

# Wirtschaftsstatistik

## Übungsblatt Modul 6

### Korrelation und Regression

#### Aufgabe 1

Filiale	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Verkaufsfläche (1.000 qm)	7	5	6	3	8	2	4	6	4	7
Filialumsatz (Mio €)	35	22	41	15	38	12	34	28	25	52

- Visualisieren Sie für das obige Datenmaterial den Zusammenhang zwischen den beiden Merkmalen Verkaufsfläche und Filialumsatz in einem geeigneten Diagramm. Wie wird diese grafische Darstellung genannt?
- Welche Erkenntnisse liefert Ihnen eine erste qualitative Zusammenhangs- bzw. Abhängigkeitsanalyse auf der Basis des in a) erstellten Diagramms?

#### Aufgabe 2

Monate	Januar	Februar	März	April
Produzierte Menge (in Mio. Stück)	5	3	2	4
Produktionskosten (Mio. €)	8	4	6	5

- Berechnen Sie eine lineare Regressionsfunktion  $\hat{Y} = \hat{Y}(x) = a + b \cdot x$ , die den Zusammenhang zwischen produzierter Menge und Kosten möglichst gut charakterisiert (x produzierte Menge in Mio. Stück und Y Kosten in Mio. €)  
Tipp: transponiere und erweitere obere Tabelle, um Zwischenberechnungen einzufügen (s. z. B. Folien 20 und 39 Modul 6)
- Zeichnen Sie das Streudiagramm und die Regressionsfunktion in das Koordinatensystem ein. Beschriftung der Achsen nicht vergessen!
- Interpretieren Sie die beiden Regressionskoeffizienten der berechneten Regressionsfunktion betriebswirtschaftlich.  
Wie nennt man eine solche Funktion in der Betriebswirtschaftslehre?
- Erstellen Sie auf der Basis der in a) ermittelten Regressionsfunktion eine Kostenprognose für den Monat Mai, in dem eine Produktionsmenge von 6 Mio. Stück geplant ist

e) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten und das Bestimmtheitsmaß zur obigen Regressionsrechnung

f) Interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß

g) Berechnen Sie die Varianz der Produktionsmengen, der Produktionskosten und der Regressionswerte (Summen aus der Berechnungstabelle verwenden).

Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass das Bestimmtheitsmaß angibt, welcher Anteil der Varianz der Produktionskosten erklärt wird durch die Regressionsfunktion bzw. die Varianz der Produktionsmengen

Tipp: Varianzzerlegung s. Modul 6

### Aufgabe 3

Die Marktforschungsabteilung eines Unternehmens will für ein neues Produkt die Abhängigkeit der Absatzmenge  $x$  vom Preis  $Y$  empirisch untersuchen. Dazu wird in 4 vergleichbar großen Testmärkten unter sonst annähernd gleichen Rahmenbedingungen 8 Wochen lang jeweils ein unterschiedlicher Preis gefordert. Die Ergebnisse dieses Tests stehen in der folgenden Tabelle:

Testmärkte	A	B	C	D
<b>x: Preis pro Stück (€)</b>	1,90	2,10	1,50	2,50
<b>Y: Absatzmenge in 8 Wochen (Stück)</b>	5.000	4.000	8.000	3.000

a) Berechnen Sie eine lineare Regressionsfunktion  $\hat{Y} = \hat{Y}(x) = a + b \cdot x$ , die die Abhängigkeit zwischen Preis und Absatzmenge möglichst gut charakterisiert. (x Preis in € und Y Absatzmenge in Stück)

b) Zeichnen Sie das Streudiagramm und die Regressionsfunktion in das Koordinatensystem ein. Beschriftung der Achsen nicht vergessen!

c) Interpretieren Sie die beiden Regressionskoeffizienten der in a) berechneten Regressionsfunktion betriebswirtschaftlich

d) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten und das Bestimmtheitsmaß zur obigen Regressionsrechnung

e) Interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß für diesen Fall

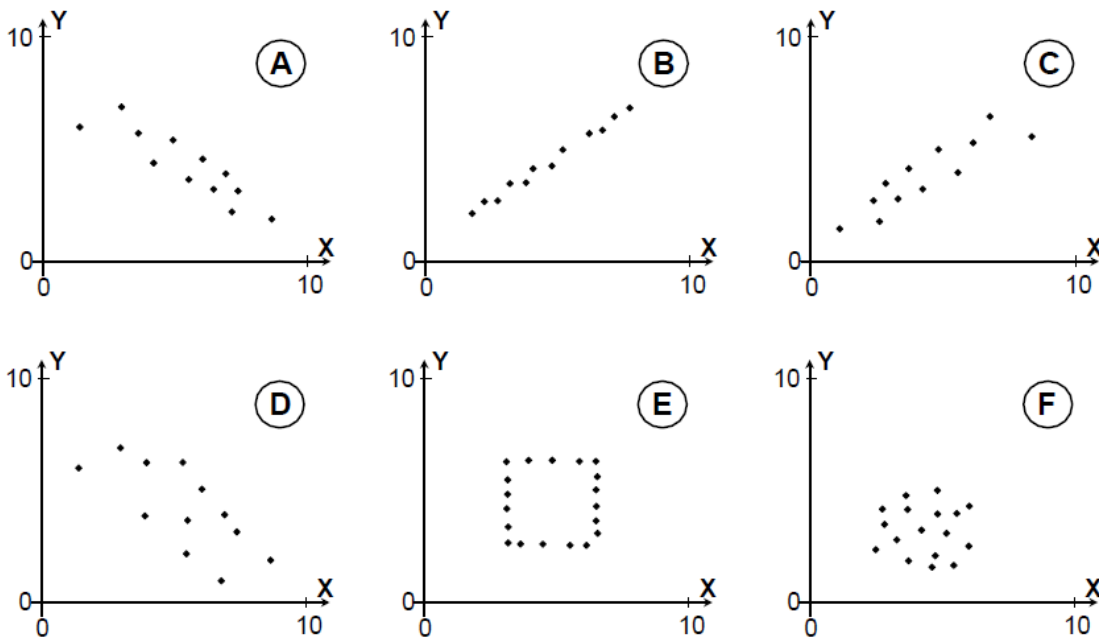
f) Erstellen Sie auf der Basis der in a) ermittelten Regressionsfunktion eine Absatzmengen-Prognose für einen Testmarkt M, der den Testmärkten A, B, C und D entspricht. Welche Absatzmenge ist dort in 8 Wochen zu erwarten bei einem Preis von € 1,70

g) Berechnen Sie für die Daten die Varianz der empirisch ermittelten Absatzmengen und die Varianz der dazugehörigen Regressionswerte (= entsprechende Absatzmengen auf der Regressionsfunktion). Was ergibt der Quotient „Varianz der Regressionswerte zur Varianz der Absatzmengen“?

Aufgabe 4

In den folgenden Abbildungen sind 6 Streudiagramme dargestellt, die den Zusammenhang zwischen den zwei Merkmalen X und Y visualisieren. Bringen Sie die Korrelationskoeffizienten  $r_A$ ,  $r_B$ ,  $r_C$ ,  $r_D$ ,  $r_E$ ,  $r_F$  nach ihren Werten in eine aufsteigende Rangfolge.

( $r_A$ : Korrelationskoeffizient für das Streudiagramm A, usw.)



Lösung:

-1

+1

Aufgabe 5

Es soll den Zusammenhang zwischen Preis P und Absatzmenge X empirisch untersucht werden. Dazu werden in 20 ausgewählten Testmärkten unterschiedliche Preise eingesetzt und Absatzmengen zu diesen Preisen dokumentiert. Die Regressionsrechnung liefert die folgende lineare Regressionsfunktion:

$$\hat{Y} = \hat{Y}(p) = a + b \cdot p = 2.000 - 500 \cdot p \quad (p \text{ in } \text{€}, Y \text{ in Tsd. Stück})$$

Der Korrelationskoeffizient beträgt  $r = -0,75$ .

Nehmen Sie kurz Stellung zu den beiden folgenden Aussagen a) und b):

- Aus der Regressionsfunktion kann man erkennen, dass der Zusammenhang zwischen Preis und Absatzmenge sehr stark ist.
- Die Absatzmengenunterschiede in den Testmärkten lassen sich zu 75% durch die unterschiedliche Preispolitik erklären, d.h. durch die Preisunterschiede in den Testmärkten.

Aufgabe 6

Für ein neues Produkt wird untersucht, wie die Käufer auf unterschiedliche Preise reagieren. In 4 vergleichbar großen Testgeschäften in verschiedenen Gegenden wird das neue Produkt einen Monat lang zu jeweils unterschiedlichen Preisen angeboten. In der folgenden Tabelle sind für die Testphase die jeweils geforderten Preise (**p**) und die Reaktion der Käufer ausgedrückt in Absatzmengen des Produktes (**Y**) zusammengestellt.

Testgeschäft Nr.	1	2	3	4
<b>x: Preis pro Stück (€)</b>	3,00	1,50	1,00	2,50
<b>Y: Absatzmenge (in Tausend Stück)</b>	2	6	14	10

Nach der Methode der kleinsten Quadrate wurde mit Hilfe der Berechnungstabelle und den entsprechenden Formeln für die beiden Regressionskoeffizienten die folgende lineare Preis-Absatz-Funktion ermittelt:

$$\hat{Y} = \hat{Y}(x) = a + b \cdot x = 16 - 4 \cdot x$$

- Erstellen Sie eine Berechnungstabelle. Berechnen Sie die Regressionswerte und Residualwerte und tragen Sie diese in die Tabelle ein. Zeichnen Sie in das Koordinatensystem ein:
  - die Beobachtungswertepaare durch ■
  - die berechnete Regressionsfunktion,
  - die Regressionswerte  $\hat{Y}_i$  durch •,
  - die Residualwerte (wenn farbiger Stift vorhanden, in Farbe)
- Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten und das Bestimmtheitsmaß für die Daten in a) und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse bezogen auf unser Beispiel
- Prognostizieren Sie auf der Basis der Regressionsfunktion die monatliche Absatzmenge für einen den 4 Testgeschäften vergleichbaren Einzelhandelsbetrieb, wenn dort ein Preis von € 2,00 pro Stück verlangt wird
- Was halten Sie von der Güte der obigen Prognose (unter c))?
- Berechnen Sie mit Hilfe der Berechnungstabelle aus a) die Varianz  $s_Y^2$  der Absatzmengen  $Y_i$  und die Varianz  $s_{\hat{Y}}^2$  der entsprechenden Regressionswerte  $\hat{Y}_i$ . Zeigen Sie, dass hier die folgende Beziehung gilt:

$$\text{Bestimmtheitsmaß} = R^2 = \frac{s_{\hat{Y}}^2}{s_Y^2}$$

- Berechnen Sie außerdem mit Hilfe der Berechnungstabelle aus a) die Varianz  $s_x^2$  der Preise  $x_i$ . Zeigen Sie, dass die Varianz der Regressionswerte bestimmt wird durch die Varianz des unabhängigen Merkmals, d.h., dass hier folgende Beziehung gilt:  

$$s_{\hat{Y}}^2 = b^2 \cdot s_x^2 \quad (b \rightarrow \text{Regressionskoeffizient})$$

Aufgabe 7

Für 4 Monate liegen die Daten über den Hypothekenzinssatz  $x$  sowie über den saisonbereinigten monatlichen Auftragseingang  $Y$  im Bauhauptgewerbe vor, der auf den privaten Wohnungsbau entfällt.

Testgeschäft Nr.	1	2	3	4
<b>x: Hypothekenzinssatz in %</b>	6	7	5,5	7,5
<b>Y: Auftragseingang (in Mrd. €)</b>	30	40	50	20

- Berechnen Sie nach der Methode der kleinsten Quadrate die lineare Regressionsfunktion, die die „mittlere“ Abhängigkeit des Auftragseingangs im Bauhauptgewerbe vom Hypothekenzinssatz möglichst gut beschreibt
- Interpretieren Sie für diesen Fall die beiden Regressionskoeffizienten
- Zeichnen Sie in das Koordinatensystem die Wertepaare des Streudiagramms und die in a) berechnete Regressionsfunktion. Markieren Sie die Regressionswerte  $\hat{Y}_i$
- Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten und das Bestimmtheitsmaß zur obigen Regressionsrechnung
- Interpretieren Sie das Bestimmtheitsmaß für diesen Fall
- Prognostizieren Sie auf der Basis der Regressionsanalyse den (saisonbereinigten) monatlichen Auftragseingang im Bauhauptgewerbe, der zu erwarten ist bei einem Hypothekenzinssatz von 6,6% und von 7,2%
- Welche Kennzahl kann man zur Beurteilung der Güte der obigen Prognose nutzen? Was halten Sie von der in f) erstellten Prognose?