Operations Research – Wirtschaftsinformatik
3. Präsenszeit

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

Dritte Präsenzzeit 2. Juni 2023

Operations Research –Aktueller Stand

- Letzte Themen per Video-Unterricht:
  - Duale LP
  - Dualer Schritt des Simplex-Algorithmus
  - Sonderfälle mit der Simplex-Algorithmus
  - Transport Problem
- **Im Präsenzunterricht heute ist das Thema Sensitivitätsanalyse (Restriktionswert)**
- Nächste Woche machen wir weiter mit Sensitivitätsanalyse (Zielfunktion)
- Am 16. Juni findet der 4. Präsenzunterricht statt: Thema Ganzzahlige LP
- 1. Klausur am 5. Juli um 10 Uhr.

Sensitivitätsanalyse: Einführung

Beispiel

Ihr Chef hat Ihnen die folgende LP gestellt und Sie haben die optimale Lösung gefunden.

$$\max Z(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 + x_3 &\leqslant 6 \\ x_2 + x_3 &\leqslant 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Die optimale Lösung ist:

$x_1^* = 4$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 2$, $\quad y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 6$, $\quad z^* = 18$.

Der Chef stellt Ihnen nun die Frage, „Was passiert, wenn der 1. Restriktionswert gleich 5 wäre?”

$$\max Z(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant \mathbf{5} \\ x_1 + x_3 &\leqslant 6 \\ x_2 + x_3 &\leqslant 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Besitzt das Problem die gleiche optimale Basislösung?

Was ist die neue optimale Lösung?

Sie arbeiten an der neuen LP, und diskutieren die neue optimale Lösung mit Ihrem Chef.

Ihr Chef nun überlegt: „Vielleicht können wir 5.5 statt 5 Einheiten leisten. Was passiert dann?"

Eine bessere Vorgehensweise ist eine allgemeine Änderung Δ hinzuzufügen. Dann können wir die Vorschläge des Chefs direkt durch das Ersetzen von Δ durch 1 bzw. 1.5 beantworten.

$$\max Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 4x_1 + 2x_2 + x_3$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 4 + \Delta \\ x_1 + x_3 &\leqslant 6 \\ x_2 + x_3 &\leqslant 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Welche Werte von Δ ergeben die gleiche optimale Basislösung?
Was ist die neue optimale Lösung als eine Funktion von Δ?

Sensitivitätsanalyse

Sensitivitätsanalyse bewertet, wie empfindlich (oder stabil) die Optimallösung zu der Modellspezifizierung der LP ist.

- Wie viel darf einen Restriktionswert sich ändern, ohne eine neue optimale Basislösung zu bekommen?
- Wie viel verändert sich die optimale Lösung bei einer Änderung eines Restriktionswerts (Schattenpreis)?

- Wie viel darf sich die Zielfunktionskoeffizienten Ändern, ohne eine andere optimale Basislösung zu bekommen?

In der Sensitivitätsanalyse nutzen wir den Ausdruck „*die gleiche Lösung*", als Kurzform für „die **Basisvariablen** der Optimallösung bleiben unverändert". Die optimale Werte selbst dürfen sich ändern.

Die Simplex-Algorithmus-Tableaus helfen uns die obigen Fragen zu beantworten.

Beispiel Gegeben ist die folgende LP in Grundform

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } z &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Unter } x_1 + x_2 &\leqslant 4 := b_1 \\ x_1 + x_3 &\leqslant 6 := b_2 \\ x_2 + x_3 &\leqslant 8 := b_3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

In Normalform

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } z &= 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{Unter } x_1 + x_2 + y_1 &= 4 \\ x_1 + x_3 + y_2 &= 6 \\ x_2 + x_3 + y_3 &= 8 \\ x_1, \ldots, y_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Simplex-Algorithmus Tableaus.

Starttableau

Tab. 0		x_1	x_2	x_3	θ
z	0	-4	-2	-1	
y_1	4	1	1	0	$4 \rightarrow$
y_2	6	1	0	1	6
y_3	8	0	1	1	∞
		$\uparrow$			

Erste Tableau

Tab. 1		y_1	x_2	x_3	θ
z	16	4	2	-1	
x_1	4	1	1	0	∞
y_2	2	-1	-1	1	$2 \rightarrow$
y_3	8	0	1	1	8
				$\uparrow$	

Endtableau

Tab. 2		y_1	x_2	y_2
z	18	3	1	1
x_1	4	1	1	0
x_3	2	-1	-1	1
y_3	6	1	2	-1

Die Optimallösung ist:

$x_1^* = 4,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 2, \qquad y_1^* = 0,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 6, \qquad z^* = 18.$

Wenn eine Schlupfvariable gleich Null ist, ist die entsprechende Restriktion verbindlich, und eine Erhöhung des Restriktionswerts ergibt eine größere optimale Zielfunktionswert.

Eine Basis-Schlupfvariable hat eine Schattenpreis gleich Null, weil die entsprechende Restriktion unverbindlich ist. Mehrere Ressourcen für diese Restriktion bringen nur mehr Schlupf und keinen zusätzlichen Gewinn.

In diesem Beispiel erhält man einen größeren Gewinn bei eine Zunahme der Restriktionswerte $b_1 > 4$ bzw. $b_2 > 6$
aber nicht bei eine Zuname von $b_3 > 8$.

Empfindlichkeit gegen Restriktionswerte und Schattenpreise

Wir nehmen an, dass der Wert b_1 verändert sich von 4 auf $b_1^{(\text{neu})} = 4 + \Delta$.

Da y_1 eine Nichtbasisvariable der optimalen Lösung ist, ist die erste Restriktion verbindlich. Daraus folgt, dass der neue Zielfunktionswert

$$z^{(\text{neu})} = z^* + s_1 \Delta$$

wird.

Diese Erhöhung $s_1 \Delta$ ist nicht unbegrenzt; Bei einem großen Wert von Δ (bzw. $b_1 + \Delta$) kommt die dritte Restriktion ins Spiel: die dritte Restriktion wird verbindlich und die Erste unverbindlich.

Wir können jetzt den Schattenpreis formal definieren.

Definition: Schattenpreis
Wenn eine Restriktionswert von b_j auf $b_j^{(\text{neu})} = b_j + \Delta$ zugenommen wird, und die entsprechende Änderung in Zielfunktionswert von z^* auf $z^{(\text{neu})} = z^* + s_j \Delta$ ist,
ist s_j **der Schattenpreis**, *solange die neue optimale Lösung die selbe Basislösung hat*.

Die drei Schattenpreise der obigen LP sind $s_1 = 3$, $s_2 = 1$, und $s_3 = 0$. (Erklärung folgt).

In welchem Wertbereich von $b_1 + \Delta$ bleibt die optimale Basislösung unverändert?

Man könnte den ganzen Simplex-Algorithmus mit $b_1 + \Delta$ statt b_1 vom Anfang an nochmal lösen, aber es gibt ein schnelleres Verfahren.

Wir müssen nur die **Lösungsspalte** neu berechnen, denn alle andere Einträge verändern sich nicht.

Solange alle Werte in der ersten Spalte positiv bleiben, erreicht man die selbe Basislösung.

In diesem Beispiel sind die vollständigen SimplAlg Tableaus

Starttableau

Tab. 0		x_1	x_2	x_3	θ
z	0	-4	-2	-1	
y_1	$4 + \Delta$	1	1	0	$4 \rightarrow$
y_2	6	1	0	1	6
y_3	8	0	1	1	∞
		$\uparrow$			

Erste Tableau

Tab. 1		y_1	x_2	x_3	θ
z	$16 + 4\Delta$	4	2	-1	
x_1	$4 + \Delta$	1	1	0	∞
y_2	$2 - \Delta$	-1	-1	1	$2 \rightarrow$
y_3	8	0	1	1	8
				$\uparrow$	

Endtableau

Tab. 2		y_1	x_2	y_2
z	$18 + 3\Delta$	3	1	1
x_1	$4 + \Delta$	1	1	0
x_3	$2 - \Delta$	-1	-1	1
y_3	$6 + \Delta$	1	2	-1

Die übliche Darstellung ist nur die Lösungsspalte jedes Tableaus in einer Tabelle zu erstellen

	Lösungsspalte		
Zeile	Tab. 0	Tab. 1	Tab 2.
0	0	$16 + 4\Delta$	$18 + 3\Delta$
1	$4 + \Delta$	$4 + \Delta$	$4 + \Delta$
2	6	$2 - \Delta$	$2 - \Delta$
3	8	8	$6 + \Delta$

Die erste Spalte des Simp-Alg Tableaus (Lösungsspalte) stellt die Werte die Basisvariablen dar, die alle **positiv bleiben** müssen.

In der Lösungsspalte in Tableau 2: x_1 Zeile:

$$0 \leqslant x_1 = 4 + \Delta, \quad \Rightarrow \Delta \geqslant -4.$$

x_3 Zeile:

$$0 \leqslant x_3 = 2 - \Delta, \quad \Rightarrow \Delta \leqslant 2.$$

y_3 Zeile:

$$0 \leqslant y_3 = 6 + \Delta, \quad \Rightarrow \Delta \geqslant -6.$$

Wir benötigen alle Bedingungen gleichzeitig, daraus folgt $-4 \leqslant \Delta \leqslant 2$.

Um die selbe optimale Basislösung zu erreichen,

$$-4 \leqslant \Delta \leqslant 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leqslant b_1 \leqslant 6,$$

und der neue optimale Zielfunktionswert ist $z_{(\text{neu})} = 18 + 3\Delta$.

Informell sagt man, der Schattenpreis ist die Zunahme in z^* bei $\Delta = 1$ d.h. der Restriktionswert erhöht sich um *eine Einheit*.
Wenn $\Delta = 1$, z^* wird $z^*_{\text{neu}} = 18 + 3$, also ist der Schattenpreis der 1. Restriktion $s_1 = 3$.

Es ist kein Zufall, dass

$$z_{(\text{neu})} = 18 + 3\Delta$$

und der z-Zeile Eintrag für y_1 im Endtableau gleich 3 ist.

- Der Schattenpreis s_1 lässt sich direkt aus der Endtableau ablesen.
- Der z-Zeile Eintrag einer Nichtbasis-Schlupfvariable ist der jeweilige Schattenpreis.
- Ein Schattenpreis muss positive sein, sonst ist die Lösung nicht optimal.
- Wenn eine Schlupfvariable ist eine BV ist die Restriktion unverbindlich und hat Schattenpreis 0.

Bemerkungen

1) Wenn $b_1^{(\text{neu})}$ außerhalb dieses Intervalls liegt, dann erzielen wir verschiedene Basisvariablen. In diesem Fall müssen wir das ganze Simplex-Algorithmus wiederholen.
2) Diese Methode nimmt an, dass nur ein Restriktionswert verändert wird. Es gibt Methoden, die mehrfache simultane Änderungen bewältigen können, aber diese kommen in dieser LVS nicht vor.
3) Viele OR-Programme geben diese Sensitivitätsbereiche optional aus.

Aufgabe: Gewinnmaximierung in der Produktion

$$\max Z(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} x_2 &\leqslant 6 \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 18 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Sei der 2. Restriktionswert $b_2 = 7 + \Delta$

(a) Bestimmen Sie die neue Lösungsspalten.

(b) Bestimmen Sie den Wertbereich für Δ, in dem die gleiche Basislösung optimal ist.

(c) Bestimmen Sie den Wertbereich für b_2, in dem die gleiche Basislösung optimal ist.

Die Simplexalgorithmen Tableaus sind auf der nächsten Folie.

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-4	-3
y_1	6	0	1
y_2	7	1	1
y_3	18	3	2
		$\uparrow$	

$\rightarrow$

Tab. 1		y_3	x_2
Z	24	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$
y_1	6	0	1
y_2	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_1	6	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
			$\uparrow$

$\rightarrow$

Tab. 2		y_3	y_2
Z	25	1	1
y_1	3	1	-3
x_2	3	-1	3
x_1	4	1	-2