# Operations Research
# Simplex Algorithmus: tabellarisches Verfahren

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

Zweite Präsenzzeit 5. Mai 2023

---

## Aktueller Stand

Linear Programmierung (LP) in Grundform und Normalform LP Lösung – Grafische Methode

Letzte Präsenzzeit: LP Lösung – Naiver Algorithmus
Einsendeaufgabe: LP Lösung – Naiver Algorithmus
LP Formulierung

Letzte Woche (Video)
Der Simplex-Algorithmus, Methode des Gleichungssystem.

+ Findet die Optimale Lösung in weniger Schritten.
+ Deutlich zeigt die geometrische Darstellung jeder Lösung
- Ist mathematisch aufwendig.

Heute lernen Sie ein **tabellarisches Verfahren** des Simplex-Algorithmus, das die Methode des Gleichungssystem folgt, aber ist schneller anzuwenden. Es lohnt sich ein paar Regeln zu lernen damit Sie können die optimale Lösung schnell finden....

**Beispiel** Nochmal die Gewinnmaximierung-LP in Grundform:

$$\max Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$



## Der Simplex-Algorithmus

### Die Idee des Simplex-Algorithmus:

- Der Ausgangspunkt ist der Ursprung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
- Wähle einen Nachbarpunkt — tausche eine Basisvariable mit einer Nichtbasisvariable aus.
- Umforme das Gleichungssystem, um die neue Basis zu bestimmen.
- Wiederhole, bis keine bessere Nachbarpunkt sich finden lässt.

Beide Varianten des Simplex-Algorithmus besuchen die gleiche Eckpunkte bis die optimale Stelle gefunden wird. Nur die Darstellung der 2 Methoden ist unterschiedlich.

## Simplex Algorithmus: tabellarisches Verfahren

Die Iterationssschritte des Algorithmus werden in Gestalt von **Tableaus** durchgeführt.

Das Starttableau besteht aus dem folgenden Gleichungssystem, dessen erste Gleichung der Zielfunktion des LPs entspricht.

$$\begin{array}{rcl}
-c_1x_1 - \ c_2x_2 - \cdots - \ c_nx_n + \boldsymbol{Z} & = & 0 \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \boldsymbol{y_1} & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + \boldsymbol{y_2} & = & b_2 \\
& \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + \boldsymbol{y_m} & = & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m & \geqslant & 0.
\end{array}$$



| Tab. 0 | | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | $0$ | $-c_1$ | $-c_2$ | $\ldots$ | $-c_n$ |
| $y_1$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\ldots$ | $a_{1n}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $y_m$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\ldots$ | $a_{mn}$ |

Wir starten mit der Iteration im Nullpunkt: alle Strukturvariablen $x_i$ sind Nichtbasisvariablen.

**0. Schritt**

Um die Zahlen in Tableau nachvollziehen zu können, stellen wir die Gleichungen so um, dass links die Basisvariablen und rechts die Nichtbasisvariablen stehen.

$$\begin{aligned} Z - 4x_1 - 3x_2 &= 0 & \\ y_1 + 0x_1 + 1x_2 &= 6 & \text{(I)} \\ y_2 + 1x_1 + 1x_2 &= 7 & \text{(II)} \\ y_3 + 3x_1 + 2x_2 &= 18 & \text{(III)} \end{aligned}$$

| Tab. 0 | | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | -4 | -3 |
| $y_1$ | 6 | 0 | 1 |
| $y_2$ | 7 | 1 | 1 |
| $y_3$ | 18 | 3 | 2 |



**1. Schritt**

**A. Wahl der Pivotspalte[1]:** $x_1$ ist der größte negative NBV-Wert in der Z-Zeile, d.h. $x_1$ verspricht einen größeren Zuwachs der Zielfunktion (per Einheit). Entscheiden wir, dass diese Variable in die Basis wechselt.

[1] Pivot - Dreh und Angelpunkt

**B. Wahl der Pivotzeile:** Welche Variable verlässt nun die Basis?
Wie weit kann $x_1$ wachsen, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen?
Dabei gilt: $x_2 = 0$ und $y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$.

- In (I) tritt $x_1$ gar nicht auf.
- In (II) kann $x_1$ maximal 7 werden.
- In (III) kann $x_1$ maximal 6 werden.

Aus (II) und (III) folgt:

$$\begin{array}{llcrcl}
\text{(II)} & y_2 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & 7 - x_1 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & x_1 \leqslant 7 \\
\text{(III)} & y_3 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & 18 - 3x_1 \geqslant 0 & \Leftrightarrow & x_1 \leqslant 6
\end{array}$$

Die dritte Gleichung begrenzt die Wachstumsmöglichkeiten von $x_1$ auf 6, indem die zugehörige Schlupfvariable $y_3$ auf Null gesetzt wird. $y_3$ verlässt die Basis.



Der schnellste Weg die Pivotzeile zu bestimmen ist das Verhältnis zwischen der Lösungsspalte und Pivotspalte rechts von der Tabelle zu notieren.
Diese Werte heißen informell Theta-Werte.
Wähle den kleinsten positiven Theta-Wert.

| Tab. 0 | | $x_1$ | $x_2$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $Z$ | 0 | -4 | -3 | |
| $y_1$ | 6 | 0 | 1 | $\frac{6}{0} = \infty$ |
| $y_2$ | 7 | 1 | 1 | $\frac{7}{1} = 7$ |
| $y_3$ | 18 | 3 | 2 | $\frac{18}{3} = 6 \rightarrow$ |
| | | $\uparrow$ | | |

## C. Umrechnung der Tableau-Koeffizienten

Die Umrechnung im Tableau funktioniert wie folgt:

- Die Variable $x_1$ und $y_3$ tauschen ihre Plätze. Aus Gleichung (III)

$$y_3 + 3x_1 + 2x_2 = 18 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{2}{3}x_2 = 6$$

- $x_1$ in (Z), (I) und (II) ist durch

$$-\tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2 + 6$$

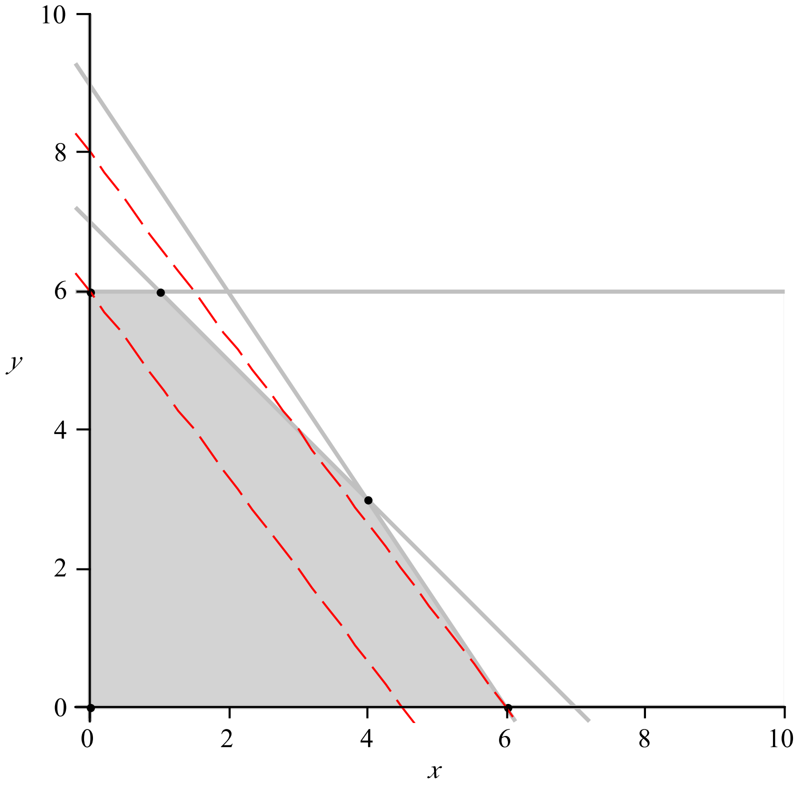
  ersetzt.

- Damit werden die Werte aller Koeffizienten im Tableau umgerechnet.



$$\begin{aligned}
Z + \tfrac{4}{3}y_3 - \tfrac{1}{3}x_2 &= 24 \\
y_1 + 0y_3 + x_2 &= 6 && \text{(I)} \\
y_2 - \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{1}{3}x_2 &= 1 && \text{(II)} \\
x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{2}{3}x_2 &= 6 && \text{(III)}
\end{aligned}$$

| Tab. 1 | | $y_3$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $Z$ | 24 | $\frac{4}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ |
| $y_1$ | 6 | 0 | 1 |
| $y_2$ | 1 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $x_1$ | 6 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |




1.Schritt: Tausch in die Ecke $(6, 0)$.



**2. Schritt**

**A. Wahl der Pivotspalte:** Wir erhalten einen höheren Zielfunktionswert ($Z$) nur dann, wenn wir den Wert der Variable $x_2$ erhöhen (wegen des negativen Zielfunktionskoeffizienten). $x_2$ wechselt in die Basis.

**B. Wahl der Pivotzeile:** Welche Variable verlässt nun die Basis? Wie weit kann $x_2$ wachsen, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen? Dabei gilt: $y_3 = 0$ und $y_1, y_2, x_1 \geqslant 0$.

- In (I) kann $x_2$ maximal 6 werden.
- In (II) kann $x_2$ maximal 3 werden.
- In (III) kann $x_2$ maximal 9 werden.

Die zweite Gleichung begrenzt das Wachstum von $x_2$. $y_2$ wird auf Null gesetzt und damit verlässt die Basis.

**C. Umrechnung der Tableau-Koeffizienten**:

1) Die Variable $x_2$ und $y_2$ tauschen ihre Plätze.
2) Die Werte aller Koeffizienten im Tableau werden umgerechnet. Hierzu wird das Gleichungssystem wieder so umgestellt, dass links die Nichtbasisvariable steht und rechts nur die Basisvariablen. Zuerst stellen wir die Gleichung um, wo $x_2$ und $y_2$ (die Variablen die die Plätze getauscht haben) beide vorkommen, also die Gleichung (II). Und dann ersetzen wir $x_2$ in allen übrigen Gleichungen.



$$\begin{aligned} Z + 1y_3 + 1y_2 &= 25 \\ y_1 + 1y_3 - 3y_2 &= 3 \qquad \text{(I)} \\ x_2 - 1y_3 + 3y_2 &= 3 \qquad \text{(II)} \\ x_1 + 1y_3 - 2y_2 &= 4 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

| Tab. 2 | | $y_3$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $Z$ | 25 | 1 | 1 |
| $y_1$ | 3 | 1 | -3 |
| $x_2$ | 3 | -1 | 3 |
| $x_1$ | 4 | 1 | -2 |

Alle NBV-Einträge in der Z-Zeile sind positiv. Es gibt keine weitere Eintrittsvariable.

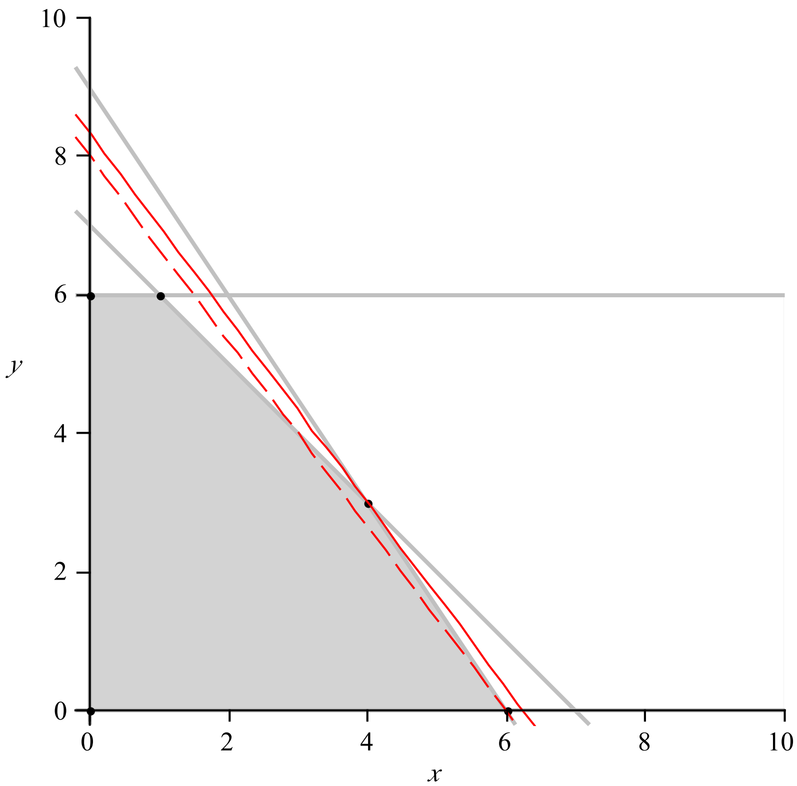
**Ende des Verfahrens**

$Z^* = 25$ mit $x_1^* = 4$ , $x_2^* = 3$.

## Interpretation des Endtableaus

- $Z^* = 25$.
- Strukturvariablen in der 0. Spalte: optimale Lösung $x_1^* = 4$ , $x_2^* = 3$.
- Falls Strukturvariablen in der Z-Zeile sind, wäre die optimalen Werte diese Variablen gleich Null.
- Die Schlupfvariablen $y_1$ in der 0. Spalte zeigt, dass der Schlupf dieser Restriktion positive ist.
  $y_1$=3 bedeutet, es bleiben 3 freie Stunden an Kapazität der Maschine A übrig.
- Schlupfvariablen unter den Nichtbasisvariablen: Welche Ecke welcher Restriktionen befindet sich die optimale Lösung:
  Maschine B und C werden voll ausgelastet.
- Die Werte in der Z-Zeile, die zur Schlupfvariablen gehören, stellen deren *Schattenpreise* dar.






2.Schritt: Tausch in die Ecke $(4, 3)$.

Im Skript Seiten 37 & 38 finden Sie ein algorithmischer Zusammenfassung der tabellarischen Verfahren.

Viel Einfacher ist durch eine verbale Erklärung
Beispiel: Eine LP in Normalform

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Unter} \quad x_1 + 3x_2 + y_1 &= 9 \\ x_1 + x_2 + y_2 &= 12 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Tafelarbeit



## Anmerkung

Es gibt kleine Varianten vom Tabellenformat.
Viele Bücher und Webseite benutzen eine „erweiterte Form“ der Tabelle

| Tab. 0 | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | Lösung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| $y_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| $y_3$ | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 |
| $Z$ | -4 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| Tab. 2 | $x_1$ | $x_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | Lösung |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 0 | 1 | -3 | 1 | 3 |
| $x_2$ | 0 | 1 | 0 | 3 | -1 | 3 |
| $x_1$ | 1 | 0 | 0 | -2 | 1 | 4 |
| $Z$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 25 |

Die erweiterte Form ist aufwendiger, aber sie übermittelt keine weitere Information.

Es ist ein klein bisschen einfacher zu programmieren.

Das Skript benutzt die kompakte Form, für mehrere LP-Themen.

Sie dürfen die erweiterte Form anwenden, aber dann ist es Ihre Verantwortung, die anderen Themen in die erweiterte Form zu „übersetzen“.



## Aufgabe: Simplex-Algorithmus tabellarisches Verfahren

$$\max Z(x, y) = 2x_1 + 3x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leqslant 9 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Stellen Sie die LP in Normalform und Lösen Sie sie mit Hilfe der tabellarischen Methode.

Aufgabenblatt 5:
Am besten finden Sie Zeit an den Tagen direkt nach der Präsenzzeit (6.-8.05.2023), um diese Aufgaben zu bearbeiten.

## Zusammenfassung

Seit dem Semesteranfang haben Sie vier Methoden um eine LP in Grundform zu lösen:

**Grafisch** Einfach zu verstehen. Nur für LP mit 2 Strukturvariablen, benötigt ein gutes Darstellung der zulässigen Bereich, schwierig mit viele Restriktionen

**Naiver Algorithmus** Ineffizient: Man muss viele Eckpunkte bestimmen.

**Simplex-Algorithmus: Gleichungssystem** Findet schnell die Optimale Lösung, erklärt die geometrische Darstellung, ist mathematisch aufwendig.

**Simplex-Algorithmus: tabellarisches Verfahren** Schnell anzuwenden, einfach zu Programmieren, Black-Box-Verfahren.



## Kommende Wochen

- 2. Präsenzzeit: 5. Mai (heute)
- Aufgabenblatt 5: 6.-11. Mai
- 6. Unterrichtswoche : 11.-18. Mai
- Keine Sprechstunde am 18. Mai wegen des Feiertages.
- Nächste Präsenzzeit: Freitag 2. Juni um 19:30
- **2. Einsendeaufgabe**: 25. Mai - 1. Juni

...