Operations Research
Naive Algorithmus

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

Erste Präsenszeit 22. April 2022

Version: 27. April 2022

Naive Algorithmus

Sie lernen heute:

- Naive Algorithmus: Ein Optimierungsverfahren einer linearen Programmierung (LP)
- Schlupfvariablen und LP in Normalform

Überblick

In der 2. Woche haben Sie die grafische Lösung einer LP gelernt.

Es gibt zwei Schwachstellen mit dieser Vorgehensweise:

- Grafische Verfahren sind schwierig zu automatisieren, und kann empfindlich zur Genauigkeit des Diagramms sein.
- Es geht nur mit zwei Strukturvariabeln.

Wir lernen in der nächsten Wochen zwei Verfahren, die lässt sich mit einem Rechner lösen.

Diese Woche: Der naive Algorithmus

Nächste Woche: Der Simplex-Algorithmus.

Wiederholung: Das LP-Grundmodell

Lineare Optimierung: wichtigstes Teil im OR. Auch **lineare Programmierung** (LP) genannt.

Das *Grundmodell* einer linearen Programmierung (oder LP in Grundform) hat die folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant & b_2 \\
&\vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geqslant & 0.
\end{aligned}
$$

Fachvokabular

Die Zielfunktion ist eine lineare Funktion in der
Strukturvariablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (auch Entscheidungsvariablen)

Zielfunktionskoeffizienten: $c_1, c_2, \ldots, c_n$

Die **Restriktionen** eines LPs sind *lineare* Ungleichungen in $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Technische Koeffizienten: a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$

Restriktionswerte $b_1, b_2, \ldots, b_n$

Alle Koeffizienten sind *bekannte* reelle Werte.

Die Strukturvariablen im *Grundmodell* eines LPs müssen **nicht negativ** sein.

Restriktionen und Nichtnegativitätsbedingungen = **Nebenbedigungen**.

Der naive Algorithmus

Satz
Eine lineare Funktion, die auf einem konvexen Polyeder definiert ist, nimmt ihr Optimum in mindestens einem Eckpunkt des Polyeders an.

Beweis ohne.

Folgersatz
Der zulässige Bereich einer LP ist ein konvexes Polyeder mit endlich vielen Ecken.

$\Rightarrow$ Die Zielfunktion nimmt ihr Maximum in einer Ecke des zulässigen Bereiches an.

$\Rightarrow$ „reicht es” alle Ecken des zulässigen Bereichs zu überprüfen, um eine Optimale Lösung eines LPs zu bestimmen.

Wir betrachten zunächst ein Beispiel mit zwei Strukturvariablen aus der 2. Woche, damit wir das Verfahren grafisch folgen können.

Beispiel 2.5: Gewinnmaximierung in der Produktion (aus der 2. Woche)
Gegeben seien folgende Produktionsbedingungen von zwei Artikeltypen. Der Gewinn soll maximiert werden.

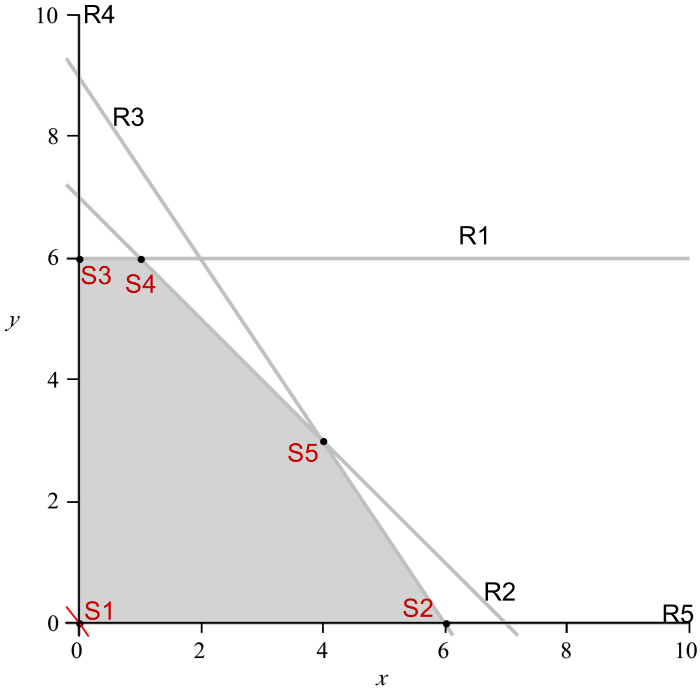
	Typ 1	Typ 2	Verfügbarkeit
Maschine A	0	1	6h
Maschine B	1	1	7h
Maschine C	3	2	18h
Gewinn	4 €	3 €	

$$\max Z(x, y) = 4x + 3y$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} y &\leqslant 6 \\ x + y &\leqslant 7 \\ 3x + 2y &\leqslant 18 \\ x, y &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Der zulässige Bereich ist



Wir bestimmen alle Eckpunkte des zulässigen Bereiches.

Zunächst: Ersetze alle Ungleichungen der Nebenbedingung durch Gleichungen.

$$y = 6 \tag{R1}$$

$$x + y = 7 \tag{R2}$$

$$3x + 2y = 18 \tag{R3}$$

$$x = 0 \tag{R4}$$

$$y = 0. \tag{R5}$$

Wir fangen mit dem Ursprung S1 an, der der Schnittpunkt zwischen R4 und R5 ist

$\Rightarrow x = 0$ und $y = 0$.

$Z(x, y) = 4x + 3y = 0$

Wir setzen fort mit S2:

Der Schnittpunkt zwischen R3 und R5 $\Rightarrow x = 6$ und $y = 0$.

$Z(x,y) = 4x + 3y = 24$

S3: Der Schnittpunkt zwischen R1 und R4 $\Rightarrow x = 0$ und $y = 6$.

$Z(x,y) = 4x + 3y = 18$

S4: Der Schnittpunkt zwischen R1 und R2 $\Rightarrow x = 1$ und $y = 6$.

$Z(x,y) = 4x + 3y = 22$

S5: Der Schnittpunkt zwischen R2 und R3

$$\begin{aligned}
& x + y = 7 && \text{(R2)} \\
\Rightarrow \quad & y = 7 - x && \\
& 3x + 2y = 18 && \text{(R3)} \\
\Rightarrow \quad & x + 14 = 18 && \\
\Rightarrow \quad & x = 4 && \Rightarrow \quad y = 3
\end{aligned}$$

$Z(x,y) = 4x + 3y = 25$

Wir haben alle Eckpunkte des zulässigen Bereiches gefunden und der größte z-Wert ist 25.

Die Optimale Lösung ist $x^* = 4$, und $y^* = 3$ mit $z^* = 25$, die mit der grafischen optimalen Lösung übereinstimmt.

Die obigen Vorgehensweise braucht immer noch die grafische Darstellung der zulässigen Bereich, um die zulässigen Eckpunkte zu finden.

Der tatsächliche naive Algorithmus mit n Strukturvariablen findet der Schnittpunkt jeder Kombination von n Nebenbedingung und prüft, ob der Punkt für jede Nebenbedingung zulässig ist.

Zum Beispiel: Der Schnittpunkt zwischen R2 und R4 ist $x = 0$ und $y = 7$. Diese widerspricht Restriktion R1, die Lösung ist nicht zulässig.

Alle Kombinationen von 2 Nebenbedingungen sind in der Tabelle angegeben

Gleichungen	Eckpunkt	zulässig	$Z(x, y)$
R4 R5	(0,0)	✓	0
R3 R5	(6,0)	✓	24
R2 R5	(7,0)	✗ (R3)	—
R1 R5	keine	—	—
R3 R4	(0,9)	✗ (R1,R2)	—
R2 R4	(0,7)	✗ (R1)	—
R1 R4	(0,6)	✓	18
R2 R3	(4,3)	✓	25
R1 R3	(2,6)	✗ (R2)	—
R1 R2	(1,6)	✓	22

Aufgabe: Naiver Algorithmus

Gegeben ist folgende LP Problem.

$$\max Z(x, y) = 2x + 3y$$

unter den Nebenbedingungen

$$x + 3y \leqslant 9 \qquad \text{(R1)}$$
$$x + y \leqslant 4 \qquad \text{(R2)}$$
$$x \geqslant 0 \qquad \text{(R3)}$$
$$y \geqslant 0 \qquad \text{(R4)}$$

(a) Bestimmen Sie der Schnittpunkt jeder Kombination zweier Nebenbedingungen. Hinweis: Fangen Sie mit R3 & R4 an.
(b) Welche sind zulässig?
(c) Berechnen Sie den Zielfunktionswert jedes zulässigen Eckpunktes.
(d) Geben Sie die Optimale Lösung an.

Lösung

R3, R4: $x = 0$, $y = 0$	zulässig
R2, R4: $x = 4$, $y = 0$	zulässig
R1, R4: $x = 9$, $y = 0$	✗ R2
R2, R3: $x = 0$, $y = 4$	✗ R1
R1, R3: $x = 0$, $y = 3$	zulässig
R1, R2: $x = 1.5$, $y = 2.5$	zulässig

R3, R4: $x = 0$, $y = 0$	zulässig	$Z = 0$
R2, R4: $x = 4$, $y = 0$	zulässig	$Z = 8$
R1, R4: $x = 9$, $y = 0$	✗ R2	
R2, R3: $x = 0$, $y = 4$	✗ R1	
R1, R3: $x = 0$, $y = 3$	zulässig	$Z = 9$
R1, R2: $x = 1.5$, $y = 2.5$	zulässig	$Z = 10.5$

Die optimale Lösung ist: $x^* = 1.5$, $y^* = 2.5$, $z^* = 10.5$

- Dieses Verfahren ist mühsam per Hand zu lösen, wenn es mehr als 2 Strukturvariablen oder viele Restriktionen gibt.
- Es ist nicht schwierig zu programmieren. Das Verfahren ist für mittel große LPs mit einem Rechner machbar.
- Es ist allerdings zu aufwändig für LPs mit hunderten von Nebenbedingungen und ebenso viel Variablen.

Verbindliche Restriktionen

Skript: Seite 20

Eine Restriktionen, die den optimalen Lösungspunkt schneidet, heißt eine verbindliche Restriktionen.

Wenn man die Gelegenheit den Restriktionswert:

- einer verbindlichen Restriktion zu erhöhen hätte, würde den optimale Zielfunktionswert zunehmen.
- einer **un**verbindlichen Restriktion zu erhöhen hätte, würde die optimale Lösung unverändert bleiben.

Das Produktionsgewinn-Beispiel hat die Nebenbedingungen:

$$
\begin{aligned}
x_2 &\leqslant 6 \\
x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\
3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\
x_1, x_2 &\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

und optimale Lösung: $x_1^* = 4$, $x_2^* = 3$ und $z^* = 25$.

Für diese Lösung:

$x_2^* = 3 \leqslant 6 \quad \Rightarrow$ Die 1. Restriktion ist unverbindlich.
Es gibt 3 Stunden Betriebszeit übrig für Maschine A

$x_1^* + x_2^* = 7 \quad \Rightarrow$ Die 2. Restriktion ist verbindlich.
Es gibt keinen Betriebszeit übrig für Maschine B

$3x_1^* + 2x_2^* = 18 \quad \Rightarrow$ Die 3. Restriktion ist verbindlich.
Es gibt keinen Betriebszeit übrig für Maschine C

Die noch bleibenden Ressourcen heißen Schlupf.

Schlupfvariablen

Für eine bestimmte zulässige Lösung $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und jede Restriktion ist eine **Schlupfvariable** definiert:

$$y_i = b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n$$

y_i ist die Menge an Ressourcen der i-te Restriktion, die noch übrig bleibt, für die Lösung $\boldsymbol{x}$.

Beispiel von der letzten Folie:
$y_3 = 18 - 3x_1 + 2x_2$. Der 3. Schlupfvariable der optimalen Lösung ist $y_3 = 0$

Sei $\boldsymbol{x}^*$ der optimale Lösungsvektor eines LPs mit den entsprechenden Schlupfwerten y_i^*, $i = 1, \ldots, m$.

- Wenn Restriktion i verbindlich ist, $y_i^* = 0$
- Wenn Restriktion i unverbindlich ist, $y_i^* > 0$

Für eine LP in Grundform ist der Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ eine zulässige Lösung der LP.

Die zugehörigen Schlupfwerte sind die Restriktionswerte.

$$y_i = b_i.$$

Die Normalform eines LPs

Betrachten wir ein LP in der Grundform:

$$
\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & & \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n & \leqslant & b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n & \leqslant & b_2 \\
& \vdots & \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n & \leqslant & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n & \geqslant & 0.
\end{aligned}
$$

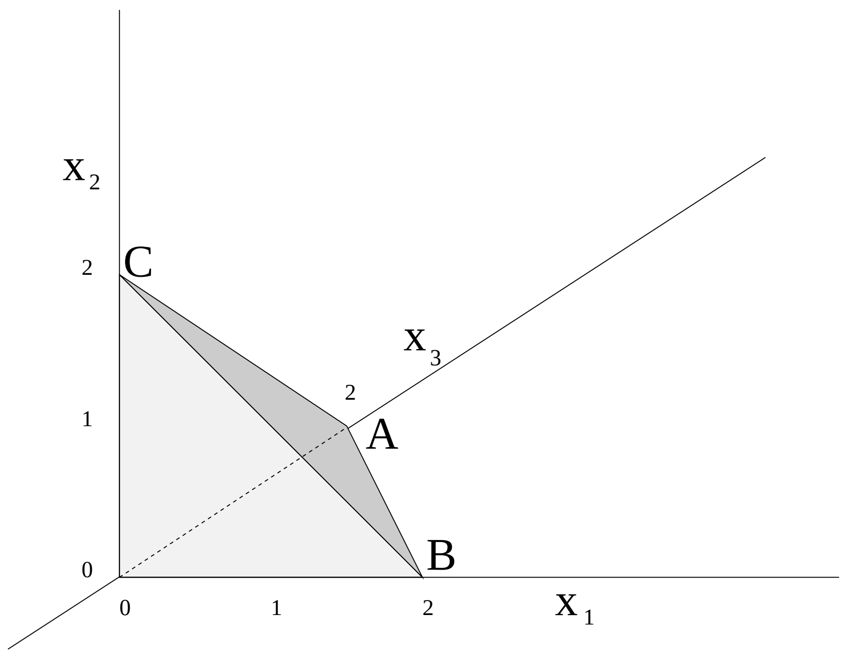
LP in **Normalform**:

Die **Schlupfvariablen** ergeben ein lineares Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & & \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + y_1 &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + y_2 &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + y_m &= b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m &\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Die Schlupfvariablen werden in der Zielfunktion mit 0 bewertet.

$$x_1 + x_2 \leqslant 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 + x_2 + y_1 = 2$$



Der zulässige Bereich in 2D ist die Projektion der 3D Simplex ABC auf die (x_1, x_2) Ebene.

Jeder Eckpunkt hat wenigstens eine Variable gleich Null.

Produktionsmaximierung LP in Normalform ist

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & Z(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{Unter} \quad & x_2 + y_1 = 6 \\ & x_1 + x_2 + y_2 = 7 \\ & 3x_1 + 2x_2 + y_3 = 18 \\ & x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Wir gehen zurück zur Tabelle des naiven Algorithmus auf Folie 14 und fügen den Schlupfwerte hinzu.

Gleichungen	Eckpunkt	Schlupf			zulässig?	$Z(x_1, x_2)$
	(x_1, x_2)	y_1	y_2	y_3		
R4 R5	(0,0)	6	7	18	✓	0
R3 R5	(6,0)	6	1	0	✓	24
R2 R5	(7,0)	6	0	-3	✗	—
R1 R5	keine	–	–	–	—	—
R3 R4	(0,9)	-3	-2	0	✗	—
R2 R4	(0,7)	-1	0	4	✗	—
R1 R4	(0,6)	0	1	6	✓	18
R2 R3	(4,3)	3	0	0	✓	25
R1 R3	(2,6)	0	-1	0	✗	—
R1 R2	(1,6)	0	0	3	✓	22

Bemerkungen:

- Jeder unzulässige Lösung hat mindestens einen negativen Schlupfwert.
- Jede zulässige Lösung hat genau 3 positive Werte und zwei Nullen in der erweiterte Koordinaten $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$

Diese 2 Eigenschaften sind nicht zufällig gültig für dieses Beispiel.

In den Nächsten 2 Wochen werden Sie lernen, wie man diese ausnutzen können um ein iteratives Verfahren zu entwickeln, damit ein numerisches Algorithmus die optimale Lösung schnell finden kann.