Spicker

**LP in Grundform (GF)**

Bringen Sie die gegebene LP in die Grundform.

max Z(x, y) = 4x + 5y

unter NB

x + 2y <= 10

−x + 4y >= 3

**5x − 2y = −2**

x, y ⩾ 0

max Z(x, y) = 4x + 5y

unter NB

x + 2y <= 10

−x + 4y >= 3

**5x − 2y <= −2**

**-5x + 2y <=2**

x, y >= 0

Warum ist das folgende Optimierungsproblem keine lineare Programmierung?

max Z(x, y) = 4x + 5y

unter NB

x + y ⩽ 5

x − 2xy + y ⩽ 2

x, y ⩾ 0

zweite Restriktion ist nicht linear in x und y, sie besitzt ein Glied mit xy

Gegeben

max Z(x1, x2) = 2x1 + 3x2

unter NB

x1 + 2x2 ⩽ **6**

2x1 + x2 ⩽ **8**

x1, x2 ⩾ 0.

Prüfen, dass der zulässige Bereich die Eckpunkte (0 | 0), (1 | 0), (0 | 0.5) und (0.75 | 0.25) hat

Ermitteln des zulässigen Bereichs

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **x1** | **x2** |  |
| R3 | R4 | 0 | 0 |  |
| R2 | R4 | x1 = **8** :2 = **4** | 0 | Zeichne Gerade von x2 = 8 nach x1 = 4  (von oben links) |
| R1 | R4 | x1 = **6** : 1 = **6** | 0 |  |
| R2 | R3 | 0 | x2 = **8** : 1 = **8** |  |
| R1 | R3 | 0 | x2 = **6** : 2 = **3** | Zeichne Gerade von x2 = 3 nach x1 = 6  (von oben links) |

Der gemeinsame Bereich ist der zulässige Bereich

Steigung m (errechnet sich aus Z-Funktion)

**max Z(x1, x2) = 2x1 + 3x2**

-2x1 + Z = 3X2

X2 = -2/3x1 +1/3 Z

Steigung m = **-2**/**3 2** ist der Achsenabschnitt **für x2**, **3** ist Achsenabschnitt **für x1**

Die Gerade **beginnt auf x2-Achse (= Vertikale Achse) bei 2**, **fällt von oben links und endet auf der x1-Achse bei 3**

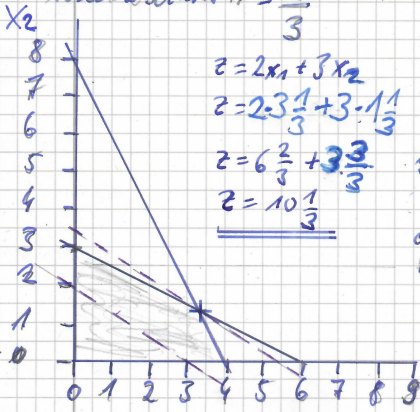
**WICHTIG**

**optimale Lösung am Schnittpunkt**

man zeichnet eine Gerade mit der Steigung -2/3 (von oben links fallen nach unten rechts)

startet bei x2 = 2 und endet bei x1 = 3

die Gerade wird verschoben bis zum Schnittpunkt, wo sich die Geraden zum zulässigen Bereich (3,6) und (8,4) schneiden 🡆 **das ist die optimale Lösung**

****

**(0, 0)**

**(0, 1)**

**(1, 0)**

Ermitteln aller möglichen Eckpunkte

gegeben

**z = x1 + 4/3x2**

NB

**x1 + x2 ⩽ 1** R1

**2x1 + 6x2 ⩽ 3** R2

x1, x2 ⩾ 0 R3 (x1 = 0), R4 (x2 = 0)

Eckpunkte (0 | 0), (1 | 0), (0 | 0.5) und (0.75 | 0.25)

Fragen:

Zielfunktionswert für jeden Eckpunkt im zulässigen Bereich ermitteln

Welche Punkt ergibt den größten Wert?

Jeden Eckpunkt aus der Matrix (0 | 0), (1 | 0), (0 | 0.5) und (0.75 | 0.25) für x1 und x2 einsetzen

Z(0 | 0) = 0, Z(1 | 0) = 1, Z(0 | 0,5) = 0,66, Z(0,75 | 0,25) = 1,0833

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Restriktion für** | | **z = x1 + 4/3x2** | | | | |
| **x1** | **x2** | **Z** | **x1** | **x2** | **Berechnung x1** | **Berechnung x2** |
| R3 | R4 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| R2 | R4 | 1,50 | 1,5 | 0 | x1 = 3 : 2 |  |
| R1 | R4 | 1 | 1 | 0 | x1 = 1 : 1 |  |
| R2 | R3 | 0,66 | 0 | 0,5 |  | x2 = 3 : 6 = 1/2 = 0,5 |
| R1 | R3 | 1,33 | 0 | 1 |  | x2 = 1 : 1 |
| R1 | R2 | 1,0833 | 0,75 | 0,25 | **x1 = 1 – x2**  **x1 = 1 - 0,25 = 0,75** | **2x1 + 6x2 = 3**  | **x1 = 1 – x2**  **2 \* (1 – x2)** + **6x2 = 3**  2 – 2x2 + 6x2 = 3  2 + 4x2 = 3 | -2  4x2 = 1 | : 4  **x2 = 1/4 = 0,25** |

**wenn Minimierungsproblem gefordert**  
min Z(x1, x2) =2.35x1 + 2.05x2

0.2x1 + 0.32x2 ⩽ 0.25

x + y = 1

x1, x2 ∈ R+

Mache

max Z(x1, x2) = −2.35x1 − 2.05x2

0.2x1 + 0.32x2 ⩽ 0.25

x1 + x2 = 1

**Strukturvariablen und NB bestimmen**

geg

Hackfleisch gemischt aus dem Rind- und Schweinefleisch. Das Rindfleisch kostet 2.50 pro Pfund und beinhaltet 20% Fett. Das Schweinefleisch kostet 2.20 pro Pfund und beinhaltet 32% fett. Willy garantiert, dass sein Hackfleisch gemischt höchstens 30% Fett beinhaltet. Wie viel von jedem Fleisch für ein Pfund muss er nehmen, um dabei sein Hackfleisch gemischt zu minimalen Kosten zu erstellen.

welchen Größen (Variablen) die Kosten Willys Hackfleischmischung abhängen?

Nutzen Sie diese Variablen, um die Beschränkungen (Nebenbedingungen) zu beschreiben.

Bestimmen Sie ihre Schnittmenge

MinZ (x1, x2) = 2.50x1 + 2.20x2

oder

maxZ(x1, x2) = -2.50x1 - 2.20x2

Strukturvariablen

x1 Rindfleisch in Pfund

x2 Schweinefleisch in Pfund

NB

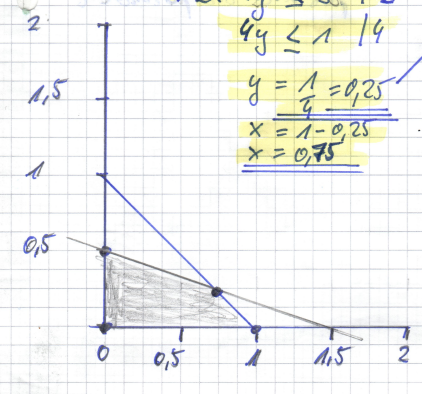
0.2x1 + 0.32x2 ⩽ 0.3 max. Fettgehalt R1

x1 + x2 = 1 Gewicht in Pfund R2

x1, x2 ⩾ 0 R3 (für x1), R4 (für x2)

0.2x1 Fettgehalt Rindfleisch

0.32x2 Fettgehalt Schweinefleisch



Sonderfälle:

zulässige Bereich ist leer oder zulässige Bereich ist unbeschränkt 🡺 keine Lösung des LP

zulässigen Bereich und Schnittmengen bestimmen

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Restriktion für** | | **MinZ (x1, x2) = 2.50x1 + 2.20x2** | | | | |
| **x1** | **x2** | **Z** | **x1** | **x2** | **Berechnung x1** | **Berechnung x2** |
| R3 | R4 | 0 | 0 | 0 |  |  |
| R2 | R4 | 2,5 | 1 | 0 | x1 = 1 : 1 |  |
| R1 | R4 | 3,75 | 1,5 | 0 | x1 = 0,3 : 0,2 |  |
| R2 | R3 | 2,20 | 0 | 1 |  | x2 = 1 : 1 |
| R1 | R3 | 2,06 | 0 | 0,94 |  | x1 = 0,3 : 0,32 |
| Hinweis:  Wenn nur die optimale Lösung gefragt ist, genügt die folgende Zeile | | | | | | |
| R1 | R2 | 2,25 | 0,17 | 0,83 | **0,2x1 + 0,32 x2 = 0,3**  **0,2x1 + 0,32 \* ( 1 – x1) = 0,3**  **0,2x1 + 0,32 – 0,32x1 = 0,3**  - 0,12x1 + 0,32 = 0,3 | - 0,32, : - 012  x1 = **0,17**  **einfacher über Mischungskreuz**  alle Variablenwerte \* 100  30 – 20 = 10  32 – 30 = 2  10 + 2 = 12  10/12 = 5/6  2/12 = 1/6 | **x1 + x2 = 1**  **x2 = 1 – x1**  **x2 = 1 – 0,17**  **x2 = 0,83** |

Die optimale Lösung ist x,∗ = 1/6, x2\* = 5/6, Z\* = 2.25 €

geg.

Jede Standarduhr braucht 2 Arbeiterstunden und 6 Stunden Herstellungszeit.

Jeder Wecker braucht 4 Arbeiterstunden und 2 Stunden Herstellungszeit und ein Alarmbauteil.

Der Hersteller hat pro Tag 1600 Arbeiterstunden 1800 Herstellungsstunden und 350 Alarmbauteile

Der Gewinn ist 3€ jede Standarduhr und 8€ jeder Wecker.

Der Hersteller will seinen Gewinn maximieren.

(a) Geben Sie dieses LP mathematisch in Grundform an.

(b) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich.

(c) Finden Sie die optimale Lösung durch die grafische Lösungsmethode

max Z(x, y) = 3x + 8y

x = Anzahl der Standarduhren

y = Anzahl der Wecker

NB

2x + 4y ⩽ 1600 Arbeiter Stunden

6x + 2y ⩽ 1800 Herstellungsstunden

y ⩽ 350 Anzahl Alarmbauteile

x, y ⩾ 0

Schnittpunkte

(0 | 0)

(800 | 400)

(300 | 900)

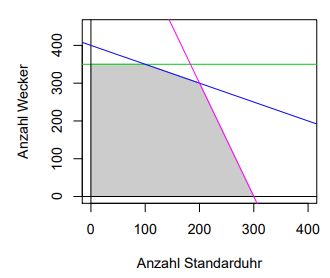
( | 350)

optimale Lösung

am Schnittpunkt von

2x + 4y = 1600 (800 | 400) und y = 350 ( | 350)

x\* = 100, y\* = 350, z\* = 3100



**Naiver Algorithmus und LP in Normalform**

geg

max Z(x1, x2) = 2x1 + 3x2

NB

x1 + 2x2 ⩽ 6 R1

**2x1 + x2 ⩽ 8 R2**

x1 ⩾ 0 R3

x2 ⩾ 0 R4

naiver Algorithmus für folgende Schritte.

Am jeden Schritt ergänzen Sie die Tabelle unten.

Für jede Kombination zweier Nebenbedingungen R1, . . ., R4.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der entsprechenden Gleichungen.

Bestimmen, ob der Eckpunkt zulässig ist.

Rechnen Sie den Zielfunktionswert für die zulässigen Eckpunkte.

Bestimmen Sie die optimale Lösung

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Bedingungen | Schnittpunkt (x1, x2) | Zulässig? | Z(x, y) | **Reihenfolge der Bedingungen beachten!** |
| R3, R4 | 0, 0 | ja | 0 |  |
| **R2, R4** | **4, 0** | **ja** | **8** |  |
| R1, R4 | 6, 0 | nein | - |  |
| **R2, R3** | **0, 8** | **nein** | **-** |  |
| R1, R3 | 0, 3 | ja | 6 |  |
| R1, R2 | 31/3, 1 1/3 | ja | 10 2/3 |  |

**NR zu R1, R2 mit aufschreiben!**

x1 + 2x2 = 6 🡺 x1 = **6 -2x2**

2x1 + x2 = 8 🡺 2 \* **(6 – x2**) – x2 = 8

12 – 4x2 – x2 = 8

12 – 3x2 = 8 | -12

-3x2 = -4 | :-3

x2 = 1 1/3

x1 = 6 – 2 \* 1 1/3 = 3 1/3

3 1/3 = 10/3 = 3,33 1 1/3 = 4/3 = 1,33

**Schlupfvariablen y1 und y2 hinzufügen und LP in Normalform stellen**

Grundform in Normalform durch einfügen der y-Variablen in jede NB und Tausch des <= gegen =

Nach y- umstellen und x1- und x2—Wert aus jeder Tabellenzeile in die y-Gleichung einsetzen und ausrechnen

geg

max Z(x1, x2) = 2x1 + 3x2

NB

x1 + 2x2 + y1 = 6 🡺 **y1 = 6** – x1 – 2x2

2x1 + x2 + y2 = 8 🡺 **y2 = 8** – 2x1 – x2

x1, x2, y1, y2 ⩾ 0

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Bedingungen | Schnittpunkt  (x1, x2) | **y1** | **y2** | Zul.? | Z(x1, x2) |  |  |
| R3, R4 | 0, 0 | **6** | **8** | ja | 0 | y1 = 6 – 0 - 0 | y2 = 8 – 0 - 0 |
| **R2, R4** | 4, 0 | 2 | 0 | ja | 8 | y1 = 6 – 4 - 0 | y2 = 8 – 2 \* 4 - 0 |
| R1, R4 | 6, 0 | 0 | -4 | nein | - | y1 = 6 – 6 - 0 | y2 = 8 – 2 \* 6 - 0 |
| R2, R3 | 0, 8 | 0 | 5 | ja | 9 | y1 = 6 – 0 – 2 \* 3 | y2 = 8 – 2 \* 0 - 3 |
| R1, R3 | 0, 6 | -10 | 0 | nein | - | y1 = 6 – 0 – 2 \* 8 | y2 = 8 – 2 \* 0 -8 |
| R1, R2 | 31/3, 1 1/3 | 0 | 0 | ja | 10 2/3 | y1 = 6 – 3 1/3 – 2 \* 1 1/3 | y2 = 8 – 2 \* 3 1/3 – 1 1/3 |

Damen- und Herrenstiefel.

10 000 Arbeitsstunden der Mitarbeiter und 2 000 Arbeitsstunden der Maschinen geplant.

1 Damenstiefel 25 Std Verarbeitung und 6 Std Maschinenarbeit

1 Herrenstiefel 18 Std Verarbeitung und 3 Std Maschinenlaufzeit.

Zur Verfügung steht insgesamt 200 000 cm2 Leder.

Ein Damenstiefel benötigt 400 cm² und ein Herrenstiefel 450 cm² Leder.

Der Gewinn pro Damenstiefel betragt 25€ und pro Herrenstiefel 20 €

Produktionsdaten in Tabelle zusammenfassen

LP in Grundform angeben

LP in Normalform angeben

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Damenstiefel | Herrenstiefel | Gesamt |
| Produktionszeit in Std. | 25 | 18 | 10.000 |
| Maschinenlaufzeit in Std. | 6 | 3 | 2.000 |
| Leder in cm² | 400 | 450 | 200.000 |
| Gewinn in € | 25 | 20 |  |

**LP in GF**

x1 = Anzahl Damenstiefel , x2 = Anzahl Herrenstiefel

maxZ(x1, x2) = 25x1 + 20x2

unter NB

25x1 + 18x2 <= 10.000 Produktionszeit in Std.

6x1 + 3x2 <= 2.000 Maschinenlaufzeit in Std.

400 + 450 <= 200.000 Leder in cm²

x1, x2 >= 0

**LP in NF**

x1 = Anzahl Damenstiefel , x2 = Anzahl Herrenstiefel

maxZ(x1, x2) = 25x1 + 20x2

unter NB

25x1 + 18x2 + y1 = 10.000 Produktionszeit in Std.

6x1 + 3x2 + y2 = 2.000 Maschinenlaufzeit in Std.

400 + 450 + y3 = 200.000 Leder in cm²

x1, x2, y1, y2, y3 >= 0

**Schlupf = Menge an Ressourcen der i-te Restriktion, die noch für die optimale Lösung verbleiben**

**(Differenz aus R-Wert und der Summe der Werte zu den Strukturvariablen)**

**In der Schlupfvariablen yi wird die Differenz gespeichert)**

Bsp.

sei

b1 <= 4x1 + 3x2 <= 18

x1 = 2,

x2 = 3

dann ist Schlupf = 4x1 + 3x2 + y1 <= 18 🡺 y1 = 18 – 8 – 9 <1 y1= 1

**Restriktion ist verbindlich, wenn yi\* = 0 🡺 NBV ist daher verbindlich, da mit 0 bewertet**

**Restriktion ist unverbindlich, wenn yi\* > 0 🡺 BV ist daher unverbindlich**

**verbindliche Restriktion schneidet den optimalen Lösungspunkt**

Erhöhung des Restriktionswertes zur verbindlichen Restriktion = Erhöhung des Z-Wertes, bei Erhöhung der Ressourcen

Erhöhung des Restriktionswertes zur **unverbindlichen Restriktion** = **keine Erhöhung des Z-Wertes, unerheblich wieviel Ressourcen investiert werden**

**Simplex-Algorithmus - LGS**

max Z(x1, x2) = 4x1 + 3x2

x2 ⩽ 6 **R1**

x1 + x2 ⩽ 7 **R2**

3x1 + 2x2 ⩽ 18 **R3**

x1, x2 ⩾ 0.

**Schlupfvariable yi einfügen und nach Schlupfvariablen umstellen**

**(Schlupfvariable hat in der Z-Funktion den Wert 0)**

max Z(x1, x2) = 4x1 + 3x2 Z = 0 + **4x1** + 3x2

x2 + y1 = 6 y1 = 6 – x2

x1 + x2 +y2 = 7 y2 = 7 – x1 – x2

3x1 + 2x2 + y3 = 18 y3 = 18 – 3x1 – 2x2

**1. Auswahl der Eintrittsvariablen (NBV) aus der Z-Funktion** (solange die Z-Funktion noch Variablen mit positivem Koeffizienten hat)

Eintrittsvariablen (NBV) ist die mit dem höchsten Koeffizienten

4x1 ODER 3x2? 🡺 **x1 hat mit 4 den höchsten Koeffizienten**

Eintrittsvariable ist x1

**2. Auswahl der Austrittsvariablen (BV) aus einer der 3 Restriktionen mittels kleinstem Theta-Wert**

(Division der R-Werts und dem Koeffizienten zur Eintrittsvariablen)

**Nur Restriktionen mit positivem Restriktionswert**

y1: **Theta-Wert** aus 6 : 0 (y1 enthält keine x1-Variable) unzulässig

y2: **Theta-Wert** aus 7 : 1 = **7** (1x1)

**y3**: **Theta-Wert** aus 18 : 3 = **6** (3x1)

**y3 ist Austrittsvariable, da 6 kleinster Theta-Wert**

**3. in R3 Tausch der Eintrittsvariablen x1 mit y3 und Division durch Koeffizienten von x1** (**Division zu y3 nicht vergessen**)

y3 = 18 – 3x1 – 2x2 🡺 **x1 = 6 – 1/3y3 – 2/3x2**

**x1 = 6 – 1/3y3 – 2/3x2**

**4. Term zur Eintrittsvariablen x1 in der Zielfunktion und in allen Gleichungen einsetzen und zusammenfassen**

Z = 0 + 4 \* ( 6 – 1/3y3 – 2/3x2 ) + 3x2

Z = 24 – 4/3y3 – 8/3x2 + 3x2

**Z = 24 – 4/3y3 + 1/3x2**

**y1 = 6 – x2**

y2 = 7 **–** ( 6 **–** **1/3**y3 **–** 2/3x2) – x2 **VZ-Wechsel, wg. – vor der Klammer!**

y2 = 1 **+** **1/3**y3 **+** 2/3x2 – x2

**y2 = 1 + 1/3y3 – 1/3x2**

**x1 = 6 – 1/3y3 – 2/3x2**

In der Z-Funktion hat die NBV x2 noch positiven Wert, daher ist 2. Iteration erforderlich

Schritte 1 bis 3 wiederholen (solange die Z-Funktion noch Variablen mit positivem Koeffizienten hat)

**1. Auswahl der Eintrittsvariablen (NBV) aus der Z-Funktion**

Es gibt nur noch die Variable **x2** mit positivem Koeffizienten

**2. Auswahl der Austrittsvariablen (BV) aus einer der 3 Restriktionen mittels kleinstem Theta-Wert**

**Nur Restriktionen mit positivem Restriktionswert**

Gleichungen aus der 1. Iteration verwenden

**Vz zu x2 in Thetaberechnung nicht beachten**

y1

y1 = **6** – **x2**

**Theta-Wert** aus 6 : 1 = **6**

y2

y2 = **1** + 1/3y3 – **1/3**x2

**Theta-Wert** aus 1 : 1/3 = **3** (1/3x2)

x1

x1 = **6** – 1/3y3 – **2/3**x2

**Theta-Wert** aus 6 : 2/3 = **9** (2/3x2)

**y2 ist Austrittsvariable, da 3 kleinster Theta-Wert**

**3. in R2 Tausch der Eintrittsvariablen x2 mit y2** und Division durch Koeffizienten von x2   
(**Division zu y2 nicht vergessen**)

y2 = 1 + 1/3y3 – 1/3x2

1/3x2 = 1 + 1/3y3 – y2 | : 1/3 🡺 x2 =3 + y3 – 3y2

**x2 = 3 + y3 – 3y2**

**3. Term zur Eintrittsvariablen x2 in der Zielfunktion und in allen Gleichungen einsetzen und zusammenfassen**

Z = 24 – 4/3y3 + 1/3x2

Z = 24 – 4/3y3 + 1/3 \* (3 + y3 – 3y2)

Z = 24 – 4/3y3 + 1 + 1/3y3 – 1y2

**Z = 25 – y3 – y2**

**y1 = 6 – x2**

y1 = 6 - 3 + y3 – 3y2

**y1 = 3 + y3 – 3y2**

**x1 = 6 – 1/3y3 – 2/3x2**

x1 = 6 – 1/3y3 – 2/3 \* (3 + y3 – 3y2)

x1 = 6 – 1/3y3 – 2 – 2/3y3 + 2y2

**x1 = 4 – y3 + 2y2**

**x2 = 3 + y3 – 3y2**

**Nach dem letzten Durchlauf müssen alle Koeffizienten in der Zielfunktion negativ sein**

**y3 und y2 sind negativ**

Ende des Verfahrens

optimale Lösung:

**Z\* = 25, x1\* = 4 , x2\* = 3, x3\* = 0**

**Simplex-Algorithmus – tabellarisches Verfahren**

* vor Ausführung des Algorithmus werden die Variablenwerte in eine Tabelle erfasst
* Die NBV aus der Z-Funktion werden in die Z-Zeile mit umgekehrten Vorzeichen (aus xi wird -xi aus -xi wird xi). Die x-Werte aus der Z-Funktion sind im tabellarischen Verfahren die NBV.
* Der Z-Funktionswert ist am Anfang = 0 und wird in die Spalte 0 (Lösungsspalte9 eingetragen.
* Die Restriktionswerte werden in Spalte 0 (Lösungsspalte) geschrieben. Jede Restriktion ist eine neue Zeile. Die Restriktionswerte in der Lösungsspalte sind im tabellarischen Verfahren die BV.
* Die x-Werte aus den Restriktionen sind im tabellarischen Verfahren die NBV.

Bsp.

**Gewinnmaximierung-LP in Grundform:**

**max Z(x1, x2) = 4x1 + 3x2**

x2 <= 6

x1 + x2 <= 7

3x1 + 2x2 <= 18

x1, x2 >= 0

**Gewinnmaximierung-LP in Normalform:**

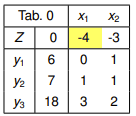
**max Z(x1, x2) = 4x1 + 3x2**

x2 +y1 = 6

x1 + x2 + y2 = 7

3x1 + 2x2 + y3 = 18

x1, x2, y1, y2, y3 >= 0



Bei Ausführung des Simplex-Algorithmus im tabellarischen Verfahren gilt dasselbe Prinzip, wie beim Simplex-Algorithmus – LGS

1.) Eintrittsvariable (NBV) bestimmen

2.) Austrittsvariable (BV) bestimmen

3.) Gleichungen lösen

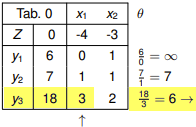
Die Vorgehensweise ist anders

**1.) Eintrittsvariable (NBV) bestimmen:**   
 Die x-Variable (NBV) mit dem kleinsten Wert (größten negativen Wert)

**Eintrittsvariable gibt die Pivotspalte vor**

**2.) Austrittsvariable (BV) bestimmen**

**kleinsten positiven Theta-Wert** mittels Division aus Restriktionswert und Wert aus Pivotspalte   
 (zur Eintrittsvariable) ermitteln.   
 **Nur positive Werte in der Pivotspalte berücksichtigen**  
 Austrittsvariable ist im Bsp. y3, da **Theta-Wert aus 18:3 = 6 = kleinster positiver Theta-Wert**



**Austrittsvariable y3 gibt die Pivotzeile vor.**

**3.) Ermitteln des Pivotwerts aus der Zelle, wo sich Pivotspalte und Pivotzeile kreuzen**   
 **Pivotwert** im Bsp. ist **3**

**4.) neue Tabelle Tab1 erstellen**

**5.) Eintritts-Variable gegen Austrittsvariable tauschen (x1 gegen y3)**

**6.) Füllen der Pivotzeile**

Kehrwert zum Pivotwert, Division der Zellenwerte aus der Pivotzeile durch ursprünglichen Pivotwert

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x1 | 6 | 1/3 | 2/3 |

**7.) Füllen der Pivotspalte**

Division der Zellenwerte aus Pivotspalte durch ursprünglichen Pivotwert \* -1

|  |
| --- |
| y3 |
| 4/3 |
| 0 |
| - 1/3 |
| 1/3 |

**8.) Füllen der übrigen Zellen in der Tabelle durch**   
Zellenwert – (Wert aus Zellenspalte \* Wert aus Zellenzeile : Pivotwert aus Schritt 5)

Bsp.

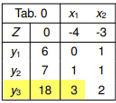
Berechnung des Werts in Spalte 0 der Z-Zeile.

Wert vor der Berechnung: 0

Berechnung: 0 – ( 18 \* - 4 :3 ) = 24

Hinweis zum Rechnen: **bei 1 oder 3 – Vorzeichen in der Klammer wird das Ergebnis zum Term in der Klammer zum Wert vor der Klammer addiert**, andernfalls subtrahiert

18 \* - 4 : 3 = -24 🡺 0 - -24 = 24



Z 0 = 0 - (18 \* - -4 : 3) = 24

Z 2 = -3 - ( 2 \* - -4 : 3) = -1/3

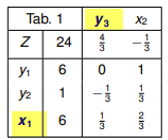
y1 0 = 6 – ( 18 \* 0 : 3) = 6

y1 2 = 1 – ( 2 \* 0 : 3) = 1

y2 0 = 7 – ( 18 \* 1 : 3) = 1

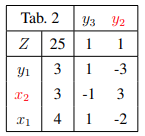
y2 2 = 1 – ( 2 \* 1 : 3) = 1/3

Schritt 8 wiederholen, bis alle Zellen in der neuen Tabelle Tab1 gefüllt sind



**9.) weitere Iteration, wenn ein Zellenwert aus der Z-Zeile noch negativ, hier der Wert zu x2 = -3**

Endtableau mit Lösungswerten



Die Lösungswerte zu den BV aus der Lösungsspalte ablesen

X-Variablen, die keinen Wert in der Lösungsspalte haben, sind NBV und haben den Lösungswert = 0

optimale Lösung zum Bsp. ist.

**x1\* = 4, x2\* = 3, Z\* = 25**

Prüfen durch Einsetzen der Variablenwerte in die Z-Funktion

**max Z(x1, x2) = 4x1 + 3x2**

maxZ(x1, x2) = 4 \* 4 + 3 \* 3 = 25

**Sonderfall Simplex-Algorithmus – tabellarisches Verfahren**

**unzulässige Ausgangslösung, wenn eine BV (im Bsp. Schlupfvariable y2 ) einen negativen Wert hat**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab0 | Lösungs-Spalte  (Spalte 0) | x1 | x2 |
| Z | 0 | - 2 | - 3 |
| y1 | 7 | 1 | 0 |
| y2 | **- 2** | **- 2** | **- 4** |
| y3 | 2 | 4 | -8 |

**y2 = - 2**

**das ist unzulässig, Lösung durch dualen Simplex-Algorithmus-Schritt**

**1.) Austrittsvariable (BV) bestimmen**

Austrittsvariable ist die BV mit dem negativen Wert (hier y2 )

**Austrittsvariable gibt die Pivotzeile vor**

**2.) Eintrittsvariable (NBV) mittels Theta-Wert** aus Division des Werts zur BV aus der Z-Zeile und des Werts aus der zuvor bestimmten Pivotzeile ermitteln.

**In der Pivotzeile werden nur die negativen Pivotwerte berücksichtigt**

Bei mehreren Spalten mit Werten < 0 in der Pivotzeile (im Bsp. x1 = -2, x2 = -4 ), ist die Spalte zu wählen, die den größten Theta-Wert hat (auch positiver Theta-Wert ist möglich)

Thetawert zur Spalte x1 = -2 : -2 = 1 Thetawert zur Spalte x2 = -3 : -4 = 0,75

Spalte x1 hat mit 1 den größten Theta-Wert und ist damit die Pivotspalte

x1, y2 ist die Pivotzelle, -2 ist der Pivotwert

**Eintrittsvariable gibt die Pivotspalte vor**

**3.) Ermitteln des Pivotwerts aus der Zelle, wo sich Pivotspalte und Pivotzeile kreuzen**   
 **Pivotwert** im Bsp. ist **-2**

**4.) neue Tabelle Tab1 erstellen**

**5.) Eintritts-Variable gegen Austrittsvariable tauschen (x1 gegen y2)**

**6.) Füllen der Pivotzeile**

Kehrwert zum Pivotwert, Division der Zellenwerte aus der Pivotzeile durch ursprünglichen Pivotwert

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x1 | 1 | - 1/2 | 2 |

**7.) Füllen der Pivotspalte**

Division der Zellenwerte aus Pivotspalte durch ursprünglichen Pivotwert \* -1

|  |
| --- |
| y2 |
| - 1 |
| 1/2 |
| - 1/2 |
| 2 |

**8.) übrige Zellen mittels primalen Simplex-Algorithmus im tabellarischen Verfahren** **füllen**

Simplex-Algorithmus im tabellarischen Verfahren wiederholen bis alle Werte in der Z-Zeile positiv sind

Alle Werte in der Lösungsspalte müssen im Endtableau positiv sein

**Duale LP**

* Duale LP wird nach den Schlupfvariablen y umgestellt
* Wenn Z-Funktion in primaler LP eine Max-Funktion 🡺 dann Z-Funktion in dualer LP eine Min-Funktion
* Wenn Z-Funktion in primaler LP eine Min-Funktion 🡺 dann Z-Funktion in dualer LP eine Max-Funktion
* In der dualen LP werden aus x-Variablen y-Variablen
* Funktionsparameter in Z-Funktion der dualen LP sind die Restriktionswerte (y-Variablen) zu JEDER Restriktion der primalen LP
* Koeffizienten in der Z-Funktion der dualen LP sind die Restriktionswerte aus den Restriktionen der primalen LP
* Jede x-Variable aus den Restriktionen der primalen LP steht für eine Restriktion in der dualen LP (die Restriktionen der primalen LP werden in der dualen LP transponiert)
* Vorzeichen zu den x-Variablen aus den Restriktionen der primalen LP übernehmen
* Restriktionswerte in der dualen LP sind die Koeffizienten aus der Z-Funktion der primalen LP
* <= aus den Restriktionen der primalen LP ändert sich in >=
* **primales Maximierungsproblem = duales Minimierungsproblem**
* ein **Gleichheitszeichen im primalen Problem hat unbeschränkte duale Variable (yi ∈ R)**
* **unbeschränkte primale Variable (x**i **∈ R) hat im dualen Problem ein Gleichheitszeichen**

**primale LP**

**max** Z(x1, x2) = **4**x1 + **2**x2 + 3x3

Unter den Bedingungen

**4x1** + **x2** <= **10** R1

**2x1** + **x2** <= **8** R2

**x2** + 4x3 = **3** R3

x1, x2 >= 0

**duale LP**

**min** Z(y1, y2, y3) = **10**y1 + **8**y2 + **3**y2

Unter den Bedingungen

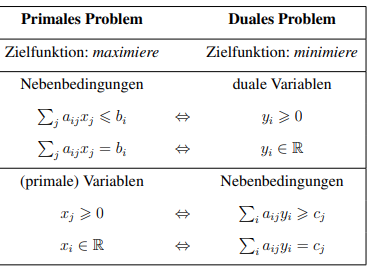
**4y1 + 2y2** **>=** **4** R1

**y1** + **y2** + **y3** **>=** **2** R2

y3 >= 3

y1, y2 >= 0

y3 ∈ R da 3. Restriktion in der primalen LP eine Gleichung ist



Bsp. für Simplex-Tableau zum dualen LP

an dem man erkannt, dass duale LP ein Minimierungsproblem ist

Sollte eine Aufgabe in dieser Art kommen.

Der Lösungsansatz ist ähnlich dem beim primalen Problem, nur die Reihenfolge ist anders

Tabellenspalten sind hier die y-Variablen (BV stehen hier in Spalten) aus Z-Funktion. Die Werte zu diesen werden OHNE VORZEICHEN in der Z-Zeile eingetragen.

X-Variablen (NBV) sind die Zeilen.

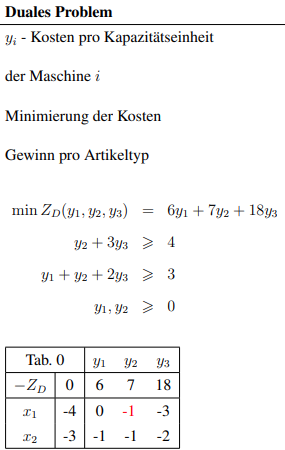
Die Restriktionswerte werden MIT VORZEICHEN in die Lösungsspalte eingetragen. Die Koeffizienten zu den y-Variablen werden MIT VORZEICHEN in den y-Spalten eingetragen.

Eintrittsvariable ist auch hier x-Variable mit dem kleinsten Wert (in der Lösungsspalte), hier -4.

Eintrittsvariable = Pivotzeile

Austrittsvariable ist die Variable mit dem größten Theta-Wert aus Division zwischen Wert in Z-Zeile und Wert aus Pivotzeile. Austrittsvariable = Pivotspalte

Der Simplex-algorithmus ist identisch mit dem des primalen LP.



**Sonderfälle**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Sonderfall | Voraussetzung /  Bedingung | Algorithmus |
| unzulässige  Ausgangslösung | Negativer Wert in der Lösungsspalte | aktuelle Lösung nicht zulässig   * Dualer Schritt * ist kein Pivotwert in einer der Pivotzeilen < 0, ist die Lösung unzulässig und das Verfahren bricht ab |
| Primale Entartung  erster Art | 0-Wert in der Lösungsspalte (der Lösungstabelle)  identischer Theta-Wert zu mehreren Zeilen mit positivem Pivotwert. | **seltenes Problem**  Algorithmus fortsetzen  Problem in der Lösung möglich, meist wird eine optimale Lösung ohne weitere Probleme gefunden  Aufpassen, dass man in der Lösung nicht wieder zurück auf den Ursprung kommt (Kreis) |
| duale Entartung | 0-Wert in der Z-Zeile  (der Lösungstabelle)  2 Pivotspalten (Strukturvariablen) in der Z-Zeile mit demselben Wert |
| Primale Entartung  zweiter Art | kein positiver Wert in allen Pivotzeilen einer Pivotspalte | **großes Problem**  LP ist unbeschränkt und besitzt keine zulässige Lösung |
| Freie Strukturvariablen | z. B. xj | Algorithmus fortsetzen  xj darf aber negativ sein |

**Transportproblem**

* ist vorrangig ein Minimierungsproblem, wird aber auch für Maximierung angewandt
* Aufgabenstellung genau lesen.
* Minimierung ob oder Maximierung: es wird immer die maxZ()-Funktion angewandt.
* Bei Minimierung erhalten die Strukturvariablen in der Z-Funktion und der Grundform ein Vorzeichen und jede Nebenbedingungen wird zweimal notiert, einmal mit Vorzeichen und einmal ohne Vorzeichen.

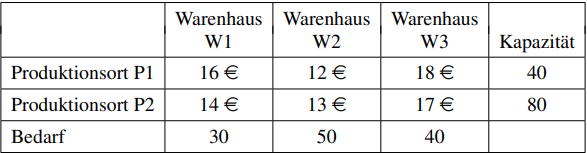
Bsp.

Firma produziert Wäschetrockner an 2 Standorten.

Von den Produktionsorten werden 3 verschiedene Warenhäuser beliefert

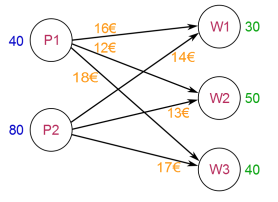
Die Transportkosten stehen in der Tabelle.

**Man möchte zu minimalen Kosten** den Bedarf der Warenhäuser (WH) decken, unter Berücksichtigung der Kapazitäten



**grafische Lösung**

* zu jedem Standort und WH jeweils ein Kreis
* Neben dem Standort-Kreis die Kapazität, neben dem WH-Kreis den Bedarf
* Standort-Kreis und WH-Keis verbinden; an den Kanten die Kosten notieren.



**LP in NF**

maxZ (x11, x12, x13, x21, x22, x23) = -16x11 – 12x12 – 18x13 – 14x21 – 13x22 – 17x23

Strukturvariable xij = Trockner in Stück

i = Standort = Tabellenzeile

j = WH = Tabellenspalte

unter NB

x11 + x12 + x13 <= 40 Ort1 (1. Zeile)

-x11 – x12 – x13 <= -40 Ort1 (1. Zeile)

x21 + x22 + x23 <= 80 Ort2 (2. Zeile)

-x21 – x22 – x23 <= -80 Ort2 (2. Zeile)

x11 + x21 <= 30 WH1 (1. Spalte)

-x11 - x21 <= -30 WH1 (1. Spalte)

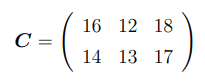
x12 + x22 <= 50 WH2 (2. Spalte)

-x12 - x22 <= -50 WH2 (2. Spalte)

x13 + x23 <= 40 WH3 (3. Spalte)

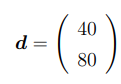
-x12 - x23 <= -40 WH3 (3. Spalte)

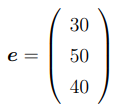
Matrix C zu den Kosten (aus Z-Funktion)



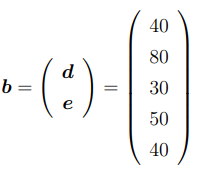
**Vektor d zu den Kapazitäten Vektor d zu den Bedarfen**

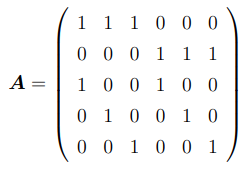
jede Vektorzeile steht für jeweils eine Bedingung





**Vektor b zu Kapazitäten und Bedarfen**



 5 Bedingungen des TP

Kapazität 1 (= 40) >=

Kapazität 2 (= 80) >=

Standort 1 (= 30) >=

Standort 5 (= 50) >=

Standort 3 (= 40) >=

ergeben 5 Zeilen der Matrix

3 Spalten des TP

W1

W2

W3

ergeben 6 Spalten in der Matrix

1 = Einheit gesetzt (BV)

0 = Einheit nicht gesetzt (NBV)

(jede Spalte beinhaltet höchstens zwei Koeffizienten ungleich 0)

wg. unimodular ergibt sich, in jeder Spalte max zweimal die 1

Schaut Euch das Muster an

erste Zeile beginnt mit drei Einsen (für jede der 3 Spalten eine 1) und endet mit drei Nullen (für jede der 3 Spalten eine 1)

zweite Zeile beginnt mit drei Nullen (für jede der 3 Spalten eine 0) und endet mit drei Einsen (für jede der 3 Spalten eine 0)

ab der 3. Zeile geht es mit den Einsen diagonal nach unten rechts, d. h. 1 Spalte eine 1, dann zwei Spalten mit jeweils einer 0, dann wieder eine 1, dann wieder zwei Nullen

in der vierten Zeile rückt man mit der 1 eine Position nach rechts

in der nächsten Zeile genauso, die 1 um eine Position nach recht verschieben

Der Rest ist ein Kinderspiel, da **jede Spalte nur max. zwei Nullen enthalten darf.**

Anzahl der Spalten des Problems \* 2 = Anzahl der Spalten in der Matrix

Anzahl der Bedingungen zum Problem (aus der Grundform) = Anzahl der Zeilen in der Matrix

**Matrix ist unimodular**

* Spalten können nur Werte -1, 0, +1 haben
* Jede Spalte enthält höchstens 2 Koeffizienten ungleich 0.
* Bei einer Unterteilung (Z1, Z2) der Zeilenindexmenge gilt, dass für jede Spalte j, die zwei Nicht-Null-Koeffizienten enthält, pro Spalte die Differenz aus beiden Indexmengen = 0 ist



a = Spalteij

i Spaltennummer, j Zilennummer

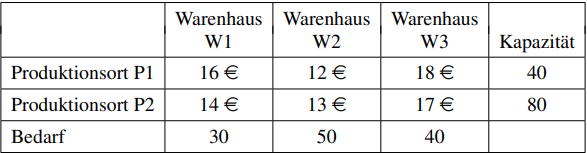
**1. Schritt zur Lösung**

**Aufteilung der Kapazitäten zu den Bedarfen pro WH (Spalte)**

**zulässige initiale Basislösung mittels Nord-West-Eckenregel**

* Teile die Kapazitäten auf alle Zellen so auf, dass pro Spalte das Maximum an Bedarf gedeckt wird, beginne mit der Zelle in der 1. Spalte und 1. Zeile (daher auch der Name Nord-West-Eckenregel).
* Die Summe der Werte in jeder Zeile muss = der Kapazität sein
* Die Summe der Werte in jeder Spalte muss = der Bedarfe sein
* Nach dem Aufteilen sind die Kosten mit den aufgeteilten Kapazitäten zu multiplizieren und alle Kosten zu summieren. Die Summe wird in der Zeile zum Bedarf und Spalte zur Kapazität eingetragen
* Jede Nordwesteckenregel erzeugt eine zulässige initiale Basislösung
* Jedes TP besitzt einen nicht-leeren zulässigen Bereich

**Ausgangssituation**



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | WH1 | | WH2 | | WH3 | | Kapazität |
| P1 | 16 € | *30* | 12 € | *10* | 18 € | 0 | **40** |
| P2 | 14 € | *0* | 13 € | *40* | 17 € | 40 | **80** |
| Bedarf | **30** | | **50** | | **40** | | **1800 €** |

Summe der Kosten

16 \* 30 + 12 \* 10 + 13 \* 40 + 17 \* 40 = 1800

**2. Schritt zur Lösung**

**Austauschschritt zur Optimierung**

* Kosten soll minimiert werden,
* Nicht 0-Koeffizienten sind die BV (z. B. P1/WH1 = 30)
* Spalte mit größter Kosteneinsparung suchen (hier Spalte 1)
* Mengen so verschieben, dass Restriktionen noch erfüllt sind
* WICHTIG: Spalten, wo bereits die max. Menge auf den niedrigeren Kosten aufgeteilt wurde (hier Spalte 3 mit 40 Stück auf niedrigere Kosten (von 18 auf 17 = Ersparnis von 1), werden nicht mehr verändert

**Es kommen somit nur Spalten 1 und 2 in Frage**

Spalte 1 bietet eine Ersparnis von 2 EUR/Stück, Spalte 2 eine Ersparnis von 1 EUR pro Stück

Spalte 1 wird gewählt. Anzahl der Einheiten, die ausgetauscht wird, muss in einer anderen Spalte reduziert werden.

Austausch 30 Einheiten in Spalte 1 von Zeile 1 (16 €) nach Zeile 2 (14 €)

Austausch 30 Einheiten in Spalte 2 von Zeile 2 (13 €) nach Zeile 1 (12 €)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | WH1 | | WH2 | | WH3 | | Kapazität |
| P1 | 16 € | *0* | 12 € | *40* | 18 € | 0 | **40** |
| P2 | 14 € | *30* | 13 € | *10* | 17 € | 40 | **80** |
| Bedarf | **30** | | **50** | | **40** | | **1710 €** |

Zuletzt die Kosten neu berechnen!

Summe der Kosten

12 \* 40 + 14 \* 30 + 13 \* 10 + 17 \* 40 = 1710

**Wichtig:**

**die neue optimale Lösung angeben:**

**neue Optimallösung:**

**x11\* = 0, x12\* = 40, x13\* = 0, x21\* = 30, x22\* = 10, x23\* = 40, Z\* = 1710**

**Maximieren der Erlöse ist ähnlich**

* Die NF ist abgewandelt
* In der Z-Funktion stehen nur positive Werte
* Für jede Bedingung (z. b. Kapazität und bedarf) wird nur eine Restriktion mit positiven Strukturvariablen als Gleichung geschrieben.

Bsp zur

**maxZ (x11, x12, x13, x21, x22, x23) = 16x11 + 12x12 + 18x13 + 14x21 + 13x22 + 17x23**

unter NB

x11 + x12 + x13 = 40 Ort1 (1. Zeile)

x21 + x22 + x23 = 80 Ort2 (2. Zeile)

x11 + x21 = 30 WH1 (1. Spalte)

x12 + x22 = 50 WH2 (2. Spalte)

x13 + x23 = 40 WH3 (3. Spalte)

Die Aufteilung der Einheiten erfolgt nach demselben Prinzip wie bei der Minimierung.

1. Schritt: Aufteilen nach Nord-West-Eckenregel

Es sollen die Erlöse maximiert werden, daher Einheiten in die Zellen mit dem größten Betrag verschieben. Zuerst wird die Spalte mit dem größten Gewinn gesucht.

Zellen, in denen bereits die max. Anzahl der Einheiten dem größten Gewinn zugewiesen ist, bleiben unberücksichtigt.

2. Schritt: Einheiten in die Zellen mit dem größten Wert (Erlös) verschieben.

**Sensitivitätsanalyse**

* **wie empfindlich (stabil) die Optimallösung zu der Modellspezifizierung der LP ist**.
* **Wie viel darf sich ein Restriktionswert ändern, ohne die optimale Basislösung zu verändern**?
* **Wie viel darf sich die Zielfunktionskoeffizienten ändern, ohne die optimale Basislösung zu verändern?**
* **Wie viel verändert sich die optimale Lösung bei einer Änderung eines Restriktionswerts** (Schattenpreis)?

**Schattenpreis**:

**Schattenpreis ist die Zunahme des Zielfunktionswerts Z\* der optimalen Lösung bei ∆ = 1**

**Restriktionswert erhöht sich um 1 Einheit solange die neue optimale Lösung dieselbe optimale Basislösung hat.**

Nimmt Restriktion bj um bj = + ∆ zu, ändert sich der Zielfunktionswert Z (neu) auf Z\* + Sj∆

muss positiv sein, sonst ist die Lösung nicht optimal

**Ist eine Nichtbasis-Schlupfvariable == 0 🡆 ist entsprechende Restriktion verbindlich, eine Erhöhung des Restriktionswerts erhöht optimalen Zielfunktionswert**.

**Basis-Schlupfvariable (BV) hat einen Schattenpreis == 0, weil die Restriktion unverbindlich ist.**

**Mehr Ressourcen für diese Restriktion bringen nur mehr Schlupf und keinen zusätzlichen Gewinn.**

**2 Arten der Sensitivitätsanalyse**

**Ermitteln des zulässigen Intervalls zur Änderung des Restriktionswerts bj, bei dem die optimale Basislösung unverändert bleibt**

typische Aufgabenstellung:

„Ersetzen Sie den 2 Restriktionswert durch 8 + DELTA.“

oder

„Ermitteln Sie den zulässigen Wertebereich für die Restriktion b2 (meint die 2. Restriktion), in dem die optimale Basislösung unverändert bleibt.“

Vorgehensweise

Starttableau Tab0 aus der Aufgabenstellung unverändert übernehmen und in der Lösungsspalte zur Schlupfvariablen + DELTA anfügen

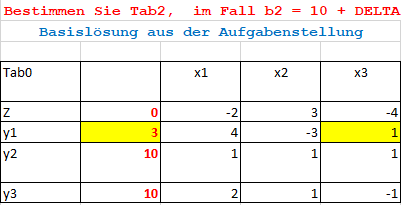
Bsp.

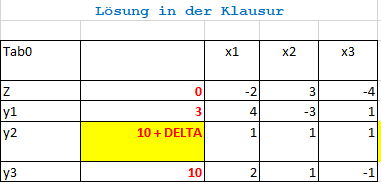
x3 ist die Pivotspalte, y1 ist die Pivotzeile, daher sind diese gelb

**Es soll der 2. Restriktionswert b2 um 10 + DELTA erhöht werden.**

**Schlupfvariable für 2. Restriktionswert b2 ist y2**

**Es wird im Starttableau Tab0 Lösungsspalte zu y2 10 + DELTA eingetragen**



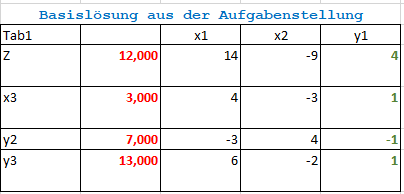


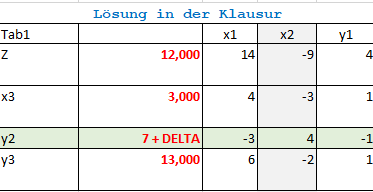
Starttableau Tab1 aus der Aufgabenstellung unverändert übernehmen

**WICHTIG**

steht die Schlupfvariable in keiner Pivotzeile (wie im Bsp.) wird an den Wert in der Lösungsspalte wieder nur + DELTA angefügt.

zu y2 steht wieder nur +DELTA



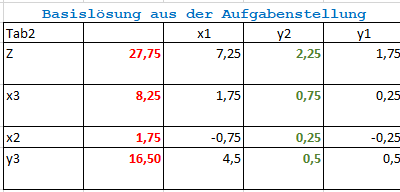
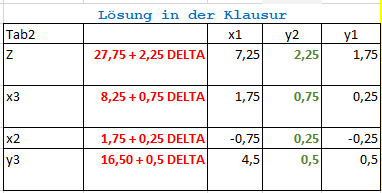


steht die Schlupfvariable in einer Pivotzeile, wird xi gegen yj getauscht.

Dann wird in der Lösungsspalte in allen Zeilen der Wert aus der Spalte zur y-Variable und DELTA angefügt.

y2 steht in Tab1 in einer Pivotzeile

in der nächsten Iteration des Simplex-Algorithmus wird x2 gegen y2 getauscht 🡺 y2 wird in Tab2 zur NBV. Du übernimmst die Werte aus der Spalte y2 (2,25 und 0,75 und 0,25 und 0,5) und fügst sie an die Werte aus der Lösungsspalte an.

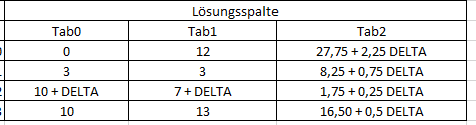


Es muss nichts gerechnet werden!

Faustregel:

gibt es eine Spalte zur gesuchten y-Variable rechts neben der Lösungsspalte (hier y2) fügst Du den Wert aus der y-Spalte zusammen mit DELTA mit + an den Wert der Lösungsspalte hinzu, sonst trägst du zur y-Variable in der Lösungsspalte nur + DELTA ein

In der Klausurantwort muss nur eine Tabelle mit der Lösungsspalte aus jeder Tabelle erstellt werden



Zuletzt noch den Wertebereich für DELTA ermitteln

alle Variablen-Werte aus der Lösungsspalte des Endtableau Tab2 aufschreiben (der Wert aus der Z-Zeile wird nicht aufgeschrieben) und am Zeilenende >= 0 anfügen

und nach DELTA umstellen (auf Vorzeichen achten!

**Ein + vor dem DELTA ergibt immer ein DELTA >= - WERT, ein – vordem DELTA ergibt immer ein DELTA <= WERT**

hier

8,25 + 0,75 DELTA >= 0 = DELTA >= - 8,25 : 0,75 = DELTA >= - 11

1,75 - 0,25 DELTA >= 0 = DELTA >= - 1,75 : - 0,25 = DELTA <= 7

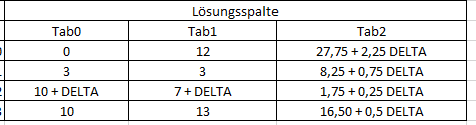
16,50 + 0,5 DELTA >= 0 = DELTA >= - 16,50 : 0,50 = DELTA >= - 33

Den kleinsten Range von – bis + im Bereich wählen, also -11 bis 7.

Das ist der Wertebereich (das Intervall) von DELTA

**Die minimale Klausurantwort ist**

*Nur die Lösungsspalten müssen neu berechnet werden, neue Werte in den Lösungsspalten:*

**

*benötigt wird*

*8,25 + 0,75 DELTA >= 0 => DELTA >= - 11*

*1,75 + 0,25 DELTA >= 0 => DELTA >= - 7*

*16,50 + 0,50 DELTA >= 0 => DELTA >= - 33*

*die gleiche optimale Basislösung wird erreicht, wenn - 7 <= DELTA und nach oben unbeschränkt*

Wertebereich für die Variable b2 (2. Restriktion)

Hinweis: 10 ist der Restriktionswert aus der Basislösung (Aufgabenstellung) bzw. aus der Lösungsspalte von Tab0

b2 neu = b2 + DELTA = 10 + DELTA = 10 – 7 = 3

**Die minimale Klausurantwort ist**

*Wenn ∆ = - 7, ist der Restriktionswert b2 = 10 + ∆ = 3*

*Das Intervall für bi , in dem die gleiche Basislösung optimal ist, ist 3 ⩽ b2*

Bei Frage, wie sich Delta und die neue Optimallösung ändern, wenn der Restriktionswert von 10 auf 12 geändert wird

**Die minimale Klausurantwort ist**

*wenn b2neu = 12 dann DELTA = 2*

*Wenn DELTA = 2 wird die gleiche optimale Basislösung erreicht, da*

*- 11 <= DELTA <= 7 => - 11 <= 2 <= 7*

*die neue optimale Lösung ist*

*z\*neu= 27,75 + 2,25 DELTA = 27,75 + 2,25 \* 2 = 32,25*

*x1\*neu = 0,*

*x2\*neu = 1,75 - 0,25 DELTA = 1,75 - 0,25 \* 2 = 1,25*

*x3\*neu = 8,25 + 0,75 DELTA = 8,25 + 0,75 \* 2 = 9,75*

Lösungshinweis (muss nicht in die Antwort)

Die Werte für Z\*neu, x\*1neu, x\*2neu, x\*3neu werden aus der Lösungsspalte des Endtableaus Tab2 ausgelesen

x1 ist eine NBV, hat deshalb keinen Wert in der Lösungsspalte und in der Lösung (Z-Funktion) den Wert 0

Benutzen Sie ihre Lösung aus Teil (a), um den Schattenpreis der 2. Restriktion zu bestimmen

Erläutern Sie den Schattenpreis anhand des Bsp.

**Die minimale Klausurantwort zum Schattenpreis:**

*Die Lösung aus Teil a ist 27,75 + 2,25DELTA*

*Daraus ergibt sich ein Schattenpreis für die 2. Restriktion (zur Schlupfvariable y2) = 2,25*

*Erhöht sich der Wert zur 2. Restriktion um 1 Einheit (DELTA = 1) ist die Erhöhung des Zielfunktionswertes der Schattenpreis (27,75 + 2,25 DELTA)*

*Der Schattenpreis in der neuen Lösung ist somit 2,25 \* DELTA bzw. Einheit, um die sich die Restriktion erhöht*

Lösungshinweis (muss nicht in die Antwort)

Der Schattenpreis wird zur Schlupfvariable der gefragten Restriktion (hier y2) aus der Z-Zeile des Endtableaus ausgelesen (also aus der y2-Spalte und der Z-Zeile, dort steht 2.25)

Erhöht sich die Restriktion um 3 Einheiten, erhöht sich der Schattenpreis der neuen Lösung um 3 Einheiten \* Schattenpreis der Restriktion

**Ermitteln des zulässigen Intervalls zur Änderung des Zielfunktionskoeffizienten**

**Zielfunktionskoeffizient ist eine BV**

Klausurfrage

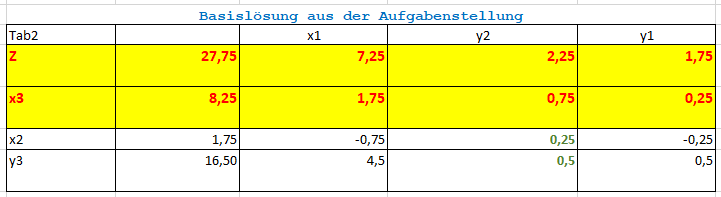
Der Zielfunktionskoeffizient von x3 wird zu c3 = 2 + δ geändert.

(i) Geben Sie ein Intervall für δ an, in dem die optimale Basislösung unverändert bleibt.

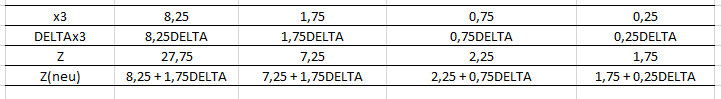
(ii) Geben Sie ein Intervall für c3 an, in dem die optimale Basislösung unverändert bleibt

Auslesen der Werte zu den NBV aus der Zeile zur entsprechenden x-Variable (beim Zielfunktionskoeffizient c3 ist die Variable x3 ) im Endtableau  
Wert aus Lösungsspalte interessiert nicht!

x3 ist eine BV, es werden aus dem Endtableau die Werte aus der Zeile zur Variable x3 ausgelesen und dazu DELTA multipliziert und der Z-Wert addiert



folgende Tabelle dient zur Veranschaulichung, kann aber muss nicht gezeichnet werden



Die Werte zu den NBV (7,25 + 1,75, 2,25 + 0,75, 1,75 + 0,25) werden nur zur Berechnung des Wertebereichs für DELTA bzw. für den Zielfunktionskoeffizienten benötigt, Sie haben keinen Einfluss auf die optimale Lösung.

Die Berechnung des Wertebereichs von DELTA ist adäquat wie bei der Berechnung zur Änderung eines Restriktionswerts

Rechne Z-Wert / Wert der BV

7,25 + 1,75 >= 0 = DELTA >= - 7,25 : 1,75 = DELTA >= - 4,14

2,25 + 0,75 >= 0 = DELTA >= - 2,25 : 0,75 = DELTA >= - 3,00

1,75 + 0,25 >= 0 = DELTA >= - 1,75 : 0,25 = DELTA >= - 7,00

Ein + vor dem DELTA ergibt immer ein DELTA >= - WERT,

Ein – vordem DELTA ergibt immer ein DELTA <= WERT)

Den kleinsten Range von – bis + im Bereich wählen, also – 3 und nach oben unbeschränkt

Das ist der Wertebereich (das Intervall) von DELTA

**Die minimale Klausurantwort ist**

*benötigt wird*

*7,25 + 1,75DELTA >= 0 DELTA >= - 4,14*

*2,25 + 0,75DELTA >= 0 DELTA >= - 3,00*

*1,75 + 0,25DELTA >= 0 DELTA >= - 7,00*

*Alle sind gültig, wenn ⇒ δ⩾−3.*

*Wertebereich für c3(neu) : c3 + δ ⩾* ***4*** *− 3 = 1 ⇒ c(neu)3 ⩾1.*

Lösungshinweis (muss nicht in die Antwort)

**4** ist der Koeffizient für Variable x3 aus der Z-Funktion in der Basislösung (Aufgabenstellung)

= Wert \* - 1 aus Z-Zeile in der Tab0

maximiere z = c1x1 + c2x2 + c3x3

maximiere Z(x1, x2, x3) = 2x1 − 3x2 + **4**x3

Bei Frage, wie sich Delta und die neue Optimallösung ändern, wenn der Zielfunktionskoeffizient von 4 auf 5 geändert wird

Geben Sie die entsprechende optimale Lösung x\*1(neu), x\*2(neu), x\*3(neu) und z∗(neu), wenn die Zielfunktion z∗(neu) = 2x1 − 3x2 + **5**x3 wäre

**Die minimale Klausurantwort ist**

*Wenn c3(neu) =5, δ=1, und die gleiche optimale Basislösung wird erreicht, da*

*δ⩾−3 => 1⩾−3*

*Die optimalen Werte der Strukturvariablen ändern sich nicht:*

*Z\*(neu) = 27,75 + 8,25 DELTA = 27,75 + 8,25 \* 1 = 36,00*

*x∗1(neu) =0*

*x∗2(neu) =1.75*

*x∗3(neu) =8.25*

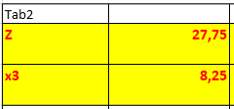
Lösungshinweis (muss nicht in die Antwort)

Die Werte zu den Strukturvariablen x1, x2, x3 ändern sich nicht. Der Werte werden aus dem Endtableau Tab2 ausgelesen

x1 ist eine NBV, hat deshalb keinen Wert in der Lösungsspalte und in der Lösung (Z-Funktion) den Wert 0.

Der neue Z-Wert wird aus der Z-Zeile und Lösungsspalte des Endtableaus Tab2 + dem Wert zur x3-Variablen aus der Lösungsspalte ausgelesen

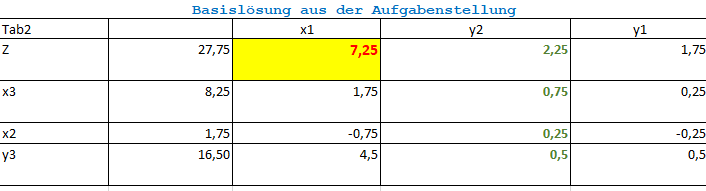
27,75 + 8,25 DELTA



**Zielfunktionskoeffizient ist eine NBV**

Bestimmen Sie den Wertbereich für c1, damit die gleiche optimale Basislösung erreicht wird. Geben Sie die optimale Lösung, wenn die Zielfunktion z ∗ (neu) = 3x1 − 3x2 + 4x3 wäre.

* δ wird von dem z-Zeile-Eintrag in der x Spalte subtrahiert.



**Die minimale Klausurantwort ist**

*benötigt wird*

7.25 − δ⩾0 DELTA <= 7,25

*Die gleiche optimale Basislösung wird erreicht, wenn DELTA <= 7,25*

*und nach unten unbeschränkt*

*Wertbereich für c1(neu) : c1 + δ ⩽ 2 + 7.25 = 9.25 ⇒ c1(neu) ⩽9.25*

Lösungshinweis (muss nicht in die Antwort)

**2** ist der Koeffizient für Variable x1 aus der Z-Funktion in der Basislösung (Aufgabenstellung)

= Wert \* - 1 aus Z-Zeile in der Tab0

maximiere z = c1x1 + c2x2 + c3x3

maximiere Z(x1, x2, x3) = **2**x1 − 3x2 + 4x3

Bei Frage, wie sich Delta und die neue Optimallösung ändern, wenn der Zielfunktionskoeffizient von 2 auf 3 geändert wird

Bestimmen Sie den Wertbereich für c1, damit die gleiche optimale Basislösung erreicht wird. Geben Sie die optimale Lösung, wenn die Zielfunktion

z∗(neu) = **2**x1 − 3x2 + 5x3 wäre

**Die minimale Klausurantwort ist**

*Wenn c1(neu) =3, dann δ=1,*

*die gleiche optimale Basislösung und die gleiche optimale Lösung wird erreicht,*

*weil die 1. Restriktion unverbindlich und die Strukturvariable x1 eine NBV (NBV werden in der Zielfunktion mit 0 bewertet) ist.*

*Z\*(neu) = 27,75*

*x∗1(neu) =0*

*x∗2(neu) =1.75*

*x∗3(neu) =8.25*

Lösungshinweis (muss nicht in die Antwort)

Die Werte zu Z und den Strukturvariablen x1, x2, x3 ändern sich nicht. Der Werte werden aus dem Endtableau Tab2 ausgelesen

**Ganzzahlige Optimierung**

**Gomory- Schnittebenenverfahren**

* für ganzzahlige Lösung
* wird nach LP-Relaxierung ausgeführt 🡺 Lösung zur LP-Relaxierung des ganzzahligen Problems (IP)
* nur von Nichtbasisvariablen abhängig
* wird nach Ausführung des Simplex-Algorithmus mit neuer Schlupfvariablen S1 als neue Zeile des End-Tableaus hinzugefügt
* hat die Lösung der LP-Relaxierung Variablen mit gebrochenen Werten, wird Gomory-Schnitt wie folgt ausgeführt

1. Wähle aus dem Tableau die X-Variable, die in der Lösungsspalte, den größten Bruchanteil hat   
   x1 = 3,60, x2 = 2,80 🡺 x2 (0,80 > 0,60)  
   x1 = 5/9, x2 = 3/8 🡺 x1 (0,55 > 0,38)
2. Nehme aus der Zeile zur gewählten x-Variable (Basisvariable) die **Nachkomma-Werte** aus der Zeile zur Strukturvariablen (Basisvariablen x-Variablen)   
   bei negativen Werten in der Tabelle wird die Differenz aus - - Brauchanteil \* - 1 gerechnet  
   sonst Bruchanteil \* - 1
3. Trage alle Werte aus dem Lösungstableau in eine neue Tabelle und füge am Ende eine Zeile zur neuen Schlupfvariablen S1 und den Bruchwerten mit – Vorzeichen ein

Lösungstableau, zu dem der Gomory angewendet werden soll

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab2 | | y1 | y2 |
| Z | 1 ½ | ¼ | ¼ |
| x1 | 3 3/5 | 1/6 | -1/6 |
| **x2** | **2 4/5** | **¼** | **- ¼** |

x2 hat mit 4/5 den größten Bruchanteil, wir wählen x2

NK-Werte für Schlupfvariable S1 bestimmen  
x2 (in Lösungsspalte) = - 4/5

y1 = 1/4 🡺 - 1/4  
y2 = - 1/4 🡺 (1 – ¼) \* -1 = - 3/4

Schlupfvariablen S1 in eine neue Tab G1 eingetragen

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab G1 | | y1 | y2 |
| Z | 1 ½ | ¼ | ¼ |
| x1 | 3 3/5 | 1/6 | -1/6 |
| **x2** | **2 4/5** | **¼** | **- ¼** |
| **S1** | **-4/5** | **-¼** | **- ¾** |

Lösungsspalte hat negativen Wert, daher dualen Schritt und Simplex-Algorithmus durchführen und Werte in neue Lösungstabelle Tab G2 eintragen. Aufpassen bei Wahl der Pivotspalte (alle Werte in der Pivotzeile sind negativ, daher ist ¼ : - ¼ = -1 < ¼ : - ¾ = - 1/3 )

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab G2 | | y1 | S1 |
| Z | 1,2 | 1/6 | 1/3 |
| x1 | 3,17 | 2/9 | - 2/9 |
| **x2** | **3,78** | **1/3** | **-1/3** |
| y2 | 1 | 1/3 | - 4/3 |

Tabelle hat noch Bruchwerte zu Z und x1, daher ist eine neue Iteration zum G-Schnitt nötig.

**Der G-Schnitt wird so oft wiederholt, bis alle Werte in der Lösungsspalte ganzzahlig sin.**

Im Bsp. ist in der 2. Iteration eine neue Schlupfvariable S2 mit Koeffizienten zu x2 einzufügen und danach wieder der duale Schritt mit Simplex-Algorithmus auszuführen

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tab G3 | | y1 | S1 |
| Z | 1,2 | 1/6 | 1/3 |
| x1 | 3,17 | 2/9 | - 2/9 |
| **x2** | **3,78** | **1/3** | **-1/3** |
| y2 | 1 | 1/3 | - 4/3 |
| **S2** | **-0,78** | **-0,33** | **-0,66** |

Nicht vergessen, die optimale Lösung am Ende anzugeben (sofern der G-Schnitt bis zum Ende durchgeführt wird und alle Werte in der Lösungsspalte ganzzahlig sind.)

optimale ganzzahlige Lösun: x1\* = …, x2\* = …, Z\* = ...

zum Verständnis des originalen Problems und zur grafischen Darstellung eine Ungleichung zu den Strukturvariablen aus der gewählten Zeile erstellen

Bsp.:

Grundform der LP

max Z(x1, x2) = 4x1 + 8x2

unter den NB

**x1 + 4x2 <= 12**

**8x1 - 2x2 <= 20**

Gleichung zu Tab G1 erstellen

**S1-0,25y1 – 0,75y2 = - 0,8**

In diese Gleichung sind die Werte zu den Schlupfvariablen aus den Restriktionen einzusetzen.

**S1-0,25 \*** (**12 – x1 - 4x2**) **– 0,75 \*** (**20 – 8x1 - 2x2**) **= - 0,8**

und auflösen

S1 – 3 + 0,25x1 + 1x2 - 15 + 6x1 + 1,5x2 = - 0,8

S1 – 18 + 6,25 x1 + 2,5x2 = - 0,8 | + 18

**S1 + 6,25 x1 + 2,5x2 = 17,2**

als Ungleichung

**6,25 x1 + 2,5x2 <= 17,2**

Gleichung zu Tab G2 erstellen

**Achtung: 2 Strukturvariable ist hier S2 aus Tab G2**

**S2-0,33y1** – **0,66S2** **= - 0,78**

In diese Gleichung sind der Wert zur Schlupfvariablen y1 aus der 1. Restriktionen der Basislösung einzusetzen **und die Gleichung zu S2 aus dem 1. Schritt nach S1 umstellen und einzusetzen**.

**S1 + 6,25 x1 + 2,5x2 = 17,2 ⬄ S2 = 17,2 – 6,25x1 – 2,5x2**

**S2 - 0,33 \*** (**12 – x1 - 4x2**) – **0,66 \*** (**17,2 – 6,25x1 – 2,5x2**) **= - 0,78**

und auflösen

S2 – 3,96 + 0,33x1 + 1,32x2 – 11,35 + 4,12x1 + 1,65x2 = - 0,75

S2 -15,31 + 4,45x1 + 2,97x2 = - 0,75 | +15,31

**S2 + 4,45x1 + 2,97x2 = 14,56**

als Ungleichung

**4,45x1 + 2,97x2 <= 14,56**

**Branch-And-Bound-Verfahren**

* ist Maximierungsproblem
* basiert auf entscheidungsbäumen und wird daher auch Entscheidungsbaumverfahren genannt
* unterteilt ein Problem in Unterprobleme (zu jedem Problem genau 2 Unterprobleme)

**Regeln**

1. ist Lösungsmenge der Zielwertfunktion leer (= unzulässige Lösung) 🡺 abbrechen
2. sind alle Strukturvariablen in der Zielwertfunktion ganzzahlig 🡺 abbrechen
3. hat mindestens eine der Strukturvariablen einen gebrochenen Wert UND ist die Lösung der Zielwertfunktion <= als die bisher gefundenen untere Schrank 🡺 abbrechen
4. Hat mindestens eine der Strukturvariablen einen gebrochenen Wert UND ist die Lösung der Zielwertfunktion > als die bisher gefundenen untere Schranke 🡺
   1. eine Variable xj mit gebrochenen Wert wählen
   2. zwei neue Unterprobleme bilden
   3. Variablenwert auf ganzzahligen Wert abrunden (z. B. 4,6 🡺 4)
   4. im 1. Unterproblem die Ungleichung xj ⩽ ⌊xj⌋ hinzufügen (x <= abgerundeten Wert)
   5. im 2. Unterproblem die Ungleichung xj ⩽ ⌊xj⌋+1 hinzufügen (x <= abgerundeten Wert + 1)

