WIRTSCHAFTSSTATISTIK
MODUL 7: ÜBUNGEN

WS 2023/24 DR. E. MERINS

AUFGABE 1

Aufgabe 1

Aus je 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C soll ein 6-köpfiger Ausschuss gebildet werden.
Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es

a) insgesamt,
b) wenn mindestens ein A-Mitglied dabei sein soll,
c) wenn mindestens ein A-Mitglied und ein B-Mitglied dabei sein sollen,
d) wenn aus jeder der drei Parteien mindestens ein Mitglied dabei sein soll?

<u>Hinweis</u>: Bei c) und d) könnte die Siebformel zum Einsatz kommen.

Wie wird die Siebformel noch genannt?
Einschluss–Ausschluss–Formel (Inklusion–Exklusion–Formel)

AUFGABE 1A

Lösung: Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es a) insgesamt?

$\boldsymbol{\Omega}$: Gesamtmenge der Ausschusszusammensetzungen

Welches Grundmuster (Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?

Grundmuster = Reihenfolge + Wiederholung („Zurücklegen“)

Ist es wichtig in welcher Reihenfolge die Mietglieder ausgewählt werden?
NEIN → ohne Reihenfolge
Jeder Ausschussmietglied wird nur ein mal im Ausschuss vorkommen
→ ohne Zurücklegen
→ ohne Reihenfolge + ohne Zurücklegen = Binomialkoeffizient

Wie viele Parteimietglieder gibt es (bzw. aus wie vielen wird ausgewählt)?

3 Parteien * je 7 Mietglieder = 21

Wie groß wird der Ausschuss?

6 Mietglieder
Binomialkoeffizient „21 über 6“

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \binom{\mathbf{21}}{\mathbf{6}} = \mathbf{54264}$$

AUFGABE 1

Vorüberlegung:

„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“
(ähnlich wie mit Gegenwahrscheinlichkeit)

Definiere die Mengen:

Denkweise „verkehrt“!!

A: Menge der Ausschusszusammensetzungen <u>ohne</u> A-Mitglieder
B : Menge der Ausschusszusammensetzungen <u>ohne</u> B-Mitglieder
C: Menge der Ausschusszusammensetzungen <u>ohne</u> C-Mitglieder

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}}$$

$$|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$$

AUFGABE 1B

Lösung:

b) wenn mindestens ein A-Mitglied dabei sein soll

Denkweise „verkehrt"!!

„mindestens ein…" = Gesamtmenge – „kein"

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}}$$

$$|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$$

Gesamtanzahl – Anzahl der Zusammensetzungen <u>ohne</u> A-Mitglieder

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A}|$$

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A}| = \binom{\mathbf{21}}{\mathbf{6}} - \binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}} =$$

$$= \mathbf{51261}$$

AUFGABE 1C

Lösung:

c) wenn mindestens ein A-Mitglied <u>und</u> ein B-Mitglied dabei sein sollen

Denkweise „verkehrt“!!

„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}}$$

$$|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$$

„Und“ = „Vereinigungsmenge“

Gesamtanzahl – Vereinigungsmenge von Anzahl der Zusammensetzungen <u>ohne</u> A-Mitglieder und <u>ohne</u> B-Mitglieder

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}|$$

Anwendung der Siebformel (Folie 22):

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\Omega}| - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}|)$$

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}| = \binom{\mathbf{21}}{\mathbf{6}} - \mathbf{2} * \binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}} + \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} =$$

$$= \mathbf{48265}$$

AUFGABE 1D

Lösung:

d) wenn aus jeder der drei Parteien mindestens ein Mitglied dabei sein soll

Denkweise „verkehrt“!!

„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}}$$

$$|\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}$$

„Und“ = „Vereinigungsmenge“

Gesamtanzahl – Vereinigungsmenge von Anzahl der Zusammensetzungen
<u>ohne</u> A-Mitglieder und <u>ohne</u> B-Mitglieder und <u>ohne</u> C-Mitglieder

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}|$$

Anwendung der Siebformel (Folie 22):

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{\Omega}| - (|\boldsymbol{A}| + |\boldsymbol{B}| + |\boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}| - |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}| - |\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}| + |\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}|)$$

$$|\boldsymbol{\Omega}| - |\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}| = \binom{\mathbf{21}}{\mathbf{6}} - \mathbf{3} * \binom{\mathbf{14}}{\mathbf{6}} + \mathbf{3} * \binom{\mathbf{7}}{\mathbf{6}} - \mathbf{0} =$$

$$= \mathbf{45276}$$

AUFGABE 2

Aufgabe 2

Gegeben sei das Wort **ELEVEN**.

a) Wie viele „Worte“ kann man durch Buchstabenvertauschungen erzeugen?

b) Wie viele dieser „Worte“ enthalten die drei E's direkt hintereinander?

c) Wie viele dieser „Worte“ beginnen mit E und enden mit N?

AUFGABE 2

Lösung: ELEVEN

a) Wie viele Wörter kann man durch Vertauschen der Buchstaben - auch sinnlose Wörter – erzeugen ?

Um welches Gebiet/Muster der Kombinatorik geht es hier?

Anordnung der k-Elementen

→ Permutationen $\boldsymbol{P_{mW}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\boldsymbol{n_2}!\ldots\boldsymbol{n_k}!}$

Was steht im Zähler?

Anzahl aller Plätze/Anzahl aller Buchstaben

Wie viele gibt es?

6! Das ist die Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen

Was steht im Nenner ?

Anzahl der Permutationen der jeweiligen Buchstaben

Wir haben hier vier Buchstaben**typen:**

E kommt 3mal vor → 3!

L kommt 1mal vor → 1!

V kommt 1mal vor → 1!

N kommt 1mal vor → 1!

$$\boldsymbol{P_{mW}} = \frac{\mathbf{6}!}{\mathbf{3}!\,\mathbf{1}!\,\mathbf{1}!\,\mathbf{1}!} = \mathbf{120}$$

AUFGABE 2

Lösung: ELEVEN

b) Wie viele dieser Worte enthalten die drei E's direkt hintereinander?

Anordnung der k-Elementen
→ Permutationen $\boldsymbol{P_{mW}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\boldsymbol{n_2}!\ldots\boldsymbol{n_k}!}$

Da man die E's nicht trennen kann, darf man die 3 E's als 1 Zeichen auffassen
4 Objekte EEE, L, V, N
Jeder Objekt kommt nur ein Mal vor = Spezialfall. Welcher?
Variation ohne Wiederholung

→ Anzahl der Möglichkeiten, die EEE mit den Kombinationen von L, V, N anzuordnen
$P_{mW} = 4! = 24$

AUFGABE 2

Lösung: ELEVEN

c) Wie viele dieser Worte beginnen mit E und enden mit N?

Anordnung der k-Elementen

→ Permutationen $\boldsymbol{P_{mW}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{n_1!n_2!\ldots n_k!}}$

E und N am Beginn bzw. Ende des Wortes stehen fest, z.B. (E)LEVE(N).
Übrig bleiben 2 E und L und V. Wir müssen L, E, V, E in unterschiedliche Reihenfolgen bringen.

Was steht im Zähler?

4! Das ist die Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen

Was steht im Nenner ?

Anzahl der Permutationen der jeweiligen Buchstaben

Wir haben nun drei Buchstaben**typen:**
E kommt 2mal vor → 2!
L kommt 1mal vor → 1!
V kommt 1mal vor → 1!

$$\boldsymbol{P_{mW} = \frac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12}$$

AUFGABE 3

Aufgabe 3

In einer Großbank kommen 80% der männlichen Kreditkunden ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nach, 15% schleppend nach, und bei 5% muss die Bank den Kredit abschreiben.
Bei den weiblichen Kreditkunden sind die entsprechenden Zahlen 85%, 10% und 5%.
Von den Kreditkunden der Bank sind 70% männlich.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

AUFGABE 3

GEGEBEN:

In einer Großbank kommen 80% der männlichen Kreditkunden ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nach, 15% schleppend nach, und bei 5% muss die Bank den Kredit abschreiben. Bei den weiblichen Kreditkunden sind die entsprechenden Zahlen 85%, 10% und 5%. Von den Kreditkunden der Bank sind 70% männlich.

Gefragt wird nach einer Wahrscheinlichkeit.
Um welche Wahrscheinlichkeit geht es hier?

bedingte Wahrscheinlichkeit

Definitionen:

p = pünktlich, s = schleppend, n = nie
Geschlecht: M = Mann, F = Frau

Was ist gegeben?

$P(p\mid M)$	$=0{,}8$	$P(p\mid F)$	$=0{,}85$
$P(s\mid M)$	$=0{,}15$	$P(s\mid F)$	$=0{,}1$
$P(n\mid M)$	$=0{,}05$	$P(n\mid F)$	$=0{,}05$
$P(M)$	$=0{,}7$	$P(F)$	$=1-0{,}7=0{,}3$

AUFGABE 3

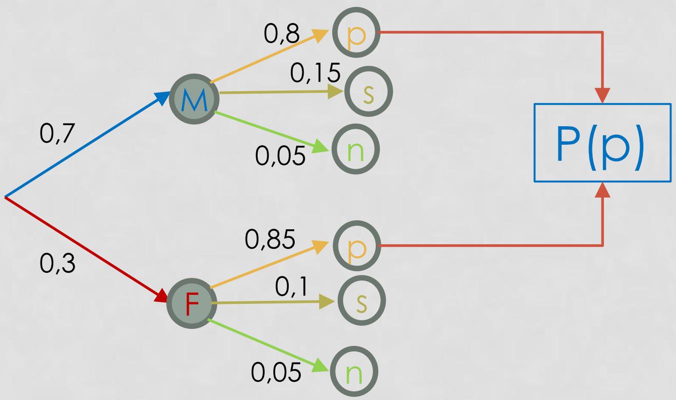
Lösung:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

Gegeben:

p = pünktlich, s = schleppend, n = nie
M = Mann, F = Frau

$P(p \mid M)=0{,}8$	$P(p \mid F)=0{,}85$
$P(s \mid M)=0{,}15$	$P(s \mid F)=0{,}1$
$P(n \mid M)=0{,}05$	$P(n \mid F)=0{,}05$
$P(M)=0{,}7$	$P(F)=0{,}3$



Was ist gefragt?

P(p)

Was könnte uns hier helfen?

Baumdiagramm

- Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
- Multiplikationsregel und Additionsregel für Baumdiagramme

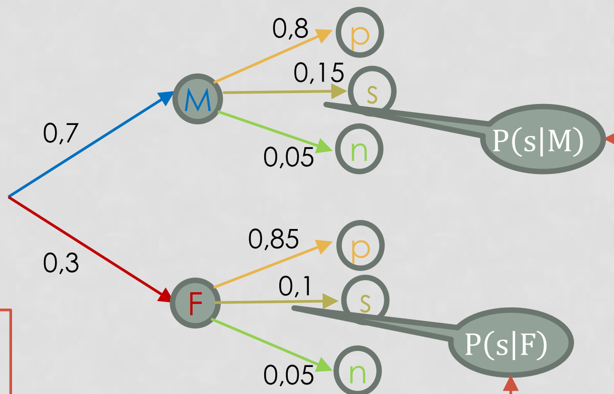
$$P(p)=P(p \mid M)*P(M) + P(p \mid F)*P(F)$$

$$P(p) = 0{,}8*0{,}7 + 0{,}85*0{,}3 = 0{,}815$$

AUFGABE 3

Lösung:

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?



Gegeben:

p=pünktlich, s=schleppend, n=nie
M=Mann, F=Frau

P(p | M)=0,8
P(s | M)=0,15
P(n | M)=0,05
P(M)=0,7

P(p | F)=0,85
P(s | F)=0,1
P(n | F)=0,05
P(F)=0,3

Was ist gefragt?

P(F | s)

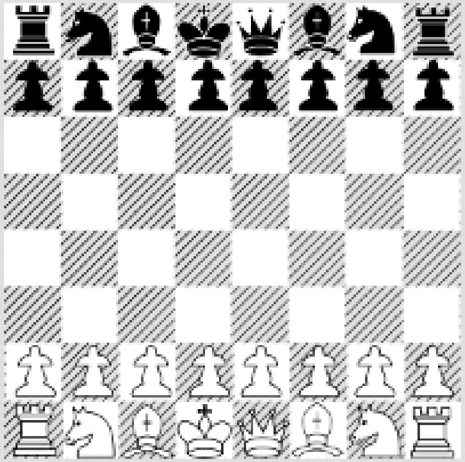
Welche Formel benutzen wir hier?

Satz von Bayes (Folie 49) $P(A|B) = \frac{P(B|A)*P(A)}{P(B)}$

$$P(F|s) = \frac{P(s|F)*p(F)}{P(s)} = \frac{P(s|F)*p(F)}{P(s|F)*p(F)+P(s|M)*p(M)}$$

$$P(F|s) = \frac{0{,}1*0{,}3}{0{,}1*0{,}3+0{,}7*0{,}15} = \frac{2}{9} = 0{,}22$$

AUFGABE 4



Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass aus einem Schachspiel eine beliebige Figur genommen wird, die kein Pferd ist.

Mit Hilfe des Gegenereignisses geht es einfacher.

Ein Gegenereignis ist die Menge aller Ergebnisse, die nicht zum Ereignis gehören.

AUFGABE 4

Lösung:

Was ist gefragt?

P(kein Pferd) = ?

Die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses (die so genannte **Gegenwahrscheinlichkeit**) ist durch Komplementärmenge gegeben:

P(kein Pferd) = 1 – P(Pferd)

Wie viele Figuren hat ein Schachspiel? (= Ergebnismenge)

$\mathrm{n} = 32$

Wie viele Pferde hat ein Schachspiel?

$\mathrm{n}(Pferde) = 4$

Wie ist die Wahrscheinlichkeit, ein Pferd zu ziehen?

P(Pferd) = 4/32 = 0,125

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Pferd genommen wird, liegt bei

P(kein Pferd) = 1 - 0,125 = 0,875 = 87,5%

AUFGABE 5

Unter zehn Fahrgästen einer Straßenbahn befinden sich zwei Schwarzfahrer. Ein Kontrolleur bittet 3 Personen, ihren Fahrschein vorzuzeigen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Schwarzfahrer in die Kontrolle geraten?

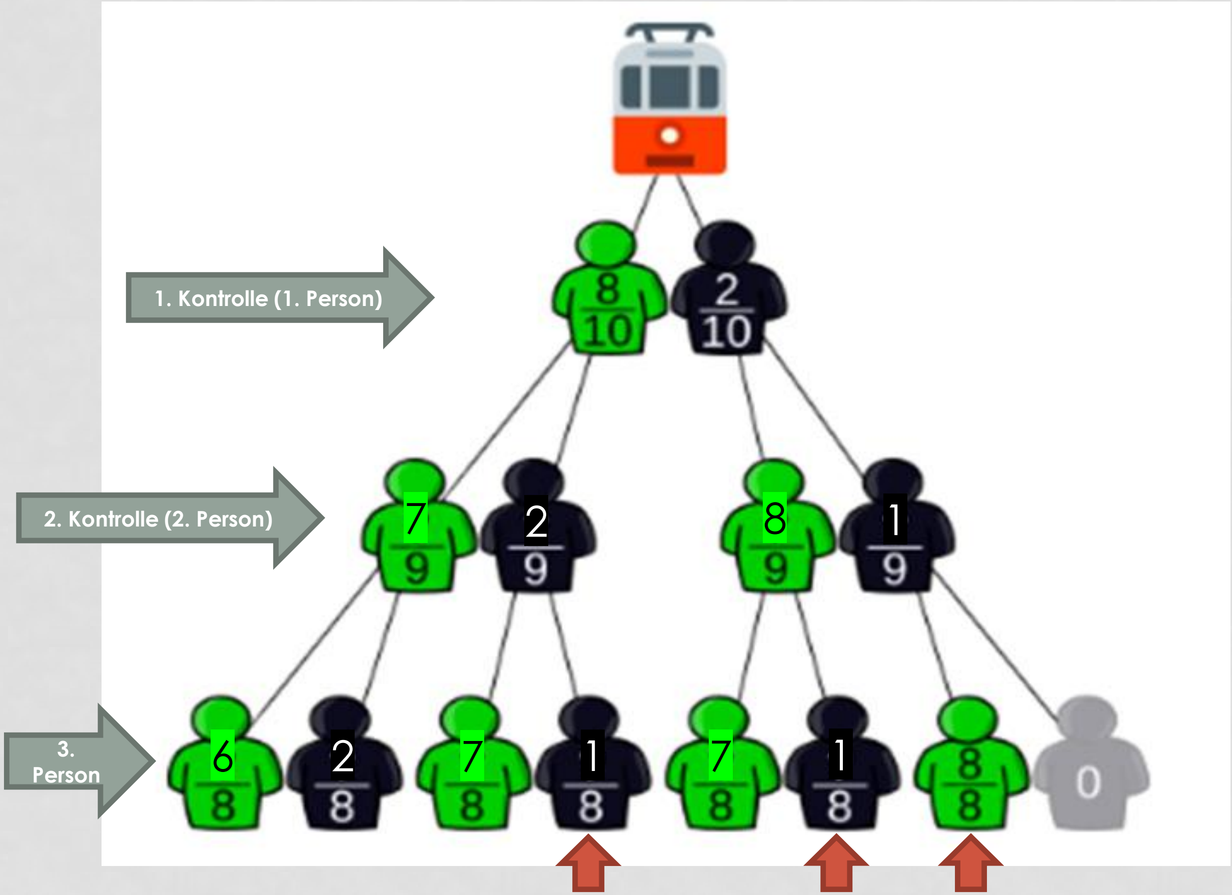
Was hilft hier bei der Lösung?

Ein Baumdiagramm!

AUFGABE 5

Lösung:

→ Baumdiagramm



Die Wahrscheinlichkeit, beide Schwarzfahrer zu erwischen, liegt bei

$$P(2\,Schwarzfahrer) =$$

$$= \frac{8}{10} * \frac{2}{9} * \frac{1}{8} + \frac{2}{10} * \frac{8}{9} * \frac{1}{8} + \frac{2}{10} * \frac{1}{9} * \frac{8}{8}$$

$$= \frac{16 + 16 + 16}{10 * 9 * 8} = \frac{48}{720} = \frac{1}{15}$$