

Aufgabenblatt 11

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2022

Prof. Dr. Tim Downie

IP: Schnittebenenverfahren

mit Lösungen

Aufgabe 1 ★

Lösen sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory.

$$\begin{aligned}\max Z(x_1, x_2) &= x_1 + 4x_2 \\ x_1 + 6x_2 &\leq 36 \\ 3x_1 + 8x_2 &\leq 60 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Das Simplex Endtableau der LP-Relaxierung ist:

Tab. 2		y_2	y_1
Z	26.4	0.2	0.4
x_2	4.8	-0.1	0.3
x_1	7.2	0.6	-0.3

Hinweis: Welche Strukturvariable hat den größten Bruchteil?
Sie sollten insgesamt zwei Gomory-Schnitt-Iterationen verwenden.

Erste Gomory Schnitt mit x_2 : $-0.9y_2 - 0.3y_1 + s_1 = -0.8$

Tab. G1		y_2	y_1	Tab. G2		s_1	y_1
Z	26.4	0.2	0.4	z	$26\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
x_2	4.8	-0.1	0.3	x_2	$4\frac{8}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$
x_1	7.2	0.6	-0.3	x_1	$6\frac{6}{9}$	$\frac{6}{9}$	-1
s_1	-0.8	-0.9	-0.3	y_2	$\frac{8}{9}$	$-1\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$

Die aktuelle Lösung ist: $z = 26\frac{2}{9}$, $x_1 = 6\frac{6}{9}$, $x_2 = 4\frac{8}{9}$, $y_2 = \frac{8}{9}$

2. Gomory Schnitt auch mit x_2 : $-8/9s_1 - 3/9y_1 + s_2 = -8/9$

Tab. G3		s_2	y_1
z	26	0.250	0.250
x_2	5	-0.125	0.375
x_1	6	0.750	-1.250
y_2	2	-1.250	0.750
s_1	1	-1.125	0.375

Optimale Lösung $z^* = 26, x_1^* = 6, x_2^* = 5, y_2^* = 2$

Aufgabe 2

Lösen sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
 \max Z(x_1, x_2) &= 5x_1 + 6x_2 \\
 10x_1 + 3x_2 &\leq 52 \\
 2x_1 + 3x_2 &\leq 18 \\
 x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+.
 \end{aligned}$$

Das Simplex-End-Tableau der LP-Relaxierung ist:

Tab. 2		y_1	y_2
Z	$40\frac{1}{4}^\dagger$	$\frac{1}{8}$	$1\frac{7}{8}$
x_1	$4\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
x_2	$3\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$

[†] Fehler gefunden und korrigiert am 22.06.

Tab. G1		$y1$	$y2$
z	40.25	0.12	1.88
$x1$	4.25	0.12	-0.12
$x2$	3.17	-0.08	0.42
$s1$	-0.25	-0.12	-0.88

Tab. G2		$s1$	$y2$
z	40	1	1
$x1$	4	1	-1
$x2$	3.33	-0.67	1
$y1$	2	-8	7

Tab. G3		$s1$	$y2$
z	40	1	1
$x1$	4	1	-1
$x2$	3.33	-0.67	1
$y1$	2	-8	7
$s2$	-0.33	-0.33	0

Tab. G4		$s2$	$y2$
z	39	3	1
$x1$	3	3	-1
$x2$	4	-2	1
$y1$	10	-24	7
$s1$	1	-3	-0

Optimale Lösung ist $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$, $z^* = 39$

Aufgabe 3

Lösen sie die IP (Zimmermann Ronny, Skript Beisp. 1.3, Seite 8) mit dem Schnittebenenverfahren von Gomory.

$$\max Z(x_1, x_2) = 120x_1 + 80x_2$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + 8x_2 &\leq 28 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Tab. 2		y1	y2
z	391.11	44.44	4.44
x1	2.22	0.89	-0.11
x2	1.56	-0.78	0.22

Lösung der LP Relaxierung: $x_1 = 2\frac{2}{9}$ und $x_2 = 1\frac{5}{9}$.

1. Gomory Schnitt mit x_2 ist: $s_1 - \frac{2}{9}y_1 - \frac{2}{9}y_2 = -\frac{5}{9}$

Tab. G1		y1	y2
z	391.11	44.44	4.44
x1	2.22	0.89	-0.11
x2	1.56	-0.78	0.22
s1	-0.56	-0.22	-0.22

Tab. G2		y1	s1
z	380	40	20
x1	2.50	1	-0.50
x2	1	-1	1
y2	2.50	1	-4.50

Aktuelle Lösung $x_1 = 2\frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$.

2. Gomory Schnitt mit x_1 ist: $s_2 - 0y_1 - \frac{1}{2}s_1 = -\frac{1}{2}$

Tab. G3		y1	s1
z	380	40	20
x1	2.50	1	-0.50
x2	1	-1	1
y2	2.50	1	-4.50
s2	-0.50	0	-0.50

Tab. G4		y1	s2
z	360	40	40
x1	3	1	-1
x2	0	-1	2
y2	7	1	-9
s1	1	-0	-2

Optimale IP Lösung ist $x_1^* = 3$ und $x_2^* = 0$, $z^* = 360$.

Aufgabe 4

Benutzen Sie Ihre Lösung aus Aufgabe 3, um alle Gomory-Schnitte als Ungleichungen mit Variablen x_1 und x_2 zu bestimmen. D.h Geben Sie jeder Gomory-Schnitt in der Form $ax_1 + bx_2 \leq c$ an.

Die Schlupfvariablen sind

$$\begin{aligned}y_1 &= 6 - 2x_1 - x_2 \\ y_2 &= 28 - 7x_1 - 8x_2\end{aligned}$$

Aus Aufgabe 3: 1. GS

$$\begin{aligned}s_1 - \frac{2}{9}y_1 - \frac{2}{9}y_2 &= -\frac{5}{9} \\ s_1 - \frac{2}{9}(6 - 2x_1 - x_2) - \frac{2}{9}(28 - 7x_1 - 8x_2) &= -\frac{5}{9} \\ s_1 - \frac{68}{9} + 2x_1 + 2x_2 &= -\frac{5}{9} \\ s_1 + 2x_1 + 2x_2 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 &\leq 7\end{aligned}$$

2. GS

$$\begin{aligned}s_2 - \frac{1}{2}s_1 &= -\frac{1}{2} \\ s_2 - \frac{1}{2}(7 - 2x_1 - 2x_2) &= -\frac{1}{2} \\ s_2 - \frac{7}{2} + x_1 + x_2 &= -\frac{1}{2} \\ s_2 + x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 3\end{aligned}$$