Operations Research
Transportproblem

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

Vorlesung Transportproblem

Berliner Hochschule für Technik

Transportproblem

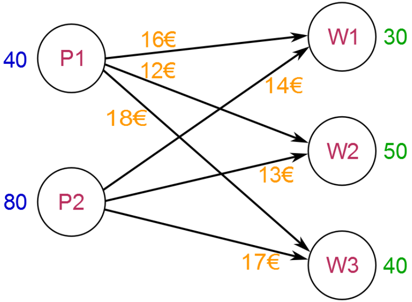
Der Inhalt folgt das Skriptteil 2.6.2, Seiten 52 bis 62.

Beispiel 2.13 Eine Firma produziert Wäschetrockner an zwei Standorten. Von den beiden Produktionsorten werden drei verschiedene Warenhäuser beliefert.

Die Transportkosten stehen in der Tabelle.
Die Restriktionen sind die Bedarfe der jeweiligen Warenhäuser und die Kapazitäten der Produktionsstandorte.
Das Ziel ist die Kosten zu minimieren mit zulässigem Bedarf und Kapazität.

	Warenhaus W1	Warenhaus W2	Warenhaus W3	Kapazität
Produktionsort P1	16 €	12 €	18 €	40
Produktionsort P2	14 €	13 €	17 €	80
Bedarf	30	50	40	

Das Problem lässt sich grafisch zusammenfassen.



Die Strukturvariable x_{ij} sind die Anzahl der Trockner vom Produktionsort i an das Warenhaus j.

	Warenhaus W1	Warenhaus W2	Warenhaus W3	Kapazität
Produktionsort P1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	40
Produktionsort P2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	80
Bedarf	30	50	40	

Die Strukturvariable x_{ij} sind die Anzahl der Trockner vom Produktionsort i an das Warenhaus j.

	Warenhaus W1	Warenhaus W2	Warenhaus W3	Kapazität
Produktionsort P1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	40
Produktionsort P2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	80
Bedarf	30	50	40	

Daraus ergibt sich folgende Zielfunktion.

$$\min Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 16x_{11} + 12x_{12} + 18x_{13} + 14x_{21} + 13x_{22} + 17x_{23}$$

Die Strukturvariable x_{ij} sind die Anzahl der Trockner vom Produktionsort i an das Warenhaus j.

	Warenhaus W1	Warenhaus W2	Warenhaus W3	Kapazität
Produktionsort P1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	40
Produktionsort P2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	80
Bedarf	30	50	40	

Daraus ergibt sich folgende Zielfunktion.

$$\min Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 16x_{11} + 12x_{12} + 18x_{13} + 14x_{21} + 13x_{22} + 17x_{23}$$

Die Kapazität muss berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 80 \end{aligned}$$

Der Bedarf der Warenhäuser soll bedeckt werden:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 30 \\ x_{12} + x_{22} &= 50 \\ x_{13} + x_{23} &= 40 \end{aligned}$$

Und die Nichtnegativitätbedingungen:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geqslant 0.$$

Das LP-Grundmodell zu diesem Problem:

$$\max Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = -16x_{11} - 12x_{12} - 18x_{13} - 14x_{21} - 13x_{22} - 17x_{23}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x13 &\leqslant 40\\
-x_{11} - x_{12} - x13 &\leqslant -40\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leqslant 80\\
-x_{21} - x_{22} - x_{23} &\leqslant -80\\
x_{11} + x_{21} &\leqslant 30\\
-x_{11} - x_{21} &\leqslant -30\\
x_{12} + x_{22} &\leqslant 50\\
-x_{12} - x_{22} &\leqslant -50\\
x_{13} + x_{23} &\leqslant 40\\
-x_{13} - x_{23} &\leqslant -40
\end{aligned}$$

Wir stellen das Ursprungsmodell in einer kompakterer Form.

Die Transportkosten stellen wir in einer Matrix $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 3}$ dar:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 18 \\ 14 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das Ursprungsmodell in einer kompakterer Form.

Die Transportkosten stellen wir in einer Matrix $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 3}$ dar:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 18 \\ 14 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Die Kapazitäten speichern wir in einem Vektor $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Wir stellen das Ursprungsmodell in einer kompakterer Form.

Die Transportkosten stellen wir in einer Matrix $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 3}$ dar:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 18 \\ 14 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Die Kapazitäten speichern wir in einem Vektor $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

und der Bedarf der Warenhäuser ebenso in einem Vektor $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

So lässt sich unser Transportproblem folgend darstellen:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\forall_{i,1 \leqslant i \leqslant 2} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = d_i,$$

$$\forall_{j,1 \leqslant j \leqslant 3} \sum_{i=1}^{2} x_{ij} = e_j,$$

$$\forall_{i,1 \leqslant i \leqslant 2} \forall_{j,1 \leqslant j \leqslant 3} \ x_{ij} \geqslant 0.$$

So lässt sich unser Transportproblem folgend darstellen:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\forall_{i, 1 \leqslant i \leqslant 2} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = d_i,$$

$$\forall_{j, 1 \leqslant j \leqslant 3} \sum_{i=1}^{2} x_{ij} = e_j,$$

$$\forall_{i, 1 \leqslant i \leqslant 2} \forall_{j, 1 \leqslant j \leqslant 3} \; x_{ij} \geqslant 0.$$

Unser Transportproblem lässt sich folgend in der Matrixform darstellen:

$$\max Z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}.$$

Dabei gilt:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie werden sehen dass die Lösung ganzzahlige Werte hat, obwohl wir bewusst reelle Werte für die Strukturvariablen zugelassen haben. Dieses ist kein Zufall.

Bei den Transportproblemen weist die Matrix $\boldsymbol{A}$ der technischen Koeffizienten eine besondere Struktur auf.

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist *total unimodular*.

Satz 2.5

Gegeben sei eine lineare Programmierung der Form

$$\{\max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geqslant 0\}.$$

Wenn $\boldsymbol{A}$ eine total unimodulare Matrix ist und $\boldsymbol{b}$ ausschliesslich ganzzahlige Einträge beinhaltet, dann ist die optimale Lösung dieses LPs ganzzahlig, unabhängig von den Werten der Zielfunktionskoeffizienten $\boldsymbol{c}$.

Satz 2.6

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ ist **total unimodular**, wenn

1) $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}, \quad \forall\, i, j.$
2) Jeder Spalte beinhaltet höchstens zwei Koeffizienten ungleich 0.
3) Es gibt eine Unterteilung (Z_1, Z_2) der Zeilenindexmenge, so dass für jede Spalte j, die zwei Nicht-Null-Koeffizienten beinhaltet, gilt

$$\sum_{i \in Z_1} a_{i,j} - \sum_{i \in Z_2} a_{i,j} = 0.$$

Satz 2.7

Die Matrix eines Transportproblems ist total unimodular.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass alle drei Bedingungen aus Satz 2.6 für unsere Matrix $\boldsymbol{A}$ gelten. Deswegen ist $\boldsymbol{A}$ total unimodular und daher die Lösung zu unserem Transportproblem ganzzahlig.

Optimierungsverfahren

Wir wollen nun einen alternativen Ansatz zur Lösung des Transportproblems erarbeiten.

Das Verfahren ist eine Variante der Simplexmethode. Wir wechseln von einer zulässigen Basislösung zur anderen, aber wir stellen keine Simplex-Algorithmustableaus auf, sondern tragen die aktuelle Basislösung als Transportvorschlag in die Darstellung ein.

Der Ansatz ist einer *initial zulässigen Basislösung* zu erstellen (Nordwesteckenregel), bevor ein *Austauschverfahren* die optimale Lösung iterativ aussucht.

Konstruktion einer initial zulässigen Basislösung

Wir benötigen zum Verfahrensstart eine initiale zulässige Basislösung.

Wir wenden die **Nordwesteckenregel** an. Die Idee dahinter lautet: Verteile die Waren in möglichst großen Lieferungen, nach der Reihe der Indizes.

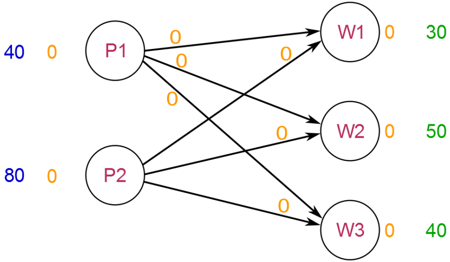
Der Verteilung der Waren beginnt in der **Nordwest-Ecke**

Nordwesteckenregel

Sehen Sie das Skript für eine formale Aufgliederung des Algorithmus

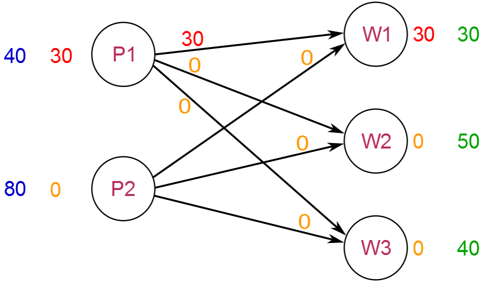
Wäschetrockner Beispiel: Anfangs sind keine Waren zugeteilt

	W1	W2	W3	
P1	16 € 0	12 € 0	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 0	17 € 0	80
	30	50	40	€0



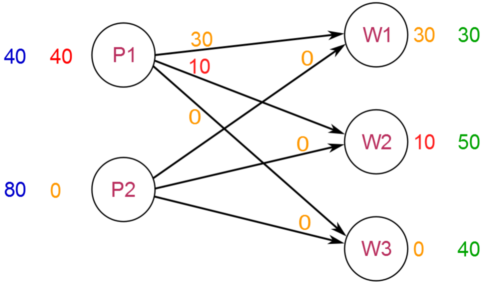
Erster Schritt: Produktionsort P1 hat 40 Einheiten verfügbar, davon dürfen 30 nach W1 geliefert werden, um das W1 Bedarf zu decken.

	W1	W2	W3	
P1	16 € **30**	12 € 0	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 0	17 € 0	80
	30	50	40	**480 €**



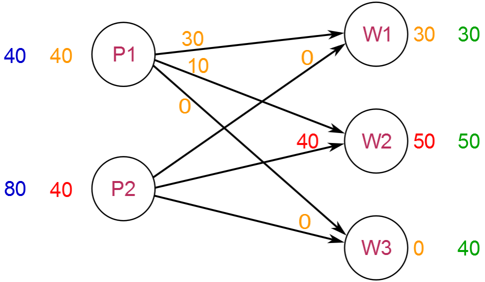
2. Schritt. Produktionsort P1 hat noch zehn Einheiten übrig. Diese kann es an Warenhaus W2 liefern, der danach noch Restbedarf 40 hat.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 30	12 € **10**	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 0	17 € 0	80
	30	50	40	**600** €



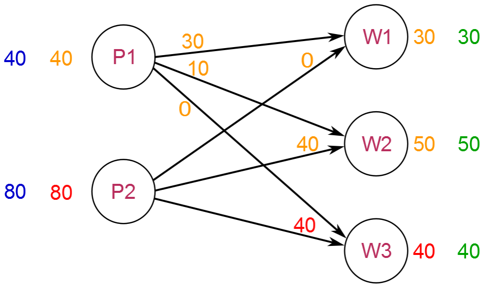
3) Produktionsort P2 kann 40 Einheiten an Warenhaus W2 liefern, dessen Bedarf ist damit gedeckt.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 30	12 € 10	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € **40**	17 € 0	80
	30	50	40	**1120** €



4) Produktionsort P2 kann die restlichen 40 Einheiten an Warenhaus W3 liefern, dessen Bedarf ist damit gedeckt.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 30	12 € 10	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 40	17 € **40**	80
	30	50	40	**1800** €



Die letzte Tabelle und das letzte Diagramm ist die initiale Basislösung.
Der unten rechts Tabellenwert ist der zugehörige Zielfunktionswert

$$
\begin{aligned}
&16 \cdot 30 + 12 \cdot 10 + 18 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 13 \cdot 40 + 17 \cdot 40 \\
&= 480 + 120 + 520 + 680 \\
&= 1800
\end{aligned}
$$

So lange die Gesamtkapazität passt zu dem Gesamtbedarf ist der Lieferungsentwurf vollständig und zulässig

Satz 2.8

Die Nordwesteckenregel erzeugt eine zulässige initiale Basislösung für das gegebene TP. Jedes TP besitzt einen nicht-leeren zulässigen Bereich.

Optimierung: Austauschschritt

Die initiale Basislösung ist zulässig aber nicht optimal.

Wie beim Simplex-Algorithmus verwenden wir einen Austauschschritt.

Die nicht Null x_{ij} Koeffizienten sind die Basis Variablen BV

Die Null x_{ij} Koeffizienten sind die nicht Basis Variablen NBV

Wir skizzieren zunächst die grobe Idee:

1) Führe einen potentiellen Austauschschritt für jede NBV durch.
2) Erhöhe den Wert der NBV so weit, wie man es mittels Korrektur entlang eines bestimmtem „Zickzackweges” von Basiskanten ausgleichen kann:
   a) Finde die BV mit dem größten Kosten in der Austausch-NBV Spalte.[1] (grün)
   b) Finde eine Paar Ausgleich-Variablen, die ein Rechteck mit der Austauschvariablen in 2) bilden, und deren Netto Kostenänderung pro Einheit negativ ist (blau).
3) Erhöhe dazu den Nichtbasiskantenwert soweit, die Lösung mittels Korrektur der Ausgleich-Variablen zulässig bleiben kann.
4) Wiederholen bis es keinen weiteren Austauschschritt gibt. So liegt bereits das Optimum vor.

[1] oder mit dem größten Kosten in der Austausch-NBV Zeile

	W1	W2	W3	
P1	16 € / 30	12 € / 10	18 € / 0	40
P2	14 € / 0	13 € / 40	17 € / 40	80
	30	50	40	1800 €

Wähle NBV (P2,W1). Austausch mit (P1,W1) bringt 2€ pro Einheit weniger Kosten.

Mögliche Ausgleiche: (P2,W2) zu (P1,W2) oder (P2,W3) zu (P1,W3).
(P2,W2) zu (P1,W2) gibt 1€ pro Einheit weniger Kosten.
(P2,W3) zu (P1,W3) braucht 1€ pro Einheit mehr.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 30	12 € 10	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 40	17 € 40	80
	30	50	40	1800 €

Tauschen 30 Einheiten von (P1,W1) zu (P2,W1)
mit Ausgleich von (P2,W2) zu (P1,W2).

	W1	W2	W3	
P1	16 € 0	12 € 40	18 € 0	40
P2	14 € 30	13 € 10	17 € 40	80
	30	50	40	1710 €

Die ergebenden Kosten sind $30 \cdot 2€ + 30 \cdot 1€ = 90€$ niedriger.

Die Variable x_{11} (P1,W1) wird aus der Basis entfernt und auf Null gesetzt.

Die Variable x_{21} (P2,W1) wird in die Basis aufgenommen mit neuem Wert 30.

Die Variable x_{12} (P1,W2) sowie x_{22} (P2,W2) nimmt die neuen Werte 40 bzw. 10 an, um die Basislösung zulässig beizubehalten.

Wir suchen noch einen Austauschschritt.

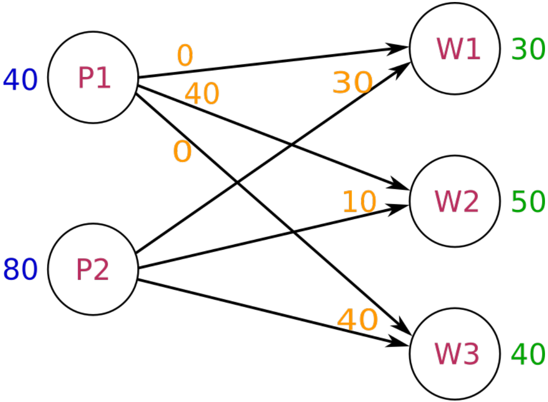
Für W1 ist keine weitere Austausch möglich, alle Einheiten bei der preiswertesten Kante liegen.

Für W2 ist keine weitere Austausch möglich, weil W2 keine Nichtbasisvariable hat.

Für W3 ist keine weitere Austausch möglich, weil alle Einheiten bei der preiswertesten Kante liegen.

Diese Lösung ist die optimale Lösung.

Optimale Lösung



$x_{11}^* = 0$, $x_{12}^* = 40$, $x_{13}^* = 0$, $x_{21}^* = 30$, $x_{22}^* = 10$, $x_{23}^* = 40$, und $Z^* = 1710$

Aufgabe

Gegeben ist das folgende TP

	W1	W2	W3	
P1	9 €	1 €	3 €	5
P2	4 €	4 €	8 €	7
	4	4	4	

(a) Benustzen Sie die Nordwesteckenregel um eine zulässige Basislösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die Kosten der Lösung aus Teil (a).

(c) Verwenden Sie Austauschschritte um die optimale Lösung zu erreichen.

Aufgabe

Gegeben ist das folgende TP

	W1	W2	W3	
P1	9 €	1 €	3 €	5
P2	4 €	4 €	8 €	7
	4	4	4	

(a) Benustzen Sie die Nordwesteckenregel um eine zulässige Basislösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die Kosten der Lösung aus Teil (a).

(c) Verwenden Sie Austauschschritte um die optimale Lösung zu erreichen.

Aufgabe

Gegeben ist das folgende TP

	W1	W2	W3	
P1	9 €	1 €	3 €	5
P2	4 €	4 €	8 €	7
	4	4	4	

(a) Benustzen Sie die Nordwesteckenregel um eine zulässige Basislösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die Kosten der Lösung aus Teil (a).

(c) Verwenden Sie Austauschschritte um die optimale Lösung zu erreichen.

Aufgabe

Gegeben ist das folgende TP

	W1	W2	W3	
P1	9 €	1 €	3 €	5
P2	4 €	4 €	8 €	7
	4	4	4	

(a) Benustzen Sie die Nordwesteckenregel um eine zulässige Basislösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die Kosten der Lösung aus Teil (a).

(c) Verwenden Sie Austauschschritte um die optimale Lösung zu erreichen.

Aufgabe

Gegeben ist das folgende TP

	W1	W2	W3	
P1	9 €	1 €	3 €	5
P2	4 €	4 €	8 €	7
	4	4	4	

(a) Benustzen Sie die Nordwesteckenregel um eine zulässige Basislösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die Kosten der Lösung aus Teil (a).

(c) Verwenden Sie Austauschschritte um die optimale Lösung zu erreichen.

Aufgabe

Gegeben ist das folgende TP

	W1	W2	W3	
P1	9 €	1 €	3 €	5
P2	4 €	4 €	8 €	7
	4	4	4	

(a) Benustzen Sie die Nordwesteckenregel um eine zulässige Basislösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die Kosten der Lösung aus Teil (a).

(c) Verwenden Sie Austauschschritte um die optimale Lösung zu erreichen.

Aufgabe

Gegeben ist das folgende TP

	W1	W2	W3	
P1	9 €	1 €	3 €	5
P2	4 €	4 €	8 €	7
	4	4	4	

(a) Benustzen Sie die Nordwesteckenregel um eine zulässige Basislösung zu finden.

(b) Bestimmen Sie die Kosten der Lösung aus Teil (a).

(c) Verwenden Sie Austauschschritte um die optimale Lösung zu erreichen.