# Aufgabenblatt 7

Operations Research – Wirtschaftsinformatik – Online

Sommersemester 2023 Prof. Dr. Tim Downie

## Simplex Algorithmus – Sonderfälle *mit Lösungen*

Lösen Sie mit dem Simplex-Algorithmus (einschließlich dualem Simplex) der folgenden LPs.
Achten Sie dabei auf die verschiedene Sonderfälle.

### Aufgabe 1

$$\max Z(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1 + x_2$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 2 \\ \tfrac{1}{2}x_1 + 2x_2 &\leqslant 4 \\ 2x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 &\leqslant 4 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Was für Entartung hat diese LP?
Zeigen Sie, dass es zwei Wege zur optimalen Lösung gibt.
Hinweis: Der $z$-Wert der optimalen Lösung ist $z^* = \frac{12}{5}$.

*Die $\theta$-Werte vom Nulltableau sind 2, 2, und 8. Beide $y_1$ und $y_2$ sind geeignete Austrittsvariable.*

*Zuerst probieren wir $y_1$ als die Austrittsvariable*

| $Tab.0$ | | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| $y_1$ | $2$ | $0$ | $1$ |
| $y_2$ | $4$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ |
| $y_3$ | $4$ | $2$ | $\frac{1}{2}$ |

| $Tab.1$ | | $x_1$ | $y_1$ | $\theta$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $2$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | |
| $x_2$ | $2$ | $0$ | $1$ | $\infty$ |
| $y_2$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $-2$ | $0$ |
| $y_3$ | $3$ | $2$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Wähle den kleinsten positiven $\theta$-Wert $x_1$ tauscht mit $y_3$*

| $Tab.2$ | | $y_3$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{11}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{8}$ |
| $x_2$ | $2$ | $0$ | $1$ |
| $y_2$ | $-\frac{3}{4}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{15}{8}$ |
| $x_1$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ |
| $\theta$ | | $-1$ | $-\frac{7}{15}$ |

*Nun gibt es einen negativen Wert für BV $y_2$!*

*Dual Schritt Tauschen $y_3$ mit $y_2$*

| $Tab.3$ | | $y_3$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{12}{5}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{7}{15}$ |
| $x_2$ | $\frac{8}{5}$ | $-\frac{2}{15}$ | $\frac{8}{15}$ |
| $y_1$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{2}{15}$ | $-\frac{8}{15}$ |
| $x_1$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $-\frac{2}{15}$ |

*Endkriterium, da alle Werte in der Lösungsspalte und Z-Zeile sind positive.*
*Diese braucht 3 Iterationen.*

*Nun probieren wir $y_2$ als die Austrittsvariable*

| $Tab.0$ | | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ |
| $y_1$ | $2$ | $0$ | $1$ |
| $y_2$ | $4$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ |
| $y_3$ | $4$ | $2$ | $\frac{1}{2}$ |

| $Tab.1$ | | $x_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $2$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $y_1$ | $0$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $x_2$ | $2$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $y_3$ | $3$ | $\frac{15}{8}$ | $-\frac{1}{4}$ |

| $Tab.2$ | | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{12}{5}$ | $\frac{7}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |
| $y_1$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |
| $x_2$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{8}{15}$ | $-\frac{2}{15}$ |
| $x_1$ | $\frac{8}{5}$ | $-\frac{2}{15}$ | $\frac{8}{15}$ |

*Die optimale Lösung ist diesmal in 2 Schritten gefunden.*

**Aufgabe 2**

$$\max Z(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leqslant 3 \\ -2x_1 - 2x_2 &\leqslant -3 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Führen Sie einen Schritt des *dualen* Simplex Algorithmus durch. Was kann man aus Tableau 1 schließen?

| *Tab. 0* | | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | *0* | *-1* | *-2* |
| $y_1$ | *3* | *1* | *-1* |
| $y_2$ | *-3* | *-2* | *-2* |

*Negativer $y_2$-Wert $\Rightarrow$ dualer Schritt.*

| *Tab. 1* | | $x_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | *3* | *1* | *-1* |
| $y_1$ | *4.5* | *2* | *-0.5* |
| $x_2$ | *1.5* | *1* | *-0.5* |

*Alle Einträge in der $y_2$-Spalte sind Negativ, kein gültiger Pivotwert ist vorhanden. Diese zeigt eine primale Entartung zweiter Art: Das zulässige Bereich ist unbegrenzt.*

**Aufgabe 3**

$$\max Z(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 6 \\ x_2 + 3x_3 &\leqslant 9 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 14 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Stellen Sie die LP in Grundform, und lösen Sie sie mit dem Simplex-Algorithmus.

| $Tab.0$ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $0$ | $-2$ | $-1$ | $-3$ |
| $y_1$ | $6$ | $4$ | $1$ | $-1$ |
| $y_2$ | $-6$ | $-4$ | $-1$ | $1$ |
| $y_3$ | $9$ | $0$ | $1$ | $3$ |
| $y_4$ | $14$ | $5$ | $1$ | $1$ |

*Negativer $y_2$-Wert $\Rightarrow$ dualer Schritt.*

| $Tab.1$ | | $x_1$ | $y_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $6$ | $2$ | $-1$ | $-4$ |
| $y_1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $x_2$ | $6$ | $4$ | $-1$ | $-1$ |
| $y_3$ | $3$ | $-4$ | $1$ | $4$ |
| $y_4$ | $8$ | $1$ | $1$ | $2$ |

*$y_1 = 0$ zeigt primale Entartung erster Art. Pivospalte ist $x_3$: kleinste Theta Wert mit positiven Pivotwert ist die $x_3$-Zeile.*

| $Tab.2$ | | $x_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $9$ | $-2$ | $0$ | $1$ |
| $y_1$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $x_2$ | $\frac{27}{4}$ | $3$ | $-\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $x_3$ | $\frac{3}{4}$ | $-1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $y_4$ | $\frac{13}{2}$ | $3$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |

*Nun gibt sowohl primale Entartung als auch duale Entartung (eine NBV $y_2$ ist gleich null) Pivospalte ist $x_1$: kleinste Theta Wert mit poisitiven Pivotwert ist die $y_4$-Zeile.*

| $Tab.3$ | | $y_4$ | $y_2$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $z$ | $\frac{40}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $y_1$ | $0$ | $0$ | $3$ | $0$ |
| $x_2$ | $\frac{1}{4}$ | $-1$ | $-\frac{5}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $x_3$ | $\frac{35}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |
| $x_1$ | $\frac{13}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{6}$ |

*Alle Werte in der $z$-Zeile sind positiv. Optimale Lösung gefunden.*
$x_1^* = \frac{13}{6}, x_2^* = \frac{1}{4}, x_3^* = \frac{35}{12}, z^* = 40/3$

**Aufgabe 4**

$$\max Z(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leqslant 0 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 1 \\ -2x_1 - x_2 &\leqslant -2 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Die Startbasislösung ist wegen der 3. Restriktion unzulässig. *Vorgehensweise:*
*Dualer Schritt $y_3$ ist die Austrittsvariable und $x_1$ ist die Eintrittsvariable.*
*Nun ist $y_1$ negativ: Dualer Schritt $y_1$ ist die Austrittsvariable und $x_2$ ist die Eintrittsvariable.*

| $Tab.2$ | | $y_3$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $x_2$ | $1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| $y_2$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |
| $x_1$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

*Nun ist $y_2$ negativ, aber es gibt keinen negativen Pivowert in der Spalte. $\Rightarrow$ Es gibt keine zulässige Lösung.*

**Aufgabe 5**

$$\max Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 + x_3 + x_4$$

Unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &\leqslant 4 \\ -x_2 &\leqslant 4 \\ x_2 - x_4 &\leqslant 0 \\ x_4 &\geqslant 2 \\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_1, x_3, x_4 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Da $x_2 \in \mathbb{R}$ ist eine negativem Basiswert für $x_2$ erlaubt.

| $Tab.0$ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $0$ | $-2$ | $0$ | $-1$ | $-1$ |
| $y_1$ | $4$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| $y_2$ | $4$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $y_3$ | $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $y_4$ | $-2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ |

*Es gibt sowohl primale Entartung als auch duale Entartung. Pivospalte ist $x_1$: kleinste Theta Wert mit poisitiven Pivotwert ist die $y_4$-Zeile.*

| $Tab.1$ | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $2$ | $-2$ | $0$ | $-1$ | $-1$ |
| $y_1$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| $y_2$ | $4$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $y_3$ | $2$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $x_4$ | $2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ |

*Aktuelle $z$-Wert ist 2*

*$x_1$ ist Eintrittsvariable. Alle $\theta$-Werte sind unendlich oder Null: Wir können nun enden und die optimale Lösung ablesen.*

*Optimale Lösung gefunden: $x_1$, $x_2$ und $x_3$ sind alle NBV also $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0$ und $x_4$ ist ein BV mit $x_4^* = 2$, $z^* = 2$*

*Was passiert wenn wir mit einem Austausch zwischen $x_1$ und $y_1$ fort setzen?*

| $Tab.2$ | | $y_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | $2$ | $2$ | $2$ | $1$ | $3$ |
| $x_1$ | $0$ | $1$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| $y_2$ | $4$ | $-0$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $y_3$ | $2$ | $-0$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $x_4$ | $2$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1$ |

*Keine Negativem Wert in der $Z$-Zeile und Lösungsspalte. Endkriterium Getroffen*

*Aktuelle $z$-Wert ist immer noch 2. Im Tab. 1 war $x_1$ eine NBV gleich Null.*
*Im Tab. 2 ist $x_1$ eine Basis variable aber immer noch gleich Null.*
*Die 2. Iteration hat nur gezeigt, dass diese optimal ist.*

*Optimale Lösung gefunden: $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0$, $x_4^* = 2$ $z^* = 2$*