ tauscht mit $y_2$, ist $x_1 = 7$.

Problem: Gleichung **(III)** ist nun unzulässig

$y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2 = 18 - 3 \cdot 7 - 2 \cdot 0 = -3 < 0 \Rightarrow$ **unzulässig**, da $y_3 \geqslant 0$!

Wenn $x_1$ tauscht mit $y_3$, ist $x_1 = 6$.

Entsprechend wird Gleichung **(II)**

$y_2 = 7 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 0 = 1 > 0 \Rightarrow$ zulässig.

Wenn $x_1$ tauscht mit $y_2$, ist $x_1 = 7$.

Problem: Gleichung **(III)** ist nun unzulässig

$y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2 = 18 - 3 \cdot 7 - 2 \cdot 0 = -3 < 0 \Rightarrow$ **unzulässig**, da $y_3 \geqslant 0$!

Wenn $x_1$ tauscht mit $y_3$, ist $x_1 = 6$.

Entsprechend wird Gleichung **(II)**

$y_2 = 7 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 0 = 1 > 0 \Rightarrow$ zulässig.

$x_1$ kann nicht mit $y_1$ tauschen.

Wenn $x_1$ tauscht mit $y_2$, ist $x_1 = 7$.

Problem: Gleichung **(III)** ist nun unzulässig

$y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2 = 18 - 3 \cdot 7 - 2 \cdot 0 = -3 < 0 \Rightarrow$ **unzulässig**, da $y_3 \geqslant 0$!

Wenn $x_1$ tauscht mit $y_3$, ist $x_1 = 6$.

Entsprechend wird Gleichung **(II)**

$y_2 = 7 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 0 = 1 > 0 \Rightarrow$ zulässig.

$x_1$ kann nicht mit $y_1$ tauschen.

**Austrittsvariable Entscheidungsregel:**

Man wählt als Austrittsvariable die Basisvariable, die den kleinsten wert von $x_1$ ergibt. Größere Werte entsprechen eine unzulässig Lösung.

Die zugehörige Schlupfvariable $y_3$ wird auf Null gesetzt.

$\Rightarrow$ $y_3$ verlässt die Basis.

## C. Umrechnung des Gleichungssystems:

Die Variable $x_1$ und $y_3$ tauschen ihre Plätze in der Gleichung (III).

Alle anderen Restriktionen müssen umgeformt werden, damit die rechte Seiten nur Nicht-Basis-Variablen umfassen.

**Gleichung (III)** $\quad y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2$

## C. Umrechnung des Gleichungssystems:

Die Variable $x_1$ und $y_3$ tauschen ihre Plätze in der Gleichung (III).

Alle anderen Restriktionen müssen umgeformt werden, damit die rechte Seiten nur Nicht-Basis-Variablen umfassen.

| | | |
|---|---|---|
| **Gleichung (III)** | $y_3$ | $= 18 - 3x_1 - 2x_2$ |
| **Umformen** | $x_1$ | $= 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2$ |

## C. Umrechnung des Gleichungssystems:

Die Variable $x_1$ und $y_3$ tauschen ihre Plätze in der Gleichung (III).

Alle anderen Restriktionen müssen umgeformt werden, damit die rechte Seiten nur Nicht-Basis-Variablen umfassen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Gleichung (III)** | $y_3$ | $= 18 - 3x_1 - 2x_2$ | |
| **Umformen** | $x_1$ | $= 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2$ | |
| **Ersetzen** | $Z$ | $= 0 + 4(6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2) + 3x_2$ | **(Z)** |
| | $y_1$ | $= 6 - x_2$ | **(I)** |
| | $y_2$ | $= 7 - (6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2) - x_2$ | **(II)** |
| | $x_1$ | $= 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2$ | von oben **(III)** |

## C. Umrechnung des Gleichungssystems:

Die Variable $x_1$ und $y_3$ tauschen ihre Plätze in der Gleichung (III).

Alle anderen Restriktionen müssen umgeformt werden, damit die rechte Seiten nur Nicht-Basis-Variablen umfassen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Gleichung (III)** | $y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2$ | | |
| **Umformen** | $x_1 = 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2$ | | |
| **Ersetzen** | $Z = 0 + 4(6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2) + 3x_2$ | | **(Z)** |
| | $y_1 = 6 - x_2$ | | **(I)** |
| | $y_2 = 7 - (6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2) - x_2$ | | **(II)** |
| | $x_1 = 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2$ | von oben | **(III)** |
| **Vereinfachen** | $Z = 24 - \frac{4}{3}y_3 + \frac{1}{3}x_2$ | | **(Z)** |
| | $y_1 = 6 - x_2$ | | **(I)** |
| | $y_2 = 1 + \frac{1}{3}y_3 - \frac{1}{3}x_2$ | | **(II)** |
| | $x_1 = 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}x_2$ | | **(III)** |

1.Schritt: Tausch in die Ecke $(6, 0)$.

## 2. Schritt

**A. Wahl der Eintrittsvariable** Da $y_3$ einen negativen Koeffizienten in der Zielfunktion besitzt, erhalten wir einen kleineren $Z$-Wert für positive $y_3$.

Da $x_2$ einen positiven Koeffizienten hat, erhalten wir einen größeren $Z$-Wert für positive $x_2$. $x_2$ ist die Eintrittsvariable.

## 2. Schritt

**A. Wahl der Eintrittsvariable** Da $y_3$ einen negativen Koeffizienten in der Zielfunktion besitzt, erhalten wir einen kleineren $Z$-Wert für positive $y_3$.

Da $x_2$ einen positiven Koeffizienten hat, erhalten wir einen größeren $Z$-Wert für positive $x_2$. $x_2$ ist die Eintrittsvariable.

**B. Wahl der Austrittsvariable:** Welche Variable verlässt nun die Basis? $x_2$ tauscht jeweils mit der betreffenden Basisvariable und $y_3$ bleibt gleich 0.

- In (I) $x_2 = 6$ tauscht mit $y_1 \Rightarrow y_2 = -1$. **unzulässig!**
- In (II) $\frac{1}{3}x_2$ tauscht mit $y_2 = 1$
  $\Rightarrow \frac{1}{3}x_2 = 3$. Diese ist zulässig.
- In (III) $\frac{2}{3}x_2$ tauscht mit $x_1$
  $\Rightarrow x_2 = 9$ tauscht mit $x_1 \Rightarrow y_1 = -3$. **unzulässig!**

Die Austrittsvariable ist die Basisvariable, die den kleinsten wert von $x_2$ ergibt.

**C. Umrechnung des Gleichungssystems**:

Die Variable $x_2$ und $y_2$ tauschen ihre Plätze.

Alle anderen Restriktionen müssen umgeformt werden.

| | | |
|---|---|---|
| **Gleichung (II)** | $y_2$ | $= 1 + \frac{1}{3}y_3 - \frac{1}{3}x_2$ |
| **Umformen** | $x_2$ | $= 3 + y_3 - 3y_2$ |

## C. Umrechnung des Gleichungssystems:

Die Variable $x_2$ und $y_2$ tauschen ihre Plätze.

Alle anderen Restriktionen müssen umgeformt werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Gleichung (II)** | $y_2 = 1 + \frac{1}{3}y_3 - \frac{1}{3}x_2$ | | |
| **Umformen** | $x_2 = 3 + y_3 - 3y_2$ | | |
| **Ersetzen** | $Z = 24 - \frac{4}{3}y_3 - \frac{1}{3}(3 + y_3 - 3y_2)$ | **(Z)** |
| | $y_1 = 6 - (3 + y_3 - 3y_2)$ | **(I)** |
| | $x_2 = 3 + y_3 - 3y_2$ | von oben **(II)** |
| | $x_1 = 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}(3 + y_3 - 3y_2)$ | **(III)** |

## C. Umrechnung des Gleichungssystems:

Die Variable $x_2$ und $y_2$ tauschen ihre Plätze.

Alle anderen Restriktionen müssen umgeformt werden.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Gleichung (II)** | $y_2$ | $= 1 + \frac{1}{3}y_3 - \frac{1}{3}x_2$ | |
| **Umformen** | $x_2$ | $= 3 + y_3 - 3y_2$ | |
| **Ersetzen** | $Z$ | $= 24 - \frac{4}{3}y_3 - \frac{1}{3}(3 + y_3 - 3y_2)$ | **(Z)** |
| | $y_1$ | $= 6 - (3 + y_3 - 3y_2)$ | **(I)** |
| | $x_2$ | $= 3 + y_3 - 3y_2$ | von oben **(II)** |
| | $x_1$ | $= 6 - \frac{1}{3}y_3 - \frac{2}{3}(3 + y_3 - 3y_2)$ | **(III)** |
| **Vereinfachen** | $Z$ | $= 25 - y_3 - y_2$ | **(Z)** |
| | $y_1$ | $= 3 - y_3 + 3y_2$ | **(I)** |
| | $x_2$ | $= 3 + y_3 - 3y_2$ | **(II)** |
| | $x_1$ | $= 4 - y_3 + 2y_2$ | **(III)** |

Die aktuelle Zielfunktion ist

$$Z = 25 - y_3 - y_2$$

Wenn $y_2 > 0$, wird $Z$ kleiner

Wenn $y_3 > 0$, wird $Z$ kleiner.

Alle Koeffizienten in der Zielfunktion besitzen ein negatives Vorzeichen.

Wir können keine bessere Lösung finden.

**Ende des Verfahrens**

Die optimale Lösung ist:

$Z^* = 25$ mit $x_1^* = 4$ , $x_2^* = 3$, $y_1^* = 3$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 0$.

2.Schritt: Tausch in die Ecke $(4, 3)$.

# Zusammenfassung

## Simplex-Algorithmus - Methode des Gleichungssysteme

(a) Stelle die LP mit $z$ bzw. die Basisvariablen als Funktionen der Nichtbasisvariablen.

(b) Wähle den größten positiven Koeffizient der Zielfunktion als Eintrittsvariable

(c) Für jede Restriktion berechne den neuen Wert der Eintrittsvariable. Die Gleichung, die der kleinste Wert ergibt, bestimmt die Austrittsvariable.

(d) Wechsele die Austrittsvariable und der Eintrittsvariable, damit nur NBV auf der rechten Seite stehen.

(e) Vereinfache jede Gleichung

(f) Falls es noch ein positiven Koeffizienten in der Zielfunktion gebe, wiederhole Schritte (b) bis (e).

(g) Wenn alle Koeffizienten in der Zielfunktion negativ sind, lese die optimale Lösung ab.

# Aufgabe: Simplex-Algorithmus - Methode des GS

$$\max Z(x, y) = 2x_1 + 3x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqslant 9 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Stellen Sie die LP in Normalform und Lösen Sie sie durch die Methode des Gleichungssystems.