

# Operations Research – Wirtschaftsinformatik

## 4. Präsenzzeit

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

4. Präsenzunterricht

Ganzzahliger Optimierung: Gomory-Schnitt-Verfahren

16. Juni 2023

## Aktueller Stand

- ▶ 9. & 10. Woche Sensitivitätsanalyse
- ▶ **11. Woche**
  - **Präsenzunterricht:** Ganzzahliger Optimierung:  
Gomory-Schnitt-Verfahren
  - Einsendeaufgaben 3
- ▶ 12. Woche: ganzzahlige Optimierung fortgesetzt: Branch & Bound Verfahren
- ▶ Webkonferenz am Mo 3. Juli um 19:30: Beispielklausur
- ▶ Mittwoch 5. Juli: Erste Klausur

Der Inhalt der Folien folgt das Skript Seiten 70 bis 75.

## Ganzzahliger Optimierung Einführung

- ▶ Die zulässige Lösungen eines LPs sind reellwertig.
- ▶ Häufig soll die Optimallösung ganzzahlig sein. Z.B. Anzahl von Paletten/Wäschetrocknern, Objekt in einem Rucksack einpacken: ja oder nein, usw. ...
- ▶ Das intuitive Verfahren ist: das reellwertige LP zu lösen und anschließend die Lösung ganzzahlig zu runden — Dieses Vorgehensweise liefert nicht immer die ganzzahlige Optimallösung — Sieh das Zimmerman Ronny Beispiel (Skript Seite 8).
- ▶ Der Rechenaufwand bei dem reellwertigen Simplex-Algorithmus ist viel weniger als bei einem ganzzahligen Verfahren.

## IP und LP-Relaxierung

IP (vom Englisch *Integer Programming*)

$$\max Z(x_1, x_2) = x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+$$

LP-Relaxierung

$$\max Z(x_1, x_2) = x_2$$

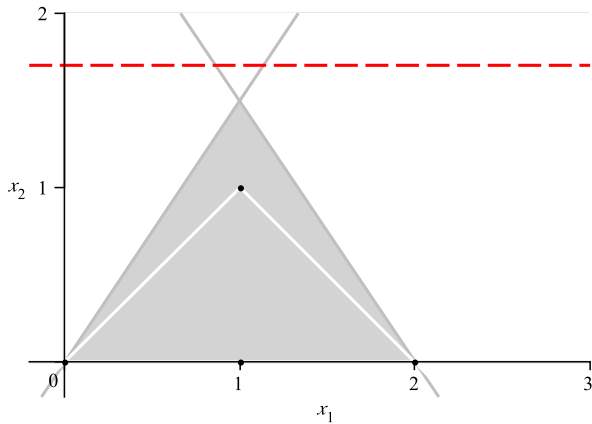
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

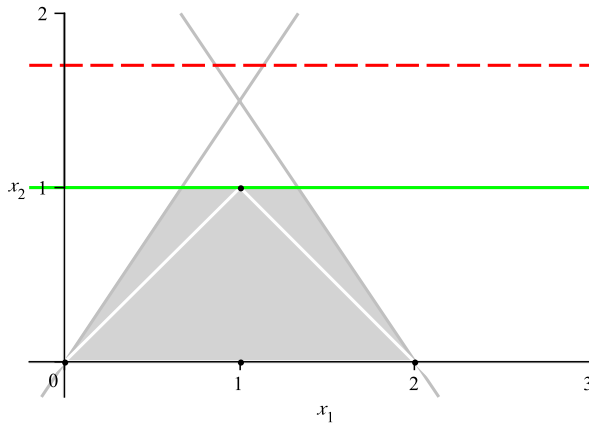
# Schnittebenenverfahren

## Überblick I



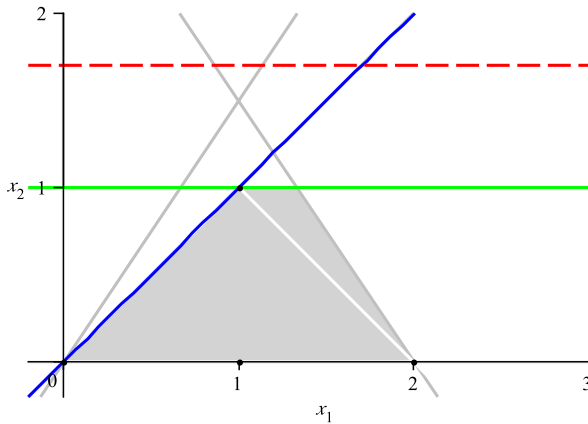
# Schnittebenenverfahren

## Überblick II



# Schnittebenenverfahren

## Überblick III



Eine **Schnittebene** ist eine Ungleichung:

- ▶ Alle ganzzahlige zulässige Lösungen erfüllen die Ungleichung;
- ▶ Die optimale Lösung der LP-Relaxierung erfüllt nicht die Ungleichung.

Eine Schnittebene schneidet die Optimale Lösung der Relaxierung ab bzw. schneidet einen Teil vom LP-zulässigen Bereich ab, der nicht für das IP zulässig ist.

### **Schnittebenenverfahren:**

- 1) Löse die LP-Relaxierung des IPs.

Falls die Lösung ganzzahlig ist - ENDE - IP optimale Lösung erreicht.

- 2) Sonst: Finde eine Schnittebene und füge zum IP hinzu und gehe zu 1.



## Gomory-Schnitte

Wir betrachten das folgende IP:

$$\begin{aligned}\max Z(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Dabei soll  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$  für alle  $i = \{1, \dots, n\}$  und  $j = \{1, \dots, m\}$  gelten.

Die Normalform der LP-Relaxierung:

$$\max Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+m} \geq 0.$$

Die Variablen  $x_{n+1} = y_1, x_{n+2} = y_2, \dots, x_{n+m} = y_m$  sind die Schlupfvariablen.

Führe das Simplex-Algorithmus durch.

## Beispiel

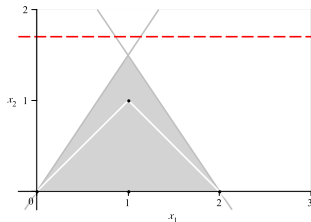
### IP in Grundform

$$\max Z_P(x_1, x_2) = x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.$$



### LP-Relaxierung Normalform

$$\max Z_P(x_1, x_2) = x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 + y_1 = 6$$

$$-3x_1 + 2x_2 + y_2 = 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

### Das Simplex-End-Tableau der LP-Relaxierung ist

Tab. 2		$y_1$	$y_2$
$Z$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x_1$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$x_2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Im Endtableau steht jede transformierte Restriktion mit einer Basisvariable (links) und den Nichtbasisvariablen (oben).

Tab. 2		$y_1$	$y_2$
$Z$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x_1$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$x_2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$x_2 + \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 = \frac{3}{2}$$

Das **Gomory-Schnitt** für  $x_2$  ist

$$-\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \leq -\frac{1}{2}$$

und wir führen eine neue Schlupfvariable ein.

$$-\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + s_1 = -\frac{1}{2}$$

Wie findet man die GS-Ungleichung?

$$-\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \leq -\frac{1}{2}$$

Auf beide Seiten der Ungleichung: jeden Koeffizienten abrunden\* und den originalen Koeffizienten subtrahieren.

$$x_2 + \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{rcl} (\lfloor \frac{1}{4} \rfloor - \frac{1}{4}) y_1 & + & (\lfloor \frac{1}{4} \rfloor - \frac{1}{4}) y_2 \leq (\lfloor \frac{3}{2} \rfloor - \frac{3}{2}) \\ -\frac{1}{4} y_1 & & -\frac{1}{4} y_2 \leq -\frac{1}{2} \end{array}$$

$\lfloor \alpha \rfloor$  bedeutet  $\alpha$  **abrunden**.

\*Beispiele

$$\lfloor 3.2 \rfloor = 3$$

$$\lfloor 2.0 \rfloor = 2$$

$$\lfloor -1.2 \rfloor = -2$$

## Gomory-Schnitt: Schnellmethode

Für einen positiven Koeffizienten:  
den Bruchanteil mal -1.

Z.B.        2.8        wird         $\lfloor 2.8 \rfloor - 2.8 = 2 - 2.8 = -0.8$

Für einen negativen Koeffizienten:  
(1- den Bruchanteil) mal -1.

Z.B.        -2.8        wird         $\lfloor -2.8 \rfloor + 2.8 = 2 - 2.8 = -0.2$

Lassen Sie die Basis-Variable wegfallen und  
Stellen Sie die Gleichung als eine „ $\leq$ “ Ungleichung  
bzw. als eine Gleichung mit neuer Schlupfvariable.

Weiteres Beispiel: (nicht aus der aktuellen IP)

Der Gomory-Schnitt auf  $x_4$  für

$$x_4 + 3\frac{3}{5}x_1 - 2\frac{1}{4}y_3 = 4\frac{4}{7}$$

wäre

$$-\frac{3}{5}x_1 - \frac{3}{4}y_3 \leq -\frac{4}{7}$$

bzw.

$$-\frac{3}{5}x_1 - \frac{3}{4}y_3 + s_1 = -\frac{4}{7}$$

Weiteres Beispiel: (nicht aus der aktuellen IP)

Der Gomory-Schnitt auf  $x_4$  für

$$x_4 + 3\frac{3}{5}x_1 - 2\frac{1}{4}y_3 = 4\frac{4}{7}$$

wäre

$$-\frac{3}{5}x_1 - \frac{3}{4}y_3 \leq -\frac{4}{7}$$

bzw.

$$-\frac{3}{5}x_1 - \frac{3}{4}y_3 + s_1 = -\frac{4}{7}$$

Die Gomory-Schnitt-Ungleichung hängt nur von Nichtbasisvariablen ab, und kann somit leicht als eine neue Zeile des Tableaus hinzugefügt werden.

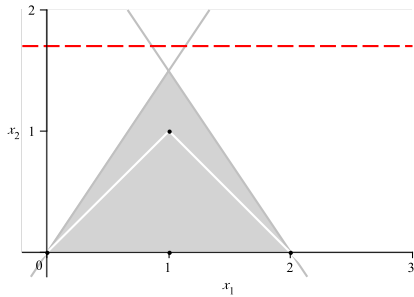


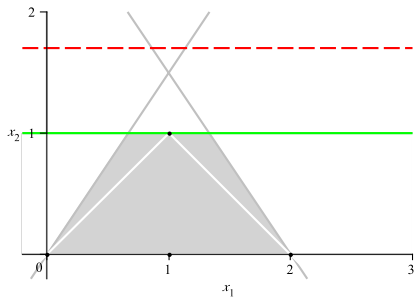
## Beispiel Fortgesetzt

Wir fügen den Gomory-Schnitt zu unserem Tableau samt der Schlupfvariablen  $s_1$  hinzu.

Der Simplex-Algorithmus setzt mit einem dualen Simplex-Schritt fort, da der Lösungswert der Gomory-Schnitt-Zeile negativ ist. Die neue Zeile ist die Pivotzeile.

Tab. G1		$y_1$	$y_2$
$Z$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x_1$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$x_2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$s_1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$





Der erste Gomory-Schnitt (grün) hinzugefügt.

Woher kommt die grüne Gerade? Was hat sie mit dem Gomory-Schnitt.

$$-\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \leq -\frac{1}{2}$$

zu tun?

Damit wir den Gomory-Schnitt sowohl im Rahmen des originalen Problems verstehen können als auch ihn grafisch darstellen können, formen wir die Ungleichung in eine Ungleichung mit nur die Strukturvariablen  $x_1$  und  $x_2$  um.

Man kann die Definition von der Schlupfvariablen  $y_1$  und  $y_2$  benutzen:

1. Restr.  $3x_1 + 2x_2 + y_1 = 6$

2. Restr.  $-3x_1 + 2x_2 + y_2 = 0$

$\Rightarrow y_1 = 6 - 3x_1 - 2x_2$

und  $y_2 = 3x_1 - 2x_2$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \leq -\frac{1}{2} \\ & -\frac{1}{4}(6 - 3x_1 - 2x_2) - \frac{1}{4}(3x_1 - 2x_2) \leq -\frac{1}{2} \\ & -\frac{3}{2} + 0x_1 + 1x_2 \leq -\frac{1}{2} \\ & x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Dieser Gomory-Schnitt entspricht der Ungleichung  $x_2 \leq 1$ .

Die Auflösung der neue Simplex-Algorithmus-Tableau (G1) ist.

Tab. G1		$y_1$	$y_2$
$Z$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x_1$	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
$x_2$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$s_1$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

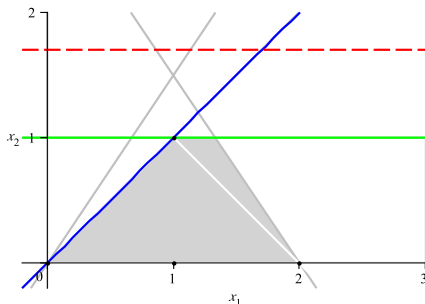
Tab. G2		$s_1$	$y_2$
$Z$	1	1	0
$x_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_2$	1	1	0
$y_1$	2	-4	1

Die neue optimale Lösung der LP-Relaxierung liefert einen gebrochenen Wert für  $x_1$ . Eine 2 Gomory-Schnitt-Ebene ist nötig.

Wir fügen den Gomory-Schnitt

$$-\frac{2}{3}s_1 - \frac{2}{3}y_2 + s_2 = -\frac{2}{3},$$

hinzu, der den Ungleichung  $x_1 \geq x_2$  entspricht (die blaue Linie).



Tab. G3		$s_1$	$y_2$
Z	1	1	0
$x_1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$x_2$	1	1	0
$y_1$	2	-4	1
$s_2$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Tab. G4		$s_2$	$s_1$
Z	1	0	1
$x_1$	1	$-\frac{1}{2}$	1
$x_2$	1	0	1
$y_1$	1	$\frac{3}{2}$	-5
$y_2$	1	$-\frac{3}{2}$	1

Im End-Tableau gibt es keine gebrochenen Werte für die Basisvariable. Die optimale ganzzahlige Lösung lautet:  $x_1 = x_2 = 1$  mit dem Zielfunktionswert 1.



## Bemerkungen:

- ▶ Wenn es eine Auswahl von nicht ganzzahligen Entscheidungsvariablen gibt, wählen Sie die **Entscheidungsvariable** mit dem größten Bruchanteil.
- ▶ Der Nachteil des Schnittebenenverfahrens von Gomory ist, dass die numerische Probleme durch mangelnde Genauigkeit der Zahlendarstellung im Computer die Lösungssuche erschweren.

## Aufgabe

Lösen sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

$$\max Z(x_1, x_2) = 12x_1 + 10x_2$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+.$$

Simplex-Algorithmus auf die LP-Relaxierung

Tab. 0		$x_1$	$x_2$
$Z$	0	-12	-10
$y_1$	8	2	2
$y_2$	15	5	3

Tab. 1		$y_2$	$x_2$
Z	36	2.4	-2.8
$y_1$	2	-0.4	0.8
$x_1$	3	0.2	0.6

Tab. 2		$y_2$	$y_1$
Z	43	1	3.5
$x_2$	2.5	-0.5	1.25
$x_1$	1.5	0.5	-0.75

Bestimmen Sie den Gomory-Schnitt für die  $x_2$  Zeile als:

- (a) Eine  $\leq$  Ungleichung.
- (b) Eine Gleichung mit einer neuen Schlupfvariable
- (c) Eine Ungleichung mit  $x_1$  und  $x_2$ .

Hinweis: Die Schlupfvariablen sind

$$y_1 = 8 - 2x_1 - 2x_2$$

$$y_2 = 15 - 5x_1 - 3x_2$$

## Anhang zur Aufgabe

Um die IP zu vervollständigen die Simpl-Alg Tabellen sind

Tab. G1		$y_2$	$y_1$
Z	43	1	3.5
$x_2$	2.5	-0.5	1.25
$x_1$	1.5	0.5	-0.75
$s_1$	-0.5	-0.5	-0.25

Tab. G2		$s_1$	$y_1$
Z	42	2	3
$x_2$	3	-1	1.5
$x_1$	1	1	-1
$y_2$	1	-2	0.5

Mit optimaler ganzzahligen Lösung:  $x_1^* = 1$ ,  $x_2^* = 3$ ,  $z^* = 42$ ,