

Aufgabenblatt 9

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2023

Prof. Dr. Tim Downie

Sensitivitätsanalyse: Änderung zu einem Restriktionswert

mit Lösungen

Aufgabe 1

Die Simplex-Algorithmus-Tableaus des folgenden LPs sind unten gegeben.

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\ &\text{unter} && 4x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3 = b_1 \\ &&& x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 = b_2 \\ &&& 2x_2 + x_2 - x_3 \leq 10 = b_3 \\ &&& x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2	x_3
z	0	-2	3	-4
y_1	3	4	-3	1
y_2	10	1	1	1
y_3	10	2	1	-1

Tab. 1		x_1	x_2	y_1
z	12	14	-9	4
x_3	3	4	-3	1
y_2	7	-3	4	-1
y_3	13	6	-2	1

Tab. 2		x_1	y_2	y_1
z	27.75	7.25	2.25	1.75
x_3	8.25	1.75	0.75	0.25
x_2	1.75	-0.75	0.25	-0.25
y_3	16.5	4.5	0.5	0.5

- (a) Was sind die Schattenpreise für i) b_1 ii) b_2 und iii) b_3 ?
 Tipp: Sie können diese direkt aus Tab. 2 ablesen.
- (b) Bestimmen Sie Tab. 2, im Fall $b_1 = 3.1$.
- (c) Bestimmen Sie Tab. 2, wenn $b_1 = 3 + \Delta$.
- (d) Bestimmen Sie den Wertbereich für Δ , in dem die gleiche Basislösung optimal ist.
- (e) Bestimmen Sie den Wertbereich für b_1 , in dem die gleiche Basislösung optimal ist.
- (f) Bestimmen Sie den Wertbereich für b_2 , in dem die gleiche Basislösung optimal ist.

a) Ablese die Schattenpreise direkt vom Endtableau

Restriktion	Schattenpreis
1	1.75
2	2.25
3	0 (unverbindlich)

b) $b_1 = 3.1$ statt 3.

Nur die Lösungsspalten ändert sich

	Lösungsspalte		
Zeile	Tab. 0	Tab. 1	Tab 2.
0	0	12.4	27.925
1	3.1	3.1	8.725
2	10	6.9	1.725
3	10	13.1	16.55

Beispiel der Nebenrechnung: Z-Wert in
 Tab. 2. ist $12.4 - \frac{(6.9) \cdot (-9)}{4} = 27.925$

c) Für $b_1 = 3 + \Delta$

	Lösungsspalte		
Zeile	Tab. 0	Tab. 1	Tab 2.
0	0	$12 + 4\Delta$	$27.75 + 1.75\Delta$
1	$3 + \Delta$	$3 + \Delta$	$8.25 + 0.25\Delta$
2	10	$7 - \Delta$	$1.75 - 0.25\Delta$
3	10	$13 + \Delta$	$16.5 + 0.5\Delta$

d) Benötigt ist $33 + \Delta \geq 0$, $7 - \Delta \geq 0$ und $33 + \Delta \geq 0$.
 Ergibt $-33 \leq \Delta \leq 7$,

e) Wenn $\Delta = -33$, ist der Restriktionswert $b_1 = 3 + \Delta = -30$

Wenn $\Delta = 7$, ist der Restriktionswert $b_1 = 3 + \Delta = 10$

Das Intervall für b_i , in dem die gleiche Basislösung optimal ist, ist $-30 \leq b_1 \leq 10$.

f) Für $b_2 = 10 + \Delta$ ist die Tab. 2 Lösungsspalte

Zeile	Tab 2.
0	$27.75 + 2.25\Delta$
1	$8.25 + 0.75\Delta$
2	$1.75 + 0.25\Delta$
3	$16.5 + 0.5\Delta$

Das Intervall für Δ ist: $\Delta \geq -7$ (unbeschränkt nach oben).

Das Intervall für Δ ist: $b_2 \geq 3$

(nicht befragt) Lösung für $b_3 = 10 + \Delta$. Die Lösungsspalte in Tab. 2 ist:

Zeile	Tab 2.
0	27.75
1	8.25
2	1.75
3	$16.5 + \Delta$

$-16.5 \leq \Delta$ d.h. $b_3 \geq -6.5$

Aufgabe 2 Uhrenhersteller

Zurück zum Uhrenherstellerbeispiel.

x_1 =Anzahl der Standarduhren , x_2 =Anzahl der Wecker,

$$\max Z(x_1, x_2) = 3x_1 + 8x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 1600 && \text{Arbeiter Stunden} \\ 6x_1 + 2x_2 &\leq 1800 && \text{Herstellungsstunden} \\ x_2 &\leq 350 && \text{Alarmbauteil} \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Tabellen des Simplex-Algorithmus sind

Tab. 0		x_1	x_2
z	0	-3	-8
y_1	1600	2	4
y_2	1800	6	2
y_3	350	0	1

Tab. 1		x_1	y_3
z	2800	-3	8
y_1	200	2	-4
y_2	1100	6	-2
x_2	350	0	1

Tab. 2		y_1	y_3
z	3100	1.5	2
x_1	100	0.5	-2
y_2	500	-3	10
x_2	350	0	1

Optimale Lösung ist $x_1^* = 100$, $x_2^* = 350$, $z^* = 3100$

- (a) Finden Sie, wie viele Alarmbauteile benötigt würden, damit die Alarmbauteil-Restriktion nicht mehr verbindlich wäre?

	<i>Lösungsspalte</i>		
<i>Zeile</i>	<i>Tab. 0</i>	<i>Tab. 1</i>	<i>Tab 2.</i>
0	0	$2800 + 8\Delta$	$3100 + 2\Delta$
1	1600	$200 - 4\Delta$	$100 - 2\Delta$
2	1800	$1100 - 2\Delta$	$500 + 10\Delta$
3	$350 + \Delta$	$350 + \Delta$	$350 + \Delta$

Zeile 1: $\Delta \geq -50$, *Zeile 2:* $\Delta \leq 50$, *Zeile 3:* $\Delta \geq -350$.

Wenn $\Delta \in [-50, 50]$ bekommen wir die gleiche Basislösung, d.h. $b_3 \in [300, 400]$.

Wenn es mehr als 400 Alarmbauteile gibt, ist diese Restriktion nicht mehr verbindlich.