Operations Research
Simplex Algorithmus: tabellarisches Verfahren

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

Zweite Präsenzzeit 6. Mai 2022

Version: 3. Mai 2022

Aktueller Stand

Linear Programmierung (LP) in Grundform und Normalform

Letzte Präsenzzeit: Naiver Algorithmus
Einsendeaufgabe: Grafische Lösung

Letzte Woche, Video-Unterricht: Der Simplex-Algorithmus, Methode des Gleichungssystem.

+ Findet die Optimale Lösung in wenigeren Schritten.
+ Deutlich zeigt die geometrische Darstellung jeder Lösung
- Ist mathematisch aufwendig.

Heute lernen Sie ein **tabellarisches Verfahren** des Simplex-Algorithmus, das die Methode des Gleichungssystem folgt, aber ist schneller anzuwenden. Es lohnt sich ein paar Regeln zu lernen damit Sie können die optimale Lösung schnell finden....

Beispiel

Nochmal die Gewinn-Maximierung-LP in Grundform:

$$\max Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Der Simplex-Algorithmus

Die Idee des Simplex-Algorithmus:

- Der Ausgangspunkt ist der Ursprung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
- Wähle einen Nachbarpunkt — tausche eine Basisvariable mit einer Nichtbasisvariable aus.
- Umforme das Gleichungssystem, um die neue Basis zu bestimmen.
- Wiederhole, bis keine bessere Nachbarpunkt sich finden lässt.

Beide Verfahren folgen laufen durch die gleiche Eckpunkte bis den optimalen Punkt gefunden wird. Nur die Darstellung ist anders.

Simplex Algorithmus: tabellarisches Verfahren

Die Iterationssschritte des Algorithmus werden in Gestalt von **Tableaus** durchgeführt.

Das Starttableau besteht aus dem folgenden Gleichungssystem, dessen erste Gleichung der Zielfunktion des LPs entspricht.

$$\begin{aligned}
-c_1x_1 - \ c_2x_2 - \cdots - \ c_nx_n + \boldsymbol{Z} &= 0 \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \boldsymbol{y_1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \boldsymbol{y_2} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \boldsymbol{y_m} &= b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Z	0	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_n$
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Wir starten mit der Iteration im Nullpunkt: alle Strukturvariablen x_i sind Nichtbasisvariablen.

0. Schritt

Um die Zahlen in Tableau nachvollziehen zu können, stellen wir die Gleichungen so um, dass links die Basisvariablen und rechts die Nichtbasisvariablen stehen.

$$
\begin{aligned}
Z - 4x_1 - 3x_2 &= 0 \\
y_1 + x_2 &= 6 \qquad \text{(I)} \\
y_2 + x_1 + x_2 &= 7 \qquad \text{(II)} \\
y_3 + 3x_1 + 2x_2 &= 18 \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-4	-3
y_1	6	0	1
y_2	7	1	1
y_3	18	3	2

1. Schritt

A. Wahl der Pivotspalte[1]: x_1 ist der größte negative NBV-Wert in der Z-Zeile, d.h. x_1 verspricht einen größeren Zuwachs der Zielfunktion (per Einheit). Entscheiden wir, dass diese Variable in die Basis wechselt.

[1] Pivot - Dreh und Angelpunkt

B. Wahl der Pivotzeile: Welche Variable verlässt nun die Basis? Wie weit kann x_1 wachsen, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen? Dabei gilt: $x_2 = 0$ und $y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$.

- In (I) tritt x_1 gar nicht auf.
- In (II) kann x_1 maximal 7 werden.
- In (III) kann x_1 maximal 6 werden.

Aus (II) und (III) folgt:

$$\begin{array}{rl} \text{(II)} & y_2 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 7 - x_1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 \leqslant 7 \\ \text{(III)} & y_3 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; 18 - 3x_1 \geqslant 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 \leqslant 6 \end{array}$$

Die dritte Gleichung begrenzt die Wachstumsmöglichkeiten von x_1 auf 6, indem die zugehörige Schlupfvariable y_3 auf Null gesetzt wird. y_3 verlässt die Basis.

Der schnellste Weg die Pivotzeile zu bestimmen ist das Verhältnis zwischen der Lösungsspalte und Pivotspalte rechts von der Tabelle zu notieren.
Diese werte heißen informell Theta-Werte.
Wähle den kleinsten positiven Theta-Wert.

Tab. 0		x_1	x_2	θ
Z	0	-4	-3	
y_1	6	0	1	$\frac{6}{0} = \infty$
y_2	7	1	1	$\frac{7}{1} = 7$
y_3	18	3	2	$\frac{18}{3} = 6 \rightarrow$
		$\uparrow$		

C. Umrechnung der Tableau-Koeffizienten

Die Umrechnung im Tableau funktioniert wie folgt:

- Die Variable x_1 und y_3 tauschen ihre Plätze. Aus Gleichung (III)

$$y_3 + 3x_1 + 2x_2 = 18 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{2}{3}x_2 = 6$$

- x_1 in (Z), (I) und (II) ist durch

$$-\tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2 + 6$$

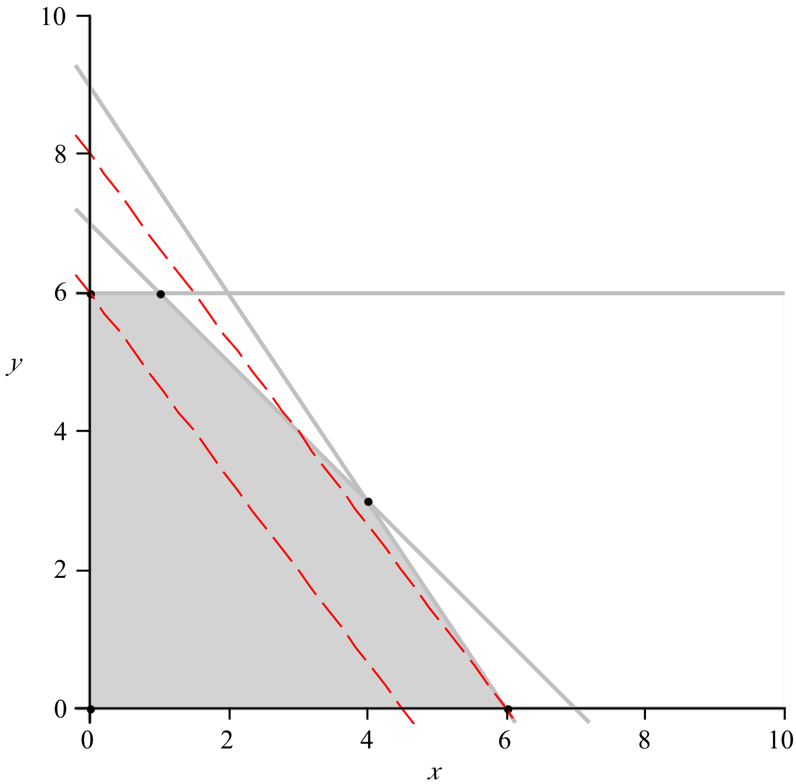
  ersetzt.
- Damit werden die Werte aller Koeffizienten im Tableau umgerechnet.

$$\begin{aligned}
Z + \tfrac{4}{3}y_3 - \tfrac{1}{3}x_2 &= 24 \\
y_1 + x_2 &= 6 \qquad \text{(I)} \\
y_2 - \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{1}{3}x_2 &= 1 \qquad \text{(II)} \\
x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{2}{3}x_2 &= 6 \qquad \text{(III)}
\end{aligned}$$

Tab. 1		$\boldsymbol{y_3}$	x_2
Z	24	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_1	6	0	1
y_2	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\boldsymbol{x_1}$	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$
\begin{aligned}
Z + \tfrac{4}{3}y_3 - \tfrac{1}{3}x_2 &= 24 \\
y_1 + x_2 &= 6 \qquad \text{(I)} \\
y_2 - \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{1}{3}x_2 &= 1 \qquad \text{(II)} \\
x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{2}{3}x_2 &= 6 \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Tab. 1		$\mathbf{y_3}$	x_2
Z	24	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_1	6	0	1
y_2	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\mathbf{x_1}$	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$



1.Schritt: Tausch in die Ecke $(6, 0)$.

2. Schritt

A. Wahl der Pivotspalte: Wir erhalten einen höheren Zielfunktionswert (Z) nur dann, wenn wir den Wert der Variable x_2 erhöhen (wegen des negativen Zielfunktionskoeffizienten). x_2 wechselt in die Basis.

B. Wahl der Pivotzeile: Welche Variable verlässt nun die Basis? Wie weit kann x_2 wachsen, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen? Dabei gilt: $y_3 = 0$ und $y_1, y_2, x_1 \geqslant 0$.

- In (I) kann x_2 maximal 6 werden.
- In (II) kann x_2 maximal 3 werden.
- In (III) kann x_2 maximal 9 werden.

Die zweite Gleichung begrenzt das Wachstum von x_2. y_2 wird auf Null gesetzt und damit verlässt die Basis.

C. Umrechnung der Tableau-Koeffizienten:

1) Die Variable x_2 und y_2 tauschen ihre Plätze.
2) Die Werte aller Koeffizienten im Tableau werden umgerechnet. Hierzu wird das Gleichungssystem wieder so umgestellt, dass links die Nichtbasisvariable steht und rechts nur die Basisvariablen. Zuerst stellen wir die Gleichung um, wo x_2 und y_2 (die Variablen die die Plätze getauscht haben) beide vorkommen, also die Gleichung (II). Und dann ersetzen wir x_2 in allen übrigen Gleichungen.

$$
\begin{aligned}
Z + y_3 + y_2 &= 25 & \\
y_1 + y_3 - 3y_2 &= 3 & \text{(I)} \\
x_2 - y_3 + 3y_2 &= 3 & \text{(II)} \\
x_1 + y_3 - 2y_2 &= 4 & \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Tab. 2		y_3	$\boldsymbol{y_2}$
Z	25	1	1
y_1	3	1	-3
$\boldsymbol{x_2}$	3	-1	3
x_1	4	1	-2

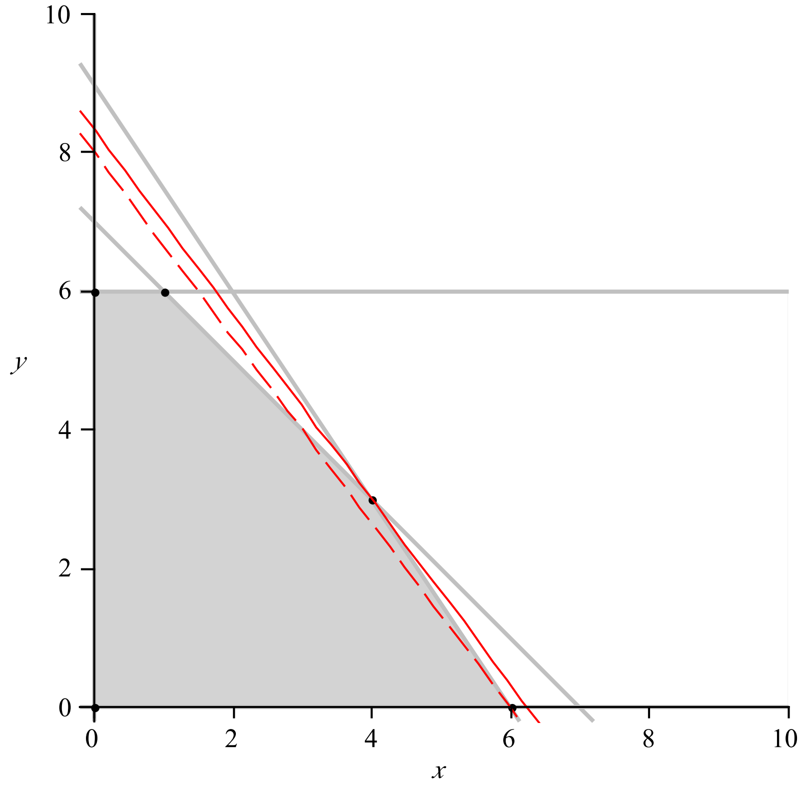
Alle NBV-Einträge in der Z Zeile sind positiv. Es gibt keine weitere Eintrittsvariable.

Ende des Verfahrens

$Z^* = 25$ mit $x_1^* = 4$, $x_2^* = 3$.

Interpretation des Endtableaus

- $z^* = 25$.
- Strukturvariablen in der Spalte 0: optimale Lösung $x_1^* = 4$, $x_2^* = 3$.
- Die Schlupfvariablen y_1 in der Spalte 0 zeigt nicht Null Schlupf.
  $y_1 = 3$ bedeutet, es bleiben 3 freie Stunden an Kapazität der Maschine A übrig.
- Schlupfvariablen unter den Nichtbasisvariablen: Welche Ecke welcher Restriktionen befindet sich die optimale Lösung:
  Maschine B und C werden voll ausgelastet.
- Die Werte in der Zeile 0, die zur Schlupfvariablen gehören, stellen deren *Schattenpreise*.



2.Schritt: Tausch in die Ecke $(4, 3)$.

Im Skript Seiten 37 & 38 finden Sie ein algorithmischer Zusammenfassung der tabellarischen Verfahren.

Viel Einfacher ist durch eine verbale Erklärung
Beispiel: Eine LP in Normalform

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere } z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Unter} \quad & x_1 + 3x_2 + y_1 = 9 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 12 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Tafelarbeit

Anmerkung

Es gibt kleine Varianten vom Tabellenformat.

Viele Bücher und Webseite benutzen eine „erweiterte Form“ der Tabelle

Tab. 0	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Lösung
y_1	4	1	1	0	0	7
y_2	1	1	0	1	0	4
y_3	3	2	0	0	1	18
Z	-4	-3	0	0	0	0

Tab. 2	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Lösung
y_1	0	0	1	-3	1	3
x_2	0	1	0	3	-1	3
x_1	1	0	0	-2	1	4
Z	0	0	0	1	1	25

Die erweiterte Form ist aufwendiger, aber sie übermittelt keine weitere Information.

Es ist ein klein bisschen einfacher zu programmieren.

Das Skript benutzt die kompakte Form, für mehrere LP-Themen.

Sie dürfen die erweiterte Form anwenden, aber dann ist es Ihre Verantwortung, die anderen Themen in die erweiterte Form zu „übersetzen“.

Aufgabe: Simplex-Algorithmus tabellarisches Verfahren

$$\max Z(x, y) = 2x_1 + 3x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqslant 9 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Stellen Sie die LP in Normalform und Lösen Sie sie mit Hilfe der tabellarischen Methode.

Aufgabenblatt 5:
Am besten finden Sie Zeit an den Tagen direkt nach der Präsenzzeit (6.-9.04.2016), um die Aufgaben zu bearbeiten.

Zusammenfassung

Seit dem Semesteranfang haben Sie vier Methoden um eine LP in Grundform zu lösen:

Grafisch Einfach zu verstehen. Nur für LP mit 2 Strukturvariablen, benötigt ein gutes Darstellung der zulässigen Bereich, schwierig mit viele Restriktionen

Naiver Algorithmus Ineffizient: Man muss viele Eckpunkte bestimmen.

Simplex-Algorithmus: Gleichungssystem Findet schnell die Optimale Lösung, erklärt die geometrische Darstellung, ist mathematisch aufwendig.

Simplex-Algorithmus: tabellarisches Verfahren Schnell anzuwenden, einfach zu Programmieren, Black-Box-Verfahren.

Kommende Wochen

- 2. Präsenzzeit: 6. Mai (heute)
- Aufgabenblatt 5: 6.-10. Mai
- Unterrichtswoche 6: 10-17. Mai
- Nächste Präsenzzeit: Freitag 20. Mai um 14:15
- **2. Einsendeaufgabe**: 24.-31. Mai

...