Aufgabenblatt 6

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2023 Prof. Dr. Tim Downie

Duale LP, Dualer Simplex-Algorithmus-Schritt *Lösungen*

Aufgabe 1
Gegeben ist die primale LP

$$\begin{array}{rllll} \max Z(x_1,x_2) = & 120x_1 & +100x_2 & & \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leqslant & 8 \\ & 5x_1 & +3x_2 & \leqslant & 15 \\ & & x_1, x_2 & \geqslant & 0 \end{array}$$

Bestimmen Sie die duale LP.

$$\begin{array}{rllll} \min Z_D(y_1,y_2) = & 8y_1 & +15y_2 & & \\ & 2y_1 & +5y_2 & \geqslant & 120 \\ & 2y_1 & +3y_2 & \geqslant & 100 \\ & & y_1, y_2 & \geqslant & 0 \end{array}$$

Aufgabe 2
Gegeben ist eine primale LP

$$\begin{array}{rllll} \max Z(x_1,x_2,x_3) = & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & \\ & x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leqslant 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & = 8 \\ & x_1 & -x_2 & & \leqslant 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \qquad x_3 \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die duale LP.
Hinweis: Benutzen Sie die Tabelle im Skript Seite 41.

$$\begin{array}{rllll} \min Z_D(y_1,y_2,y_3) = & 4y_1 & +8y_2 & +6y_3 & \\ & y_1 & +2y_2 & +y_3 & \geqslant 3 \\ & 2y_1 & -y_2 & -y_3 & \geqslant 2 \\ & -y_1 & +y_2 & & = 1 \end{array}$$

$$y_1, y_3 \geqslant 0 \qquad y_2 \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3 Obere Schranke einer LP
Die Uhrenhersteller LP in Grundform ist

$$\max Z(x_1,x_2) = 3x_1 + 8x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$2x_1 + 4x_2 \leqslant 1600$$
$$6x_1 + 2x_2 \leqslant 1800$$
$$x_2 \leqslant 350$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass zweimal die erste Restriktion eine obere Schranke für Z mit dem Wert 3200 ergibt. $Z = 3x_1 + 8x_2 \leqslant 2 \cdot (2x_1 + 4x_2) \leqslant 3200$

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{3}{2}$ mal der erste Restriktion und zweimal der dritte Restriktion eine obere Schranke für Z mit dem Wert 3100 ergibt. $Z = 3x_1 + 8x_2 = \frac{3}{2} \cdot (2x_1 + 4x_2) + 2 \cdot (x_2) \leqslant \frac{3}{2} \cdot 1600 + 2 \cdot 350 = 3100$

(c) Was ist der Zielfunktionswert wenn $x_1 = 100, x_2 = 350$? Ist dieser Punkt zulässig? $Z(x_1, x_2) = 3x_1 + 8x_2 = 3100$. *Ja er passt zu alle Bedingungen $\Rightarrow$ zulässig.*

(d) Was ist die Folgerung aus (b) und(c)? *Aus (b) Z=3100 ist eine obere Schranke für Z und aus (c) ist x_1=100 und x_2=350 eine zulässige Lösung mit dem Zielfunktionswert 3100. (b) und (c) zusammen zeigt, dass die Lösung optimal ist.*

Aufgabe 4 Unzulässiger Ausgangspunkt
Zeichnen Sie grafisch den zulässigen Bereich der folgenden LP.
Lösen Sie sie mit dem Simplex-Algorithmus.

$$\begin{array}{lrcl} & \max Z(x_1, x_2) & = & 10x_1 + 2x_2 \\ \text{Unter den Bedingungen} & 4x_1 + x_2 & \leqslant & 10 \\ & 2x_1 + x_2 & \leqslant & 8 \\ & x_2 & \geqslant & 3 \\ & x_1, x_2 & \geqslant & 0. \end{array}$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z	*0*	*-10*	*-2*
y_1	*10*	*4*	*1*
y_2	*8*	*2*	*1*
y_3	*-3*	*0*	*-1*

Tab. 1		x_1	y_3
Z	*6*	*-10*	*-2*
y_1	*7*	*4*	*1*
y_2	*5*	*2*	*1*
x_2	*3*	*0*	*-1*

Tab. 2		y_1	y_3
Z	*23.5*	*2.5*	*0.5*
x_1	*1.75*	*0.25*	*0.25*
y_2	*1.5*	*-0.5*	*0.5*
x_2	*3.0*	*0.0*	*-1.0*

Vorgehensweise: Tableau 0 hat einen negativen Wert in der erste Spalte, was eine unzulässige Lösung zeigt. Wähle y_3 als Pivotzeile. Da nur x_2 hat eine negativen Wert in der y_3 Zeile ist x_2 die Pivotspalte. Rechne alle Koeffizienten in der Tabelle, wie bei einem primalen SimpAlg-Schritt. Tableau 1 hat keinen negativen Wert in der erste Spalte, also ist diese Lösung zulässige aber noich nicht optimal. Setze mit den üblichen SimpAlg fort.

Die optimale Lösung ist $x_1^* = 1.75$, $x_2^* = 3$ $z^* = 23.5$

Aufgabe 5 Unzulässiger Ausgangspunkt
Lösen Sie die LP mit dem Simplex-Algorithmus.

$$\begin{aligned} & \max Z(x_1, x_2) &=& \; 2x_1 + x_2 \\ \text{Unter den Bedingungen} \qquad & -x_1 + x_2 &\leqslant& \; 1 \\ & x_1 + 3x_2 &\geqslant& \; 6 \\ & x_1 &\leqslant& \; 7 \\ & x_1, x_2 &\geqslant& \; 0. \end{aligned}$$

Negativer Wert in der Lösungsspalte: Dualer Schritt mit Pivotzeile y_2

Tab. 0		x_1	x_2
Z	*0*	*-2*	*-1*
y_1	*1*	*-1*	*1*
y_2	*-6*	*-1*	*-3*
y_3	*7*	*1*	*0*
θ		*2*	$\frac{1}{3}$

Beide NBV-Einträge in der Pivotzeilesind negativ $\Rightarrow$ berechne die θ-Werte und wählen den größten Wert. $\Rightarrow$ x_1 ist die Pivotspalte.

Tab. 1		y_2	x_2
Z	*12*	*-2*	*5*
y_1	*7*	*-1*	*4*
x_1	*6*	*-1*	*3*
y_3	*1*	*1*	*-3*

Alle Lösungswerte sind positiv, normaler (primaler) Schritt. Pivotspalte ist y_2 und Pivotzeile ist y_3.

Tab. 1		y_3	x_2
Z	*14*	*2*	*-1*
y_1	*8*	*1*	*1*
x_1	*7*	*1*	*0*
y_2	*1*	*1*	*-3*

Noch ein normaler (primaler) Schritt. Pivotspalte ist x_2 und Pivotzeile ist y_1.

Tab. 1		y_3	y_1
Z	*22*	*3*	*1*
x_2	*8*	*1*	*1*
x_1	*7*	*1*	*0*
y_2	*25*	*4*	*3*

Optimaler Lösung $x_1^* = 7$, $x_2^* = 8$, $Z^* = 22$