

### Aufgabe 3

Gegeben ist die folgende LP in Grundform

$$\begin{aligned} &\text{Maximieren} && z = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} && x_1 + x_2 \leq 3 \quad \text{1} \\ & && x_1 + x_3 \leq 8 \quad \text{2} \\ & && x_2 + x_3 \leq 10 \quad \text{3} \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Die LP wird durch die folgenden Simplex-Algorithmus Tableaus gelöst.

Starttableau

Tab. 0	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-5	-2
$y_1$	3	①	0
$y_2$	8	1	0
$y_3$	10	0	1

Erstes Tableau

Tab. 1	$y_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	15	5	3
$x_1$	3	1	0
$y_2$	5	-1	-1
$y_3$	10	0	1

Endtableau

Tab. 2	$y_1$	$x_2$	$y_2$
$z$	25	3	1
$x_1$	3	1	0
$x_3$	5	-1	1
$y_3$	5	1	-1

- (a) Sie bezweifeln, dass der 2. Restriktionswert 8 korrekt bestimmt wurde. Ersetzen Sie ihn durch  $8 + \Delta$  und Verwenden Sie ein Sensitivitätsanalyseverfahren, um einen Wertebereich von  $\Delta$  zu bestimmen, in dem die optimale Lösung die gleiche Basislösung besitzt.
- (b) Nehmen Sie nun an, dass der korrekte 2. Restriktionswert 10 beträgt. Benutzen Sie Ihre Lösung vom Teil (a) um die neue Optimallösung zu bestimmen.
- (c) Benutzen Sie Ihre Lösung vom Teil (a), um den Schattenpreis der 2. Restriktion zu bestimmen? Erläutern Sie den Begriff Schattenpreis anhand dieses Beispiels.
- (d) Wie kann man den Schattenpreis direkt von dem Endtableau des Simplex Algorithmus ablesen? Geben Sie den Schattenpreis der 1. Restriktion an.

(a) Restriktionswert für 2. Restriktion ( $b_2$ ) durch  $8 + \Delta$  ersetzen. Wertebereich von  $\Delta$  bestimmen

Tab 0	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-5	-2
$y_1$	3	①	0
$y_2$	$8 + \Delta$	1	1
$y_3$	10	0	1

$$8 + \Delta - (3 \cdot 1 : 1) = 5 + \Delta$$

Tab 1	$y_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	15	5	3
$x_1$	3	1	0
$y_2$	$5 + \Delta$	-1	①
$y_3$	10	0	1

Tab 2	Lösungs- spalte	$y_1$	$x_2$	$y_2$	
$z$	$25 + 2\Delta$	3	1	2	
$x_1$	3	1	1	0	$b_1$
$x_3$	$5 + \Delta$	-1	-1	1	$b_2$
$y_3$	$5 - \Delta$	1	2	-1	$b_3$

$$z_0 \quad 15 - (5 + \Delta \cdot (-2) : 1) = 25 + 2\Delta$$

$$x_{10} \quad 3 - (5 + \Delta \cdot 0 : 1) = 3$$

$$y_{30} \quad 10 - (5 + \Delta \cdot 1 : 1) = 5 - \Delta$$

Wertebereich für  $\Delta$

$$3 \geq 0$$

$$5 + \Delta \geq 0 \quad = \quad -5 \leq \Delta$$

$$5 - \Delta \geq 0 \quad = \quad 5 \geq \Delta$$

$$-5 \leq \Delta \leq 5$$

- (b) Restriktionswert f. 2. Restriktion ist 10. Lösung aus a. Senkter um die neue optimale Lösung zu erhalten.

Wertebereich f.  $b_2$

$$8 + (-5) = 3$$

$$8 + 5 = 13$$

$$3 \leq b_2 \leq 13$$

neue Restriktion  $b_2$

$$x_1 + x_3 = 10$$

neuer Zielfunktionswert

$$z^*_{\text{(neu)}} = 25 + 2\Delta$$



Lösungsspekte aus Endtableau

$z$	$25 + 2\Delta$
$x_1$	3
$x_3$	$5 + \Delta$
$y_3$	$5 - \Delta$

Es muss der Wert für  $\Delta$

zur Restriktion  $b_2$  ermittelt

werden

Restriktion  $b_2$   $x_1 + x_3 \leq 8 + \Delta$

neuer Restriktionswert  $b_2 = 10$

$$8 + \Delta = 10 \rightarrow \Delta = 10 - 8$$

$$\Delta = 2$$

$\Delta = 2$  in Lösungswerte einsetzen

$$z^*_{\text{neu}} = 25 + 2\Delta = 25 + 2 \cdot 2 = 29$$

$$z^*_{\text{neu}} = 29$$

$$x_1^*_{\text{neu}} = 3 = 3$$

$$x_1^*_{\text{neu}} = 3$$

$$x_3^*_{\text{neu}} = 5 + \Delta = 5 + 1 \cdot 2 = 7$$

$$x_2^*_{\text{neu}} = 0$$

$$z^*_{\text{neu}} = 5x_1 + 2x_2 + 2x_3$$

$$x_3^*_{\text{neu}} = 7$$

$$z^*_{\text{neu}} = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 7$$

$$z^*_{\text{neu}} = 15 + 14 = 29 \quad 29 = 29$$

(c) i. Schattenpreis d. 2. Restriktion aus dem Endtableau ( $\text{Tab}_2$ ) bestimmen

Schattenpreis f. 2. Restriktion aus  $z$ -Zeile und Spalte für  $y_2$

Schattenpreis f. 2. Restriktion ist  $y_2 = 2$

(c) ii. Schattenpreis anhand d. Bsp erläutern

— Schattenpreis = Zunahme des Zielfunktionswerts  $z^*$  der optimalen Lösung bei  $\Delta = 1$  Einheit

Restriktionswert erhöht sich um 1 Einheit pro

$\Delta = 1 \cdot \Delta$ , solange die neue optimale Lösung die selbe Basislösung hat.

Der neue Zielfunktionswert  $z^*$  in der neuen optimalen Lösung erhöht sich um  $2\Delta = 2$  Einheiten



Die 2. Restriktion  $b_2$  nimmt um 1 Einheit zu  
 $\rightarrow y_2^*(\text{neu}) = 5 + 1 \Delta$

$$\text{Wenn } b_j^{\text{neu}} = b_j + \Delta$$

$$z^*_{\text{neu}} = z^* + s_j \cdot \Delta$$

Zielfunktionswert  $z^*(\text{neu})$  erhöht sich um  
 $z^* + s_2 \Delta \rightarrow$  in der Lösung zu (a) um  $2 \cdot \Delta$

Der Schattenpreis ist 2. ✓

Gilt, solange neue optimale Lösung, dieselbe Basis-Lösung hat.

(d) Wie kann Schattenpreis aus Endtableau abgeleitet werden?

Wie ist d. Schattenpreis d. 1. Restriktion?

- Schattenpreis wird aus der  $z$ -Zeile zur gefragten Restriktion (= Nichtbasis-Schlupfvariable) abgeleitet.

In Lösung zu (a) ist der Schattenpreis zur 1. Restriktion  $b_1 = y_1 = 3$

Hinweis

Hat die gefragte Restriktion keine Nichtbasis-Schlupfvariable ist die Restriktion unverbundlich und der Schattenpreis für diese Restriktion ist 0 (null).