LP in GF mit
Strukturvariablen

$\max z(x_1, x_2) = 1x_1 + 1{,}5x_2$

x_1 = Hauptmarken-Schlauch in Stk
x_2 = Marke-Schlauch in Stk

unter NB

$-x_1 \leq -48$ Mindestbestellmenge Hauptmarke Schlauch in Stk

$x_1 + x_2 \leq 180$ max Nachfrage in Stk

$x_2 \leq x_1$ Verkauf in Stk

$x_1, x_2 \geq 0$

LP in Normalform

$\max z(x_1, x_2) = 4x_1 - 2x_2$

NB $4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + y_1 = 120$
$-2x + 4x_2 + y_2 = 200$
$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$

---

primale LP

$\max z(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$

unter NB

$2x_1 + 6x_2 \leq 50$

$-3x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 60$

$4x_1 + 8x_2 - 0{,}5x_3 \leq 70$

$x_1, x_2 \geq 0, \; x_3 \in \mathbb{R}$

duale LP

$\min z(y_1, y_2, y_3) = 50y_1 + 60y_2 + 70y_3$

unter NB

$2y_1 - 3y_2 + 4y_1 \geq 10$

$6y_1 + 7y_2 + 8y_3 \geq 20$

$9y_1 - 0{,}5y_2 = 30$

$y_1, y_3 \geq 0; \; y_2 \in \mathbb{R}$

primale LP '=' ist Var im dualen LP $\in \mathbb{R}$
duale Var $\in \mathbb{R}$ ist = im primalen LP

Simplex tabellarisch

$z = 2x_1 + 3x_2$

		x_1	PS ↓ x_2
z	0	−2	−3

1) Werte in Z-Zeile aus Z-Funktion · −1
2) Auswahl Eintrittsvar (NBV) mit kleinstem Wert → $-3x_2$ ist Pivotspalte (PS)
3) Auswahl Austrittsvar (BV) → Theta: Wert aus Lösungsspalte : Wert aus PS (nur positiv)
Zeile mit kleinstem Theta-Wert wird Pivotzeile
4) Tausch y_j gegen x_i
5) Pivotwert: Kreuzwert aus PS und PZ
6) Kehrwert zum Pivotwert: aus 2 wird $\frac{1}{2}$

Simplex tabellarisch

7) Werte in PZ : Pivotwert (aus Ausgangstabelle)

8) Werte in PS : Pivotwert • −1

9) Zellen Werte berechnen

Zellenwert − $\left(\frac{\text{Wert Pivotzeile} \cdot \text{Wert Pivotspalte}}{\text{Pivotwert}}\right)$

		x_1	x_2
y_1	10	−3	2

nach Tausch

		x_1	y_1
x_2	5	−1,5	$\frac{1}{2}$

10) Lösungswerte aus Lösungsspalte in Antwort

optimale Lösung: $z^* =$ $x_1^* =$ x_2^* $x_3^* =$

Simplex dualer Schritt, (wenn Wert in Lösungsspalte negativ)

1) Werte in Z-Zeile aus Z-Funktion • −1

2) Auswahl Austrittsvar (BV) → Zeile mit negativem Wert in Lösungsspalte

2) Austrittsvar = Pivotzeile (PZ)

3) Auswahl Eintrittsvar (NBV) durch größten Thetawert

Θ = Wert aus Z-Zeile : Wert aus PZ (nur negative Werte in PZ)

4) Tausch y_j gg x_i

5) danach weiter mit Simplex Algorithmus

Sensitivität Änderung Restriktionswert

1) Δ Tabelle mit Lösungsspalten aus Tab0, Tab1, Tab2 und Variablen mit Δ [Δ-Wert aus y-Spalte, oder kein Δ-Wert wenn $y \neq 0$ y ist Schlupfvar zur Restriktion aus Aufgabe

2) Δ-Intervall benötigt wird → alle x-Werte aus Lösungsspalte mit Δ in Ungleichung ≥ 0 → z.B. x_2 $3 + \Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \geq -3$

(!) Die gleiche optimale Basislösung y_1 $30 - 2\Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \leq 15$

wird erreicht, wenn $-3 \leq \Delta \leq 15$

3) Wertebereich für Restriktion b_j alias y_j

bei Intervall immer Werte aus Basislösung

Restriktionswert aus Basislösung (Grundform bzw. Tab0)

$b_j + \Delta$ Antwort wenn $\Delta = -3$, Restriktionswert für b_2 $10 - 3 = 7$ $10 + 15 = 25$

Die gleiche optimale Basislösung wird erreicht, wenn $7 \leq c_2(\text{neu}) \leq 25$

10 ist R-Wert aus Grundform

4) Intervall für b_j bei neuem R-Wert

Wenn b_2^* neu $= 12$, $\Delta = 2$ dieselbe optimale Basislösung wird... erreicht, da $7 \leq 12 \leq 25$

---

5. neue Lösungswerte

alle mit Δ

Wenn b_2^* neu $= 12$, $\Delta = 2$ z^*_{neu} = Wert aus Lösungsspalte Tab 2

z.B. $25 + 2\Delta \rightarrow 25 + 4 = 29$

$x_1^*{}_{neu} = 3 + 4\Delta = 3 + 4 \cdot 2 = 11$

Schlupf ist Menge an Ressourcen der Güter-Restriktion, die für die optimale Lösung verbleiben

verbindliche Restriktion: $y_i^* = 0$ NBV ist verbindlich

unverbindliche Restr.: $y_i^* \geq 0$ BV ist daher unverbindlich

verbindl. Resk. schneidet opt. Lösungspunkt

bei verbindl. Restriktion: Erhöhung der Ressourcen = Zunahme der optim. Lösung & des Schlupfes

unverbindl. Restrikt.: Erhöhung der Ressourcen KEINE Zunahme der optim. Lösung

Sonderfall	Voraussetzung	Algorithmus
unzul. Ausgangslösung	negativer Wert in Lösungsspalte	opt. Lösung unzulässig durch 1. Schritt Kein Pivotwert in Pivotz. ≤ 0 ist Lösung unzulässig Abbruch d. Verfahrens
primale Entartung 1. Art	0-Wert in Lösungsspalte d. Lösungstabelle = identischer Theta Wert zu mehreren PZ mit positivem Pivotwert	Algorithmus fortsetzen Probleme können auftreten, meist aber Lösung ohne Probleme möglich Aufpassen dass man nicht wieder in d. Ursprung kommt (Kreis)
duale Entartung	0-Wert in Z-Zeile 2 Pivotspalten mit demselben Wert in Z-Zeile	
primale Entart. 2. Art	Kein positiver Wert in allen PZ einer PS Theta Wert nicht möglich	LP ist unbeschränkt Keine zulässige Lösung Abbruch

Sonderfall	Voraussetzung	Algorithmus
freie Strukturvar.	$x_1 \in R$	Algorithmus fortsetzen Vars dürfen negativ sein

Simplex LGS

Z-Funktion + Restriktion nach y umstellen

$\max z(x_1, x_2) = 0 + 4x_1 + 3x_2$

R1 $2x_1 + 3x_2 + y_1 = 20 \rightarrow y_1 = 20 - 2x_1 - 3x_2$

R2 $x_1 + 5x_2 + y_2 = 40 \rightarrow y_2 = 40 - x_1 - 5x_2$

Eintrittsvar. (NBV) bestimmen = größte x-Var in Z-Funkt.

hier x_1 $(4 > 3)$

Austrittsvar (BV) in Restrikti bestimmen = kleinsten −

hier R1 = $20 : 2 = 10$ | R2 = $40 : 1 = 40$

y_1 aus R1 ist Austrittsv.

TAUSCH Eintrittsvar x_1 mit Austrittsv. y_1 in 1. Restr.

R1 $2x_1 = 20 - y_1 - 3x_2 \quad | : 2$

$x_1 = 10 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}x_2 \rightarrow$ Term f. x_2 in allen Gleichungen einsetzen

R2 $y_2 = 40 - 1 \cdot (10 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}x_2) - 5x_2$

$y_2 = 40 - 10 + 5y_1 + 1{,}5x_2 - 5x_2$

$y_2 = 30 + 5y_1 - 3{,}5x_2$

$z = 4 \cdot (10 - \frac{1}{2}y_1 - \frac{3}{2}x_2) + 3x_2$

$z = 40 - 2y_1 - 6x_2 + 3x_2$

$z = 40 - 2y_1 - 3x_2$

2. Schritt ist noch erforderlich, da $-3x_2$ noch negativen Koeffizienten hat. Verfahren bis alle Koeffizienten positiv sind.

WICHTIG: Lösung nach d. 1. Iteration: $x_1^* = 10$, $x_2^* = 0$

$z^* = 40$

Lösung aus Teil a $27{,}75 + 2\Delta$ = Schattenpreis f. b_2 (2. Restriktion)

Schattenpreis Restriktion von Z, Bei Erhöhung um 1 Einheit, erhöht sich Z um S_j

Bei Zunahme d. Restriktionswerts b_j um eine Einheit $b_{j\,neu} = b_j + 1\Delta$, ist die Zunahme des Zielfunktionswerts $z^* = z^*_{neu} = z^* + S_j \cdot 1\Delta$ der Schattenpreis, S_j ist der Schattenpreis, solange neue optimale Lösung dieselbe Basislösung hat

Sensitivität: wie stabil ist neue Optimallösung zur Modell Spezifikation des LP?

Wieviel darf sich Restriktionswert ändern / Wieviel darf sich Z-Funktionskoeffizient ändern? } ohne optim. Basislösung zu verändern

Wieviel ändert sich optim. Basislösung bei Änderung d. Restriktionswerts (Schattenpreis)

Sensitivität Änderung Z-Koeffizient BV $c_1 = x_1$ $c_2 = x_2$ $c_3 = x_3$

X-Zeile zum getroffenen Koeffizient $c_j = x_j$

alle Werte aus Z-Zeile

		y_2	y_1
Z	25	3	5
x_2	5	-1	-2

benötigt wird $3 - 1\delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq 3$

bei $-$ Wert δ — Z Wert, x_2

$\delta \leq$ Wert $5 - 2\delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq 5$

Wertbereich für δ: $\delta \leq 3$ und nach unten unbeschränkt

Alle Bereiche sind gültig, wenn $\delta \leq 3$

Wertbereich für c_j (neu) $c_j + \delta$, c_j ist Koeffizient aus Aufgabe (Grundform)

z.B. Aufg. $z(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ f. $c_2 = x_2$

$c_j(neu) = c_j + \delta \leq 4 + 3 \leq 7$

$c_j(neu) \leq 7$ für die neue optimale Lösung, in dem optim. Basislösung unverändert bleibt

---

Wie ändert sich Δ und optimal Lösung wenn Z-Funktion: $z = 2x_1 + 6x_2 + x_3$ (z ändert sich von $4x_2$ auf $6x_2$)

Wenn c_2 neu $= 6$, dann $\delta = 2$ die neue optimale Lösung ist z^*_{neu} = Wert aus Lösungsspalte von TAS2 + δ Wert z.B. $3 + 2\delta$

X-Werte aus Lösungsspalte von TAS2 ohne δ Wert

Sensi Änderung Z-Koeffizient (NBV) z.B.

y_1	x_1	y_2
3	5	-1

X-Wert aus Z-Zeile $-\delta \rightarrow 5 - \delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq 5$

Intervall für c_2, bei Änderung von 5 auf 7 $\rightarrow \delta = 2 \rightarrow c_2 + \delta = 7$ | Intervall c_2: $c_{2\,neu} \leq 7$

TP für Kostenminimierung oder Gewinnmaximierung

bei Kostenminimierung

$\max z(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}) = -4x_{11} - 2x_{12} - 2x_{21} - 5x_{22}$

	WH1	WH2	
P1	x_{11}	x_{12}	30
P2	x_{21}	x_{22}	100
	80	50	

Antwortsatz nicht vergessen!

unter NB

$-x_{11} - x_{12} \leq -30$

$x_{11} + x_{12} \leq 30$

Restriktionswerte aus Zeile aus Tabelle

$-x_{11} - x_{12} \leq -80$

$x_{11} + x_{12} \leq 80$

$-x_{12} - x_{22} \leq -50$

$x_{12} + x_{22} \leq 50$

Restriktionswerte aus Spalte

---

ganzzahlige Programmierung (IP) - Gomory-Schnittebenenverfahren

		y_1	y_2
z	7,2	0,6	0,8
x_1	8,6	1,8	0,4
x_2	1,8	0,4	-0,2
S_1	-0,8	-0,4	-0,8
		$\Theta = -2{,}5$	$\Theta = -1$

x-Zeile mit größtem Bruchanteil x_2 mit 0,8

alle NK-Werte $\cdot -1$, bei negativen Wert $1 -$ NK-Wert $\cdot -1$

$z = -0{,}8,\ y_1 = -0{,}4,\ y_2 = -0{,}8$

dualer Schritt, PS mit größtem Θ Wert

$-2{,}5 < -1$, Tausch y_2 gegen S_1

$S_1 - 0{,}4y_1 - 0{,}8y_2 = -0{,}8$

Restriktionen aus Grundform

$2x_1 + 5x_2 \leq 10 \rightarrow y_1 = 10 - 2x_1 - 5x_2$

$3x_1 + x_2 \leq 6 \rightarrow y_2 = 6 - 3x_1 - x_2$

$S_1 - 0{,}4 \cdot (10 - 2x_1 - 5x_2) - 0{,}8 \cdot (6 - 3x_1 - x_2) = -0{,}8$

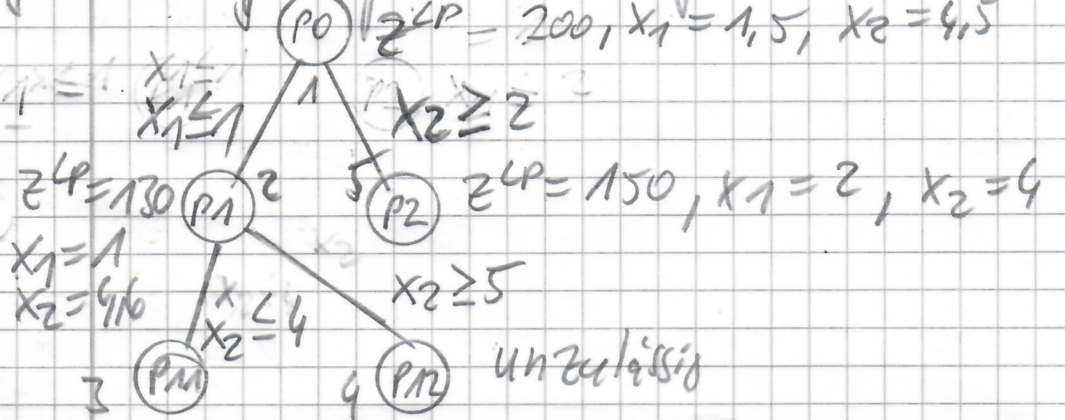
$S_1 - 4 + 0{,}8x_1 + 2x_2 - 4{,}8 + 2{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = -0{,}8$

$S_1 - 8{,}8 + 3{,}2x_1 + 2{,}8x_2 = -0{,}8 \quad | +8{,}8$

$3{,}2x_1 + 2{,}8x_2 \leq 8$

---

ganzzahlige Programmierung (IP) - Branch and Bound



naiver Algorithmus $\quad z = 2x_1 + 3x_2$

$x_1 \geq 0$ R3 $\quad$ I $\quad x_1 + 2x_2 \leq 6$ $\quad$ II $\quad 2x_1 + x_2 \leq 8$

$x_2 \geq 0$ R4 $\quad y_1 = 6 - x_1 - 2x_2 \quad y_2 = 8 - 2x_1 - x_2$

Bedingungen		Schnittpunkt (x_1, x_2)		y_1	y_2	zulässig	$z(x_1, x_2)$
R3	R4	0	0	6	8	ja	0
R2	R4	4	0	2	0	ja	8
R1	R4	6	0	0	-4	nein	–
R2	R3	0	8	-10	0	nein	–
R1	R3	0	3	0	5	ja	9
R1	R2	$3\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	ja	$10\frac{2}{3}$

NR $\quad x_1 + 2x_2 = 6 \quad | -2x_2$

$x_1 = 6 - 2x_2 \quad x_1 = 3\frac{1}{3}$

$2x_1 + x_2 = 8$

$2 \cdot (6 - 2x_2) + x_2 = 8$

$12 - 4x_2 + x_2 = 8 \quad | -12 \quad : -1$

$-3x_2 = -4 \quad | : -3$

$x_2 = 1\frac{1}{3}$