Operations Research – Wirtschaftsinformatik
4. Präsenszeit

Prof. Dr. Tim Downie

Virtuelle Fachhochschule BHTB — WINF

4. Präsenzunterricht

Ganzzahliger Optimierung: Gomory-Schnitt-Verfahren

16. Juni 2023

Aktueller Stand

- 9. & 10. Woche Sensitivitätsanalyse
- **11. Woche**
  - **Präsenzunterricht**: Ganzzahliger Optimierung: Gomory-Schnitt-Verfahren
  - Einsendeaufgaben 3
- 12. Woche: ganzzahlige Optimierung fortgesetzt: Branch & Bound Verfahren
- Webkonferenz am Mo 3. Juli um 19:30: Beispielklausur
- Mittwoch 5. Juli: Erste Klausur

Der Inhalt der Folien folgt das Skript Seiten 70 bis 75.

Ganzzahliger Optimierung Einführung

- Die zulässige Lösungen eines LPs sind reellwertig.
- Häufig soll die Optimallösung ganzzahlig sein. Z.B. Anzahl von Paletten/Wäschetrocknern, Objekt in einem Rucksack einpacken: ja oder nein, usw. ...
- Das intuitive Verfahren ist: das reellwertige LP zu lösen und anschließend die Lösung ganzzahlig zu runden — Dieses Vorgehensweise liefert nicht immer die ganzzahlige Optimallösung — Sieh das Zimmerman Ronny Beispiel (Skript Seite 8).
- Der Rechenaufwand bei dem reellwertigen Simplex-Algorithmus ist viel weniger als bei einem ganzzahligen Verfahren.

IP und LP-Relaxierung

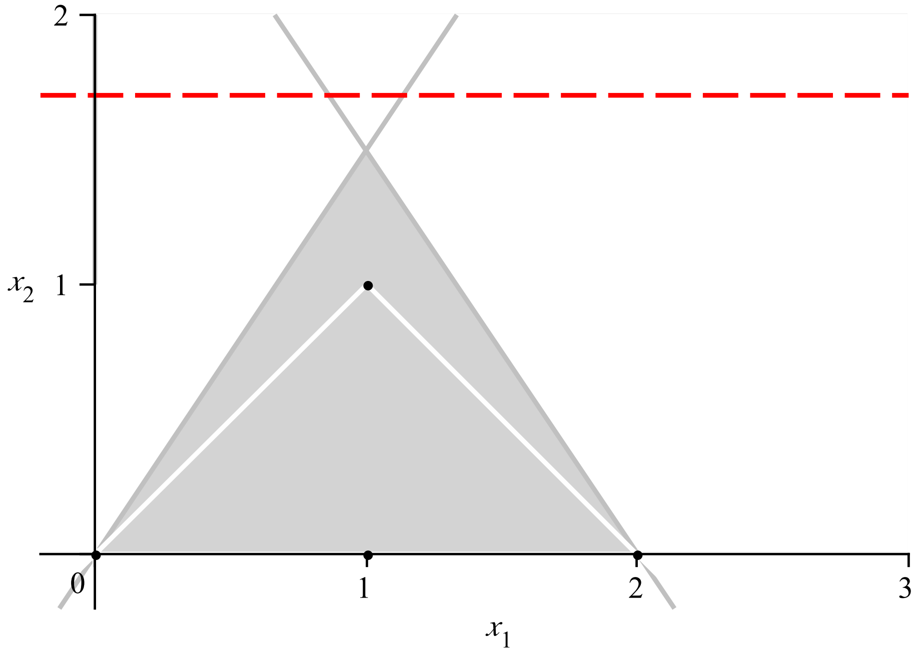
IP (vom Englisch *Integer Programming*)

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2) &= x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 6 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

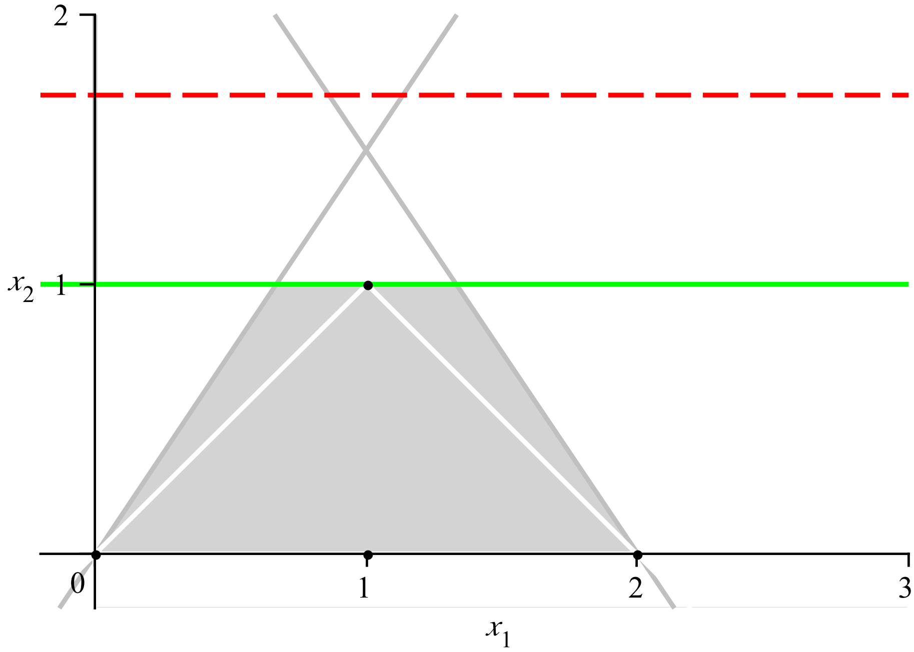
LP-Relaxierung

$$\begin{aligned} \max Z(x_1, x_2) &= x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 6 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 0 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Schnittebenenverfahren
Überblick I

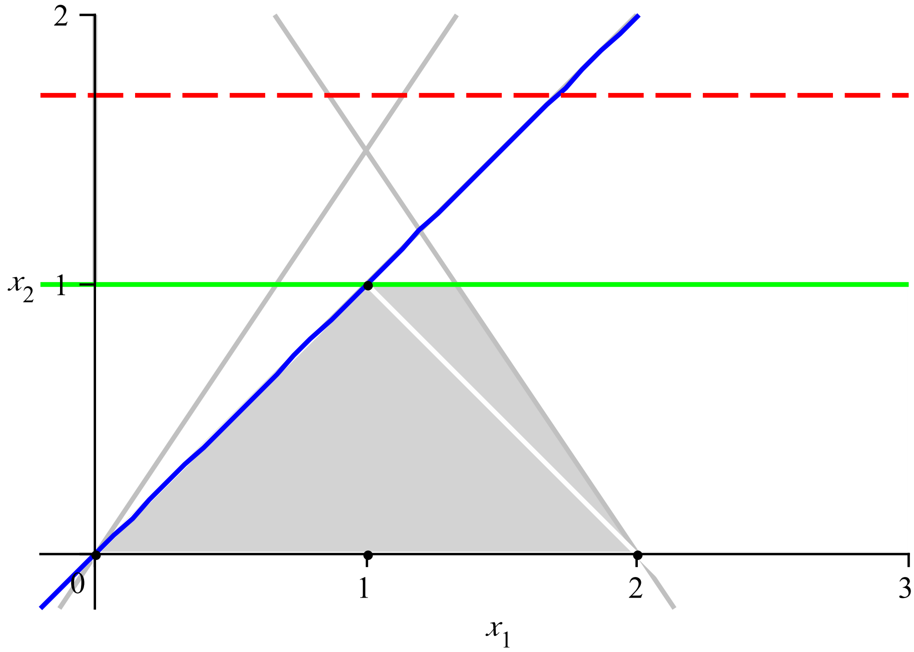


Schnittebenenverfahren
Überblick II



Schnittebenenverfahren

Überblick III



Eine **Schnittebene** ist eine Ungleichung:

- Alle ganzzahlige zulässige Lösungen erfüllen die Ungleichung;
- Die optimale Lösung der LP-Relaxierung erfüllt nicht die Ungleichung.

Eine Schnittebene schneidet die Optimale Lösung der Relaxierung ab bzw. schneidet einen Teil vom LP-zulässigen Bereich ab, der nicht für das IP zulässig ist.

Schnittebenenverfahren:

1) Löse die LP-Relaxierung des IPs.
   Falls die Lösung ganzzahlig ist - ENDE - IP optimale Lösung erreicht.
2) Sonst: Finde eine Schnittebene und füge zum IP hinzu und gehe zu 1.

Gomory-Schnitte

Wir betrachten das folgende IP:

$$\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & & \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n &\leqslant& b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n &\leqslant& b_2 \\
&\vdots& \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n &\leqslant& b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n &\in& \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Dabei soll $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle $i = \{1, \ldots n\}$ und $j = \{1, \ldots m\}$ gelten.

Die Normalform der LP-Relaxierung:

$$\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n & & \\
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + x_{n+1} &=& b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + x_{n+2} &=& b_2 \\
&\vdots& \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n + x_{n+m} &=& b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_{n+m} &\geqslant& 0.
\end{aligned}$$

Die Variablen $x_{n+1} = y_1, x_{n+2} = y_2, \ldots, x_{n+m} = y_m$ sind die Schlupfvariablen.

Führe das Simplex-Algorithmus durch.

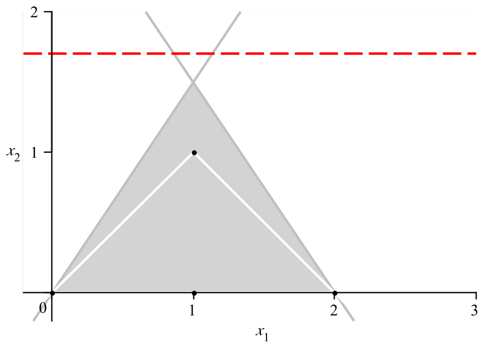
Beispiel

IP in Grundform

$$\begin{aligned} \max Z_P(x_1, x_2) &= x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 6 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

LP-Relaxierung Normalform

$$\begin{aligned} \max Z_P(x_1, x_2) &= x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 + y_1 &= 6 \\ -3x_1 + 2x_2 + y_2 &= 0 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$



Das Simplex-End-Tableau der LP-Relaxierung ist

Tab. 2		y_1	y_2
Z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Im Endtableau steht jede transformierte Restriktion mit einer Basisvariable (links) und den Nichtbasisvariablen (oben).

Tab. 2		y_1	y_2
Z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$x_2 + \tfrac{1}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}y_2 = \tfrac{3}{2}$$

Das **Gomory-Schnitt** für x_2 ist

$$-\tfrac{1}{4}y_1 - \tfrac{1}{4}y_2 \leqslant -\tfrac{1}{2}$$

und wir führen eine neue Schlupfvariable ein.

$$-\tfrac{1}{4}y_1 - \tfrac{1}{4}y_2 + s_1 = -\tfrac{1}{2}$$

Wie findet man die GS-Ungleichung?

$$-\tfrac{1}{4}y_1 - \tfrac{1}{4}y_2 \leqslant -\tfrac{1}{2}$$

Auf beide Seiten der Ungleichung: jeden Koeffizienten abrunden* und den originalen Koeffizienten subtrahieren.

$$x_2 + \tfrac{1}{4}y_1 + \tfrac{1}{4}y_2 = \tfrac{3}{2}$$

$$\begin{array}{rrl} \left(\lfloor \tfrac{1}{4} \rfloor - \tfrac{1}{4}\right) y_1 & + \left(\lfloor \tfrac{1}{4} \rfloor - \tfrac{1}{4}\right) y_2 & \leqslant \left(\lfloor \tfrac{3}{2} \rfloor - \tfrac{3}{2}\right) \\ -\tfrac{1}{4}y_1 & -\tfrac{1}{4}y_2 & \leqslant -\tfrac{1}{2} \end{array}$$

$\lfloor \alpha \rfloor$ bedeutet α **ab**runden.

*Beispiele

$\lfloor 3.2 \rfloor = 3$ $\lfloor 2.0 \rfloor = 2$ $\lfloor -1.2 \rfloor = -2$

Gomory-Schnitt: Schnellmethode

Für einen positiven Koeffizienten:

den Bruchanteil mal -1.

Z.B. 2.8 wird $\lfloor 2.8 \rfloor - 2.8 = 2 - 2.8 = -0.8$

Für einen negativen Koeffizienten:

(1- den Bruchanteil) mal -1.

Z.B. -2.8 wird $\lfloor -2.8 \rfloor + 2.8 = 2 - 2.8 = -0.2$

Lassen Sie die Basis-Variable wegfallen und
Stellen Sie die Gleichung als eine „$\leqslant$“ Ungleichung
bzw. als eine Gleichung mit neuer Schlupfvariable.

Weiteres Beispiel: (nicht aus der aktuellen IP)

Der Gomory-Schnitt auf x_4 für

$$x_4 + 3\tfrac{3}{5}x_1 - 2\tfrac{1}{4}y_3 = 4\tfrac{4}{7}$$

wäre

$$-\tfrac{3}{5}x_1 - \tfrac{3}{4}y_3 \leqslant -\tfrac{4}{7}$$

bzw.

$$-\tfrac{3}{5}x_1 - \tfrac{3}{4}y_3 + s_1 = -\tfrac{4}{7}$$

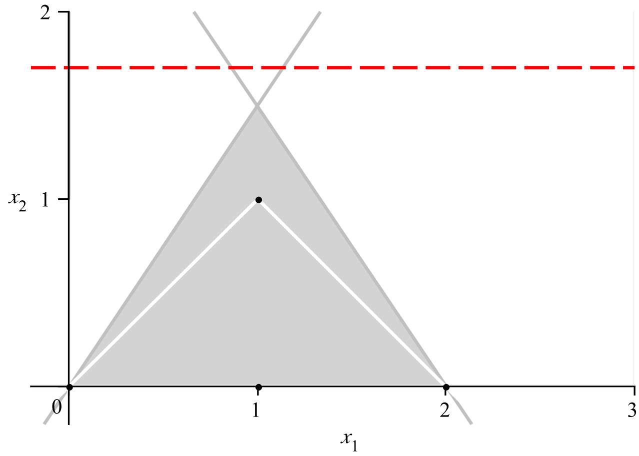
Die Gomory-Schnitt-Ungleichung hängt nur von Nichtbasisvariablen ab, und kann somit leicht als eine neue Zeile des Tableaus hinzugefügt werden.

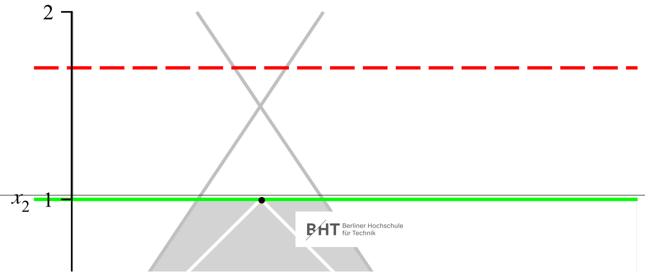
Beispiel Fortgesetzt

Wir fügen den Gomory-Schnitt zu unserem Tableau samt der Schlupfvariablen s_1 hinzu.

Der Simplex-Algorithmus setzt mit einem dualen Simplex-Schritt fort, da der Lösungswert der Gomory-Schnitt-Zeile negativ ist. Die neue Zeile ist die Pivotzeile.

Tab. G1		y_1	y_2
Z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$





Woher kommt die grüne Gerade? Was hat sie mit dem Gomory-Schnitt.

$$-\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 \leqslant -\frac{1}{2}$$

zu tun?

Damit wir den Gomory-Schnitt sowohl im Rahmen des originalen Problems verstehen können als auch ihn grafisch darstellen können, formen wir die Ungleichung in eine Ungleichung mit nur die Strukturvariablen x_1 und x_2 um.

Man kann die Definition von der Schlupfvariablen y_1 und y_2 benutzen:

$$\begin{aligned}
&\text{1. Restr.} && 3x_1 + 2x_2 + y_1 = 6 \\
&\text{2. Restr.} && -3x_1 + 2x_2 + y_2 = 0 \\
&\Rightarrow && y_1 = 6 - 3x_1 - 2x_2 \\
&\text{und} && y_2 = 3x_1 - 2x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}y_1 - \frac{1}{4}y_2 &\leqslant -\frac{1}{2} \\
-\frac{1}{4}(6 - 3x_1 - 2x_2) - \frac{1}{4}(3x_1 - 2x_2) &\leqslant -\frac{1}{2} \\
-\frac{3}{2} + 0x_1 + 1x_2 &\leqslant -\frac{1}{2} \\
x_2 &\leqslant 1
\end{aligned}$$

Dieser Gomory-Schnitt entspricht der Ungleichung $x_2 \leqslant 1$.

Die Auflösung der neue Simplex-Algorithmus-Tableau (G1) ist.

Tab. G1		y_1	y_2
Z	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$

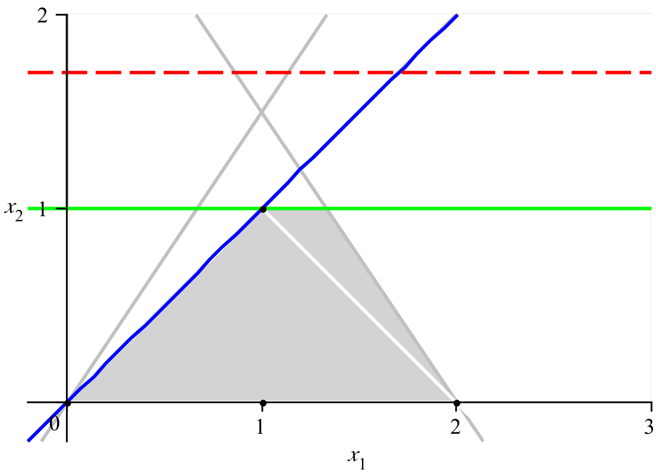
Tab. G2		s_1	y_2
Z	1	1	0
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	1	1	0
y_1	2	-4	1

Die neue optimale Lösung der LP-Relaxierung liefert einen gebrochenen Wert für x_1. Eine 2 Gomory-Schnitt-Ebene ist nötigt.

Wir fügen den Gomory-Schnitt

$$-\frac{2}{3}s_1 - \frac{2}{3}y_2 + s_2 = -\frac{2}{3},$$

hinzu, der den Ungleichung $x_1 \geqslant x_2$ entspricht (die blaue Linie).



Tab. G3		s_1	y_2
Z	1	1	0
x_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	1	1	0
y_1	2	-4	1
s_2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$

Tab. G4		s_2	s_1
Z	1	0	1
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_2	1	0	1
y_1	1	$\frac{3}{2}$	-5
y_2	1	$-\frac{3}{2}$	1

Im End-Tableau gibt es keine gebrochenen Werte für die Basisvariable. Die optimale ganzzahlige Lösung lautet: $x_1 = x_2 = 1$ mit dem Zielfunktionswert 1.

Bemerkungen:

- Wenn es eine Auswahl von nicht ganzzahligen Entscheidungsvariablen gibt, wählen Sie die **Entscheidungs**variable mit dem größten Bruchanteil.
- Der Nachteil des Schnittebenenverfahrens von Gomory ist, dass die numerische Probleme durch mangelnde Genauigkeit der Zahlendarstellung im Computer die Lösungssuche erschweren.

Aufgabe

Lösen sie das folgende ganzzahlige lineare Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
\max Z(x_1, x_2) &= 12x_1 + 10x_2 \\
2x_1 + 2x_2 &\leqslant 8 \\
5x_1 + 3x_2 &\leqslant 15 \\
x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}
$$

Simplex-Algorithmus auf die LP-Relaxierung

Tab. 0		x_1	x_2
Z	0	-12	-10
y_1	8	2	2
y_2	15	5	3

Tab. 1		y_2	x_2
Z	36	2.4	-2.8
y_1	2	-0.4	0.8
x_1	3	0.2	0.6

Tab. 2		y_2	y_1
Z	43	1	3.5
$\mathbf{x_2}$	**2.5**	**-0.5**	**1.25**
x_1	1.5	0.5	-0.75

Bestimmen Sie den Gomory-Schnitt für die x_2 Zeile als:

(a) Eine $\leqslant$ Ungleichung.

(b) Eine Gleichung mit einer neuen Schlupfvariable

(c) Eine Ungleichung mit x_1 undx_2.

Hinweis: Die Schlupfvariablen sind

$$y_1 = 8 - 2x_1 - 2x_2$$
$$y_2 = 15 - 5x_1 - 3x_2$$

Anhang zur Aufgabe

Um die IP zu vervollständigen die Simpl-Alg Tabellen sind

Tab. G1		y_2	y_1
Z	43	1	3.5
x_2	2.5	-0.5	1.25
x_1	1.5	0.5	-0.75
s_1	-0.5	-0.5	-0.25

Tab. G2		s_1	y_1
Z	42	2	3
x_2	3	-1	1.5
x_1	1	1	-1
y_2	1	-2	0.5

Mit optimaler ganzzahligen Lösung: $x_1^* = 1$, $x_2^* = 3$, $z^* = 42$,