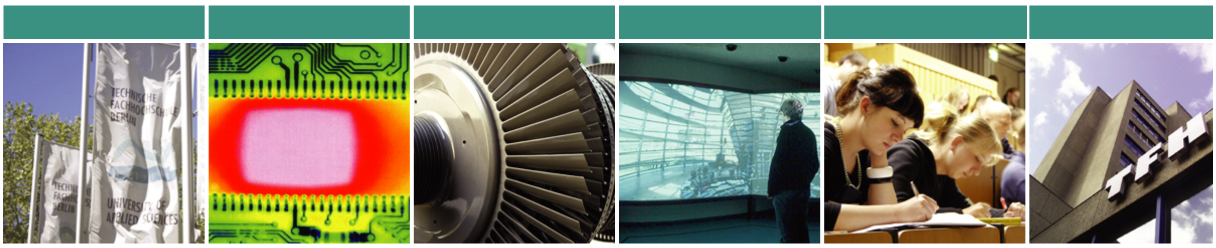
Operations Research Skript

Ba Wirtschaftsinformatik, Sommersemester 2023

Prof. Dr. Tim Downie

Version 1.0
Letzte Änderung: 14.03.2023



Vorlesungsskript

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

1.1 Operations Research

Operations Research (OR) beschäftigt sich mit der Analyse betrieblicher und wirtschaftlicher Prozesse zwecks Entscheidungsvorbereitung unter Anwendung mathematischer Methoden. Operations Research ist geprägt durch die Zusammenarbeit von Angewandter Mathematik, Wirtschaftswissenschaften und Informatik. Drei Aspekte sind charakteristisch für das OR:

1. Die Quantifizierung eines Problems - genaue, zahlenmäßige Problemformulierung und Zielsetzung.
2. Das Optimalitätsstreben - typischerweise die Maximierung des Gewinns, der Umsätze bzw. die Minimierung von Kosten oder Durchlaufzeiten.
3. Die Modellierung - die Überführung der Realität in ein formales (mathematisches) Problem.

Der Begriff *Operations Research* oder *Operational Research* stammt ursprünglich aus dem Militärwesen. Er wurde 1937 für eine Gruppe von Wissenschaftlern verwendet, die den optimalen Aufbau eines Radarüberwachungssystems für die britischen Streitkräfte erforschen sollte. Weitere Fragestellungen der im Zweiten Weltkrieg in Großbritannien, den USA und der Sowjetunion, die ähnliche Forschergruppen gründeten, waren unter anderem die optimale Menge von Schiffen und Begleitschutz für Schiffskonvois oder eine optimale Breite von Bombenteppichen in Bezug auf Genauigkeit und Streubreite. Nach dem Krieg wendeten sich die Mitarbeiter ökonomischen Bereichen zu, mit der Aufgabenstellung, ein gewünschtes

Ergebnis mit geringsten Kosten zu erreichen, bzw. mit gegebenen Mitteln das bestmögliche Ergebnis zu erzielen.

Für Operations Research konnte sich allgemeingültig kein deutscher Begriff durchsetzen. Verwendet werden die Begriffe *Unternehmensforschung, Operationsforschung* oder *mathematische Planungsrechnung*.

Wichtigstes Teilgebiet des Operations Research ist die mathematische Optimierung, insbesondere die ganzzahlige Optimierung (ein Teilgebiet der diskreten Mathematik). Je nach Sichtweise und Aufgabenstellung wird Operations Research in verschiedenen Teilgebieten betrachtet:

- ▶ Lineare Optimierung
- ▶ Ganzzahlige lineare Optimierung und kombinatorische Optimierung
- Dynamische Programmierung
- Nichtlineare Optimierung
- Heuristisches Verfahren
- Entscheidungstheorie
- Spieltheorie
- Graphentheorie
- Netzplantechnik
- Simulation
- Warteschlangentheorie

In dieser Veranstaltung werden wir uns auf die Themen beschränken, die mit dem ▶ gezeichnet sind.

1.2 Optimierungsprobleme

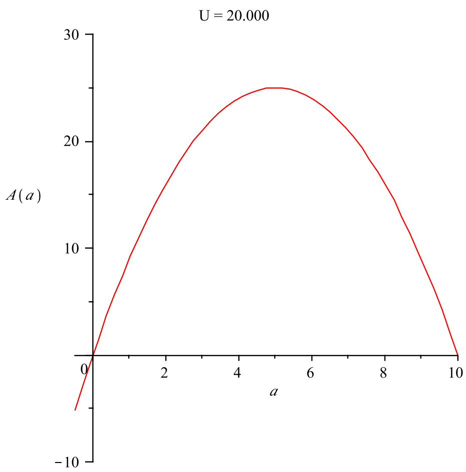
Beispiel 1.1 (Extremwerte einer Funktion)**.** Wie muss eine rechteckige Fläche aussehen, die bei einem bestimmten Umfang eine maximale Fläche hat?

Die Seiten des Rechtecks a und b sind positive reelle Variablen. Der Umfang $U = 2a + 2b$ ist konstant, die Fläche $A = a \cdot b$ soll maximiert werden. Aus der U-Gleichung berechnen wir die Variable b und setzen in A ein. Jetzt wandeln wir den Flächeninhalt A in eine Flächenfunktion der Variablen a um:

$$A(a) = -a^2 + \frac{U}{2}a.$$

U = 2a + 2b |-2a
U - 2a = 2b | 2
$\frac{U}{2} - \frac{2a}{2} = b$

Wieso $-2a + \frac{U}{2}$



Wir suchen die größtmögliche Fläche, also das Maximum der Funktion $A(a)$ für $a > 0$. Hierzu bilden wir die erste und zweite Ableitung von $A(a)$:

$$\begin{aligned} A'(a) &= -2a + \frac{U}{2} \\ A''(a) &= -2 \end{aligned}$$

Es gibt nur ein lokales Maximum, das im vorliegenden Beispiel zugleich auch das globale Maximum ist (da die zweite Ableitung unabhängig von der Variablen immer kleiner als Null ist). Um einen Extremwert zu finden, muss die erste Ableitung gleich Null gesetzt werden (da diese die Steigung der ursprünglichen Funktion beschreibt und diese Steigung bei Extremwerten Null ist. Ist die zweite Ableitung der Funktion ungleich Null, so liegt ein Minimum oder Maximum vor).

$$A'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2a + \frac{U}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{U}{4}.$$

Das Ergebnis $a = \frac{U}{4}$ in die U-Gleichung eingesetzt, liefern den gleichen Wert für b.

Daraus folgt, dass der größtmögliche Flächeninhalt eines Rechtecks bei vorgegebenen Umfang dann zu erzielen ist, wenn beide Seitenlängen gleich sind (was einem Quadrat entspricht). Umgekehrt lässt sich aber auch sagen, dass ein Rechteck mit vorgegebenem Flächeninhalt den geringsten Umfang aufweist, wenn $a = b$, also bei einem Quadrat.

Beispiel 1.2. Der Metzger Willy macht traditionell den Hackfleisch gemischt aus dem Rind- und Schweinefleisch. Das Rindfleisch kostet €2.35 pro Kg und beinhaltet 20% Fett. Das Schweinefleisch kostet €2.05 pro Kg und beinhaltet 32% fett. Willy garantiert, dass sein Hackfleisch gemischt höchstens 25% Fett beinhaltet. Wie viel von jeder Fleischsorte muss er nehmen, um dabei sein Hackfleisch gemischt bei minimalen Kosten zu erstellen?

Sei z der Preis vom einem Kg Hackfleisch gemischt. Sei x der Menge von Rindfleisch (Kg) und y der Menge von Schweinefleisch (Kg) in einem Kilogramm von Hackfleisch gemischt. Dann ist

$$z = 2.35x + 2.05y.$$

Dieser Wert soll möglichst klein unter den folgenden Bedingungen ausfallen.

- Das Hackfleisch gemischt soll höchstens 25% Fett haben:

$$0.2x + 0.32y \leqslant 0.25$$

- Die Mengen von Rind- und Schweinefleisch sollen insgesamt 1 Kilo ergeben:

$$x + y = 1$$

- Die Gewichte sind selbstverständlich nichtnegative reelle Zahlen:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0.$$

Wir lösen das Problem zunächst grafisch.

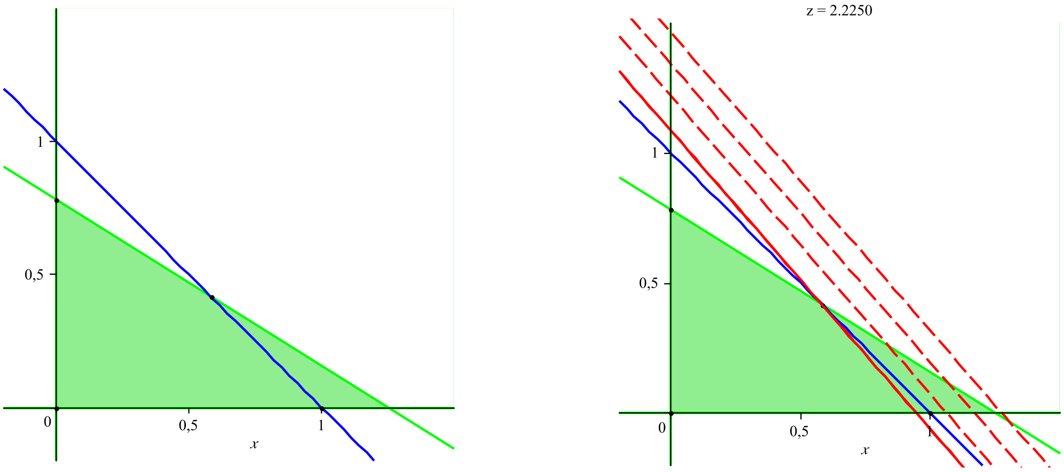


Abbildung 1.1: Die grafische Lösung zu Beispiel 1.2.

Der Bereich unter der grünen Linie entspricht der ersten Ungleichung ($0.2x + 0.32y \leqslant 0.25$). Die blaue Linie entspricht der zweiten Gleichung. Die Nichtnegativitätsbedingungen beider Variablen entsprechen dem Bereich im ersten Quadrant. Die Schnittmenge aller dieser Bereiche beschreibt alle möglichen (zulässigen) Lösungen zu Willys Problem. Diese entsprichen dem Abschnitt der blauen Geraden zwischen dem Schnitt mit der grünen Geraden und der x-Achse (siehe Abb. 1.1 links).

Nun müssen wir die beste Lösung finden. Gesucht wird der kleinste Wert von $2.35x + 2.05y$ unter den gegebenen Nebenbedingungen, also unter den zulässigen Lösungen.

Da z nicht festgelegt ist, entspricht

$$z = 2.35x + 2.05y$$

einer ganzen Familie von Geraden

$$y = -\tfrac{235}{205}x + \tfrac{100}{205}z.$$

Eine Auswahl davon (die roten Linien) ist in Abb. 1.1 rechts dargestellt. Wir suchen nach einer roten Gerade, die

- den kleinsten Wert auf der y-Achse abzeichnet, und
- dabei den zulässigen Bereich nicht verlässt.

Wir zeichnen zunächst eine Gerade aus der Familie, die oberhalb des zulässigen Bereichs verläuft. Dann schieben wir sie nach unten bis wir den zulässigen Bereich erreichen. Und dann bleiben wir an dem Punkt dieses Bereichs stehen, wo die rote Gerade den kleinsten Wert auf der y-Achse abzeichnet.

Der y-Wert des Schnittpunktes der roten Geraden mit der y-Achse geteilt durch $\frac{100}{205}$ liefert den minimalen Wert für z.

Die Koordinaten des Schnittpunktes der roten Geraden mit dem zulässigen Bereich (dies ist der Schnittpunkt der grünen und blauen Geraden: $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$) entsprechen den gesuchten Anteilen für x und y (siehe Abb. 1.1 rechts).

Die Lösung zu dem Problem lautet: Willy muss $\frac{7}{12}$ vom Rindfleisch un $\frac{5}{12}$ vom Schweinefleisch nehmen, um seine Hackfleischmischung zu minimalen kosten von €2.22 (kaufmännisch abgerundet) zu erstellen.

Beispiel 1.3. Der Zimmermann Ronny hat 6 Einheiten Holz und 28 Stunden freie Zeit, um dekorative Fenster zu schnitzen. Zwei Ausführungen haben sich zuletzt gut verkauft, auf die er sich jetzt beschränken möchte. Für die Variante I braucht er 2 Einheiten Holz und 7 Stunden Zeit; pro Stück bekommt er €120. Für die Variante II benötigt er 1 Holz-Einheit aber 8 Stunden Zeit; für ein Stück verlangt er €80. Wie viele Fenster von jeder Variante kann Ronny in seiner freien schnitzen, um möglichst viel Geld zu verdienen?

Sei x die Anzahl der Fenster von Variante I und y die Anzahl der Fenster der zweiten Ausführung. Zu maximieren ist der Ertrag aus dem Verkauf von beiden Ausführungstypen:

$$z = 120x + 80y.$$

Die Bedingungen für den Holzverbrauch:

$$2x + y \leqslant 6$$

und die Zeiteinschränkung:

$$7x + 8y \leqslant 28.$$

Und die wichtigste Vorraussetzung: x und y sind ganzzahlige, nichtnegative Variablen:

$$x, y \in \mathbb{Z}_+.$$

Wir lösen das Problem auch diesmal grafisch.

Die Lösungen, die diesmal in Frage kommen, dürfen nur ganzzahlige Koordinaten haben. Es sind die schwarzen Punkte in Abb. 1.2 links. Wir suchen diesmal nach dem größtmöglichen Wert für z. D.h. wir suchen nach einer roten Gerade, die

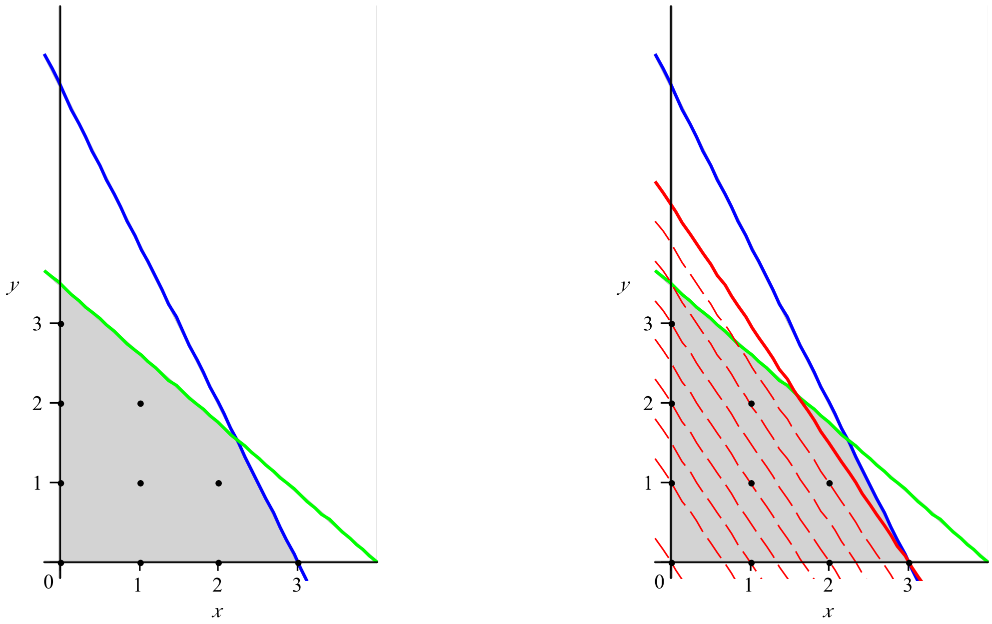


Abbildung 1.2: Die grafische Lösung zu Beispiel 1.3.

- den größten Wert auf der y-Achse abzeichnet, und
- einen der schwarzen Punkte trifft.

Wie man aus Abb. 1.2 rechts ablesen kann, ist der gesuchte Punkt $(3, 0)$ mit dem z-Wert gleich 360.

Alle dargestellten Beispiele haben Gemeinsamkeiten, die wir nun charakterisieren wollen.

Definition 1.1. Bei einem **Optimierungsproblem** sind ein *Lösungsraum* Ω (die Menge von möglichen Lösungen, auch *die zulässige Menge*) und eine Bewertungsfunktion Z (auch Fitness- oder *Zielfunktion*) gegeben. Man will eine Lösung $\boldsymbol{x} \in \Omega$ mit möglichst großem Wert $Z(\boldsymbol{x})$, $Z : \Omega \to \mathbb{R}$, finden:

$$\max\{Z(\boldsymbol{x}) \,|\, x \in \Omega\}.$$

Zu beachten ist, dass Ω eine Untermenge von $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, zu verstehen ist, anders ausgedrückt:

$$\max\{Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \,|\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega\}.$$

Ein Optimierungsproblem in der letzten Darstellung ist im Allgemeinen folgend zu verstehen.

Die Zielfunktion soll maximiert werden. Dies geschieht durch geeignete Festlegung der Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$, der so genannten *Struktur-* oder *Entscheidungsvariablen*. Die

Werte der Variablen unterliegen Einschränkungen, den so genannten *Restriktionen*. Diese Restriktionen beschreiben den zulässigen Bereich Ω. Die Zielfunktion kann durch geeignete Wahl der Variablenwerte beliebig groß werden. Daher hat die Optimierung nur dann Sinn, wenn die Strukturvariablen den Einschränkungen unterliegen. Es sind letztendlich die Restriktionen, die das Optimierungsproblem ausmachen.

Wir haben bis jetzt ein **Maximierungsproblem** betrachtet. Bei einem **Minimierungsproblem** sind Lösungen mit möglichst kleinem Wert von $Z(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ gesucht. Dieser Fall lässt sich aber durch das Negieren von Z auf den Maximierungsproblem zurückführen. Es gilt nämlich:

$$\min\{Z(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \Omega\} = -\max\{-Z(\boldsymbol{x}) \,|\, \boldsymbol{x} \in \Omega\}.$$

Die Probleme aus unseren Beispielen lassen sich folgend in der Grundform eines Optimierungsproblems darstellen.

Beispiel 1.1 (Maximaler Flächeninhalt)

$$\max\{A(x) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{U}{2}\}$$

Beispiel 1.2 (Der Metzger Willy)

$$\min\{2.35x + 2.05y \,|\, 0 \leqslant 0.2x + 0.32y \leqslant 0.25,\ x + y = 1,\ x, y \in \mathbb{R}_+\}$$

bzw.

$$\max\{-2.35x - 2.05y \,|\, 0 \leqslant 0.2x + 0.32y \leqslant 0.25,\ x + y = 1,\ x, y \in \mathbb{R}_+\}$$

Beispiel 1.3 (Der Zimmermann Ronny)

$$\max\{120x + 80y \,|\, 0 \leqslant 2x + y \leqslant 1,\ 7x + 8y \leqslant 28,\ x, y \in \mathbb{Z}_+\}$$

Definition 1.2. Gegeben sei ein Optimierungsproblem

$$\max\{Z(\boldsymbol{x}) \,|\, x \in \Omega\}.$$

Ein Punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ aus Ω heißt eine **zulässige Lösung** (zulässiger Punkt) des Optimierungsproblems. Eine zulässige Lösung $\boldsymbol{x}^*$ heißt **optimale Lösung** (optimaler Punkt) des Optimierungsproblems, wenn es keinen zulässigen Punkt mit größerem Zielfunktionswert als $Z(\boldsymbol{x}^*)$ gibt.

Ein Optimierungsproblem kann natürlich mehrere optimale Lösungen haben. Alle liefern selbstverständlich den gleichen Zielfunktionswert.

Beispiel 1.1 (Maximaler Flächeninhalt) $x = \frac{U}{6}$ bzw. $x = \frac{U}{1000}$ sind zulässige Lösungen des Problems. $x^* = \frac{U}{4}$ ist die optimale Lösung.

Beispiel 1.2 (Der Metzger Willy) $\boldsymbol{x}^* = (\frac{7}{12}, \frac{5}{12})$ ist die optimale Lösung bei Willys Optimierungsproblem. $(1, 0)$ ist dagegen nur eine zulässige Lösung.

Beispiel 1.3 (Der Zimmermann Ronny) Die Punkte

$$\{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(1,1),(2,1),(0,2),(1,2),(0,3)\}\ (=\Omega)$$

bilden die zulässige Menge des Optimierungsproblems von Ronny. $\boldsymbol{x}^* = (3, 0)$ ist das Optimum mit dem Zielfunktionswert 360.

Kapitel 2

Lineare Optimierung

Die Grundlagen der linearen Optimierung wurden 1939 von dem russischen Mathematiker Leonid Witaljewitsch Kantorowitsch in seinem Buch *Mathematische Methoden in der Organisation und Planung der Produktion* gelegt. Kurz danach (1941) präsentierte der US-Amerikaner Frank L. Hitchcock (1875-1957) eine Arbeit zu einem Transportproblem. Im Jahre 1947 veröffentlichte George Dantzig das Simplex-Verfahren, mit dem lineare Programme erstmals systematisch gelöst werden konnten. Eine der ersten dokumentierten Anwendungen der neuen Methode war das Diäten-Problem von George Stigler, dessen Ziel eine möglichst kostengünstigste Nahrungszusammensetzung für Soldaten war, die bestimmte Mindest- und Höchstmengen an Vitaminen und anderen Inhaltsstoffen erfüllte. An der optimalen Lösung dieses linearen Programms mit neun Ungleichungen und 77 Variablen waren damals neun Personen beschäftigt, die zusammen etwa 120 Manntage Rechenarbeit benötigten. Interesse an dieser Arbeit zeigte zunächst das amerikanische Militär, speziell die US Air Force, die militärische Einsätze optimieren wollte. In den Folgejahren entwickelten John von Neumann und Oskar Morgenstern das Verfahren weiter.

2.1 Das LP-Grundmodell

Die **lineare Optimierung** stellt das grundlegende und das wichtigste Teil des OR dar. Synonym wird auch der Begriff **lineare Programmierung** verwendet. Daher kommt die Abkürzungen **LPP** - lineares Programmierung-Problem – oder **LP** - lineares Programm – für ein Modell eines linearen Optimierungsproblems.

Das *Grundmodell* der linearen Optimierung hat die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Die Zielfunktion ist eine lineare Funktion in der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (Struktur- oder Entscheidungsvariablen). Dabei sind die **Zielfunktionskoeffizienten** $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bekannte reelle Werte. Die Restriktionen eines LPs bilden lineare Ungleichungen in der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Die Koeffizienten a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ werden **technische Koeffizienten** genannt und sind ebenfalls bekannte reelle Werte. $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sind auch bekannte reelle Zahlen und werden **Restriktionswerte** genannt. Zuletzt dürfen die Strukturvariablen im Grundmodell eines LPs nicht negativ werden. Die Restriktionen samt der Nichtnegativitätsbedingungen werden alle zusammen **Nebenbedigungen** genannt.

Es kann durchaus vorkommen, dass man bei der Modellierung eines lineares Problems eine Ungleichung vom Typ

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

erhält. Diese lässt sich durch das Multiplizieren mit -1 in die im Grundmodell geforderte Standardform

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n \leqslant -b_i$$

bringen. Ähnlich geht man bei Gleichheitsrestriktionen vor.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

lässt sich zunächst äquivalent mit zwei Ungleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &\leqslant b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &\geqslant b_i \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n &\leqslant b_i \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{in}x_n &\leqslant -b_i \end{aligned}$$

Beispiel 2.1. Wie geht man vor, um aus $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \geqslant 5$ und $x_3 \geqslant -10$ die Nichtegativitätsbedingungen wie in einem Grundmodell zu erhalten?

In der Tat können viele lineare Probleme auf die Gestalt des Grundmodells zurückgeführt werden. Eine kompakte Darstellung des Grundmodells eines lineares Programms ist folgend gegeben:

$$
\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

Eine noch kompaktere Schreibweise erhält man mit der Vektor-Matrix-Notation der linearen Algebra. Dazu bezeichne $\boldsymbol{x}$ den Spaltenvektor der Strukturvariablen, $\boldsymbol{c}$ den Spaltenvektor der Zielfunktionskoeffizienten, $\boldsymbol{b}$ den Spaltenvektor der Restriktionswerte und $\boldsymbol{A}$ die Matrix der technischen Koeffizienten:

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},
$$

Dann kann das LP-Grundmodell auch folgendermassen geschrieben werden:

$$
\begin{aligned}
\max Z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

Dabei bedeutet $\boldsymbol{0}$ den Nullvektor. Die Zielfunktion ergibt sich als Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{c}$ und $\boldsymbol{x}$.

2.2 Anwendungsbeispiele

In den folgenden Beispielen wollen wir lernen, wie man mit LPs modelliert. Es handelt es sich zwar um Stückgüter, die nicht teilbar sind, die Zahlen sind aber so gewählt, dass die optimale Lösung ausschliesslich ganzzahlige Koordinaten hat. Um LP-Grudmodelle zu betrachten, verzichten wir auf die Forderung der Ganzzahligkeit der Variablen.

2.2.1 Gewinnmaximierung

Die am häufigsten anzutreffende Anwendung der linearen Optimierung stellt die Planung des optimalen Produktionsprogrammes dar. Die Strukturvariablen haben darin die Bedeutung der Mengen der hergestellten Produkte, die ein Unternehmen in der nächsten Planungsperiode herstellen soll, um beispielsweise den Gewinn beim Verkauf der Produkte zu maximieren.

Beispiel 2.2. Eine Schuhfabrik herstellt Damen- und Herrenschuhe. Für die nächste Produktionsperiode sind 10 000 Arbeitsstunden der Mitarbeiter und 2 000 Arbeitsstunden der Maschinen geplant. Dabei braucht ein Damenschuh 20Std Verarbeitung und 4Std Maschinenarbeit, und ein Herrenschuh 12Std Verarbeitung und 3Std Maschinenlaufzeit. Zur Verfügung steht insgesamt 100 000 cm^2 Leder. Ein Damenschuh benötigt 200cm^2 und ein Herrenschuh 260 cm^2 Leder. Die Produktionsdaten sind in der Tabelle zusammengestellt.

	Damenschuh	**Herrenschuh**	**Verfugbarkeit**
Produktionszeit (Std)	20	12	10 000
Maschinenelaufzeit (Std)	4	3	2 000
Lederbedarf (cm^3)	200	260	100 000
Gewinn (€)	25	20	

Der Gewinn pro Damenschuh beträgt € 25 und pro Herrenschuh € 20. Wie viele Schuhe von jeder Sorte müssen produziert werden, um den größten Gewinn zu erzielen?

Sei x die Anzahl der Damenschuhe und y die Anzahl der Herrenschuhe, dann gibt es folgende Funktion zu maximieren:

$$\max Z(x, y) = 25x + 20y$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 20x + 12y &\leqslant 10\,000 \\ 4x + 3y &\leqslant 2\,000 \\ 200x + 260y &\leqslant 100\,000 \\ x, y &\geqslant 0. \end{aligned}$$

2.2.2 Umsatzmaximierung

Der Unterschied zwischen **Umsatz** und **Gewinn** besteht darin, dass der Umsatz angibt, wie viel das Unternehmen eingenommen hat. Der Gewinn hingegen gibt an, was von den Unternehmenseinnahmen nach Abzug aller Kosten übrig bleibt.

Beispiel 2.3. Ein Lieferwagen transportiert Tische und Schränke. Ein Tisch nimmt 2m^3 Platz, wiegt 40kg und sein Transport kostet € 49. Ein Schrank nimmt auch 2m^3 Platz, wiegt aber 80kg und sein Transport kostet € 69. Der Lieferwagen habe eine Beladungsgrenze von 3600 kg und 120m^3. Welche Beladung maximiert den Umsatz?

	Größe	Gewicht	Preis
Tisch	2m^3	40kg	49 €
Schrank	2m^3	80kg	69 €
Beladungsgrenze	120m^3	3600kg	

In Grundform

$$\max Z(x, y) = 49x + 69y$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &\leqslant 120 \\ 40x + 80y &\leqslant 3600 \\ x, y &\geqslant 0. \end{aligned}$$

$\square$

2.2.3 Kostenminimierung

Beispiel 2.4. Es stehen zwei Rohstoffe zur Verfügung, aus denen drei Mineralien gewonnen werden sollen. Die Gewinnung von Mineralien pro Rohstoff ist in der Tabelle gegeben. Wie viele Einheiten von dem jeweiligen Rohstoff müssen beschaffen werden, um den Mindestbedarf an Mineralien zu minimalen Preisen abdecken.

	Mineral M1	Mineral M2	Mineral M3	Preis
Rohstoff R1	3 %	12,5 %	40 %	250 €
Rohstoff R2	60 %	25 %	5 %	200 €
Mindestbedarf	30	25	20	

Diesmal wird es minimiert:

$$\min Z(x, y) = 250x + 200y$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} 0.03x + 0.6y &\geqslant 30 \\ 0.125x + 0.25y &\geqslant 25 \\ 0.4x + 0.05y &\geqslant 20 \\ x, y &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Wir bringen dieses Modell auf das LP-Grundmodell:

$$\max Z(x, y) = -250x - 200y$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} -0.03x - 0.6y &\leqslant -30 \\ -0.125x - 0.25y &\leqslant -25 \\ -0.4x - 0.05y &\leqslant -20 \\ x, y &\geqslant 0. \end{aligned}$$

2.3 Graphische Lösung eines LPs

Lineare Optimierungsprobleme mit zwei Entscheidungsvariablen und beliebig vielen Restriktionen lassen sich graphisch lösen.

Beispiel 2.5 (Gewinnmaximierung in der Produktion)**.** Gegeben seien folgende Produktionsbedingungen von zwei Artikeltypen. Der Gewinn soll maximiert werden.

	Typ 1	Typ 2	Verfügbarkeit
Maschine A	0	1	6h
Maschine B	1	1	7h
Maschine C	3	2	18h
Gewinn	4 €	3 €	

$$\max Z(x,y) = 4x + 3y$$

unter den Nebenbedingungen:

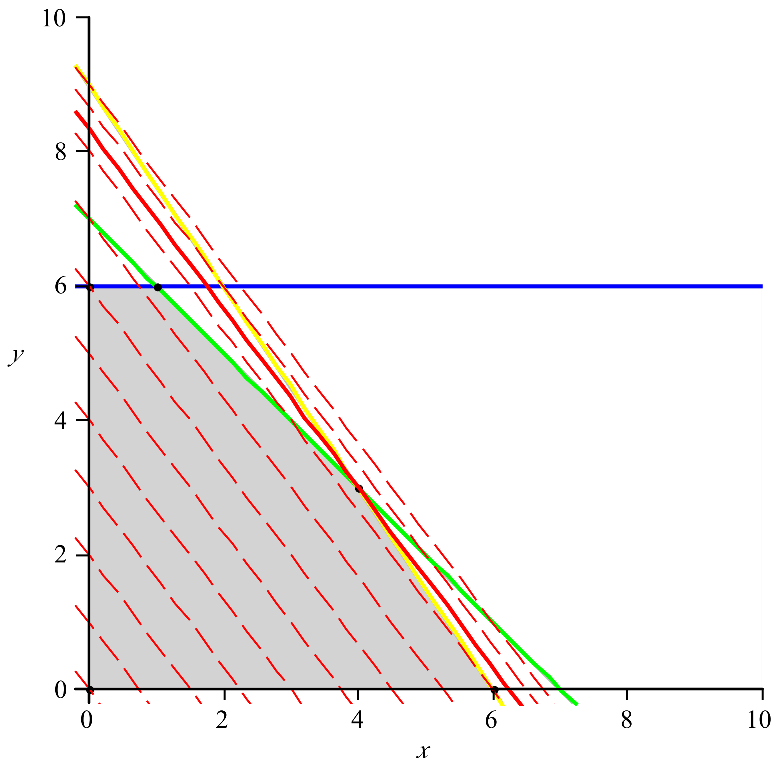
$$\begin{aligned} y &\leqslant 6 \\ x + y &\leqslant 7 \\ 3x + 2y &\leqslant 18 \\ x, y &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Vorgehensweise:

1. **Zulässiger Bereich zeichnen**
   Zuerst werden die Restriktionsgeraden gezeichnet. Die Ungleichheitszeichen werden durch Gleichheitszeichen ersetzt, dann die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmt und beide Punkte verbindet. Schließlich wird der zulässige Bereich des LP markiert. Es ist der durch die Restriktionen eingeschlossenene Bereich. Alle Punkte die im Inneren des Bereichs liegen erfüllen die Nebenbedingungen.

2. **Die Zielfunktion zeichnen**
   Die Zielfunktionwird gezeichnet, indem ein beliebiger aber fester Wert für die Zielfunktion vorgegeben. Die so entstandene Gerade heißt die **Höhenlinie** der Zielwertfunktion, Gerade gleichen Zielwerts, oder auch **Isozielwertgerade**. Alle Punkte auf dieser Gerade liefern den gleichen Zielwert.

3. **Das Optimum bestimmen**
   Durch Parallelverschiebung der Gewinngeraden nach rechts, erhält man höhere Zielwerte. Die Zielwertgerade wird soweit nach rechts verschoben, dass sie gerade noch den zulässigen Bereich berührt. Das ist normalerweise in einer Ecke der Fall. Die Koordinaten dieser Ecke maximieren die Zielwertfunktion. Man liest die Koordinaten der Ecke ab und setzt sie in die Zielfunktion ein. Bzw.
   Semigraphische Vorgehensweise:
   Anstelle des Ablesens berechnet man die Koordinaten der optimalen Ecke, indem man den Schnittpunkt der beiden betreffenden Restriktionsgeraden analytisch berechnet.



Die Optimale Lösung ist:
Maschine A $x^* = 4$, Maschine $y^* = 3$ und $z^* = 25$€ pro Planungsperiode.

Sonderfälle

Anschaulich ist klar (s. Übung), welche Sonderfälle es beim grafischen Lösungsansatz geben kann:

- Der zulässige Bereich ist leer. Dann gibt es keine Lösung des LP.
- Der zulässige Bereich ist unbeschränkt. Dann gibt es keine Lösung des LP.

- Eine der Restriktionsgerade ist parallel zur Isozielgeraden. Dann gibt es unendlich viele Lösungen des LP.

2.3.1 Verbindliche Restriktionen

Eine Restriktionen, die den optimalen Lösungspunkt schneidet, heißt eine verbindliche Restriktionen.

Wenn man die Gelegenheit den Restriktionswert:

- einer verbindlichen Restriktion zu erhöhen hätte, würde den optimale Zielfunktionswert zunehmen.
- einer **un**verbindlichen Restriktion zu erhöhen hätte, würde die optimale Lösung unverändert bleiben.

Im Produktionsgewinn Beispiel sind die verbindliche Restriktionen

$$x + y \leqslant 7$$
$$3x + 2y \leqslant 18$$

Die Restrikion $\quad y \leqslant 6 \quad$ ist unverbindlich.

2.3.2 Schlupfvariablen

Für eine bestimmte zulässige Lösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und jede Restriktion ist eine **Schlupfvariable** definiert:

$$y_i = b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{in}x_n$$

y_i ist die Menge an Ressourcen der i-te Restriktion, die noch übrig bleibt, für die Lösung $\mathbf{x}$

Sei $\mathbf{x}^*$ die optimale Lösung eines LP mit den entsprechenden Schlupfwerten y_i^*, $i = 1, \ldots, m$.

- Wenn Restriktion i verbindlich ist, $y_i^* = 0$
- Wenn Restriktion i unverbindlich ist, $y_i^* > 0$

Wenn $\mathbf{x} = 0$, sind die Schlupfwerte gleich die Restriktionswerte ($y_i = b_i$).

2.4 Der Simplex-Algorithmus

2.4.1 Mathematische Grundlagen

Wir wollen einige mathematische Eigenschaften der zulässigen Menge eines LPs definieren.

Definition 2.1. Eine Menge M heißt **konvex, wenn mit je zwei Punkten $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)} \in M$, gilt für jede** $0 < \lambda < 1$

$$\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}^{(1)} + (1 - \lambda)\boldsymbol{x}^{(2)} \in M$$

Mit anderen Worten: wenn $\boldsymbol{x}^{(1)}$ und $\boldsymbol{x}^{(2)}$ zu einer konvexen Menge M gehören, dann gehört alle Punkte auf der Strecke, die $\boldsymbol{x}^{(1)}$ und $\boldsymbol{x}^{(2)}$ verbindet, auch zu M.

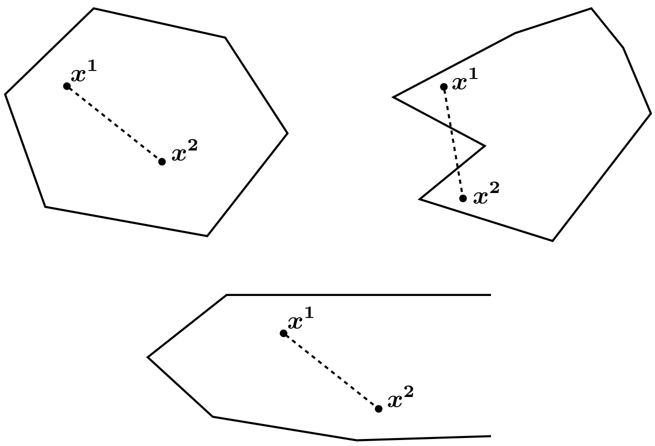


Abbildung 2.1: Konvexe Mengen (oben links und unten) und eine nicht konvexe Menge (oben rechts) .

Definition 2.2. Seien $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ Punkte des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ nichtnegative reelle Zahlen.

1. Ein Punkt

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \boldsymbol{x}^{(i)} \qquad \text{mit} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$$

wird als **Konvexkombination** der Punkte $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ bezeichnet. Gilt $\lambda_i > 0$ für alle $i, 1 \leqslant i \leqslant p$, dann liegt eine **echte Konvexkombination** vor.

2. Die Menge aller Konvexkombinationen endlich vieler Punkte $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ in $\mathbb{R}^n$ wird die **konvexe Hülle** der aus dieser Menge bestehenden Punkte bzw. das durch diese Punkte aufgespannte **konvexe Polyeder** genannt.

3. Ein Punkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ einer konvexen Menge M heißt **Eckpunkt** oder auch **Extrempunkt** vom M, wenn er sich *nicht als echte* Konvexkombination zweier verschiedenen Punkte aus M darstellen lässt.

In Abb. 2.1 ist die Menge oben links ein konvexes Polyeder; die untere Menge ist kein Polyeder wegen der Unbeschränktheit; die Menge oben rechts ist ein Polyeder aber kein konvexes Polyeder.

Aus der Definition des konvexen Polyeders lässt sich folgern, dass ein konvexes Polyeder endlich viele Eckpunkte besitzt.

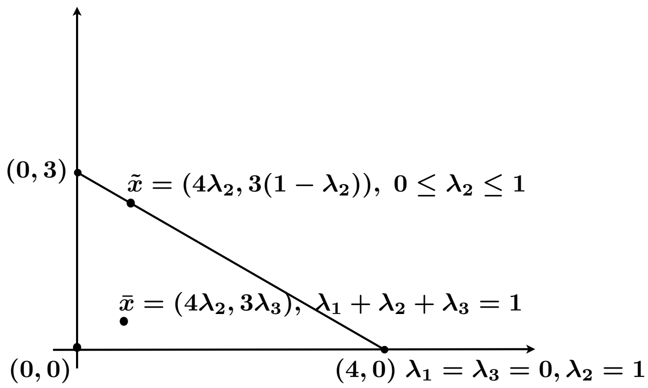


Abbildung 2.2: $\bar{x}$ als eine Konvexkombination der Eckpunkte des Dreiecks.

Definition 2.3. Ein **Simplex lässt sich durch eine konvexe Hülle von** $n+1$ **linear unabhängige Punkte des** $\mathbb{R}^n$ **definieren.**

Für $n = 1$ ist ein Simplex die Strecke zwischen zwei Punkten auf einer Gerade. In R^2 ist ein Simplex ein beliebiges Dreieck. In $\mathbb{R}^3$ ist ein Simplex ein Tetraeder, der nicht regelmäßig sein muss.

Satz 2.1

Gegeben sei ein LP in der Grundform. Dann gilt:

1. Die Menge der hinsichtlich jeder einzelnen Nebenbedingung zulässigen Lösungen ist konvex.
2. Die Menge aller zulässigen Lösungen des LPs ist als Durchschnitt konvexer Mengen ebenfalls konvex mit endlich vielen Eckpunkten.
3. Die Menge aller optimalen Lösungen des LPs ist konvex.

Satz 2.2

Eine lineare Funktion, die auf einem konvexen Polyeder definiert ist, nimmt ihr Optimum in mindestens einem Eckpunkt des Polyeders an.

Beweis ohne.

Folgerung (Der naive Algorithmus): Da der zulässige Bereich eines LP ein konvexes Polyeder mit endlich vielen Ecken ist, und die Zielfunktion ihr Maximum in einer Ecke annimmt, „reicht es" alle Ecken des zulässigen Bereichs zu überprüfen, um eine Optimale Lösung eines LPs zu bestimmen.

Es ist allerdings zu aufwändig für LPs mit hunderten von Nebenbedingungen und ebenso viel Variablen.

2.4.2 Die Normalform eines LPs

Betrachten wir ein LP in der Grundform:

$$\begin{array}{rcl}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leqslant & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leqslant & b_2 \\
& \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leqslant & b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n & \geqslant & 0.
\end{array}$$

Die **Normalform** eines LPs erhält man, indem man durch Einführung der **Schlupfvariablen** die Nebenbedingungen in ein lineares Gleichungssystem überführt:

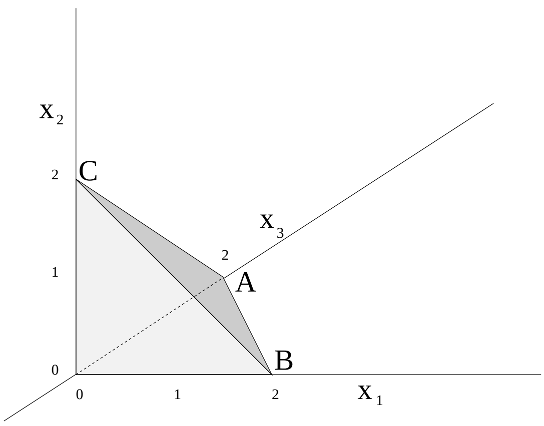
$$\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m &= b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Die Schlupfvariablen werden in der Zielfunktion mit 0 bewertet.

Beispiel 2.6. Ein zulässiger Bereich lässt sich durch die folgenden Bedingungen definieren.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 2 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Im folgenden Diagramm ist der Bereich der $\mathbb{R}^2$ Simplex mit Eckpunkten B, C und dem Ursprung.



Nach der Einfügung der Schlupfvariable x_3 werden die Bedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Der zulässiger Bereich ist jetzt das Dreieck A, B, C, das ein Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist. Jede Eckpunkt hat wenigstens eine Variable gleich Null.

Die zulässige Region in 2D ist die Projektion der 3D Simplex ABC auf die (x_1, x_2) Ebene

2.4.3 Der Simplex-Algorithmus

Die Idee des Simplex-Algorithmus: Ausgehend von einem Punkt des zulässigen Bereichs - üblicherweise vom Koordinatenursprung, falls dieser zum zulässigen Bereich gehört - legt man ein Simplex an und vergleicht die Verbesserung der Zielfunktion in Richtung der übrigen Simplex-Eckpunkte. In dem „besten" dieser Punkte wird im nächsten Schritt das neue Simplex zentriert und seine Nachbarn werden durchgeprüft. Auf diese Weise fortschreitend findet man nach endlich vielen Eckentauschen bzw. Iterationen die optimale Ecke.

Jede Simplexeckpunkt besteht aus n Variablen mit dem Wert Null und m positiven Variablen. Die positiven Variablen heißen Basis-Variablen (BV) und die Null Variablen heißen Nicht-Basis-Variablen (NBV).

2.4.4 Der Simplex-Algorithmus: Methode des Gleichungssystems

Betrachten wir ein LP in der Grundform:

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Nach dem das LP in **Normalform** geschrieben ist, bilden m Restriktionen ein lineares Gleichungssystem (LGS).

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m &= b_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Das LP in Normalform lässt sich in Matrixform schreiben:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2.1}$$

A ist eine $m \times (n+m)$ Matrix, $\boldsymbol{x}$ ist ein $n+m$-Dim. Vektor und $\boldsymbol{b}$ ist ein m-Dim. Vektor. Das ist ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem in $n+m$ Variablen und m Gleichungen.

Wenn n Einträge von $\boldsymbol{x}$ Null und m Einträge nicht-Null sind, reduzierte (2.1) zu

$$A^{(0)}\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{b}, \tag{2.2}$$

wobei A eine $m \times m$ Matrix ist und $\boldsymbol{x}$ ein m-Dim. Vektor ist. Soweit $A^{(0)}$ nicht singuläre ist hat eine eindeutige Lösung.

- Die m nicht-Null Einträge von $\boldsymbol{x}$ heißen Basisvariablen (BV).
- Die n nicht-Null Einträge von $\boldsymbol{x}$ heißen Nichtbasisvariablen (NBV).
- Eine zulässige Lösung eines LPs in Normalform ist

  $$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \; y_1 = b_1, \ldots y_m = b_m$$

  In dem Fall alle Entscheidungsvariablen sind Nichtbasisvariablen und alle Schlupfvariablen sind Basisvariablen. Die Zielfunktion beträgt 0.

Eine Simplex-Iteration:

1. Die aktuelle Isozielwertgerade wird durch die Basis (die aktuelle Ecke) gelegt.
2. Man wählt eine benachbarte Ecke, die den höchst möglichen Anstieg der Zielfunktion verspricht. Ist kein Anstieg mehr möglich, so **bricht das Verfahren ab**: die aktuelle Ecke liefert die optimale Lösung.
3. Als nächste Näherung der Optimallösung verschiebt man die Isozielwertgerade parallel durch die neue Ecke. Dabei findet ein *Eckentausch* bzw. ein Basiswechsel statt.
4. Ein Eckentausch bedeutet dabei genauer gesagt, dass man eine der Basisvariablen gegen eine Nichtbasisvariable tauscht.

Beispiel Wir demonstrieren die Berechnungen an dem LP zum Beispiel 2.5 (Gewinn Maximierung):

$$\max Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Nach der Einfügung der Schlupfvariablen nimmt das LP die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
-4x_1 - 3x_2 + Z &= 0 \\
x_2 + y_1 &= 6 \\
x_1 + x_2 + y_2 &= 7 \\
3x_1 + 2x_2 + y_3 &= 18 \\
x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
&Z = 0 + 4x_1 + 3x_2 \\
&y_1 = 6 - x_2 && \textbf{(I)} \\
&y_2 = 7 - x_1 - x_2 && \textbf{(II)} \\
&y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2 && \textbf{(III)}
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion bzw. die 3 Basisvariablen sind als Funktionen der Nichtbasisvariablen geschrieben. Die Nichtbasisvariablen sind gleich Null.

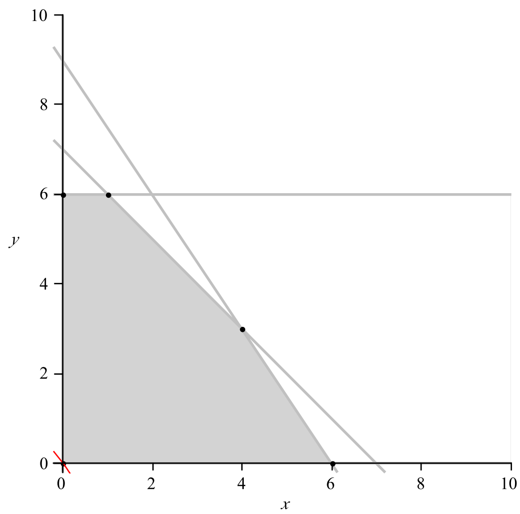


Abbildung 2.3: Der Algorithmus startet in der Ecke $(0, 0)$.

1. Schritt

A. Wahl der Eintrittsvariable Da x_1 einen größeren Zuwachs der Zielfunktion (per Einheit) als x_2 verspricht, entscheiden wir, dass diese Variable in die Basis wechselt.

B. Wahl der Austrittsvariable: Welche Variable verlässt nun die Basis? x_1 tauscht jeweils mit der betreffenden Basisvariable und x_2 bleibt gleich 0.

- In (I) tritt x_1 gar nicht auf. Man kann nicht x_1 und y_1 tauschen.
- In (II) kann man x_1 mit y_2 tauschen.
- In (III) kann man $3x_1$ mit y_3 tauschen.

Wenn x_1 tauscht mit y_2 **(II)**,
$x_1 = 7 \Rightarrow$ in **(III)** $y_3 = 18 - 3 \cdot 7 - x_2 = -3 < 0 \Rightarrow$ unzulässig.

Wenn $3x_1$ tauscht mit y_3 **(III)**,
$x_1 = 6 \Rightarrow$ **(II)** $y_2 = 7 - 6 - x_2 = 1 \geqslant 0 \Rightarrow$ zulässig.

Die Austrittsvariable ist die Basisvariable, die den kleinsten wert von x_1 ergibt.
Die zugehörige Schlupfvariable y_3 wird auf Null gesetzt. y_3 verlässt die Basis.

C. Umrechnung des Gleichungssystems:
Die Variable x_1 und y_3 tauschen ihre Plätze.
Rechne Gleichung (III) um:

$$y_3 = 18 - 3x_1 - 2x_2$$
$$x_1 = 6 - \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2$$

Jetzt ist x_1 gleich eine Konstante plus eine lineare Funktion der zwei NBV, die gleich Null betragen. Ersetze x_1 in jeder Gleichung und vereinfache.

$$Z = 0 + 4(6 - \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2) + 3x_2$$
$$y_1 = 6 - x_2 \qquad \textbf{(I)}$$
$$y_2 = 7 - (6 - \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2) - x_2 \qquad \textbf{(II)}$$
$$x_1 = 6 - \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2 \qquad \textbf{(III)}$$

$$Z = 24 - \tfrac{4}{3}y_3 + \tfrac{1}{3}x_2$$
$$y_1 = 6 - x_2 \qquad \textbf{(I)}$$
$$y_2 = 1 + \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{1}{3}x_2 \qquad \textbf{(II)}$$
$$x_1 = 6 - \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}x_2 \qquad \textbf{(III)}$$

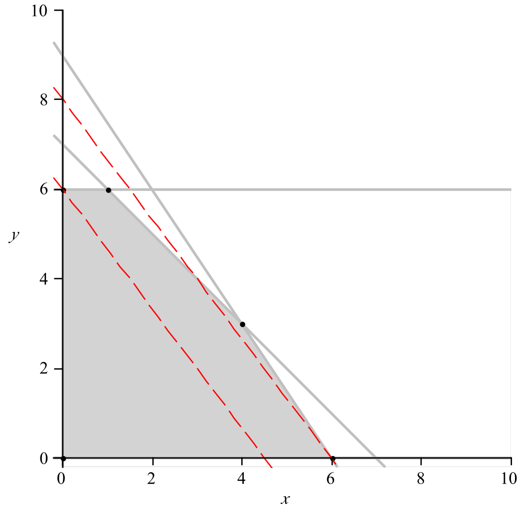


Abbildung 2.4: 1.Schritt: Tausch in die Ecke $(6, 0)$.

2. Schritt

A. Wahl der Eintrittsvariable Da y_3 einen negativen Koeffizienten hat, erhalten wir einen kleineren Z-Wert für positive y_3.

Da x_2 einen positiven Koeffizienten hat, erhalten wir einen größeren Z-Wert für positive x_2. Deswegen ist x_2 die Eintrittsvariable.

B. Wahl der Austrittsvariable: Welche Variable verlässt nun die Basis? x_2 tauscht jeweils mit der betreffenden Basisvariable und nach wie vor $y_3 = 0$.

- In (I) $x_2 = 6$ tauscht mit $y_1 \Rightarrow y_2 = -1$.
- In (II) $x_2 = 3$ tauscht mit $y_2 \Rightarrow$ zulässig.
- In (III) $x_2 = 9$ tauscht mit $y_2 \Rightarrow y_1 = -3$.

Die Austrittsvariable ist die Basisvariable, die den kleinsten wert von $x_2 \geqslant 0$ ergibt.

C. Umrechnung des Gleichungssystems:

Die Variable x_2 und y_2 tauschen ihre Plätze. Rechne Gleichung (III) um, ersetze x_2 in jeder Gleichung und vereinfache.

$$y_2 = 1 + \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{1}{3}x_2 \qquad \textbf{(II)}$$

$$x_2 = 3 + y_3 - 3y_2$$

$$Z = 24 - \tfrac{4}{3}y_3 + \tfrac{1}{3}(3 + y_3 - 3y_2)$$

$$y_1 = 6 - (3 + y_3 - 3y_2) \qquad \textbf{(I)}$$

$$x_2 = 1 + \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{1}{3}(3 + y_3 - 3y_2) \qquad \textbf{von oben}$$

$$x_1 = 6 - \tfrac{1}{3}y_3 - \tfrac{2}{3}(3 + y_3 - 3y_2) \qquad \textbf{(III)}$$

$$Z = 25 - y_3 - y_2$$

$$y_1 = 3 - y_3 + 3y_2 \qquad \textbf{(I)}$$

$$x_2 = 3 + y_3 - 3y_2 \qquad \textbf{(II)}$$

$$x_1 = 4 - y_3 + 2y_2 \qquad \textbf{(III)}$$

$Z = 25 - y_3 - y_2$. Wenn wir jetzt versuchen y_2 oder y_3 als ein Basisvariable zu stellen, wird $y_2 > 0$ oder $y_3 > 0$ und Z kleiner als 25.

Wir können keine bessere Lösung finden.

Ende des Verfahrens

$Z^* = 25$ mit $x_1^* = 4$, $x_2^* = 3$.

2.4.5 Der Simplex-Algorithmus: tabellarisches Verfahren

Die Iterationssschritte des Algorithmus werden in Gestalt von **Tableaus** durchgeführt.

Das Starttableau entspricht dem folgendem Gleichungssystem, dessen erste Gleichung der

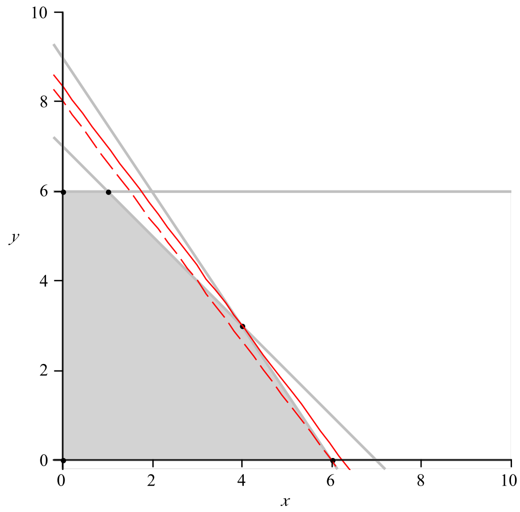


Abbildung 2.5: 2.Schritt: Tausch in die Ecke $(4, 3)$.

Zielfunktion des LPs entspricht. Dabei spielt Z die Rolle einer Schlupfvariablen.

$$\begin{array}{ccl} Z & -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n & = \; 0 \\ y_1 & +a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = \; b_1 \\ y_2 & +a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = \; b_2 \\ & \vdots & \\ y_m & +a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = \; b_m \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m & \geqslant \; 0. \end{array}$$

Dies ist ein unterbestimmtes Lineares Gleichungssystem in $n + m + 1$ Variablen und $m + 1$ Gleichungen. Unter den unendlich vielen Lösungen ist diejenige gesucht, die die Zielfunktion maximiert.

Tab. 0		x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Z	0	$-c_1$	$-c_2$	$\ldots$	$-c_n$
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}

Die jeweils aktuelle Ecke in einem Tableau heißt **Basis**. Die Variablen in der ersten Spalte nennt man **Basisvariablen** (BV). Die Werte für die Basisvariablen entnimmt man der zweiten Spalte des Tableaus. Die Variablen in der ersten Zeile sind die **Nichtbasisvariablen** (NBV); sie haben definitionsgemäß den Wert Null.

Wir starten mit der Iteration im Nullpunkt: alle Strukturvariablen x_i sind Nichtbasisvariablen. (Wir setzen hier stillschweigend voraus, dass der Nullpunkt zum zulässigen Bereich gehört.)

Eine Simplex-Iteration:

1. Die aktuelle Isozielwertgerade wird durch die Basis (die aktuelle Ecke) gelegt.
2. Man wählt eine benachbarte Ecke, die den höchst möglichen Anstieg der Zielfunktion verspricht. Ist kein Anstieg mehr möglich, so **bricht das Verfahren ab**: die aktuelle Ecke liefert die optimale Lösung.
3. Als nächste Näherung der Optimallösung verschiebt man die Isozielwertgerade parallel durch die neue Ecke. Dabei findet ein Eckentausch bzw. ein Basiswechsel statt.

   Ein Eckentausch bedeutet dabei genauer gesagt, dass man eine der Basisvariablen gegen eine Nichtbasisvariable tauscht. Im allgemeinen wird man bei fortgeschrittenen Iterationen erwarten, dass jeweils zwei (in $\mathbb{R}^2$ oder mehrere in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$) der Schlupfvariablen Null sind, d.h. die ihnen entsprechenden Restriktionen voll ausgelastet sind, wodurch eine Ecke definiert wird.

Beispiel 2.7. Wir demonstrieren die Tableau-Berechnungen an dem LP zum Beispiel 2.5:

$$\max Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Nach der Einführung der Schlupfvariablen nimmt das LP die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 + Z &= 0 \\ x_2 + y_1 &= 6 && \textbf{(I)} \\ x_1 + x_2 + y_2 &= 7 && \textbf{(II)} \\ 3x_1 + 2x_2 + y_3 &= 18 && \textbf{(III)} \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

0. Schritt

Um die Zahlen in Tableau nachvollziehen zu können, stellen wir die Gleichungen so um, dass links die Basisvariablen und rechts die Nichtbasisvariablen stehen.

$$
\begin{aligned}
Z - 4x_1 - 3x_2 &= 0 \\
y_1 + x_2 &= 6 \qquad \text{(I)} \\
y_2 + x_1 + x_2 &= 7 \qquad \text{(II)} \\
y_3 + 3x_1 + 2x_2 &= 18 \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-4	-3
y_1	6	0	1
y_2	7	1	1
y_3	18	3	2

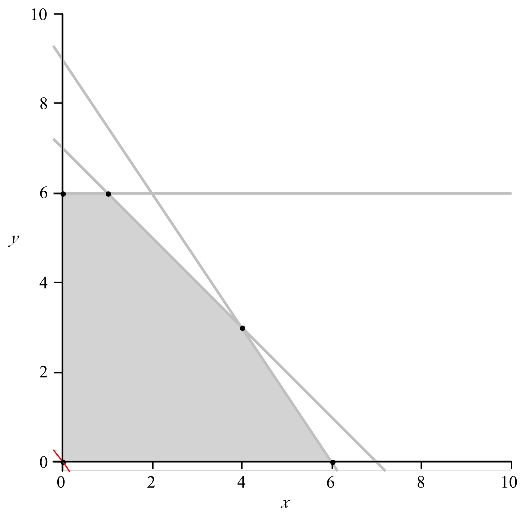


Abbildung 2.6: Der Algorithmus startet in der Ecke $(0, 0)$.

1. Schritt

A. Wahl der Pivotspalte[1]: Da x_1 einen größeren Zuwachs der Zielfunktion (per Einheit) verspricht, entscheiden wir, dass diese Variable in die Basis wechselt.

B. Wahl der Pivotzeile: Welche Variable verlässt nun die Basis? Wie weit kann x_1 wachsen, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen? Dabei gilt: $x_2 = 0$ und $y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$.

- In (I) tritt x_1 gar nicht auf.
- In (II) kann x_1 maximal 7 werden.
- In (III) kann x_1 maximal 6 werden.

Die dritte Gleichung begrenzt die Wachstumsmöglichkeiten von x_1 auf 6, indem die zugehörige Schlupfvariable y_3 auf Null gesetzt wird. y_3 verlässt die Basis.

[1] Pivot - Dreh und Angelpunkt

C. Umrechnung der Tableau-Koeffizienten: Die Umrechnung im Tableau funktioniert wie folgt:

1. Die Variable x_1 und y_3 tauschen ihre Plätze.

2. Die Werte aller Koeffizienten im Tableau werden umgerechnet. Hierzu wird das Gleichungssystem wieder so umgestellt, dass links die Nichtbasisvariable steht und rechts nur die Basisvariablen. Zuerst stellen wir die Gleichung um, wo x_1 und y_3 (die Variablen die die Plätze getauscht haben) beide vorkommen, also die Gleichung (III). Und dann ersetzen wir x_1 in allen übrigen Gleichungen.

$$\begin{aligned} Z + \tfrac{4}{3}y_3 - \tfrac{1}{3}x_2 &= 24 \\ y_1 + x_2 &= 6 \qquad \text{(I)} \\ y_2 - \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{1}{3}x_2 &= 1 \qquad \text{(II)} \\ x_1 + \tfrac{1}{3}y_3 + \tfrac{2}{3}x_2 &= 6 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Tab. 1		y_3	x_2
Z	24	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_1	6	0	1
y_2	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

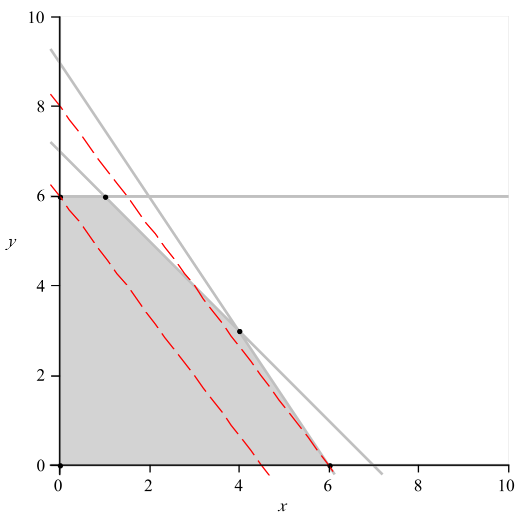


Abbildung 2.7: 1.Schritt: Tausch in die Ecke $(6, 0)$.

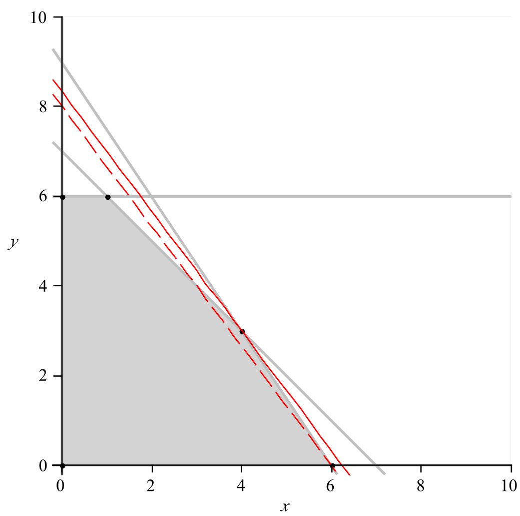


Abbildung 2.8: 2.Schritt: Tausch in die Ecke $(4, 3)$.

2. Schritt

A. Wahl der Pivotspalte: Wir erhalten einen höheren Zielfunktionswert (Z) nur dann, wenn wir den Wert der Variable x_2 erhöhen (wegen des negativen Zielfunktionskoeffizienten). x_2 wechselt in die Basis.

B. Wahl der Pivotzeile: Welche Variable verlässt nun die Basis? Wie weit kann x_2 wachsen, ohne den zulässigen Bereich zu verlassen? Dabei gilt: $y_3 = 0$ und $y_1, y_2, x_1 \geqslant 0$.

- In (I) kann x_2 maximal 6 werden.
- In (II) kann x_2 maximal 3 werden.
- In (III) kann x_2 maximal 9 werden.

Die zweite Gleichung begrenzt das Wachstum von x_2. y_2 wird auf Null gesetzt und damit verlässt die Basis.

C. Umrechnung der Tableau-Koeffizienten:

1. Die Variable x_2 und y_2 tauschen ihre Plätze.
2. Die Werte aller Koeffizienten im Tableau werden umgerechnet. Hierzu wird das Gleichungssystem wieder so umgestellt, dass links die Nichtbasisvariable steht und rechts nur die Basisvariablen. Zuerst stellen wir die Gleichung um, wo x_2 und y_2 (die Variablen die die Plätze getauscht haben) beide vorkommen, also die Gleichung (II). Und dann ersetzen wir x_2 in allen übrigen Gleichungen.

$$\begin{aligned} Z + y_3 + y_2 &= 25 & \\ y_1 + y_3 - 3y_2 &= 3 & \text{(I)} \\ x_2 - y_3 + 3y_2 &= 3 & \text{(II)} \\ x_1 + y_3 - 2y_2 &= 4 & \text{(III)} \end{aligned}$$

Tab. 2		y_3	y_2
Z	25	1	1
y_1	3	1	-3
x_2	3	-1	3
x_1	4	1	-2

Ende des Verfahrens

Laut der letzten Zielfunktionsgleichung führt die Erhöhung des Wertes einer der Nichtbasisvariablen zur Verschlechterung des Zielfunktionswertes. Das Verfahren endet mit dem Ergebnis:

Der Zielfunktionswert beträgt 25 und wird für Strukturvariablenwerte $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ angenommen.

Interpretation des Endtableaus

Betrachtet werden Werte, die in der Zeile 0 bzw. in der Spalte 0 stehen:

- Der maximale Wert der Zielfunktion ist $z^* = 25$.
- Werte in der Spalte 0, die den Strukturvariablen entsprechen, geben die optimale Lösung an:
  Es werden 4 Einheiten der Sorte 1 und 3 Einheiten der Sorte 2 produziert.
- Werte in der Spalte 0, die den Schlupfvariablen entsprechen, geben an wie weit die zugehörige Ungleichung von der Gleichheit entfernt ist:
  $y_1 = 3$ bedeutet, es bleiben 3 freie Stunden an Kapazität der Maschine A übrig.
- Die Schlupfvariablen unter den Nichtbasisvariablen geben an, an der Ecke welcher Restriktionen befindet sich die optimale Lösung:
  Die Optimale Lösung befindet sich in der Ecke der zweiten und der dritten Restriktion. Maschine B und C werden voll ausgelastet.
- Die Werte in der Zeile 0, die zur Schlupfvariablen gehören, stellen deren *Schattenpreise* oder *Opportunitätskosten* (Kosten im Sinne entgangener Gelegenheiten) dar. Ist die Kapazität einer Ungleichung (Ressource) ausgeschöpft, so ist die zugehörige Schlupfvariable im optimalen Tableau eine Nichtbasisvariable. *Der Schattenpreis*[2] *gibt an, um wie viele Einheiten sich der Zielfunktionswert verändert, wenn eine zusätzliche Einheit der Ressource zur Verfügung steht.*

  Der Schattenpreis von y_3 ist 1. Eine Erhöhung der Kapazitätsgrenze der zugehörigen Restriktion (Maschine C) um eine Einheit (von $18h$ auf $19h$) führt zu einer potenziellen Steigung von Zielfunktion um €1 (eine Geldeinheit). Könnte man für weniger Geld eine zusätzliche Stunde auf Maschine C ermöglichen, so würde der implizierte Produkionsgewinn die zusätzlichen Kosten übersteigen.

[2]Diese Definition von Schattenpreis ist etwas vereinfacht. Eine genaue Definition ist in der Sensititätsanalyse Teil 2.7 gegeben.

Simplex-Iteration

Um einen Iterationsschritt allgemein zu fassen, wird die folgende Darstellung des Tableaus betrachtet.

Tab. (Nr)		Nichtbasisvariablen				
Z	z^*	a_{01}	a_{02}	$\dots$	a_{0n}	(Zeile 0)
Basisvariablen	a_{10}	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	a_{m0}	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	
	(Spalte 0)					

A. Wahl der Pivotspalte

Enthält die Zeile 0 nur nichtnegative Werte, so ist die aktuelle Basislösung optimal. **Abbruch des Verfahrens.**

Sonst: wähle diejenige Spalte s mit dem kleinsten negativen Wert in der Zeile 0:

$$a_{0s} = \min\{a_{0j} \mid a_{0j} < 0,\ j = 1, \dots, n\}$$

Gibt es mehrere Kandidaten, so nehme irgendeins.

B. Wahl der Pivotzeile

Sind in der Pivotspalte alle $a_{is} \leqslant 0$, so kann für das betrachtete Problem keine Lösung angegeben werden - der zulässige Bereich ist unbeschränkt (s. Übung).

Sonst: Bestimme die Zeile z, für die gilt:

$$\frac{a_{z0}}{a_{zs}} = \min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{is}} \mid a_{is} > 0,\ i = 1, \dots, m\right\}$$

C. Berechnung des neuen Simplextableau

1. *Umrechnung des Pivotelements*
$$\tilde{a}_{zs} = \frac{1}{a_{zs}}$$
2. *Umrechnung der Pivotspalte*
$$\tilde{a}_{is} = -\frac{a_{is}}{a_{zs}} \quad \forall i = 0, \ldots, m, \ i \neq z$$
3. *Umrechnung der Pivotzeile*
$$\tilde{a}_{zj} = \frac{a_{zj}}{a_{zs}} \quad \forall j = 0, \ldots, n, \ j \neq s$$
4. *Umrechnung der übrigen Elemente*
$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{zj} \cdot a_{is}}{a_{zs}} \quad \forall j = 0, \ldots, n, \ j \neq s, \quad \forall i = 0, \ldots, m, \ i \neq z.$$

2.5 Das duale LP

Bevor wir den Simplex-Algorithmus in Bezug auf die Möglichkeit des Auftretens von Ausnahmesituationen analysieren, führen wir einen neunen Begriff ein, mit dem sich das Verhalten in den Sonderfällen besser verstehen lässt.

Wir wollen nämlich zunächst zeigen, dass es zu einem gegebenen LP immer ein dazugehörendes, eindeutig bestimmtes zweites LP gibt, das **duale** LP. Diese beiden LPs hängen eng zusammen, und man kann aus dem Optimum des einen auf das Optimum des anderen schließen.

Beispiel 2.8. Wir haben unser Produktionsproblem

$$\max Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

mehrere Male betrachtet und gelöst. Der maximale Zielfunktionswert liegt bei 25 und wird an dem Punkt (4,3) angenommen. Eine wichtige Frage, die hierbei auftaucht, ist:

Kann man auf einfache Weise erkennen, ob überhaupt noch eine Verbesserung möglich ist oder ob bereits ein Optimum erreicht ist?

Eine Antwort darauf gibt der **Dualitätssatz der linearen Optimierung**, den wir an unserem Beispiel erläutern wollen.

Ein Weg zu zeigen, dass Der Punkt $(4, 3)$ optimal ist, liegt darin, eine obere Schranke für das Maximum zu bestimmen. Hierzu können wir die Nebenbedingungen benutzen. Zum Beispiel unter Benutzung der zweiten Restriktion gilt:

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant 4(x_1 + x_2) \leqslant 4 \cdot 7 = 28$$

oder auch unter Benutzung der dritten Rerstriktion:

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant \tfrac{3}{2}(3x_1 + 2x_2) \leqslant \tfrac{3}{2} \cdot 18 = 27.$$

Daraus erhalten wir, dass der Optimalwert nicht höher als 27 sein darf. Die nun noch verbleibende Frage ist, ob man noch bessere Schranken für den Optimalwert finden kann.

Wir können noch die Nebenbedingungen miteinander kombinieren:

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant (x_1 + x_2) + (3x_1 + 2x_2) \leqslant 7 + 18 = 25.$$

In unserem Falle liegt bei der ersten Ungleichung in der Kette sogar die Gleichheit vor. Noch mehr, wir erhalten als Abschätzung den Optimalwert.

Im allgemeinen Fall ist das nicht so einfach. Man geht folgend vor. Für jede Nebendedingung führen wir eine Skalierungsvariable y_i ein.

$$\begin{array}{rcll} x_2 & \leqslant & 6 & | \cdot y_1 \\ x_1 + x_2 & \leqslant & 7 & | \cdot y_2 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leqslant & 18 & | \cdot y_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_2 y_1 & \leqslant & 6y_1 \\ x_1 y_2 + x_2 y_2 & \leqslant & 7y_2 \\ 3x_1 y_3 + 2x_2 y_3 & \leqslant & 18y_3 \end{array}$$

Summieren wir beide Seiten der Ungleichungen, so erhalten wir

$$4x_1 + 3x_2 \leqslant x_1(y_2 + 3y_3) + x_2(y_1 + y_2 + 2y_3) \leqslant 6y_1 + 7y_2 + 18y_3.$$

Wir wollen die skalierten Werte auf der rechten Seite minimieren, müssen jedoch gleichzeitig garantieren, dass für jede Variable der Zielfunktionskoeffizient nicht unterschritten wird.

Auf diese Weise erhalten wir ein weiteres lineares Problem, das zu unserem LP **duale** Problem. In diesem Zusammenhang wird das Ausgang-LP **primal** genannt.

$$\begin{array}{rcl} \textbf{primal: } \max Z(x_1,x_2) & = & 4x_1+3x_2 \\ x_2 & \leqslant & 6 \\ x_1+x_2 & \leqslant & 7 \\ 3x_1+2x_2 & \leqslant & 18 \\ x_1,x_2 & \geqslant & 0. \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \textbf{dual: } \min Z(y_1,y_2,y_3) & = & 6y_1+7y_2+18y_3 \\ y_2+3y_3 & \geqslant & 4 \\ y_1+y_2+2y_3 & \geqslant & 3 \\ y_1,y_2,y_3 & \geqslant & 0. \end{array}$$

Betrachten wir den Punkt $y^* = (0,1,1)$, so ist dies ein zulässiger Punkt des dualen Problems und sogar die optimale Lösung (s.Übung). Der Punkt $(0,4,0)$ liefert die Abschätzung 28 und $(0,0,\frac{3}{2})$ liefert die Abschätzung 27 des Zielfunktionswertes des primalen LPs.

Wir fassen jetzt zusammen einige Fakten über duale Probleme.

1. Anschaulich erlaubt man eine Verletzung der Nebenbedingungen, bestraft sie aber in der Zielfunktion durch Zusatzkosten pro verletzte Einheit. Eine Lösung, für die es sich nicht lohnt, die Nebenbedingungen zu verletzen, löst das duale Problem.
2. Jede zulässige Lösung des dualen Problems liefert eine obere Schranke des primalen LPs und umgekehrt: jede zulässige Lösung des primalen liefert eine untere Schranke des dualen Problems (s. der schwache Dualitätssatz).
3. Die Zielfunktionswerte optimaler Lösungen der beiden Probleme stimmen überein (s. der starke Dualitätssatz).

Das duale Problem zu einem (primalen) LP in Grundform hat die folgende Gestalt

$$\begin{array}{rcl} & \textbf{primal} & \\ \max Z(\boldsymbol{x}) & = & \boldsymbol{c^T x} \\ \boldsymbol{Ax} & \leqslant & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} & \geqslant & \boldsymbol{0} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & \textbf{dual} & \\ \min Z_D(\boldsymbol{y}) & = & \boldsymbol{b^T y} \\ \boldsymbol{A^T y} & \geqslant & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} & \geqslant & \boldsymbol{0} \end{array}$$

Allgemeine Bildungsregeln bei dualen Problemen:

Primales Problem		Duales Problem
Zielfunktion: *maximiere*		Zielfunktion: *minimiere*
Nebenbedingungen		duale Variablen
$\sum_j a_{ij}x_j \leqslant b_i$	$\Leftrightarrow$	$y_i \geqslant 0$
$\sum_j a_{ij}x_j = b_i$	$\Leftrightarrow$	$y_i \in \mathbb{R}$
(primale) Variablen		Nebenbedingungen
$x_j \geqslant 0$	$\Leftrightarrow$	$\sum_i a_{ij}y_i \geqslant c_j$
$x_i \in \mathbb{R}$	$\Leftrightarrow$	$\sum_i a_{ij}y_i = c_j$

1. Einem primalen Maximierungsproblem entspricht ein duales Minimierungsproblem.
2. Einer $\leqslant$-Restriktion entspricht eine im Vorzeichen beschränkte duale Variable. Zu einer Gleichheitsrestriktion gehört eine unbeschränkte duale Variable.
3. Eine im Vorzeichen beschränkte primale Variable korrespondiert mit einer $\geqslant$-Restriktion im dualen Problem. Eine unbeschränkte primale Variable hat im dualen PRoblem eine Gleichheitsrestriktion zur Folge.

Satz 2.3 Schwacher Dualitätssat

Betrachten wir ein LP und sein Duales:

primal **dual**

$$(P)\quad \begin{aligned} \max Z(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad\qquad (D)\quad \begin{aligned} \min Z_D(\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} &\geqslant \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} &\geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Sei $\bar{\boldsymbol{x}}$ eine zulässige Lösung des primalen LPs und $\bar{\boldsymbol{y}}$ eine zulässige Lösung des dualen LPs, dann gilt:

$$\boldsymbol{c}^T\bar{\boldsymbol{x}} \leqslant \boldsymbol{b}^T\bar{\boldsymbol{y}}.$$

Beweis Wir nutzen die Rechenregel der transponierten Matrizen: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

$$\boldsymbol{c^T \bar{x}} = \boldsymbol{\bar{x}^T c} \leqslant \boldsymbol{\bar{x}^T (A^T \bar{y})} = (\boldsymbol{\bar{x}^T A^T})\boldsymbol{\bar{y}} = (\boldsymbol{A\bar{x}})^T \boldsymbol{\bar{y}} \leqslant \boldsymbol{b^T y}.$$

Satz 2.4 Starker Dualitätssatz der linearen Optimierung

Betrachten wir ein LP und sein Duales wie im Satz 2.5. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (P) und (D) haben beide zulässige Lösungen.

(ii) (P) und (D) haben Optimallösungen, deren Zielfunktionswerte übereinstimmen.

(iii) (P) oder (D) hat eine endliche Optimallösung.

Beweis. Siehe z.B. *A. Schrijver: Theory of Linear and Integer Programming. John Wiley & Sons (1986).*

Beispiel 2.9.

primal	**dual**
$$(P) \quad \begin{aligned} \max Z(x_1,x_2) &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$	$$(D) \quad \begin{aligned} \min Z_D(y_1,y_2) &= 7y_1 + 18y_2 \\ y_1 + 3y_2 &\geqslant 4 \\ y_1 + 2y_2 &\geqslant 3 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

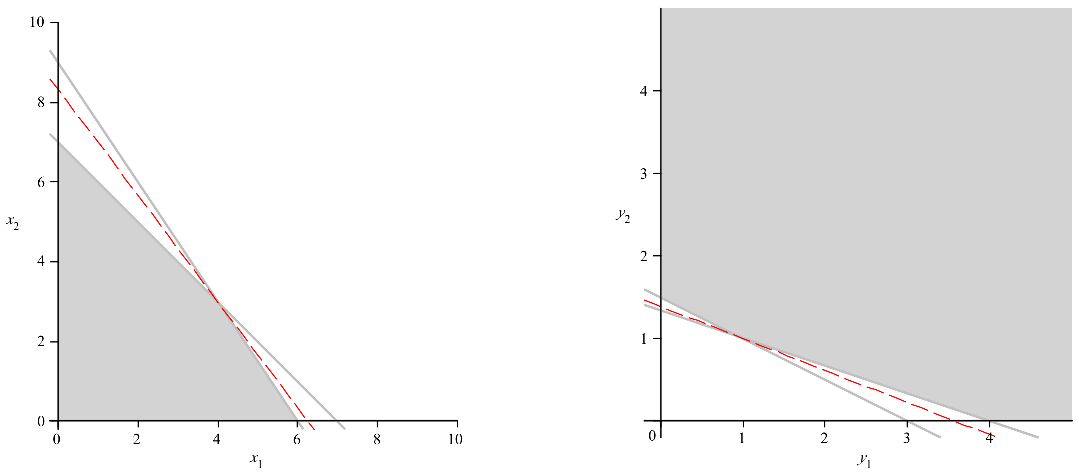


Abbildung 2.9: Die grafische Lösung des primal-dualen Paares.

Zu beachten ist, dass es nicht möglich (unsinnig) ist, beide zulässigen Mengen auf einem Bild zu betrachten, auch wenn es die Dimension der Probleme erlaubt. Die primale Variablen haben völlig andere Bedeutung als die dualen (s. Beispiel 2.11). Nur die Zielfunktionswerte stimmen überein!

2.5.1 Sonderfälle beim Lösen von LPs mit Simplex-Algorithmus

Wir befassen uns zunächst mit Situationen, die zu Anfang des Algorithmus auftreten können. Dabei werden wir zwei Tatsachen verwenden, die im Zusammenhang mit dem dualen Problem stehen:

1. Wenn die Ausgangslösung des primalen Problem zulässig ist aber nicht optimal, dann ist die Ausgangslösung des Dualen unzulässig.
2. Ist der Zielfunktionswert des primalen Maximierungsproblems nicht nach oben beschränkt, so besitzt das duale Minimierungsproblem keine Lösung (die Menge der zulässigen Lösungen ist leer).

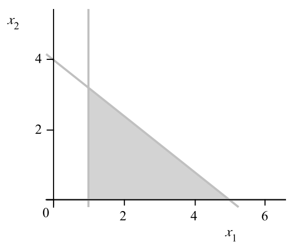
A. Unzulässige Ausgangslösung

Es kann passieren, dass der Ursprung keine zulässige Ecke ist. Man erkennt eine unzulässige Lösung daran, dass eine Basisvariable, hier eine Schlupfvariable, negativ ist.

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leqslant 20 \\ -x_1 &\leqslant -1 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + y_1 &= 20 \\ -x_1 + y_2 &= -1 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-3	-2
y_1	20	4	5
y_2	-1	-1	0



Zur Lösung dieses Sonderfalls betrachtet man einen Eckentausch, also eine Iteration des Simplex-Algorithmus. Das Verfahren wird auch **duales** Simplex genannt. Man wählt zuerst die Zeile (die einer Spalte des dualen Problems entspricht) und erst dann die Spalte (die einer Zeile des Dualen entspricht).

Schritt 1: Wahl der Pivotzeile

Wähle Pivotzeile z mit dem kleinsten $a_{z0} < 0$ (Negativer Lösungswert mit dem größten Betrag).

Schritt 2: Wahl der Pivotspalte

Findet man in der Pivotzeile z kein Element $a_{zj} < 0$, $j = 1, \ldots, n$, so besitzt das Problem keine zulässige Lösung. (Das duale Problem ist unbeschränkt!) Abbruch des gesamten Verfahrens. Sonst wähle eine Spalte s mit:

$$\frac{a_{0s}}{a_{zs}} = \max\left\{\frac{a_{0j}}{a_{zj}} \,|\, j = 1, \ldots, n,\ a_{zj} < 0\right\}$$

Schritt 3: Umrechnung des Tableaus

Wie beim primalen Simplex-Algorithmus.

In unserem Beispiel tauschen wir x_1 gegen y_2.

Tab. 1		y_2	x_2
Z	3	-3	-2
y_1	16	4	5
x_1	1	-1	0

Und so gelangen wir zu einer zulässigen Basis, die durch die Ecke $(1, 0)$ definiert wird.

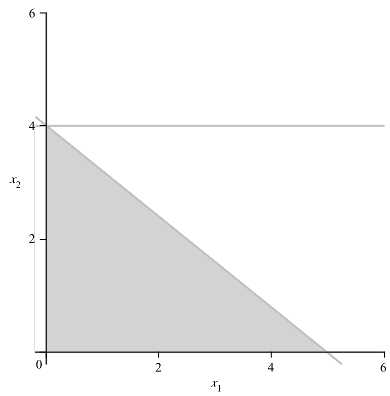
B. Primale Entartung erster Art

Wenn die Pivotspalte festliegt, wird im zweiten Schritt des Simplex-Algorithmus die Pivotzeile ausgewählt. Auch hier kann es vorkommen, dass mehrere Kandidaten in Frage kommen.

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2) &= 2x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 &\leqslant 20 \\ x_2 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + y_1 &= 20 \\ x_2 + y_2 &= 4 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-2	-3
y_1	20	4	5
y_2	4	0	1



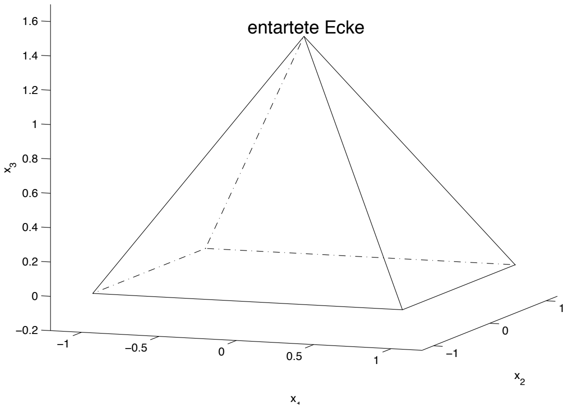
Man wählt zufällig eine der in Frage kommenden Zeilen.

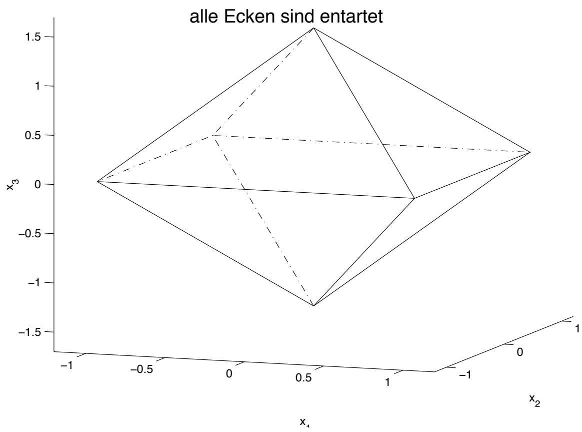
Tab. 1a		x_1	y_2
Z	12	-2	3
y_1	0	4	-5
x_2	4	0	1

Tab. 1b		x_1	y_1
Z	12	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	4	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
y_2	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Tab. 2a		y_1	y_2
Z	12	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_2	4	0	1

An der aktuellen Ecke (4,0) treffen ich mehr Restriktionen als Nichtbasisvariablen. Eine oder mehrere Basisvariablen besitzen den Wert 0.





Dieser Fall ist nicht dramatisch in $\mathbb{R}^2$, weil es stets bedeutet, dass eine oder mehrere Restriktionen überflüssig (**redundant** sind. In $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ treffen sich an dieser Ecke mehrere Hyperebenen. Theoretisch besteht für den Simplex-Algorithmus die Gefahr des Kreisens innerhalb der Basislösung eines derartigen Punktes. Es gelingt nicht, den Eckpunkt zu verlassen.

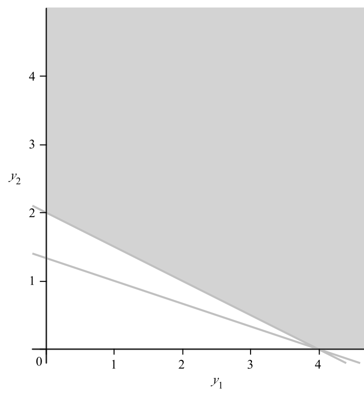
C. Duale Entartung

Bei der Wahl der Pivotspalte im ersten Schritt einer Simplex-Iteration kann es passieren, dass die Auswahlregel nicht eindeutig ist, d.h. dass es zwei oder mehr Werte gibt, die den gleichen kleinsten negativen Wert aufweisen. Dies entspricht der Situation analog zur primalen Entartung, dass es an einer Ecke mehr Restriktionen als Nichtbasisvariablen im dualen Problem gibt. Eine häufig verwendete Regel ist, die Spalte der zur Wahl stehenden Strukturvariablen mit dem kleinsten Index zu wählen. Sonst kann es nicht gelingen, den Eckpunkt zu verlassen, weil man trotz des Basiswechsels an der gleichen Ecke bleibt.

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2) &= 4x_1 + 4x_2 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-4	-4
y_1	7	1	1
y_2	18	2	3

$$\begin{aligned} \min Z_D(y_1, y_2) &= 7y_1 + 18y_2 \\ y_1 + 2y_2 &\geqslant 4 \\ y_1 + 3y_2 &\geqslant 4 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$



Dies ist auch der Fall, wenn im Endtableau für mindestens eine Nichtbasisvariable der Eintrag in Zeile 0 gleich 0 ist. Würde man diese Variable in Basis aufnehmen, so erhielte man eine weitere optimale Basislösung.

D. Primale Entartung zweiter Art

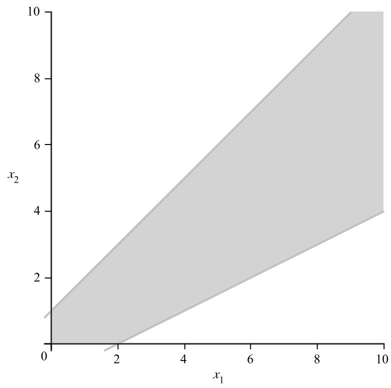
Alle Elemente der Pivotspalte sind kleiner oder gleich 0. Dann kann man nach der aufgestellten Regel keine Pivotspalte aussuchen.

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 2 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} z - 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + y_1 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + y_2 &= 2 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-2	-1
y_1	1	-1	1
y_2	2	1	-2

Tab. 1		y_2	x_2
Z	4	2	-5
y_1	3	1	-1
x_1	2	1	-2

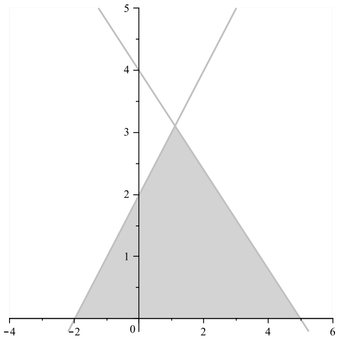
In der zweiten Simplex-Iteration ist die zweite Spalte die Pivotspalte, d.h. die Variable x_2 müsste zur Basis wechseln. Wir bleiben bei der Wahl der Pivotzeile stehen, weil alle Einträge in der Pivospalte kleiner als 0 sind. Dies bedeutet, dass das Wachstum der Variablen x_2 unbegrenzt ist. Aus der ersten Restriktion erhalten wir $x_2 \geqslant -3$ und aus der zweiten Restriktion $x_2 \geqslant -1$.



Der zulässige Bereich ist unbeschränkt. (Das duale Problem besitzt keine zulässige Lösung.)

E. Freie Strukturvariablen

Fehlt eine Nichtnegativitätsbedingung für eine Entscheidungsvariable, so wird trotzdem als Startbasis der Nullpunkt genommen. In der ersten Iteration des Simplex-Algorithmus, wenn möglich, wird dann eine Ecke erreicht.



Beispiel 2.10.

$$\max Z(x,y) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 &\leqslant 20 \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 2 \\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

In der ersten Iteration wird die Ecke (5,0) gewählt, die in diesem Fall auch optimal ist.

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-3	-2
y_1	20	4	5
y_2	2	-1	1

Tab. 1		y_1	x_2
Z	15	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{4}$
x_1	5	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
y_2	7	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Beispiel 2.11. Wir betrachten nun unser Produktionsproblem, um die ökonomischen Beziehungen zwischen dem primalen und dualen Problem zu diskutieren.

	Typ 1	Typ 2	Verfügbarkeit
Maschine A	0	1	6h
Maschine B	1	1	7h
Maschine C	3	2	18h
Gewinn	4 €	3 €	

	Primales Problem	**Duales Problem**
Strukturvariablen	x_i - Anzahl der zu produzierenden Einheiten von Artikel i	y_i - Kosten pro Kapazitätseinheit der Maschine i
Ziel	Maximierung der Gewinne	Minimierung der Kosten
Restriktionen	Kapazitäten der Maschinen	Gewinn pro Artikeltyp

Primales Problem:

$$\begin{aligned} \max Z_P(x_1, x_2) &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Tab. 0		x_1	x_2
Z_P	0	-4	-3
y_1	6	0	1
y_2	7	1	1
y_3	18	3	2

Tab. 1		y_3	x_2
Z_P	24	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_1	6	0	1
y_2	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Tab. 2		y_3	y_2
Z_P	25	1	1
y_1	3		
x_2	3		
x_1	4		

Duales Problem:

$$\begin{aligned} \min Z_D(y_1, y_2, y_3) &= 6y_1 + 7y_2 + 18y_3 \\ y_2 + 3y_3 &\geqslant 4 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 &\geqslant 3 \\ y_1, y_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Tab. 0		y_1	y_2	y_3
$-Z_D$	0	6	7	18
x_1	-4	0	-1	-3
x_2	-3	-1	-1	-2

Tab. 1		y_1	x_1	y_3
$-Z_D$	-28	6	7	-3
y_2	4	0	-1	3
x_2	1	-1	-1	1

Tab. 2		y_1	x_1	x_2
$-Z_D$	-25	3	4	3
y_2	1			
y_3	1			

Man erkennt, dass die Zielfunktionen Z_P und Z_D denselben optimalen Wert 25 annehmen. Die Strukturvariablen des Duals korrespondieren mit den Schlupfvariablen des Primals: Im primalen Problem sind die Schattenpreise für die Schlupfvariablen y_2 und y_3 jeweils 1 und entsprechen damit den Werten der Strukturvariablen y_2 und y_3 im dualen Problem. Also sind die Kosten für eine Kapazitätseinheit für Maschine 1 gleich Null denn y_1 steht in der Basis des Primalen Endtableaus. Sie nimmt dort den Wert 3 an: es gibt also noch freie Kapazität, die nicht gebraucht wird. Diese Kapazität ist also wertlos. Im dualen Endtableau steht y_1 in der Nichtbasis, also nimmt y_1 den Wert Null an: die Kosten für eine Kapazitätseinheit der Maschine 1 ist Null.

Die Nichtbasisvariablen y_2 und y_3 im primalen Simplex entsprechen den Basisvariablen y_2 und y_3 im dualen Simplex; letztere haben beide den Wert 1: Die Kosten für eine Kapazitästeinheit betragen jeweils 1 Euro. Wenn eine zusätzliche Kapazitätseinheit für weniger als 1 Euro bereitgestellt werden kann, so lohnt sich diese Anschaffung! Wenn eine Kapazitätseinheit für mehr als 1 Euro verkauft werden kann, so lohnt es sich nicht.

Gleichermaßen korrespondieren die Schlupfvariablen des dualen Problems, x_1 und x_2, mit den Entscheidungsvariablen des primalen Problems, x_1 und x_2: Als Basisvariablen im Endtableau des primalen Problems haben x_1 und x_2 die Werte 4 und 3; was genau den Schattenpreisen für x_1 und x_2 im Endtableau des Dualen Problems entspricht.

Interpretation der Ergebnisses des primalen LP und des dualen LP:

Im primalen Optimierungsproblem geht es um **Gewinnmaximierung** zur Produktion zweier Sorten unter den Produktionskapazitätsrestriktionen der drei Maschinen. Entscheidungsvariablen sind die Mengeneinheiten des zu produzierenden Produkte der Sorte 1 und 2. Die Schlupfvariablen geben die nicht genutzte Kapazität der drei Maschinen an. Die Maschinen 2 und 3 sind somit voll ausgelastet. Die Schattenpreise geben an, wie viel eine Maschinenstunde höchstens kosten darf, damit sich die Anschaffung einer zusätzlichen Kapazitätseinheit lohnt.

Im dualen Optimierungsproblem werden **die Kosten der Maschinenlaufzeiten minimiert**. Die Entscheidungsvariablen sind gegeben durch die Kosten pro Stunde Laufzeit der drei Maschinen. Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass zur Herstellung von Sorte 1 eine Stunde in Maschine B und 3 Stunden auf Maschine C nötig sind. Für Sorte 2 braucht man 1 Stunde Laufzeit in Maschine A, 1 Stunde in Maschine B und 2 Stunden in Maschine C. Daraus lassen sich die Kosten des Produkts ableiten, wobei gefordert wird, dass jene größer gleich sind als der vorgegebene Gewinn von € 4 für Sorte 1 und € 3 für Sorte 2. Die Schlupfvariablen im dualen Problem geben somit den monetären Schlupf für die Gewinne der Produkte der Sorte

1 und 2 an. Letztendlich werden genau die vorgegebenen Gewinne erzielt, da der Schlupf für beide Variablen Null ist. Die Kosten für Maschine A und B betragen jeweils € 1. Der Wert für Maschine C ist Null, da es Überkapazitäten bzw. Schlupf gibt. Die reduzierte Kosten für Maschine C betragen 3. Würde man eine Einheit der Maschine C nutzen wollen, so würde sich der Wert der Zielfunktion um 3 verschlechtern.

2.6 Weitere Anwendungsbeispiele: Transportproblem

2.6.1 Abfallminimierung

Beispiel 2.12. Aus einer 3 Meter breiten Papierbahn sollen breite Rollen geschnitten werden, so dass der Abfall gering ist. Es stehen folgende Schneidepläne zur Wahl. Man möchte eine optimale Kombination von Schneideplänen zu finden. Wie häufig welche Schneidevariante gewählt werden soll, um möglichst wenig Abfall zu produzieren?

Schneideplan	Rolle 1 Breite 1,8m	Rolle 2 Breite 1,2	Rolle 3 Breite 0,5	Verbrauch
Plan 1	1	1	0	3,0
Plan 2	1	0	2	2,8
Plan 3	0	2	1	2,9
Plan 4	0	1	3	2,7
Plan 5	0	0	6	3,0
Bedarf	500	800	600	

Pro Schneideplan führen wir eine Variable, die besagt wie häufig, der Schneideplan ausgeführt werden soll.

$$\min Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \cdot x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.3x_4 + 0 \cdot x_5$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 500 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 &= 800 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 &= 600 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Die Grundform dieses LPs lautet:

$$\max Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -0.2x_2 - 0.1x_3 - 0.3x_4$$

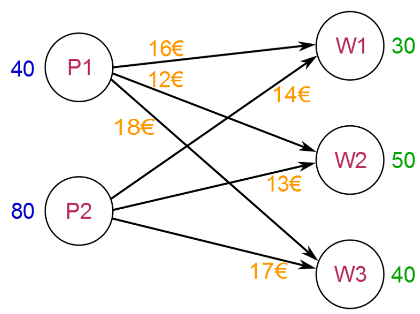
unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leqslant 500 \\
-x_1 - x_2 &\leqslant -500 \\
x_1 + 2x_3 + x_4 &\leqslant 800 \\
-x_1 - 2x_3 - x_4 &\leqslant -800 \\
2x_2 + x_3 + 3x_4 + 6x_5 &\leqslant 600 \\
-2x_2 - x_3 - 3x_4 - 6x_5 &\leqslant -600 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Die Optimallösung ist: Minimale Abfall $Z^* = 15m$, Plan 1 $x_1^* = 500$, Plan 2 $x_2^* = 0$, Plan 3 $x_3^* = 150$, Plan 4 $x_4^* = 0$, Plan 5 $x_5^* = 75$

2.6.2 Transportproblem

Beispiel 2.13. Eine Firma produziert Wäschetrockner an zwei Standorten. Von den beiden Produktionsorten werden drei verschiedene Warenhäuser beliefert. Die Transportkosten, um einen Trockner aus einem gegebenen Produktionsort zu einem gegebenen Warenhaus zu bringen, stehen in der Tabelle. Man möchte zu minimalen Kosten den Bedarf der Warenhäuser bedecken, unter der Berücksichtigung der Kapazitäten der Produktionsstandorte. Das Problem lässt sich grafisch und tabellarisch zusammenfassen.



	Warenhaus W1	Warenhaus W2	Warenhaus W3	Kapazität
Produktionsort P1	16 €	12 €	18 €	40
Produktionsort P2	14 €	13 €	17 €	80
Bedarf	30	50	40	

Die Strukturvariable x_{ij} soll die Anzahl der Trockner speichern, die vom Produktionsort i an das Warenhaus j geliefert werden sollen.

	Warenhaus W1	Warenhaus W2	Warenhaus W3	Kapazität
Produktionsort P1	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$	40
Produktionsort P2	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$	80
Bedarf	30	50	40	

Daraus ergibt sich folgende Zielfunktion.

$$\min Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 16x_{11} + 12x_{12} + 18x_{13} + 14x_{21} + 13x_{22} + 17x_{23}$$

Die Nebenbedingungen werden folgend formuliert. Die Kapazität muss berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 80 \end{aligned}$$

Der Bedarf der Warenhäuser soll bedeckt werden:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 30 \\ x_{12} + x_{22} &= 50 \\ x_{13} + x_{23} &= 40 \end{aligned}$$

Und zuletzt die Nichtnegativitätbedingungen:

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geqslant 0.$$

Zunächst erstellen wir das LP-Grundmodell zu diesem Problem:

$$\max Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = -16x_{11} - 12x_{12} - 18x_{13} - 14x_{21} - 13x_{22} - 17x_{23}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leqslant 40 \\
-x_{11} - x_{12} - x_{13} &\leqslant -40 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leqslant 80 \\
-x_{21} - x_{22} - x_{23} &\leqslant -80 \\
x_{11} + x_{21} &\leqslant 30 \\
-x_{11} - x_{21} &\leqslant -30 \\
x_{12} + x_{22} &\leqslant 50 \\
-x_{12} - x_{22} &\leqslant -50 \\
x_{13} + x_{23} &\leqslant 40 \\
-x_{13} - x_{23} &\leqslant -40
\end{aligned}$$

Wir stellen das Ursprungsmodell in einer kompakterer Form, die wir bei ZIMPL verwenden werden.

Die Transportkosten stellen wir in einer Matrix $C = (c_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant \leqslant 3}$ dar:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 16 & 12 & 18 \\ 14 & 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Die Kapazitäten speichern wir in einem Vektor $\boldsymbol{d}$:

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \end{pmatrix}$$

und der Bedarf der Warenhäuser ebenso in einem Vektor $\boldsymbol{e}$:

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

So lässt sich unser Transportproblem (TP) folgend darstellen:

$$\min \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\forall_{i,1\leqslant i\leqslant 2} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = d_i,$$
$$\forall_{j,1\leqslant j\leqslant 3} \sum_{i=1}^{2} x_{ij} = e_j,$$
$$\forall_{i,1\leqslant i\leqslant 2}\ \forall_{j,1\leqslant j\leqslant 3}\ \ x_{ij} \geqslant 0.$$

Unser Transportproblem lässt sich folgend in der Matrixform darstellen:

$$\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}.$$

Dabei gilt:

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 80 \\ 30 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

und

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

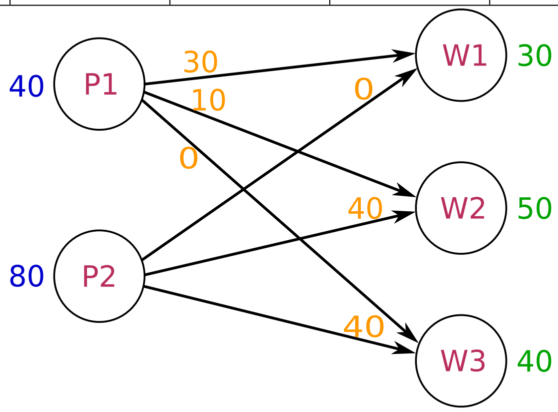
Die optimale Lösung zu unserem Problem lässt sich durch ZIMPL/SCIP lösen, und ist in der Tabelle dargestellt.

Es ist allerdings kein Zufall bzw. Willkür, dass die Lösung ganzzahlige Werte hat, obwohl wir bewusst reelle Werte für die Strukturvariablen zugelassen haben. Bei den Transportproblemen weist die Matrix $\boldsymbol{A}$ der technischen Koeffizienten eine besondere Struktur auf. Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist *total unimodular*.

Satz 2.5

Gegeben sei ein lineares Programm in der Form $\{\max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant 0\}$. Wenn $\boldsymbol{A}$ eine total unimodulare Matrix ist und $\boldsymbol{b}$ ausschliesslich ganzzahlige Einträge beinhaltet, dann ist die optimale Lösung dieses LPs ganzzahlig, unabhängig von den Werten der Zielfunktionskoeffizienten $\boldsymbol{c}$.

	W1	W2	W3	
P1	16 €	12 €	18 €	
	30	10	0	40
P2	14 €	13 €	17 €	
	0	40	40	80
	30	50	40	1800 €



Satz 2.6

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ ist **total unimodular**, wenn

1. $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}, \quad \forall\, i, j.$
2. Jeder Spalte beinhaltet höchstens zwei Koeffizienten ungleich 0.
3. Es gibt eine Unterteilung (Z_1, Z_2) der Zeilenindexmenge, so dass für jede Spalte j, die zwei Nicht-Null-Koeffizienten beinhaltet, gilt

$$\sum_{i \in Z_1} a_{i,j} - \sum_{i \in Z_2} a_{i,j} = 0.$$

Satz 2.7

Die Matrix eines Transportproblems ist total unimodular.

Es lässt sich leicht überprüfen, dass alle drei Bedingungen aus Satz 2.6.2 für unsere Matrix $\boldsymbol{A}$ gelten. Deswegen ist $\boldsymbol{A}$ total unimodular und daher die Lösung zu unserem Transportproblem ganzzahlig.

Wir wollen nun einen alternativen Ansatz zur Lösung des Transportproblems erarbeiten. Zur Veranschaulichung werden wir das LP direkt auf dem zugrundeliegenden Graphen (einem vollständig bipartiten Graphen) lösen. Dadurch verdeutlichen wir die mögliche Loslösung von der Matrix-Vektor-Form. Letztlich werden damit eine graphische Variante der Simplexmethode konstruieren. Wir wechseln immer noch von einer zulässigen Basislösung zur anderen, aber wir stellen keine Simplex-Algorithmustableaus auf, sondern tragen die aktuelle Basislösung als Transportvorschlag in die Darstellung ein.

Konstruktion einer initial zulässigen Basislösung

Wir benötigen zum Verfahrensstart eine initiale zulässige Basislösung. Dazu gibt es in der Literatur mehrere Ansätze. Wir wenden hier die *Nordwesteckenregel* an. Die Idee dahinter lautet:

Verteile die Waren in möglichst großen Lieferungen, nach der Reihe der Indizes. Am Ende hat man maximal $m + n - 1$ Lieferwege benutzt. Der Name der Regel rührt daher, dass man beim links oben dargestellten Lager $P1$, also im „Nordweste" mit der Verteilung beginnt. Wir formulieren das Vorgehen etwas präziser:

1. Beginne mit dem Produktionsort $P1$. Setze dazu i = 1.
2. Bestimme den kleinsten Index j eines Warenhauses, dessen Bedarf noch nicht gedeckt ist.
3. Wenn der aktuelle Produktionsort Pi noch einen Warenbestand aufweist, versende eine möglichst große Menge an das Warenhaus Wj (d.h. entweder bis den Produktionsort leer ist oder der Bedarf des Warenhauses gedeckt ist).
4. Ist der aktuelle Produktionsort Pi geleert, erhöhe i um eins, um nachfolgend den nächsten Produktionsort zu betrachten.
5. Solange noch nicht alle Produktionsorte geleert sind, gehe zurück zum zweiten Schritt.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 0	12 € 0	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 0	17 € 0	80
	30	50	40	€0

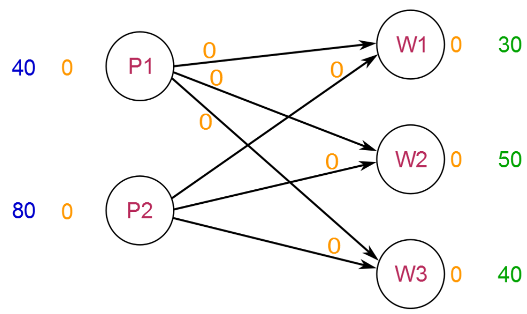


Abbildung 2.10: Nordwesteckenregel: Anfangs sind keine Waren zugeteilt

Wenden wir das Verfahren auf das aus den vorigen Abschnitten bekannte Beispielproblem an. Die wesentlichen Schritte lauten dann:

(i) Produktionsort P1 hat 40 Einheiten verfügbar, davon dürfen 30 nach W1 geliefert werden, um das W1 Bedarf zu decken.

	W1	W2	W3	
P1	16 €	12 €	18 €	
	30	0	0	40
P2	14 €	13 €	17 €	
	0	0	0	80
	30	50	40	480 €

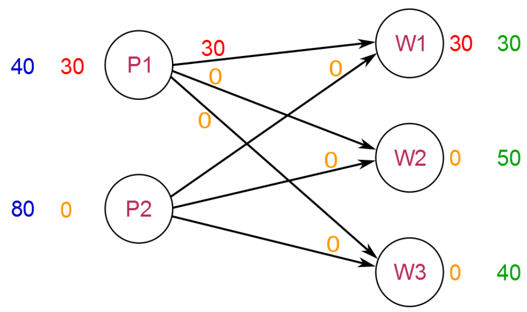


Abbildung 2.11: Erster Schritt der Nordwesteckenregel: 30 Einheiten von P1 zu W1.

(ii) Produktionsort P1 hat noch zehn Einheiten übrig. Diese kann es an Warenhaus W2 liefern, der danach noch Restbedarf 40 hat.

	W1	W2	W3	
P1	16 €	12 €	18 €	
	30	10	0	40
P2	14 €	13 €	17 €	
	0	0	0	80
	30	50	40	600 €

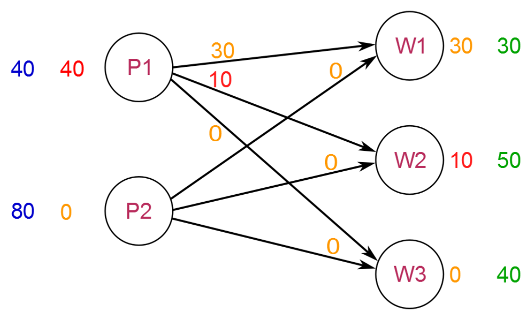


Abbildung 2.12: Schritt (ii): 10 Einheiten von P1 zu W2.

(iii) Produktionsort P2 kann 40 Einheiten an Warenhaus W2 liefern, dessen Bedarf ist damit gedeckt.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 30	12 € 10	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 40	17 € 0	80
	30	50	40	1120 €

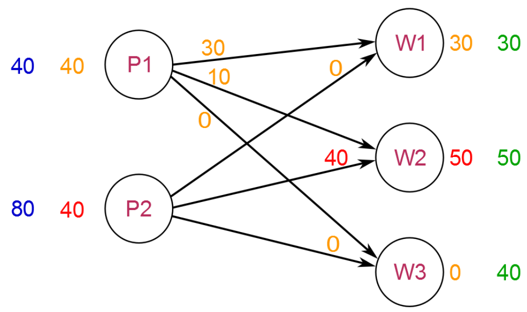


Abbildung 2.13: Schritt (iii): 40 Einheiten von P2 zu W2.

(iv) Produktionsort P2 kann die restlichen 40 Einheiten an Warenhaus W3 liefern, dessen Bedarf ist damit gedeckt.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 30	12 € 10	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 40	17 € 40	80
	30	50	40	1800 €

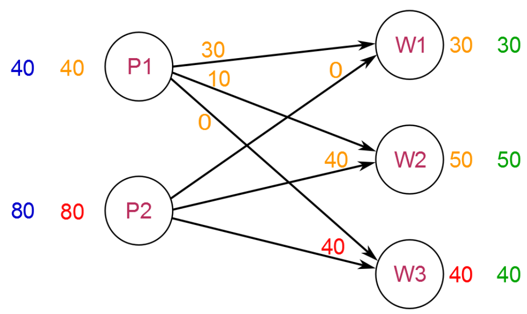


Abbildung 2.14: Schritt (iii): 40 Einheiten von P2 zu W2.

Die Tabelle bzw. Diagramm in Abbildung 2.14 zeigt die initiale Basislösung. Der unten rechts Tabellenwert ist der zugehörige Zielfunktionswert

$$16 \cdot 30 + 12 \cdot 10 + 18 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 13 \cdot 40 + 17 \cdot 40 = 480 + 120 + 520 + 680 = 1800.$$

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass das Verfahren vor zum allerletzten Schritt keine Probleme machen kann. Aber warum geht im letzten Schritt alles auf? Da wir gefordert haben, dass die Warenmenge in den Produktionsorten den Gesamtbedarf deckt, wissen wir, dass der letzte Schritt den Bedarf des letzten Warenhauses tatsächlich füllen muss. Unsere gefundene Zuweisung ist unterm Strich also eine zulässige Lösung unseres gegebenen TP. Aber wieso sollte es eine Basislösung sein?

Satz 2.8

Die Nordwesteckenregel erzeugt eine zulässige initiale Basislösung für das gegebene TP.

Wir können an dieser Stelle bereits folgern, dass das TP stets zulässig ist. Denn durch das garantierte Finden einer zulässigen Basislösung durch Anwendung der Nordwesteckenregel kann der zulässige Bereich niemals leer sein. Außerdem ist die zu minimierende Zielfunktion stets nach unten hin durch Null beschränkt, da sowohl die Transportmengen einer zulässigen Lösung als auch die streckenbezogenen Transportkosten allesamt nichtnegativ sind.

Austauschschritt

Nachdem wir eine initial zulässige Basislösung gefunden haben, beschreiben wir den zum Basiswechsel notwendigen Austauschschritt. Wir bezeichnen dazu die in der aktuellen Basis genannten Transportwege als Basiskanten, die übrigen als Nichtbasiskanten.

Wir skizzieren zunächst die grobe Idee:

1. Führe einen potentiellen Austauschschritt für jede NBV durch.
2. Erhöhe den Wert der NBV so weit, wie man es mittels Korrektur entlang eines bestimmtem „Zickzackweges“ von Basiskanten ausgleichen kann:
   (a) Finde die BV mit dem größten Kosten in der Austausch-NBV Spalte (oder Zeile). (grün)
   (b) Finde eine Paar Ausgleich-Variablen (blau), die ein Rechteck mit der Austauschvariablen in 2) bilden, und deren Netto Kostenänderung pro Einheit negativ ist.
3. Erhöhe dazu den Nichtbasiskantenwert soweit, die Lösung mittels Korrektur der Ausgleich-Variablen zulässig bleiben kann.
4. Wiederholen bis es keinen weiteren Austauschschritt gibt. So liegt bereits das Optimum vor.

Das Verfahren erläutern wir am besten direkt an unserem Beispielproblem.

	W1	W2	W3	
P1	16 € 30	12 € 10	18 € 0	40
P2	14 € 0	13 € 40	17 € 40	80
	30	50	40	1800 €

Tauschen 30 Einheiten von (P1,W1) zu (P2,W1) mit Ausgleich von (P2,W2) zu (P1,W2).

	W1	W2	W3	
P1	16 € 0	12 € 40	18 € 0	40
P2	14 € 30	13 € 10	17 € 40	80
	30	50	40	1710 €

Abbildung 2.15: Erste Austauschschritt des Transportproblems.

Wir suchen uns eine Nichtbasiskante, etwa (P2, W1). Diese ist per Definition der Basis ein nicht benutzter Transportweg. Lassen Sie uns deren Wert exemplarisch um eine Einheit erhöhen. Dadurch würde der Bedarf von W1 überschritten. Also müssen wir einen anderen Produktionsort um eine Einheit kürzen, etwa (P1, W1). Nun ist aber die Kapazität von P1 überschritten. Also müssen wir einen anderen Warenausgang um eine Einheit kürzen, etwa (P1, W2). Damit ist der Bedarf von W2 mehr gedeckt. Wir müssen eine Einheit mehr zu (P2, W2) zuliefern. Der Kreis ist nun geschlossen, und es sind wieder alle Transportrandbedingungen erfüllt.

Auf den zur Kompensation verwendeten Kanten können wir die beispielhaft mehr bzw. weniger transportierte Einheit nun durch die maximale Warenmenge ersetzen, die gerade so keine der gültigen Restriktionen verletzt. Dadurch fällt notwendig auf einer der Kanten die Transportmenge auf Null. Im konkreten Fall können wir alle 30 Einheiten auf der Kante (P2,W1), transportieren. Die unteren Tabelle in Abbildung 2.15 zeigt der Transportschema nach einem Austauschschritt. Die ergebenden Kosten sind $30 \cdot 2€ + 30 \cdot 1€ = 90€$ niedriger.

Die Variable des nun nicht mehr genutzten Transportweges wird aus der Basis entfernt, und die Variable der eingangs ausgesuchten Nichtbasiskante wird in die Basis aufgenommen. Es wird somit x_{21} Basisvariable mit Wert 30 und dafür x_{11} als Nichtbasisvariable auf Null gesetzt. Die neue Basislösung ist sofort ablesbar, weil alle Kantenwerte schon wieder feststehen.

Wir suchen noch einen Austausch. Für W1 ist keine weitere Austausch möglich, weil der Bedarf alle von dem preiswertesten Produktionsort gedeckt ist. Für W2 ist keine weitere Austausch möglich, weil W2 keine Basisvariable hat. Für W3 ist keine weitere Austausch möglich, weil alle Einheiten bei der preiswertesten Kante liegen. Bei Betrachtung der Tabelle auf Seite 56 stimmt diese Lösung mit der optimale Lösung von SCIP überein.

2.7 Sensitivitätsanalyse

Sensitivitätsanalyse bewertet, wie empfindlich (oder stabil) die Optimallösung zu der LP Modellspezifizierung ist.

- Wie viel darf sich einen Restriktionswert verändern, ohne eine neue optimale Basislösung aufzutreten?
- Wie viel verändert sich die optimalen Lösungswerte bei einer Änderung einer Restriktion?
- Wie viel darf sich einen Zielfunktionskoeffizient verändern, ohne eine andere optimale Basislösung aufzutreten?

In diesem Teil nutzen wir den Ausdruck „*die gleiche Lösung*", als Kurzform für „die **Basisvariablen** der Optimallösung bleiben unverändert". Die Werte der Optimallösung dürfen abweichen.

Die Simplex-Algorithmus Tableaus helfen die obigen Fragen zu beantworten.
Beispiel 2.1

Gegeben ist das folgende LP in Grundform

$$\text{max:} z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{unter den Nebenbedingungen:} \quad x_1 + x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 + x_3 &\leqslant 6 \\ x_2 + x_3 &\leqslant 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

In Normalform

$$\text{max:} z = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} \text{unter den Nebenbedingungen:} \quad x_1 + x_2 + y_1 &= 4 \\ x_1 + x_3 + y_2 &= 6 \\ x_2 + x_3 + y_3 &= 8 \\ x_1, \dots, y_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Die Simplex-Algorithmus Tableaus sind:

Starttableau

Tab. 0		x_1	x_2	x_3	Q	
z	0	-4	-2	-1		
y_1	4	1	1	0	4	$\rightarrow$
y_2	6	1	0	1	6	
y_3	8	0	1	1	∞	
		$\uparrow$				

Erste Tableau

Tab. 1		y_1	x_2	x_3	Q	
z	16	4	2	-1		
x_1	4	1	1	0	∞	
y_2	2	-1	-1	1	2	$\rightarrow$
y_3	8	0	1	1	8	
				$\uparrow$		

Endtableau

Tab. 2		y_1	x_2	y_2
z	18	3	1	1
x_1	4	1	1	0
x_3	2	-1	-1	1
y_3	6	1	2	-1

Die Optimallösung ist:

$$x_1^* = 4,\, x_2^* = 0,\, x_3^* = 2,\, y_1^* = 0,\, y_2^* = 0,\, y_3^* = 6,\, z^* = 18,$$

Wenn eine Schlupfvariable gleich Null ist, ist die entsprechende Restriktion verbindlich, und eine Erhöhung des Restriktionswerts ergibt eine größere optimale Zielfunktionswert.

Eine *Schlupfvariable*, die im Basislösung eintritt, hat eine Schattenpreis gleich Null, weil die entsprechende Restriktion unverbindlich ist. Eine Zunahme in diesem Restriktionswert ergibt nur zusätzlichen Schlupf und keinen weiteren Gewinn.

In diesem Beispiel erhält man ein größerer Gewinn bei eine Zunahme der Restriktionswerte $b_1 > 4$ bzw. $b_2 > 6$ aber nicht bei $b_3 > 8$.

2.7.1 Empfindlichkeit gegen Restriktionswerte und Schattenpreise

Wir nehmen an, dass der Wert b_1 verändert sich von 4 auf $b_1^{(\text{neu})} = 4 + \Delta$. Da y_1 eine Nichtbasisvariable ist, ist die erste Restriktion verbindlich. Daraus folgt, dass der neue Zielfunktionswert $z^{(\text{neu})} = z^* + s_1\Delta$ wird. Diese Erhöhung $s_1\Delta$ ist nicht unbegrenzt; Bei einem großen Wert von Δ (bzw. $b_1^{(\text{neu})}$) kommt die dritte Restriktion ins Spiel. Die dritte Restriktion wird verbindlich und die Erste unverbindlich. Wir können jetzt den Schattenpreis formal definieren.

Definition 2.4. Schattenpreis
Wenn eine Restriktionswert von b_j auf $b_j^{(\text{neu})} = b_j + \Delta$ zugenommen wird, und die entsprechende Änderung in Zielfunktionswert von z^* auf $z^{(\text{neu})} = z^* + s_j\Delta$ ist, **ist s_j der Schattenpreis**, *solange die neue optimale Lösung die selbe Basislösung hat.*

Die drei Schattenpreise des obigen LPs sind $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, $s_3 = 0$.

In welchem Wertbereich von $b_1 + \Delta$ bleibt die optimale Basislösung unverändert?

Man könnte den ganzen Simplex-Algorithmus mit $b_1 + \Delta$ statt b_1 nochmal lösen, aber es gibt ein schnelleres Verfahren. Wir müssen nur die Lösungsspalte neu berechnen, denn alle andere Einträge verändern sich nicht. Solange alle erste Spalte positiv bleiben, bekommen wir die selbe Lösung.

In diesem Beispiel haben wir:

	Lösungsspalte		
Zeile	Tab. 0	Tab. 1	Tab 2.
0	0	$16 + 4\Delta$	$18 + 3\Delta$
1	$4 + \Delta$	$4 + \Delta$	$4 + \Delta$
2	2	$2 - \Delta$	$2 - \Delta$
3	8	8	$6 + \Delta$

Die erste Spalte eines SA-Tableaus (Lösungsspalte) stellt die Werte die Basisvariablen dar, die alle positiv bleiben müssen.

Lösungsspalte für die x_1 Zeile:

$$0 \leqslant x_1 = 4 + \Delta, \quad \Rightarrow \Delta \geqslant -4.$$

Lösungsspalte für die x_3 Zeile:

$$0 \leqslant x_3 = 2 - \Delta, \quad \Rightarrow \Delta \leqslant 2.$$

Lösungsspalte für die y_1 Zeile:

$$0 \leqslant y_3 = 6 + \Delta, \quad \Rightarrow \Delta \geqslant -6.$$

Wir benötigen alle Bedingungen gleichzeitig, daraus folgt $-4 \leqslant \Delta \leqslant 2$.

Um die selbe optimale Basislösung zu erreichen, liegt Δ bzw. $b_i^{(\text{neu})}$ im Bereich

$$-4 \leqslant \Delta \leqslant 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant b_i^{(\text{neu})} \leqslant 6,$$

und der neue optimale Zielfunktionswert beträgt $z^*_{(\text{neu})} = 18 + 3\Delta$.

Informell ist der Schattenpreis die Zunahme in z^*, wenn $\Delta = 1$ ist, d.h. eine Erhöhung der Restriktionswert auf *eine Einheit*. z^* wird bei $\Delta = 1$ $z^* = 18 + 3$, also ist der Schattenpreis der 1. Restriktion $s_1 = 3$.

Es ist kein Zufall, dass $z^{(\text{neu})} = 18 + 3\Delta$ und der z-Zeile Eintrag für y_1 gleich 3 ist. Der Schattenpreis s_1 lässt sich direkt aus der Endtableau ablesen. Der z-Zeile Eintrag einer Nichtbasis-Schlupfvariable ist der jeweilige Schattenpreis. Ein Schattenpreis muss positive sein, sonst ist die Lösung nicht optimal.

Bemerkungen

1. Wenn $b_1^{(\text{neu})}$ außerhalb dieses Intervalls liegt, dann erzielen wir verschiedene Basisvariablen. In diesem Fall muss man den ganze Simplex-Algorithmus Verfahren wiederholen.

2. Diese Methode nimmt an, dass nur ein Restriktionswert verändert wird. Es gibt Methoden, die mehrfache simultane Änderungen bewältigen können, aber sie kommen in dieser LVS nicht vor.

3. Viele OR-Programme geben diese Sensitivitätsbereiche optional aus. Leider berechnet SCIP weder die Schattenpreise noch die Sensitivitätsbereiche.

2.7.2 Änderungen der Zielfunktion

Wir betrachten Änderungen der Zielfunktion für Basisvariablen bzw. Nichtbasisvariablen einzeln.

Basisvariablen Nehmen wir nun an, dass die Änderung zu einem BV-Koeffizienten der Optimallösung gehört. Z.B. x_3 verändert sich von 1 auf 1+δ, dann gilt

$$z = 3x_1 + 2x_2 + (1 + \delta)x_3.$$

Die resultierende Basislösung des originalen Problems ist auch zulässig für das neue Problem, weil die Restriktionswerte unverändert sind. Jedoch verändert sich der optimale Zielfunktionswert, und die Basislösung ist vielleicht nicht mehr optimal.

In der letzten Tableau die z-Zeile wird sich in der folgenden Weise verändern.
Nehme die entsprechende Zeile (x_3), multipliziere sie mit δ, und addiere zu der **z** Zeile.

x_3	2	-1	-1	1
δx_3	2δ	-δ	-δ	δ
z	18	3	1	1
$Z_{(\text{neu})}$	18+2δ	3-δ	1-δ	1+δ

Diese Lösung bleibt unverändert unter den folgenden Bedingungen:

$$1 - \delta > 0, \qquad 3 - \delta > 0 \qquad \text{und} \qquad 1 + \delta > 0$$

Daraus folgt

$$-1 < \delta < 1$$

und der Zielfunktionskoeffizient c_3 liegt im Intervall

$$0 < c_3 < 2.$$

Die neue optimale Zielfunktionswert ist

$$z_{\text{(neu)}} = 18 + 2\delta$$

Nichtbasisvariablen Nehmen wir nun an, dass die Änderung zu einem **NBV**-Koeffizienten gehört. Z.B. x_2 verändert sich von 2 auf 2+δ, dann gilt

$$z_{\text{(neu)}} = 4x_1 + (2 + \delta)x_2 + x_3$$

δ wird von dem **z**-Zeile-Eintrag in der x_2 Spalte subtrahiert. Ansonsten bliebt das Endtableau unverändert. Die neue **z**-Zeile ist nun

$Z_{\text{(neu)}}$	18	3	1-δ	1

Wenn $1-\delta < 0$, ist das Endkriterium nicht mehr erfühlt und man bekommt eine andere optimale Basislösung.

Um $1 - \delta \geqslant 0$ zu gelten, benötigt man $\delta \leqslant 1$ und $c_2 \leqslant 3$. Bemerken Sie, dass δ negativ sein darf.

Nochmal diese Methode gilt nur für einzelnen Änderungen der z-Zeile Koeffizienten.

Kapitel 3

Ganzzahlige Programmierung

Wie wir es an den bis jetzt betrachteten Beispielen gesehen haben, verlangen die häufig in der Praxis auftretende Probleme, dass die Werte der Strukturvariablen ganzzahlig oder sogar binär sein sollen. Dies führt zu einer neuen Klasse von Optimierungsproblemen, die wir in diesem Kapitel betrachten.

Im unterschied zu linearen Programmen, die in polynomialer Laufzeit optimal gelöst werden können, ist das finden einer beweisbaren optimaler Lösung Probleme mit ganzzahligen variablen ein *NP-schweres*[1] Problem. Bis jetzt bekannte Lösungsverfahren haben exponentielle Laufzeit.

In diesem Kapitel betrachten wir zwei etablierte exakte Verfahren zu Lösung von MILP: Schnittebenenverfahren und Entscheidungsbaumverfahren. Beide wurden in den fünfziger Jahren entwickelt. Exakte Verfahren erlauben die Bestimmung einer optimalen Lösung. Im Unterschied dazu gibt es Heuristiken. Es sind Verfahren die zulässige Punkte finden, ohne die Optimalität zu garantieren. Die letzteren brauchen üblicherweise polynomiale Zeit, um eine Lösung zu liefern.

Zunächst geben wir ein Grundmodell eines ganzzahligen Programms an.

Definition 3.1. Ein **gemmischt-ganzzahliges lineares Programm** (MILP)[2] wird folgend definiert:

[1] *NP-schwer* soweit unklar, ob es überhaupt in polynomialer Zeit lösbar ist.

[2] MILP - (engl.) *mixed integer linear programming*

$$\begin{aligned} \max Z(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ und $p \in \{0, \ldots, n\}$.

Ist $p = n$ dann wird das obige Programm ein **ganzzahliges lineares Programm** (IP)[3]genannt.

Ist $p = 0$, dann haben wir ein LP.

3.1 Schnittebenenverfahren

Wir definieren zuerst zwei Begriffe, die im Schnittebenenverfahren eine Schlüsselrole spielen: die *LP-Relaxierung* und die *Schnittebene*.

Betrachten wir zur Vereinfachung das folgende IP:

$$(IP) \qquad \begin{aligned} \max Z(x) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \qquad x \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Die Menge

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\},$$

die durch das Weglassen der Ganzzahligkeitsbedingung entsteht, bildet ein konvexes Polyeder. P enthält alle zulässigen Punkte des IPs, aber nicht alle Punkte in P sind zulässig für das IP.

Definition 3.2. Das lineare Programm

$$\begin{aligned} \max Z(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \qquad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

bzw. $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in P\}$ wird als die **LP-Relaxierung** des ganzzahliges Problems (IP) bezeichnet.

[3]IP - (engl.) *integer programming*

Definition 3.3. Eine **Schnittebene** ist eine Ungleichung, die von allen zulässigen Punkten des IPs (allen ganzzahligen Punkten) erfüllt ist, aber nicht von der optimalen Lösung der LP-Relaxierung.

Eine Schnittebene schneidet die Optimale Lösung der Relaxierung ab bzw. einen Teil von P, der nicht für das IP zulässig ist.

Schnittebenenverfahren:

1. Löse die LP-Relaxierung des IPs.
   Ist die Lösung ganzzahlig - ENDE - die optimale Lösung des IPs wurde gefunden.
   Sonst:

2. Finde eine Schnittebene und füge zum IP hinzu und gehe zu 1.

3.1.1 Gomory-Schnitte

Wir betrachten das folgende IP:

$$\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\leqslant& b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\leqslant& b_2 \\
&\vdots& \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\leqslant& b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\in& \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Dabei soll $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i = \{1, \ldots n\}$ und $j = \{1, \ldots m\}$ gelten. Die Normalform nach der LP-Relaxierung stellen wir folgend dar:

$$\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &=& b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &=& b_2 \\
&\vdots& \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &=& b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} &\geqslant& 0.
\end{aligned}$$

Die Variablen $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ sind die Schlupfvariablen. Nach Ende des Simplex-Algorithmus steht in jeder Restriktion links eine Basisvariable und der Rest sind die Nichtbasisvariablen. Schauen wir uns eine solche Restriktion an:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, \tag{3.1}$$

dabei ist B_i die i-te Basisvariable und N ist die Indexmenge der Nichtbasisvariablen. Weil alle Variablen nichtnegativ sind, erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leqslant \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j,$$

dabei ist $\lfloor a \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich a ist.

Es gilt also

$$x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leqslant x_{B_i} + \sum_{j \in N} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i$$

d.h.

$$x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leqslant \bar{b}_i.$$

Haben die Variablen ganzzahlige Werte, so hat die linke Seite der Ungleichung auch einen ganzzahligen Wert. Daher können wir die rechte Seite abrunden:

$$x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j \leqslant \lfloor \bar{b}_i \rfloor,$$

Diese Ungleichung wird somit von allen zulässigen Punkten des IPs erfüllt, aber nicht von der aktuellen Lösung der LP-Relaxierung, wenn x_{B_i} einen gebrochenen Wert annimmt. In diesem Fall bringen wir eine neue Schlupfvariable s_1 ein

$$x_{B_i} + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor x_j + s_1 = \lfloor \bar{b}_i \rfloor. \tag{3.2}$$

Ziehen wir Gleichung 3.1 von Gleichung 3.2 ab, so erhalten wir folgende Gleichung - ein **Gomory-Schnitt**.

$$\sum_{j \in N} (\lfloor \bar{a}_{ij} \rfloor - \bar{a}_{ij}) x_j + s_j = \lfloor \bar{b}_i \rfloor - b_i,$$

Diese Ungleichung hängt nur von Nichtbasisvariablen ab, und kann somit leicht als neue Zeile des Tableaus hinzugefügt werden. Der Simplex-Algorithmus beginnt dann mit dem dualen Simplex und als Pivotzeile wird die neue Zeile mit dem Gomory-Schnitt ausgewählt.

Beispiel 3.1. Wir lösen das folgende IP mittels Gomory-Schnittebenenverfahren.

Das Simplex-End-Tableau der LP-Relaxierung:

$$\begin{aligned} \max Z_P(x_1, x_2) &= x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 6 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Tab. 2		y_1	y_2
Z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

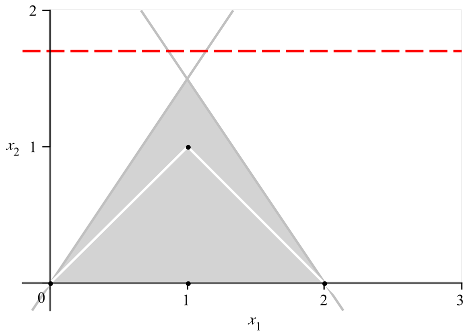


Abbildung 3.1: Die LP-Relaxierung und die konvexe Hülle (weißer Rand) der zulässigen Punkte.

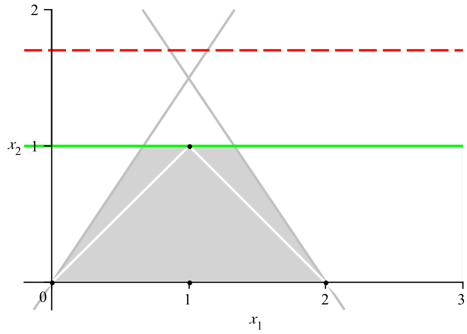


Abbildung 3.2: Der erste Gomory-Schnitt (grün) hinzugefügt.

Die Variable x_2 ist nicht ganzahlig. Aus dieser Zeile generieren wir einen Gomory-Schnitt.

$$-\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + s_1 = -\frac{1}{2}.$$

Dies entspricht der Ungleichung $x_2 \leqslant 1$, was sich nach der zweiten Zeile in Tableau einfach ausrechnen lässt. Wir fügen den Gomory-Schnitt zu unserem Tableau samt der Schlupfvariablen s_1 hinzu und rechnen mit dem dualen Simplex weiter.

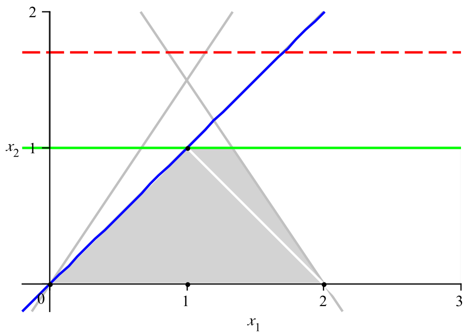
Tab. G1		y_1	y_2
Z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

Tab. G2		s_1	y_2
Z	1	1	0
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	1	1	0
y_1	2	-4	1

Die neue optimale Lösung der LP-Relaxierung liefert einen gebrochenen Wert für x_1. Wir fügen den Gomory-Schnitt

$$\frac{2}{3}s_1 + \frac{2}{3}y_2 + s_2 = \frac{2}{3},$$

hinzu, welcher der Ungleichung $x_1 \geqslant x_2$ entspricht (s. die blaue Gerade in der Abbildung).



Tab. G3		s_1	y_2
Z	1	1	0
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	1	1	0
y_1	2	-4	1
s_2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Tab. G4		s_1	s_2
Z	1	1	0
x_1	1	1	$-\frac{1}{2}$
x_2	1	1	0
y_1	1	-5	$\frac{3}{2}$
y_2	1	1	$-\frac{3}{2}$

Im End-Tableau gibt es keine gebrochenen Werte für die Basisvariable. Die optimale ganzzahlige Lösung lautet: $x_1 = x_2 = 1$ mit dem Zielfunktionswert 1.

Bemerkung: Der Nachteil des Schnittebenenverfahrens von Gomory ist, dass die numerische Probleme durch mangelnde Genauigkeit der Zahlendarstellung im Computer die Lösungssuche erschweren.

3.1.2 Branch & Bound-Verfahren

Die Grundidee des Enscheidungsbaumverfahrens ist es, systematisch solche Lösungspunkte auszuschliessen, die nicht das Optimum sein können. Für ganzzahlige Optimierungsaufgaben eignet sich das so genannte **Branch-and-Bound**-Verfahren. Es basiert auf der folgenden Beziehung. Gegeben sei folgendes IP:

$$\begin{aligned} \max Z(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} &\leqslant \boldsymbol{b} \qquad (IP) \\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} &\in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$Z^{IP} \leqslant Z^{IP}_{opt} \leqslant Z^{LP}_{opt},$$

dabei ist

$$Z^{IP} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^*, \quad \text{für ein} \quad \boldsymbol{x}^* \in \mathbb{Z}^n \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{b} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$

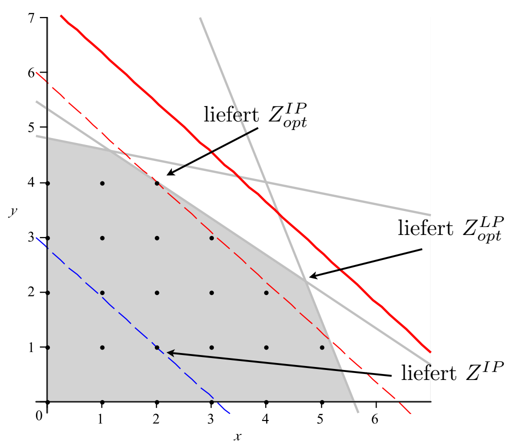
der Zielfunktionswert eines zulässigen Punktes des IPs,

$$Z^{IP}_{opt} = \max\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant b,\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

der optimale Zielfunktionswert und

$$Z^{LP}_{opt} = \max\{\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant b,\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

der optimale Zielfunktionswert der LP-Relaxierung. Das bedeutet, der Zielfunktionswert eines beliebigen zulässigen Punktes liefert die untere Schranke an den Zielfunktionswert des Optimums und das Maximum der Relaxierung liefert eine obere Schranke.



Wir erläutern das Verfahren an einem Beispiel und dann erarbeiten wir die allgemeine Fassung.

Beispiel 3.2.

$$\begin{aligned} \max Z_P(x_1, x_2) &= 500x_1 + 800x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leqslant 24 \\ x_1 + 5x_2 &\leqslant 24 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

1. Wir lösen zunächst die LP-Relaxierung (mit SCIP). Die Lösung lautet:

   $$Z^{LP} = 4350, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 4,5.$$

   Die Lösung ist also **nicht ganzzahlig**.

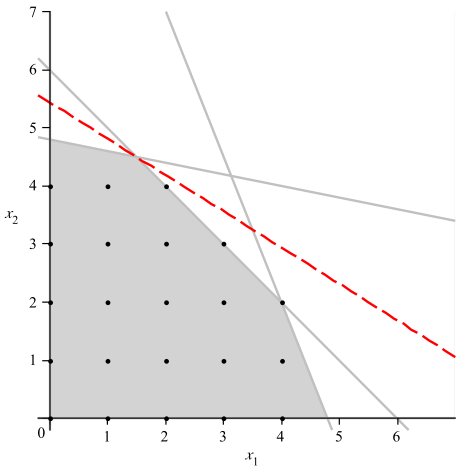


Abbildung 3.3: Die LP-Relaxierung.

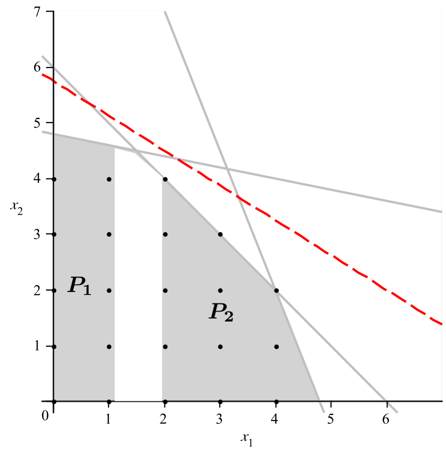


Abbildung 3.4: Die Probleme P_1 und P_2.

2. Beide Variablen sich nicht ganzzahlig. Wir müssen uns jetzt entscheiden auf welchen Variablen wir *branchen* wollen.

   Wir branchen beispielsweise auf x_1.

   Wir unterteilen die LP-Relaxierung auf zwei Probleme. Zu dem ersten Problem fügen wir die Nebenbedingung $x_1 \leqslant 1$ und zu dem zweiten Problem die Nebenbedingung $x_1 \geqslant 2$.

$$
\begin{array}{c|c}
(P_1) & (P_2) \\
\max Z_P(x_1,x_2) = 500x_1 + 800x_2 & \max Z_P(x_1,x_2) = 500x_1 + 800x_2 \\
5x_1 + 2x_2 \leqslant 24 & 5x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\
x_1 + 5x_2 \leqslant 24 & x_1 + 5x_2 \leqslant 24 \\
x_1 + x_2 \leqslant 6 & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\
x_1 \ \leqslant\ 1 & x_1 \ \geqslant\ 2 \\
x_1, x_2 \geqslant 0. & x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{array}
$$

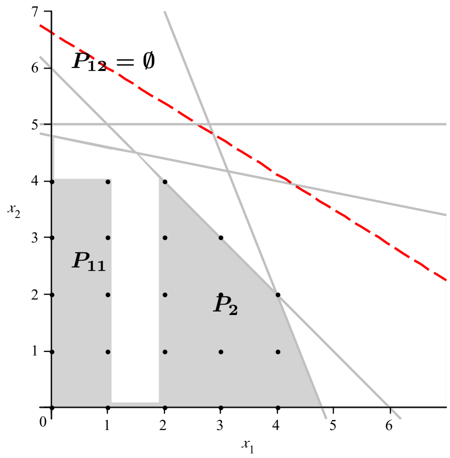
Wir entscheiden uns jetzt, welches Unterproblem wir als erstes lösen.

(a) Lösen wir beispielsweise zuerst P_1. Die Lösung lautet:

$$Z^{LP} = 4180, \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4.6.$$

x_2 hat einen **gebrochenen Wert. Wir branchen wieder**, diesmal auf der Variablen x_2, weil sie gebrochenen Wert hat. Wir erstellen aus dem Problem P_1 zwei neue Unterprobleme:

$$
\begin{array}{c|c}
(P_{11}) & (P_{12}) \\
\max Z_P(x_1,x_2) = 500x_1 + 800x_2 & \max Z_P(x_1,x_2) = 500x_1 + 800x_2 \\
5x_1 + 2x_2 \leqslant 24 & 5x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\
x_1 + 5x_2 \leqslant 24 & x_1 + 5x_2 \leqslant 24 \\
x_1 + x_2 \leqslant 6 & x_1 + x_2 \leqslant 6 \\
x_1 \ \leqslant\ 1 & x_1 \ \leqslant\ 1 \\
x_2 \ \leqslant\ 4 & x_2 \ \geqslant\ 5 \\
x_1, x_2 \geqslant 0. & x_1(, x_2) \geqslant 0).
\end{array}
$$



(b) Die Liste der offnen Probleme besteht aus den Problemen P_2, P_{11} und P_{12} Wir entscheiden uns spontan für P_{11} und lösen es:

$$Z^{LP} = 3700, \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4.$$

Hurrah! **Eine ganzzahlige Lösung** gefunden. Ist das aber die best mögliche? Das werden wir erst wissen, wenn alle offnene Unterprobleme abgearbeitet sind. Immerhin haben wir **eine untere Schranke für den Zielfunktionswert**:

$$Z_u^{IP} = 3700.$$

(c) Jetzt lösen wir (mal wieder spontan) P_{12}. Es stellt sich heraus, dass der **zulässige Bereich leer ist**. Hier brauchen wir nicht weiter zu machen.

(d) Und jetzt bleibt uns nur noch P_2. Die Lösung lautet:

$$Z^{LP} = 4200, \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4.$$

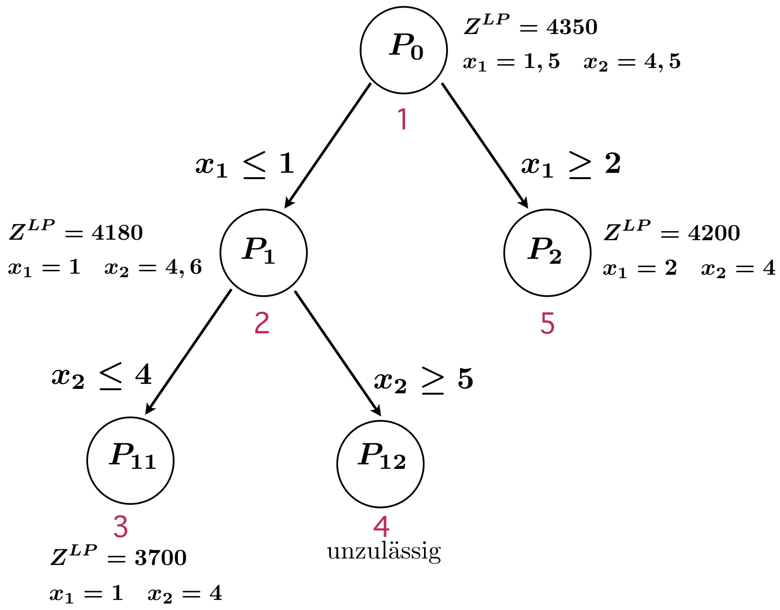
Hurrah! Eine ganzzahlige Lösung gefunden und sogar mit einem besseren Zielfunktionswert als bis jetzt (s. (b))

Wir haben alle offene Knoten abgearbeitet. Beim durchsuchen des Baumes haben wir zwei ganze Lösungen gefunden. Wir nehmen das beste. Das Optimum des IPs lautet:

$$Z^{IP} = 4200, \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4.$$

Im Laufe des Branch-And-Bound-Verfahrens gibt es immer wieder zwei Typen von Entscheidungen zu treffen:

(a) auf welcher gebrochenen Variablen zu branchen.



(b) welches Unterproblem (welchen Knoten) als nächstes zu lösen.

Um zu sehen, wie wichtig die Entscheidungen zu treffen sind, die beim Lösung mit Branch-And-Baum entstehen, schauen wir uns an, wie das Verfahren verläuft, wenn man einen anderen Entscheidungsweg nimmt.

Scenario 2:

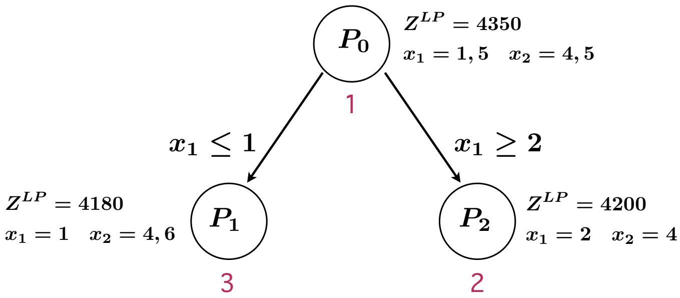
Wir entscheiden uns zuerst das Problem P_2 statt P_1 zu lösen. Die Lösung von P_2 ist ganzzahlig und der Zielfunktionswert liefert eine untere Schranke für den Zielfunktionswert des IPs. Erst wenn wir alle offene Unterprobleme gelöst haben und keine IP-Lösung mit höheren Zielfunktionswert gefunden haben, können wir sicher sein, dass diese Lösung das Optimum ist. Falls noch offene Unterprobleme sind, suchen wir erneut eins aus und lösen es. Wir haben nur noch P_1 offen. Wir erhalten zwar eine gebrochene Lösung aber der **Zielfunktionswert von P_1 ist kleiner als die bis jetzt gefundene beste untere Schranke**.

$$Z^{LP} = 4180 < 4200 = Z_u^{IP}.$$

Wenn wir jetzt weiter auf P_1 branchen würden, würden wir im besten Fall den Zielfunktionswert 4180 erhalten und somit könnten wir die bis jetzt gefundene beste untere Schranke nicht verbessern.

Wir haben alle offene Knoten abgearbeitet. Beim durchsuchen des Baumes haben wir eine ganzahlige Lösung gefunden. Das Optimum des IPs lautet:

$$Z^{IP} = 4200, \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4.$$



Scenario 3:

Wir schauen uns zuletzt an, wie der Baum wachsen würde, wenn wir uns nach dem Lösen der LP-Relaxierung (P_0) für die Variable x_2 zum Branchen entschieden würden.

Wir unterteilen die LP-Relaxierung auf zwei Probleme. Zum ersten Problem fügen wir die Nebenbedingung $x_2 \leqslant 4$ und zum zweiten Problem die Nebenbedingung $x_2 \geqslant 5$.

$$(P_1)$$

$$\max Z_P(x_1, x_2) = 500x_1 + 800x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \leqslant 24$$

$$x_1 + 5x_2 \leqslant 24$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 6$$

$$x_1 \leqslant 4$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

$$(P_2)$$

$$\max Z_P(x_1, x_2) = 500x_1 + 800x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \leqslant 24$$

$$x_1 + 5x_2 \leqslant 24$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 6$$

$$x_1 \geqslant 5$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

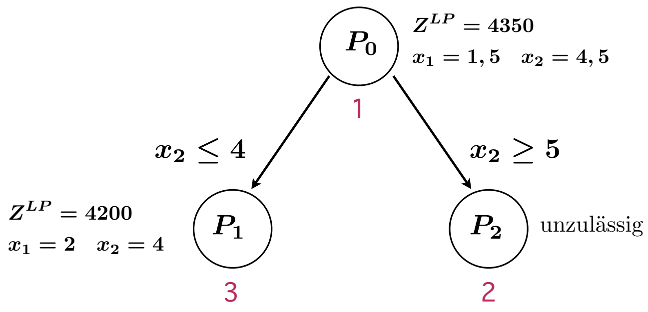
Hier spielt es keine Rolle, für welches Problem wir uns zuerst entscheiden. P_2 ist unzulässig. P_1 liefert eine ganze Lösung:

$$Z^{LP} = 4200, \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4.$$

Damit sind alle offene Knoten des Baums abgearbeitet. Wir haben die optimale Lösung des IPs

$$Z^{IP} = 4200, \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 4.$$

Die zwei letzteren Scenarien haben einen kleineren Entscheidungsbaum geliefert. Es ist aber nicht so einfach, die Regeln zu ermitteln, die immer auf das kleinste Baum steuern. Sind einmal diese Regeln klar gestellt, so verläuft das Branch-And-Bound-Verfahren nach dem folgenden Schema.



Branch-And-Bound

Es handelt sich um ein Maximierungsproblem. Wir bezeichnen mit

L_P die Liste der aktiven Unterprobleme (Knoten),

Z_u^{IP} die untere Schranke des IPs,

$\boldsymbol{x}^*$ die Lösung mit dem Zielfunktionswert Z_u^{IP},

P_0 die LP-Relaxierung des IPs und mit

P_k, $k \in \mathbb{N}$, die Unterprobleme, die beim Branchen entstehen.

1. **Initialisierung**
$$Z_u^{IP} = -\infty, \qquad L_P = \{P_0\}.$$

2. **Solange** $L_K \neq \emptyset$ wähle und entferne ein Unterproblem P_k aus L_P und löse es. Sei Z_k der optimale Zielfunktionswert, wenn vorhanden, und $\boldsymbol{x}^k$ die zugehörige Lösung.

   (a) Der zulässige Bereich ist leer.

   (b) Die Lösung ist ganzzahlig:

   Gilt $Z_k > Z_u^{IP}$ so setze $Z_u^{IP} = Z_k$ und $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^k$. Eine bessere untere Schranke gefunden.

   (c) Die Lösung beinhaltet gebrochen Variablenwerte und $Z_k <= Z_u^{IP}$:

   Im zulässigen Bereich von P_k kann keine ganzzahlige Lösung mit größeren Zielfunktionswert als bis jetzt bekannt gefunden werden.

   (d) Die Lösung beinhaltet gebrochen Variablenwerte und $Z_k > Z_u^{IP}$:

   - Wähle eine Variable x_j mit gebrochenen Wert $\bar{x}_j$
   - Bilde zwei neue Unterprobleme:

     P_{k_1}: füge zu P_k die Ungleichung $x_j \leqslant \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ hinzu.

     P_{k_2}: füge zu P_k die Ungleichung $x_j \geqslant \lfloor \bar{x}_j \rfloor + 1$ hinzu.

- Füge beide Probleme zur Liste L_P hinzu.

3. **Ausgabe:** Gilt $Z_u^{IP} \neq -\infty$, so hat das IP eine optimale Lösung x^* mit dem Zielfunktionswert Z_u^{IP}. Ansonsten ist das gelöste IP unzulässig.

Zu beachten ist, dass in den Fälle (a) - (c) die Lösungsbereiche ausgeschlossen werden, in denen das Optimum nicht sein kann.

Bemerkungen:

1. In der Praxis werden bei der Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme oft beide Verfahren das Schnittebenenverfahren und Branch & Bound zu Branch-and-Cut kombiniert. Dabei werden im Wurzelknoten und manchmal auch in weiteren Knoten des Branch-and-Bound-Baumes Schnittebenen hinzugefügt, um die lineare Relaxierung zu verschärfen.

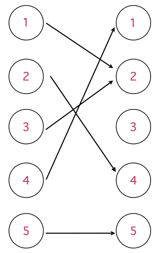
2. Während des Branch-And-Bound-Verfahrens kann man mittels der oberen und unteren Schranke abschätzen, wie weit man von Optimum ist. Die obere Schranke erhält man, indem man den maximalen Wert über die Lösungen der LP-Relaxierungen aller offener Probleme:
$$Z_O = \max_{P \in L_P} \{\boldsymbol{c^T x} \mid x \in P\}$$
Die untere Schranke ist der aktuelle Wert Z_u^{IP}. So wird die so genannte Optimalitätslücke folgend berechnet:
$$100 \cdot \frac{Z_O - Z_u^{IP}}{Z_u^{IP}}.$$
Beträgt die Optimalitätslücke beispielsweise 10, so ist der aktuelle Zielfunktionswert Z_u^{IP} etwa 10% vom optimalen Wert entfernt. Solche Berechnung wird insbesondere genutzt, wenn das Verfahren vorzeitig beispielsweise wegen zu großem Zeitaufwand abgebrochen werden muss.

3.2 Kombinatorische Optimierung

Die kombinatorische Optimierung hängt dicht zusammen mit der ganzahliger Optimierung. Viele kombinatorische Probleme lassen sich als IPs mit binären Variablen darstellen. Wir schauen uns zunächst eine Auswahl davon und dann definieren wir den Begriff *kombinatorisches Optimierungsproblem.*.

Zuordnungsproblem

Es gibt n Mitarbeiter und n Projekte, die bearbeitet werden sollen. Jede Person kann ausschliesslich ein Projekt bearbeiten.



Manche Personen sind für bestimmte Projekttypen besser geeignet, so führt man ein Kostenfaktor $c_{ij} > 0$ pro Person und Projekt ein. Je niedriger der Wert, desto bessere Eignung. Man möchte eine Zuordnung der Mitarbeiter zu den Projekten zu minimalen Kosten finden.

$x_{ij} = 1$, wenn die Person i, dem Projekt j zugeordnet ist, sonst $x_{ij} = 0$.

Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Jede Person bekommt genau ein Projekt:

$$\forall_{i=1,\ldots,n} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Jedes Projekt wir genau von einer Person bearbeitet:

$$\forall_{j=1,\ldots,n} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Wir haben binäre Variablen:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Rucksackproblem

Gegeben ist ein Budget von b (Milionen €), der in Projekte für das kommende Jahr investiert werden soll. Es gibt n Projekte. Der Aufwand bzw. die Kosten des i-ten Projektes gibt der Parameter a_i an und man erwartet c_i als Gewinn bei Investition in das i-te Projekt, $i = 1, \ldots, n$.

$x_i = 1$, wenn das Projekt j bewilligt wird, sonst $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Zielfunktion

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

Das Budget darf nicht überschritten werden:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b.$$

Wir haben binäre Variablen:

$$x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Das Problem des Handlungsreisenden

Das Problem des Handlungsreisenden[4] ist einer der bekanntesten Probleme des Operations Research, weil es einfach zu erklären ist, und somit herausfordernd zum Lösen. Ein Händler muss n Städte besuchen, jede davon genau einmal, und zu seinem Startpunkt zurückkehren. Die Zeit bzw. die Entfernug, von der Stadt i zu Stadt j zu kommen, beträgt c_{ij}. Man muss eine Reihenfolge der besuchten Städte herausfinden, so dass der Händler so schnell wie möglich seine Reise beenden kann.

$x_{ij} = 1$, wenn der Händler direkt von der Stadt i zur Stadt j reist, sonst $x_{ij} = 0$, insbesondere $x_{ii} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Zielfunktion

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Die Stadt i wird genau einmal verlassen:

$$\forall_{i=1,\ldots,n} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Die Stadt j wird genau einmal angereist:

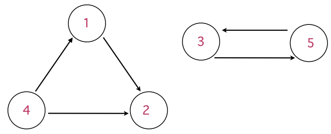
$$\forall_{j=1,\ldots,n} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

Soweit haben wir ein Zuordnungsproblem, das zu Lösungen der Art wie abgebildet, den so genannten getrennten Kurzzyklen oder Subtouren, führen kann.

Um diese zu vermeiden, definiert man beispielsweise die *Subtouren-Eliminierung-Restriktionen*:

$$\forall_{\substack{S \subset \{1,\ldots,n\} \\ 2 \leqslant |S| \leqslant n-1}} \quad \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leqslant |S| - 1.$$

[4]TSP - traveling salesmann problem



Eine solche Restriktion verlangt, wenn wir eine Auswahl von weniger als n Knoten haben, dann dürfen sie nicht einen geschlossenen Kreis bilden.

Wir haben binäre Variablen:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n.$$

Beispiel 3.3. Die Subtouren-Eliminierung-Restriktion ist durch die Kurzzyklen aus der Abbildung verletzt. Nehmen wir zunächst die Knoten $S_1 = \{1,2,4\}$

$$\sum_{i \in S_1} \sum_{\substack{j \in S_1 \\ j \neq i}} x_{ij} = x_{12} + x_{14} + x_{21} + x_{24} + x_{41} + x_{42} = 3 \nleq 2 = |S| - 1.$$

Alle in diesem Abschnitt dargestellten Probleme könnte man letztendlich durch das vollständige Enumerieren lösen. Sie haben die Eigenschaft, dass die optimale Lösung eine Untermenge einer endlicher Menge ist, und damit werden sie zur Klasse der kombinatorischen Optimierungsprobleme gezählt.

Definition 3.4. Gegeben sei eine endliche Menge $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ und eine Kostenfunktion $c : \mathcal{N} \to \mathbb{R}_+$, sowie ein Menge $\mathcal{F}$ von *zulässigen* Untermengen von $\mathcal{N}$. Das Problem,

$$\min_{S \in \mathcal{F}} \sum_{j \in S} c_j,$$

eine zulässige Untermenge zu minimalen Kosten zu finden, wird ein **kombinatorisches Optimierungsproblem** genannt.

3.2.1 Kombinatorische Explosion

Wir betrachten die Problemstellung der oben angeführten Beispiele im Sinne der kombinatorischen Optimierung.

Das Zuordnungsproblem

Aus der Menge von allen Paaren (i,j), $1 \leqslant i,j \leqslant n$ suchen wir uns n Paaren aus, die eine Zuordnung darstellen: jedes i und jedes j kommt in einmal vor. Es gibt $n!$ verschiedene Lösungen - Paaren-Mengen, die einer Zuordnung entsprechen.

Das Knapsack-Problem

Potenziell kann jede Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ eine Lösung sein, solange die Kapazitätsbedingung erfüllt ist. Damit kann die Menge alle zulässigen Lösungen im schlimmsten Fall die Potenzmenge von $\{1, \ldots, n\}$. Wir müssten also 2^n zulässige Mengen enumerieren.

Das Problem des Handlungsreisenden

Aus der Menge von allen Paaren (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant n$ suchen wir uns n Paaren aus, die eine Reise darstellen: jedes i und jedes j kommt in einmal auf der ersten und einmal auf der zweiten Stelle vor. Es gibt $\frac{(n-1)!}{2}$ verschiedene Rundreisen, die überprüft werden müssten, um mittels Enumerieren das Problem des Handlungsreisenden mit n Städten zu lösen. Startet man mit der Stadt 1 so kann man zu $n - 1$ Städten reisen. Entscheidet man sich für die nächste Stadt, so bleiben $n - 2$ zur Auswahl, usw..

Auf ähnliche Weise wie die Komplexität des Knapsack-Problems stellt man fest, dass es bei n Städten 2^n Subtouren-Eliminierung-Restriktionen gibt.

In der Tabelle ist das Wachstum ausgewählter Funktionen gezeigt. Dieses Wachstum nennt man kombinatorische Explosion.

n	$\log n$	$\sqrt{n}$	n^2	2^n	$n!$
10	3.32	3.16	10^2	$1.02 \cdot 10^3$	$3.6 \cdot 10^6$
100	6.64	10	10^4	$1.27 \cdot 10^{30}$	$9.33 \cdot 10^{157}$
1000	9.97	31.62	10^6	$1.07 \cdot 10^{301}$	$4.02 \cdot 10^{2567}$

Aus den Zahlen wird es klar, dass das Enumerieren ein langwieriger Weg sein kann, und somit nur bei kleinen Werten für n möglich ist. Die Notwendigkeit anderer Verfahren wie z.B. Branch-And-Bound wird offensichtlich. Lediglich Zuordnungsprobleme dank ihrer besonderen Struktur (total unimodulare Matrix) lassen sich leicht lösen: die LP-Relaxierung liefert immer eine ganzzahlige (binäre) Lösung.

3.2.2 Heuristiken

Ein Weg eine Lösung zu einem kombinatorischen Problem zu finden, ist das Anwenden von Heuristiken.

Eine Heuristik[5] bedeutet in der Optimierung ein Verfahren, das innerhalb kurzer Zeit und ohne großen Aufwand eine zulässige Lösung eines gegebenen Optimierungsproblems liefert. Dennoch ist die gefundene Lösung meist nicht die Optimallösung und es ist häufig schwer einzuschätzen, wie gut die Lösung ist, d.h. wie weit die Lösung vom Optimum abweicht.

Heuristiken werden häufig im Branch-And-Baum-Verfahren angewendet, um schnell eine untere Schranke zu bekommen.

Wir schauen uns zwei Beispiele von Heuristiken, die beim Lösen des Handlungsreisenden zum Einsatz kommen.

Nearest-Neighbour-Heuristik

Dem intuitiven Vorgehen eines Handlungsreisenden entspricht wohl am ehesten die **Nearest-neighbour-Heuristik** (nächster Nachbar). Von einer Stadt ausgehend wählt diese jeweils die nächstgelegene als folgenden Ort aus. Dieses wird sukzessive fortgesetzt, bis alle Städte bereist wurden und der Handlungsreisende zum Ausgangsort zurückgekehrt ist. Maximal kann es pro Stadt nur so viele ausgehende Kanten geben, wie Knoten im Graphen vorhanden sind. Daraus ergibt sich eine algorithmische Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$, die Anzahl der Rechenschritte hängt also quadratisch von der Zahl der Städte ab. Dass diese Heuristik im Allgemeinen jedoch nicht die beste Lösung liefert, liegt daran, dass die Distanz zwischen der Ausgangsstadt und der letzten besuchten Stadt bis zuletzt nicht berücksichtigt wird.

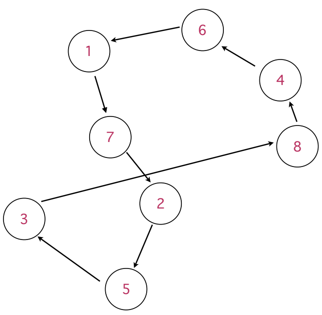


Abbildung 3.5: Die Route nach der Anwendung der Nächster-Nachbar-Heuristik. (Startknoten 1)

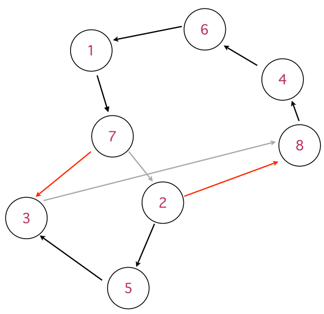


Abbildung 3.6: Die verbesserte Route nach der Anwendung der 2-Opt-Heuristik.

[5]Heuristik (heuriskeinâ (auf)finden, entdecken) bezeichnet die Kunst, mit begrenztem Wissen und wenig Zeit zu guten Lösungen zu kommen.

k-Opt-Heuristiken

Verbessernde Optimierungsverfahren, auch *Post-Optimization-Algorithmen*[6] versuchen, eine bestehende Tour durch kleine Modifikationen zu verkürzen. Die k-Opt-Heuristiken gehören zu dieser Gruppe. Die Grundidee besteht darin, k Kanten aus einer gegebenen Tour zu entfernen und gegen andere Kanten auszutauschen, so dass sich wieder eine Tour ergibt. Ist die neue Tour kürzer als die alte, wird sie als neue Lösung verwendet.

Beispielsweise bei $k = 2$ werden zwei Kanten entfernt und kreuzweise wieder eingefügt. Man kann zeigen, dass das Ergebnis der 2-Opt-Heuristik eine überkreuzungsfreie Tour ist.

Die Güte einer k-Opt-Heuristik in der Praxis hängt stark von der Auswahl der auszutauschenden Kanten und des Parameters ab, für die es verschiedene heuristische Kriterien gibt.

[6] engl.: Nach-Optimierung

Anhang 1: Literatur

Deutsch

Gohout, W.: Operations Research. Oldenbourg

Wiese, H.: Entscheidunugs-und Spieltheorie. Springer-Verlag

Zimmermann, W.: Operations Research. Oldenbourg

Englisch

Winston, W.L. & Venkataramanan M: Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms. Duxbury

Kolman B. & Beck R.E.: Elementary Linear Programming with applications. Academic Press

Anhang 2: Übersetzungsglossar

deutsch	English
Optimierung	optimisation
Lösungsraum	feasible region
Bewertungsfunktion/Zielfunktion	objective function
Restriktion	constraint
zulässige Lösung	feasible solution
optimale Lösung	optimal solution
Struktur-/Entscheidungs-variablen	control variables
Restriktionswerte	resource values
Grundform	standard form
Normalform	canonical form
Simplex-Algorithmus	simplex algorithm
verbindliche Restriktion	binding constraint
Schlupfvariable	slack variable
Schattenpreis / Opportunitätskost	shadow price
Schnittebenenverfahren	cutting plane methods/techniques
Problem des Handlungsreisenden	TSP - traveling salesmann problem
gemmischt-ganzzahliges lineares Programm	mixed integer linear programming (MILP)
ganzzahliges lineares Programm	integer programming (IP)
kombinatorische Optimierung	combinatorial optimisation
dynamische Optimierung	dynamic programming
Backtracking	backwards recursion
unrestringierte nichtlineare Optimierung	unconstrained non-linear optimisation
Regularitätsbedingungen	constraint qualifications
Entartung	degeneracy
Auszahlungsmatrix	payoff matrix
Sattelpunkt	saddle point
Bedauern	regret