Aufgabenblatt 10

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2023 Prof. Dr. Tim Downie

Sensitivitätsanalyse II: Änderung zu einem Zielfunktionskoeffizienten
mit Lösungen

Aufgabe 1
Die Simplex-Algorithmus-Tableaus der LP von 1. Aufgabe 9. Blatt sind unten gegeben.

$$\begin{aligned}
\text{Maximiere} \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \\
& = 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\
\text{unter} \quad & 4x_1 - 3x_2 + x_3 \leqslant 3 = b_1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10 = b_2 \\
& 2x_2 + x_2 - x_3 \leqslant 10 = b_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2	x_3
z	0	-2	3	-4
y_1	3	4	-3	1
y_2	10	1	1	1
y_3	10	2	1	-1

Tab. 1		x_1	x_2	y_1
z	12	14	-9	4
x_3	3	4	-3	1
y_2	7	-3	4	-1
y_3	13	6	-2	1

Tab. 2		x_1	y_2	y_1
z	27.75	7.25	2.25	1.75
x_3	8.25	1.75	0.75	0.25
x_2	1.75	-0.75	0.25	-0.25
y_3	16.5	4.5	0.5	0.5

(a) Wiederholen Sie den Simplex-Algorithmus mit der neuen Zielfunktion
$z^{(\text{neu})} = 2x_1 - 3x_2 + \mathbf{4.1}x_3$.
Hinweis, nur die Z-Zeile umfasst änderungen wegen des neuen Koeffizienten.

(b) x_3 ist eine Basis-Variable der optimale Lösung. Verwenden Sie das Verfahren auf Skriptseiten 67–68, um $z_{(\text{neu})}$ zu bestimmen. Vergleichen Sie Ihre Lösung mit der aus Teil (a).

(c) Bestimmen Sie den Wertbereich für c_3, damit die gleiche optimale Basislösung erreicht wird. Geben Sie die entsprechende optimale Lösung $x^*_{1(\text{neu})}$, $x^*_{2(\text{neu})}$, $x^*_{3(\text{neu})}$ und $z^*_{(\text{neu})}$, wenn die Zielfunktion $z^*_{(\text{neu})} = 2x_1 - 3x_2 + \mathbf{5}x_3$ wäre.

(d) Bestimmen Sie den Wertbereich für c_2, damit die gleiche optimale Basislösung erreicht wird. Geben Sie die optimale Lösung, wenn die Zielfunktion
$z^*_{(\text{neu})} = 2x_1 - \mathbf{2}x_2 + 4x_3$ wäre.

(e) Bestimmen Sie den Wertbereich für c_1, damit die gleiche optimale Basislösung erreicht wird. Geben Sie die optimale Lösung, wenn die Zielfunktion
$z^*_{(\text{neu})} = \mathbf{3}x_1 - 3x_2 + 4x_3$ wäre.

(a) Die Z-Zeilen nach der Änderung sind:

Tab. 0		x_1	x_2	x_3
z	0	-2	3	-4.1

Tab. 1		x_1	x_2	y_1
z	12.3	14.4	-9.3	4.1

Tab. 2		x_1	y_2	y_1
z	28.575	7.425	2.325	1.775

(b)

Tab. 2		x_1	y_2	y_1
x_3	*8.25*	*1.75*	*0.75*	*0.25*
δx_3	*8.25δ*	*1.75δ*	*0.75δ*	*0.25δ*
z	*27.75*	*7.25*	*2.25*	*1.75*
$z_{(neu)}$	*27.75+8.25δ*	*7.25+1.75δ*	*2.25+0.75δ*	*1.75+0.25δ*

Stelle $\delta = 0.1$ *und die neue Z-Zeile wird* $28.575,\ \ 7.425,\ \ 2.325,\ \ 1.775$, *wie in Teil (a).*

(c) Wir brauchen $\delta \geqslant -4.143$ *(3 Dez.),* $\delta \geqslant -3$ *und* $\delta \geqslant -7$. *Alle sind gültig, wenn* $\Rightarrow \delta \geqslant -3$.
Wertbereich für $c_3^{(neu)}$: $c_3 + \delta \geqslant 4 - 3 = 1 \Rightarrow c_3^{(neu)} \geqslant 1$.

Wenn $c_3^{(neu)}=5$, $\delta=1$, *und die gleiche Basislösung ist optimal. Die optimalen Werte der Strukturvariablen ändern sich nicht:* $x^*_{1(neu)}=0$, $x^*_{2(neu)}=1.75$, *und* $x^*_{3(neu)}=8.25$. *Der neue Z-wert liest man vom* $z_{(neu)}$ *Zeile aus der obigen Tabelle ab.*
$z^*_{(neu)}=27.75 + 8.25\delta=36$.

d) x_2 *ist eine BV in der optimalen Lösung.*

Tab. 2		x_1	y_2	y_1
x_2	*1.75*	*-0.75*	*0.25*	*-0.25*
δx_2	*1.75δ*	*-0.75δ*	*0.25δ*	*-0.25δ*
z	*27.75*	*7.25*	*2.25*	*1.75*
$z_{(neu)}$	*27.75+1.75δ*	*7.25-0.75δ*	*2.25+0.25δ*	*1.75-0.25δ*

Die gleiche Basislösung ist optimal, wenn $7.25 - 0.75\delta \geqslant 0$, $2.25 + 0.25\delta \geqslant 0$ *und*
$1.75 - 0.25\delta \geqslant 0 \Rightarrow -9 \leqslant \delta \leqslant 7$.
Wertbereich für $c_2^{(neu)}$: $-3 - 9 \leqslant c_2 + \delta \leqslant -3 + 7 \Rightarrow -12 \leqslant c_2^{(neu)} \leqslant 4$.

Wenn $c_2^{(neu)} = -2$, $\delta=1$. *Die gleiche optimale Basislösung wird erreicht mit*
$x^*_{1(neu)}=0$, $x^*_{2(neu)}=1.75$, $x^*_{3(neu)}=8.25$ *und* $z^*_{(neu)}=29.5$.

e) x_1 *ist eine NBV.*
Der Koeffizient in z*-Zeile/*x_1*-Spalte ist* 7.25. *Stelle* $7.25 - \delta \geqslant 0$, $\Rightarrow \delta \leqslant 7.25$
Wertbereich für $c_1^{(neu)}$: $c_1 + \delta \leqslant 2 + 7.25 = 9.25 \Rightarrow c_1^{(neu)} \leqslant 9.25$.

Wenn $c_1^{(neu)}=3$, *dann* $\delta=1$, *d.h. die gleiche optimale Basislösung und die gleiche optimale Lösung wird erreicht, weil die 1. Restriktion unverbindlich ist.* $x^*_{1(neu)} = 0$, $x^*_{2(neu)} = 1.75$, $x^*_{3(neu)} = 8.25$ *und* $z^*_{(neu)} = 27.75$.