# WIRTSCHAFTSSTATISTIK
# MODUL 7: WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

WS 2023/24

DR. E. MERINS

# MONTY-HALL-DILEMMA

**Monty-Hall-Problem oder Ziegenproblem**
USA-Spielshow „Let's Make a Deal" → Deutsche Variante „Geh aufs Ganze!"

Angenommen Sie hätten die Wahl zwischen drei Toren. Hinter einem der Tore ist ein Auto, hinter den anderen sind Ziegen. Sie wählen ein Tor, z.B. Tor Nr. 1, und der Moderator, der weiß, was hinter jedem Tor ist, öffnet ein anderes Tor, z.B. Nr. 3, hinter dem eine Ziege steht. Er fragt Sie nun: „Möchten Sie auf das Tor Nr. 2 wechseln?"

**Ist es von Vorteil, die Wahl des Tores zu ändern?**

Antwort (ohne Berücksichtigung einer bestimmten Motivation des Moderators):

**Ja, Sie sollten wechseln!**

Das zuerst gewählte Tor hat die Gewinnchance von 1/3, aber das zweite Tor hat eine Gewinnchance von 2/3.

Hier ist ein Weg, sich das Geschehen vorzustellen: angenommen, es gäbe 1 Million Tore und Sie wählen Tor Nr. 1. Dann öffnet der Moderator, der das eine Tor mit dem Preis immer vermeidet, alle Tore bis auf das Tor Nummer 777.777. Sie würden doch sofort zu diesem Tor wechseln, oder?

**Formelle Lösung finden Sie auf den drei letzten Folien!**

# BESCHREIBENDE STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Die beschreibende Statistik kommt ohne den Begriff **Wahrscheinlichkeit** aus.

| **Beschreibende Statistik** | | **Wahrscheinlichkeitstheorie** |
|---|---|---|
| Relative Häufigkeit | → | Wahrscheinlichkeit |
| Häufigkeitsverteilung | → | Wahrscheinlichkeitsverteilung |
| Stichprobe | → | Zufallsvariablen |
| Mittelwert | → | Erwartungswert |
| Standardabweichung | → | Streuung |
| Varianz | = | Varianz |
| Median | = | Median |
| Quantile | = | Quantile |

# WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

Die Verbindung zur **Wahrscheinlichkeitstheorie** wird auch über den **Zufallsaspekt einer Stichprobe** hergestellt. Historisch ist die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** eng mit dem **Glücksspiel** verbunden.

Ein (**Zufalls**-) Experiment ist ein beliebig oft (unter identischen Bedingungen) wiederholbarer Vorgang, dessen Ergebnis „vom Zufall abhängt“, d.h. nicht exakt vorhergesagt werden kann.
Die verschiedenen möglichen Ergebnisse oder Realisationen des Experiments heißen **Elementarereignisse ω (‚Klein-Omega‘)**. Sie bilden zusammen den **Ereignisraum Ω (‚Groß-Omega‘)**.

Experiment → die Erhebung eines Merkmals an einem Merkmalsträger
Elementarereignisse → die Merkmalsausprägungen
Stichprobe vom Umfang n → die n-malige Wiederholung des Experiments

Annahme: die Ausgangssituation bei der n-fachen Wiederholung des Experiments ist immer dieselbe. In der Praxis ist dies jedoch unrealistisch. So sind z.B. bei einem Test zur Wirkung eines Medikaments an 20 Versuchspersonen die Bedingungen (Alter, frühere Krankheiten etc.) bei jeder der 20 Versuchswiederholungen (hier also Versuchspersonen) andere.

# ZUFALLSEXPERIMENTE

**Beispiele für Zufallsexperimente:**

1. Bernoulli-Experiment: Werfen einer Münze: Ω = {Kopf, Wappen} oder Ω = {0, 1}
2. Würfeln: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
3. Lotto 6 aus 49: Ω = { ω | ω = {$j_1$, ..., $j_6$} , $j_1$, ..., $j_6$ ∊ {1, 2, 3, ..., 48, 49} }

   Da Mengen nur verschiedene Elemente enthalten, gilt |{$j_1$, ..., $j_6$}| = 6.
4. Anzahl der Anrufe in einer Telefonvermittlung pro Tag: Ω = $N_0 \coloneqq N \ \cup \ \{0\}$.
5. Ω = { ω | ω = Matrikelnummer eines Studenten im WS 2019/20 }.
6. Verlauf der Körpertemperatur eines Lebewesens: { ω = (id, f) | id ∊ $N$, f ∊ ℃$(R_+)$ }.

   Ergebnis des Experiments ist die Identifikationsnummer id des Lebewesens und eine (beschränkte) stetige Funktion auf der nichtnegativen reellen Achse. f(0) ist die Körpertemperatur bei der Geburt. Nach dem Tod (T > 0) des Lebewesens könnte man die Umgebungstemperatur zur Fortsetzung der Funktion f heranziehen.

# ZUFALLSEXPERIMENTE

*Fortsetzung…*

Das letzte Beispiel zeigt, dass auch **Funktionen** als Ergebnisse eines Zufallsexperiments auftreten können.

Man interessiert sich also dafür, ob bei Durchführung des **Zufallsexperiments** bestimmte **Ereignisse** eintreten.

**<u>Zum Beispiel, ob:</u>**

1. beim Wurf einer Münze A = {Kopf} gefallen ist
2. beim Würfeln eine 5 oder 6, d. h. B = {5, 6} herauskam
3. im Lotto 6 aus 49 "sechs Richtige" angekreuzt wurden
4. mehr als 1000 Anrufe pro Tag in der Telefonvermittlung, $D = \{ n \mid n > 1000\}$, auftraten
5. $K = \{\omega \mid$ Matrikelnummer $\omega$ beginnt mit einer 7 $\}$
6. die Körpertemperatur eines Lebewesens nie den Wert 40 °C überschritt.

In jedem Beispiel handelt es sich bei **Ereignissen** um **Teilmengen** von **Ω**.

# EREIGNISRAUM

**Ereignisraum Ω →** auch **Ergebnismenge** oder **Merkmalraum** genannt

**Ω ǂ 0 →** eine nichtleere Menge **Ω** ist die Menge aller möglichen Ergebnisse eines mathematischen Zufallsexperiments, die sog. **Ergebnismenge** oder **Merkmalraum** oder **Ereignisraum**. Man spricht auch vom Stichprobenraum (sample space).

Die **Anzahl der Ergebnisse** der Menge **Ω** nennt man **Mächtigkeit |Ω|= n.**

**Ω** kann **endlich, abzählbar** oder sogar **überabzählbar unendlich** sein.

**Ω** heißt **diskret**, falls **es höchstens abzählbar unendlich viele Elemente** hat.

# EREIGNIS

Ein **Ereignis** (event) ist eine **Teilmenge A** des **Ereignisraums Ω.**

$$A \subset \Omega$$

A tritt ein, falls sich bei Versuchsdurchführung ein $\omega \in A$ ergibt.

Die einelementigen Teilmengen des Ereignisraums (oder die Elemente von **Ω**) heißen **Elementarereignisse** (singleton) **{ω}**.

Ein **Gegenereignis** ist die Menge aller Ergebnisse, die <u>nicht</u> zum Ereignis gehören.

**Ω** heißt **sicheres Ereignis** → tritt also immer ein

**Ø** heißt **unmögliches Ereignis** → kann nie eintreten

$A^c$ heißt **Komplementärereignis** → Gegenereignis, ohne A

**Teilmengen A und B** heißen **unvereinbar** oder **disjunkt**, falls $A \setminus B = \emptyset$

# WAHRSCHEINLICHKEIT

Um exakte Voraussagen über die Begrenzung unserer Möglichkeiten zu treffen, brauchen wir einen **Maß für die Sicherheit** (oder **Unsicherheit**). Ein solches Maß ist die **Wahrscheinlichkeit p** (engl.: probability).

Die **Wahrscheinlichkeitsrechnung** ordnet jedem **Ereignis** A eines **Zufallsexperiments** eine **Wahrscheinlichkeit p(A)** (oder $\mathbf{p_A}$ oder **Prob(A)**) für sein Eintreten zu.

**Beispiel:**

Beim Münzwerfen gibt es nur zwei Elementarereignisse, die gleichmöglich sind.
p(‚Kopf‘) = ½
p(‚Zahl‘) = ½
p(‚Kopf <u>oder</u> Zahl‘) = 2/2 = 1 → entweder ‚Kopf‘ oder ‚Zahl‘ tritt beim Wurf ein
p(‚Kopf <u>und</u> Zahl‘) = 0/2 = 0 → ‚Kopf‘ und ‚Zahl‘ können nicht gleichzeitig eintreten

# WAHRSCHEINLICHKEIT UND RELATIVE HÄUFIGKEIT

**Was bedeutet Wahrscheinlichkeit?**

Im normalen Sprachgebrauch wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auch häufig als Prozentzahl angegeben, indem sie mit 100 multipliziert und dafür mit dem Zusatz 'Prozent' versehen wird. Spätestens an dieser Stelle fällt die Parallelität zu den relativen Häufigkeiten eines Merkmals auf. In der späteren Anwendung werden unter anderem die Wahrscheinlichkeiten eines Ereignisses oder einer Merkmalsausprägung durch die entsprechenden relativen Häufigkeiten geschätzt, die über die n-fache Wiederholung des Experiments gewonnen werden. Allgemein lassen sich natürlich auf diese Weise die Wahrscheinlichkeiten beliebiger Ereignisse näherungsweise bestimmen, wenn sie sich zum Beispiel nicht elementar logisch oder physikalisch herleiten lassen.

# WAHRSCHEINLICHKEIT UND RELATIVE HÄUFIGKEIT

**Was bedeutet Wahrscheinlichkeit?**

**Würfel:**

Das **Maß für die Sicherheit**, die höchste Augenzahl 6 zu würfeln, könnte so formuliert werden: "Ungefähr bei jedem sechsten Würfel-Versuch wird die Augenzahl 6 auftreten". Das bedeutet: "Unter 6 Würfel-Versuchen wird ungefähr 1 mal die Augenzahl 6 auftreten".

Ganz sicher können wir natürlich nicht sein, dass bei nur 6 Versuchen die gewünschte Augenzahl genau 1 mal eintritt, also würfeln wir öfter: "Unter 6000 Würfel-Versuchen wird ungefähr 1000 mal die Augenzahl 6 auftreten". Das klingt schon plausibler.

Gehen wir noch einen Schritt weiter: "Unter einer sehr großen Zahl $n$ von Würfel-Versuchen wird ungefähr $n/6$ mal die Augenzahl 6 auftreten".

# WAHRSCHEINLICHKEIT UND RELATIVE HÄUFIGKEIT

**Was bedeutet Wahrscheinlichkeit?**

<u>Genauer</u>: Wenn wir ein Zufallsexperiment in identischer Weise **n** mal durchführen und dabei genau **m** mal das Ereignis **A** eintritt, so nennen wir den Quotienten **m/n** die **relative Häufigkeit h(A)**, mit der das Ereignis A eingetreten ist. Die relative Häufigkeit wird nicht bei jeder Reihe von **n** Versuchsdurchführungen gleich sein. Wenn aber **n** sehr groß ist, so ergibt sich jedes Mal ungefähr die gleiche relative Häufigkeit und wenn wir gedanklich **n** gegen unendlich wachsen lassen, so sollte die relative Häufigkeit einen fixen, nur vom Zufallsexperiment und dem betrachteten Ereignis A abhängigen Wert annehmen. Diesen Wert nennen wir die **Wahrscheinlichkeit des Ereignisses**.

$$P(A) := \lim_{n \to \infty} h_n(A)$$

**→ empirisches Gesetz der großen Zahlen**

# WAHRSCHEINLICHKEIT UND RELATIVE HÄUFIGKEIT

**Was bedeutet Wahrscheinlichkeit?**

**Zufallsexperiment:**

Würfeln mit einem Zufallsgenerator: für drei Werte von **n** wird die Anzahl des Auftretens von Augenzahl 6 in diesen **n** Versuchsdurchführungen und die dazugehörige relative Häufigkeit ermittelt. Dabei wurde jeder dieser **n** Versuche 5 mal durchgeführt.

| n | Augenzahl 6 tritt so oft auf | relative Häufigkeit |
|---|---|---|
| 6 | 1 1 0 2 0 | 0,1667 0,1667 0 0,3333 0 |
| 60 | 7 9 8 10 9 | 0,1167 0,15 0,1333 0,1667 0,15 |
| 6000 | 1046 1026 993 963 986 | 0,174 0,171 0,166 0,161 0,164 |

Die relativen Häufigkeiten werden mit wachsendem **n** einander immer ähnlicher.

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses ist die für eine gegen unendlich strebende Anzahl **n** von Durchführungen des betreffenden Zufallsexperiments vorausgesagte **relative Häufigkeit** seines Eintretens.

→ **mathematische Idealisierung**, da **n** in der Wirklichkeit <u>nicht</u> "gegen unendlich strebt"

# WAHRSCHEINLICHKEITSEIGENSCHAFTEN

**Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit:**

1. Die relative Häufigkeit jedes Ereignisses A liegt im Bereich $\mathbf{0 \leq h(A) \leq 1}$, und daher gilt dies auch für <u>jede</u> Wahrscheinlichkeit.
   (Beweis: tritt das Ereignis bei **n**-maliger Durchführung des Zufallsexperiments **m** mal ein, so gilt $\mathbf{0 \leq m \leq n}$, woraus die Behauptung folgt).
2. Tritt ein Ereignis A mit Sicherheit ein, so tritt es bei **n**-maliger Durchführung des Zufallsexperiments <u>immer</u>, also **n** mal, ein. Seine relative Häufigkeit ist dann
   $\mathbf{h(A) = n/n = 1} \rightarrow \quad \mathbf{p(A) = 1}$
3. Tritt ein Ereignis A mit Sicherheit <u>nicht</u> ein, so tritt es bei **n**-maliger Durchführung des Zufallsexperiments <u>nie</u>, also **0** mal, ein. Seine relative Häufigkeit ist dann
   $\mathbf{h(A) = 0/n = 0} \rightarrow \quad \mathbf{p(A) = 0}$

# AXIOME VON KOLMOGOROW

Die axiomatische Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie wurde in den 1930er Jahren von **Andrei Kolmogorow** entwickelt.

Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** (kurz **W-Maß**) muss demnach folgende **drei Axiome** erfüllen:

1. Die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten eines Ereignisses A ist immer eine **reelle Zahl** zwischen 0 und 1: $\mathbf{0 \leq p(A) \leq 1}$

2. Das sichere Ereignis **Ω** hat die Wahrscheinlichkeit **1:**
   **p(A) = 1** → A tritt mit Sicherheit ein
   **p(A) = 0** → A tritt mit Sicherheit <u>nicht</u> ein
   **0 < p(A) < 1** → die Werte dazwischen drücken **Grade an Sicherheit** aus. Je größer die Wahrscheinlichkeit p(A), umso „eher“ ist anzunehmen, dass das Ereignis A eintritt.

3. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung abzählbar vieler disjunkter Ereignisse ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse
   → **σ-Additivität (‚Sigma‘-Additivität)**:

$$\boldsymbol{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$$

# MENGENTHEORETISCHE KONZEPTE

**Ereignisse sind Teilmengen des Ereignisraums**.

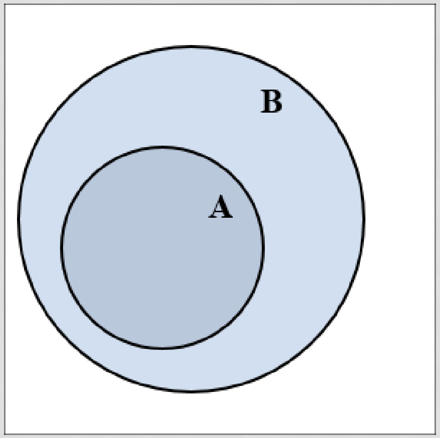
→ Ereignisse können ihre Beziehungen in Begriffen der **Mengenlehre** ausdrücken

→ Ereignisse können wie **Mengen** miteinander verknüpft werden

**Mengenoperationen:**

| | |
|---|---|
| $\cap$ | **Schnittmenge** |
| $\cup$ | **Vereinigung** |
| $\setminus$ | **Mengendifferenz** |
| **c** | **Komplementbildung** |

# MENGENTHEORETISCHE KONZEPTE




**A** ist eine (echte) **Teilmenge** von **B**

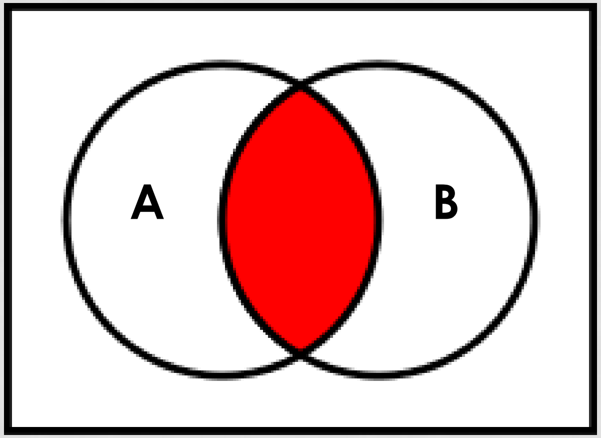
Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist.

Formal: $\mathbf{A \subseteq B \quad :\Leftrightarrow \forall x \, ( x \in A \rightarrow x \in B )}$

Zwei Mengen heißen **gleich**, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Formal: $\mathbf{A = B :\Leftrightarrow \forall x \, ( x \in A \leftrightarrow x \in B )}$

# MENGENTHEORETISCHE KONZEPTE

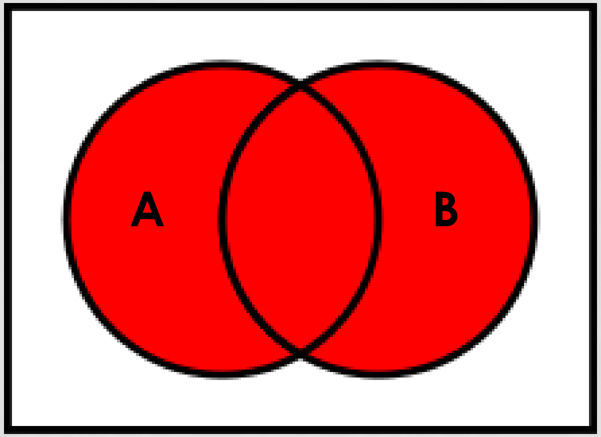



**Schnittmenge** von **A** und **B**

Die **Schnittmenge** von **A und B** ist die Menge der Objekte (eine nichtleere Menge), die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

Formal: $\mathbf{A \cap B := \{ x \mid ( x \in A \ \wedge \ x \in B ) \}}$

# MENGENTHEORETISCHE KONZEPTE

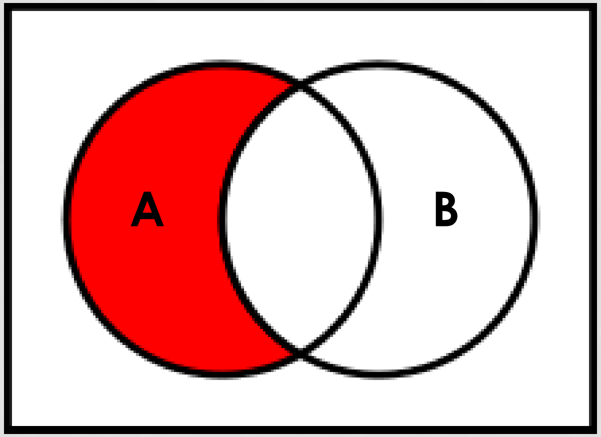



**Vereinigungsmenge** von **A** und **B**

Die **Vereinigungsmenge** von A und B ist die Menge (nicht notwendigerweise nichtleere) der Objekte, die in mindestens einem Element von A und B enthalten sind.

Formal: $\mathbf{A \cup B := \{ x \mid ( x \in A ) \vee ( x \in B ) \}}$

# MENGENTHEORETISCHE KONZEPTE




**A ohne B**

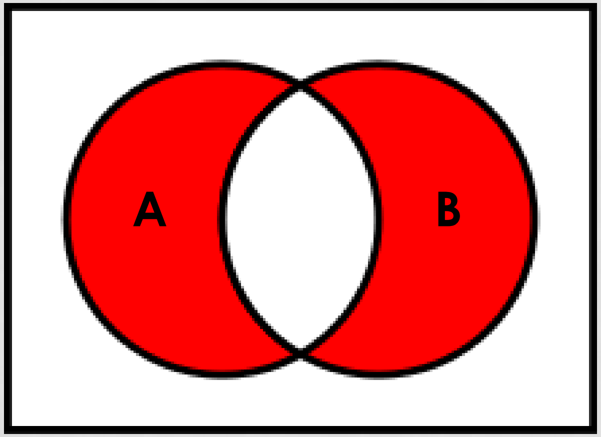
Die **Differenzmenge** (wird nur für 2 Mengen definiert) von A und B ist die Menge der Elemente, die in A aber nicht in B enthalten sind.

Formal: $\mathbf{A \setminus B := \{ x \mid ( x \in A ) \wedge ( x \notin B ) \}}$

**Komplement** von B in Bezug auf A (A ohne B): ist B eine Teilmenge von A, spricht man einfach vom Komplement der Menge B.

Formal: $\mathbf{B^C := \{ x \mid x \notin B \}}$

# MENGENTHEORETISCHE KONZEPTE

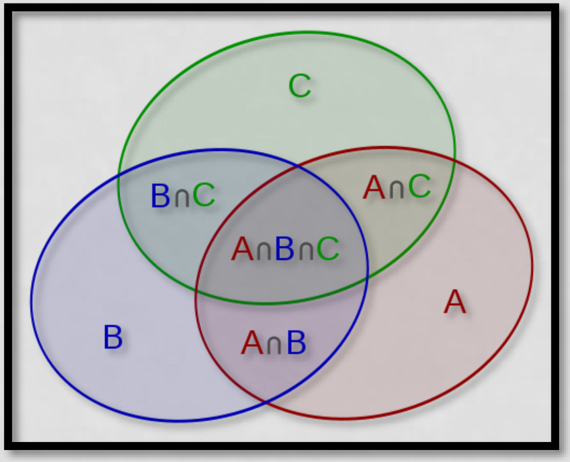



**Symmetrische Differenz** von **A** und **B**

Formal: $A \triangle B := \{ x \mid (x \in A \land x \notin B) \lor (x \in B \land x \notin A) \}$

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$

# MENGENTHEORETISCHE KONZEPTE




**Einschluss-Ausschluss-Verfahren (auch Prinzip von Inklusion und Exklusion oder Prinzip der Einschließung und Ausschließung)**

Für <u>zwei</u> endliche disjunkte Mengen A und B gilt (**Summenregel**):

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$$

Noch allgemeiner gilt die **Summenregel** für <u>drei</u> Mengen:

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{C}| - |\mathbf{B} \cap \mathbf{C}| + |\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}|$$

# GESETZMÄßIGKEITEN

**Für alle A , B , C ⊆ X gilt:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Antisymmetrie: | **$A \subseteq B$ und $B \subseteq A$** | → | **$A = B$** |
| Transitivität: | **$A \subseteq B$ und $B \subseteq C$** | → | **$A \subseteq C$** |

**Die Mengen-Operationen Schnitt ∩ und Vereinigung ∪ sind kommutativ, assoziativ und zueinander distributiv:**

| | |
|---|---|
| Assoziativgesetz: | $( A \cup B ) \cup C = A \cup ( B \cup C )$ |
| | $( A \cap B ) \cap C = A \cap ( B \cap C )$ |
| Kommutativgesetz: | $A \cup B = B \cup A$ |
| | $A \cap B = B \cap A$ |
| Distributivgesetz: | $A \cup ( B \cap C ) = ( A \cup B ) \cap ( A \cup C )$ |
| | $A \cap ( B \cup C ) = ( A \cap B ) \cup ( A \cap C )$ |
| De Morgansche Gesetze: | $( A \cup B )^C = A^C \cap B^C$ |
| (Regeln von de Morgan) | $( A \cap B )^C = A^C \cup B^C$ |
| Absorptionsgesetz: | $A \cup ( A \cap B ) = A$ |
| | $A \cap ( A \cup B ) = A$ |

# GESETZMÄßIGKEITEN

*Fortsetzung…*

**Für die Differenzmenge gilt:**

Assoziativgesetze:

$$( A \setminus B ) \setminus C = A \setminus ( B \cup C )$$

$$A \setminus ( B \setminus C ) = ( A \setminus B ) \cup ( A \cap C )$$

Distributivgesetze:

$$( A \cap B ) \setminus C = ( A \setminus C ) \cap ( B \setminus C )$$

$$( A \cup B ) \setminus C = ( A \setminus C ) \cup ( B \setminus C )$$

$$A \setminus ( B \cap C ) = ( A \setminus B ) \cup ( A \setminus C )$$

$$A \setminus ( B \cup C ) = ( A \setminus B ) \cap ( A \setminus C )$$

$$A \setminus B = A \cap B^C$$

# GESETZMÄßIGKEITEN

*Fortsetzung…*

**Für die symmetrische Differenz gilt:**

| | |
|---|---|
| Assoziativgesetz: | $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$ |
| Kommutativgesetz: | $A \triangle B = B \triangle A$ |
| Distributivgesetz: | $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$ |

$A \triangle \emptyset = A$

$A \triangle A = \emptyset$

$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$A \triangle B = A^C \triangle B^C$

$(A \triangle B)^C = (A \cap B) \cup (A^C \cap B^C)$

# GESETZMÄßIGKEITEN

*Fortsetzung…*

**Für die Komplementmenge gilt:**

$A \cap A^C = \emptyset \qquad A \cup A^C = \Omega$

$\emptyset^C = \Omega \qquad \Omega^C = \emptyset$

**Doppeltes Komplement:**

$(A^C)^C = A$

**Idempotenzgesetze:**

$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$

**Neutrale Elemente:**

$A \cap \Omega = A \qquad A \cup \emptyset = A$

**Dominanzgesetze:**

$A \cap \emptyset = \emptyset \qquad A \cup \Omega = \Omega$

# REGELN DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

**$P(\Omega) = 1$**

**$P(\leftarrow A) = P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$**

Ersetzt man bei endlichen Mengen die **Wahrscheinlichkeit P(A)** durch die Anzahl der Elemente von A, so sind alle Axiome die Aussagen der elementaren Mengenlehre:

1) $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$
   $P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$
   $P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A)$
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2) sind A und B voneinander unabhängige Ereignisse:

   $P(A \cup B) = P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$

   $P(A \cap B) = P(A \text{ und } B) = P(A) * P(B)$

# REGELN DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

**Einschluss–Ausschluss–Formel (Inklusion–Exklusion–Formel):** (s. auch Folie 22)

$\mathbf{P ( A ) = 1 - P ( \leftarrow A ) = 1 - P ( B_1 \cup B_2 \cup B_3 ) =}$

$\mathbf{1 -}$

$\mathbf{[ P ( B_1 ) + P ( B_2 ) + P ( B_3 ) - P ( B_1 \cap B_2 ) - P ( B_1 \cap B_3 ) - P ( B_2 \cap B_3 ) +}$

$\mathbf{P ( B_1 \cap B_2 \cap B_3 ) ]}$

**Beispiel:**

100 Studenten haben u.a. Kurse A, B und C belegt. 65 Studenten haben Kurs A belegt, 32 Kurs B, 18 Kurs C, 15 A und B, 9 B und C, 7 A und C, 3 haben alle drei Kurse belegt. Wie viele Studenten haben keinen der Kurse A, B oder C belegt.

**(Anzahl Studenten ohne Kurse A, B, C) =**

$\mathbf{100 - ( 65 + 32 + 18 - 15 - 9 - 7 + 3 ) = 100 - 87 = 13}$

# BERECHNUNG VON WAHRSCHEINLICHKEITEN

Will man diese Formeln auf die **Berechnung von Wahrscheinlichkeiten** anwenden, so muss man annehmen, dass jedes Ziehungsergebnis gleich wahrscheinlich ist.

Bezeichnen wir mit **Ω** die von **k** und **n** abhängige Menge aller möglichen Ziehungsergebnisse und betrachten eine Teilmenge **E ⊂ Ω**, so ist **p** die **Wahrscheinlichkeit**, dass ein Ziehungsergebnis zur **„Ergebnismenge“ E** gehört. Diese Wahrscheinlichkeit ist unter obiger Gleichwahrscheinlichkeits-Annahme **das Verhältnis der günstigen Möglichkeiten zu allen Möglichkeiten**:

$$p = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

**Vgl. Folie 13**

# LAPLACE - EXPERIMENT

Ein **Laplace-Experiment** ist ein **Zufallsexperiment,** bei dem **jedes Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit p** besitzt, d.h. alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

**Beispiel:**

Ein nicht gezinkter (idealer) Würfel, also ein Würfel bei dem jede Augenzahl gleich wahrscheinlich ist, bezeichnet man als **Laplace-Würfel**. Bei diesem Würfel ist die Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses gleich.

Die entsprechende **Wahrscheinlichkeit** ist dann **(n/6)/n = 1/6.**

Das bedeutet, wenn der Laplace-Würfel 600 mal geworfen wird, dann <u>erwartet</u> man, dass jede Zahl 100-mal erscheint.

# LAPLACE - EXPERIMENT

Zur Erinnerung: Ereignisse sind komplex, sie sind Zusammenfassungen von Versuchsausgängen.

**Beispiel:**
Für den (idealen) Würfel ist auch "Die Augenzahl ist gerade" ein Ereignis.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für sein Eintreten?

Unter den 6 möglichen Augenzahlen (→ **mögliche Fälle**) sind 3 Zahlen gerade (2, 4 und 6 → **günstige Fälle**). Jeder einzelne günstige Fall (und auch jeder einzelne ungünstige Fall) tritt bei n-maligem Würfeln für sehr großes n gleich oft ein, nämlich n/6 mal, d.h. sein relativer Anteil ist 1/6.
Der relative Anteil der günstigen Fälle zusammen ist dreimal so groß wie der relative Anteil jeder einzelnen geraden Augenzahl, also 3/6 = 1/2. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Augenzahl zu würfeln, gleich 1/2.

→ Die Anzahl **aller möglichen Versuchsausgänge** eines Laplace-Experiments (d.h. die **Zahl der Elemente seines Ereignisraums**) wird die **Zahl der möglichen Fälle** genannt. Alle diese Fälle sind gleich wahrscheinlich.

→ Sei A ein Ereignis. Dann ist die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten des Ereignisses A gegeben durch den Quotienten:

**p(A) = Zahl der günstigen Fälle / Zahl der möglichen Fälle**

# LAPLACE- EXPERIMENT

**Beispiel 1:**

Es werden zwei unterscheidbare (ideale) Würfeln geworfen. Wir stellen uns der Einfachheit halber vor, es handelt sich um einen roten und einen blauen Würfel. Dabei sollen die beiden Würfeln unabhängig voneinander fallen. Die möglichen Versuchsausgänge sind alle 36 möglichen geordneten Paare von Augenzahlen: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3),... (6, 4), (6, 5) und (6, 6).
Wie ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Die Summe der Augenzahlen ist gerade“?

**Zahl der möglichen Fälle** (Zahl aller möglichen Versuchsausgänge) = **36**

**Zahl der günstigen Fälle** (Zahl der möglichen Versuchsausgänge, bei denen die Summe der Augenzahlen gerade ist):
die Summe der Augenzahlen ist gerade, wenn beide Augenzahlen gerade oder wenn beide Augenzahlen ungerade sind. Da jeder Würfel 3 gerade und 3 ungerade Augenzahlen besitzt, gibt es 9 Versuchsausgänge der Form (gerade, gerade) und 9 Versuchsausgänge der Form (ungerade, ungerade). Insgesamt gibt es also **18** günstige Fälle.

Die Berechnung:

**p(Summe der Augenzahlen ist gerade) = 18/36 = 1/2**

**→ diese Formel gilt nur für Laplace-Experimente!**

# LAPLACE- EXPERIMENT

→ **Nicht jedes Zufallsexperiment ist ein Laplace-Experiment!**

**Beispiel 2:**

In einer Urne befinden sich 10 rote, 15 blaue und 5 grüne Kugeln. Es wird eine Kugel zufällig ("blind") herausgegriffen. Kugeln gleicher Farbe werden nicht unterschieden.
**Kein Laplace-Experiment!** → die Versuchsausgänge rot, blau und grün (für die herausgegriffene Kugel) haben nicht die gleiche Chance einzutreten. Es lässt sich aber leicht mit einem kleinen Trick auf ein Laplace-Experiment zurückführen: wir nummerieren die Kugeln durch, so dass jede ihre eigene Identität besitzt. Nun wird jede Nummer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen – wir haben aus dem Urnenbeispiel vorübergehend ein Laplace-Experiment gemacht:
**Zahl der möglichen Fälle = 30 (die Anzahl der Kugeln in der Urne)**
**Versuchsausgänge rot: Zahl der günstigen Fälle = 10**
**Versuchsausgänge blau: Zahl der günstigen Fälle = 15**
**Versuchsausgänge grün: Zahl der günstigen Fälle = 5**
**Die Wahrscheinlichkeiten für die drei Versuchsausgänge:**
**p(rote Kugel wird gezogen) = 10/30 = 1/3**
**p(blaue Kugel wird gezogen) = 15/30 = 1/2**
**p(grüne Kugel wird gezogen) = 5/30 = 1/6**

Die heimliche Nummerierung der Kugeln wird nun nicht mehr benötigt. Durch diese drei Zahlen (die genau den relativen Häufigkeiten der drei Kugelsorten in der Urne entsprechen) lassen sich die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse des Zufallsexperiments ausdrücken (z.B. für das Ereignis, eine nicht-rote Kugel zu ziehen).

# GEGENWAHRSCHEINLICHKEIT

Ist **A ein Ereignis** (eine **Teilmenge des Ereignisraums Ω**), so können wir seine **Komplementärmenge Ω\A** bilden, d.h. die Menge aller Versuchsausgänge, die <u>nicht in A</u> enthalten sind. Da sie wieder eine Teilmenge von Ω ist, ist sie ebenfalls ein Ereignis. Wir können es als **„A tritt nicht ein“** oder kurz **„nicht-A“** bezeichnen. Eine andere Schreibweise dafür ist **←A** oder **Ā**. Es heißt auch das **Gegenereignis** von A (oder die Negation von A).

<u>Bemerkung</u>: das Gegenereignis des Gegenereignisses ist wieder das ursprüngliche Ereignis: **← ← A = A**

Die Wahrscheinlichkeit eines **Gegenereignisses** (die so genannte **Gegenwahrscheinlichkeit**) ist durch Komplementärmenge gegeben:
**p(←A) = 1 – p(A)**

→ Die Summe aus der **Wahrscheinlichkeit** und der **Gegenwahrscheinlichkeit** eines Ereignisses ist gleich **1**
**p(A) + p(←A) = 1**

# GEGENWAHRSCHEINLICHKEIT

**Beispiel 2 (s. Folie 33):**

Urne mit Kugeln:
**A** = „Es wird eine **nicht-rote** Kugel gezogen"
**B** = „Es wird eine rote Kugel gezogen".

**Zahl der möglichen Fälle = 30 (die Anzahl der Kugeln in der Urne)**
**Versuchsausgänge rot: Zahl der günstigen Fälle = 10**
**p(B) = p(rote Kugel wird gezogen) = 10/30 = 1/3**

Eine andere Methode **p(A)** zu berechnen: **A ist das Gegenereignis zu B**, dessen Wahrscheinlichkeit 1/3 ist. Dann ist

$$p(A) = 1 - p(B) = 1 - 1/3 = 2/3$$

die Wahrscheinlichkeit, dass eine nicht-rote Kugel (sondern blaue oder grüne Kugel) gezogen wird.

# ELEMENTARE KOMBINATORIK

Erste systematische Untersuchungen zu Fragen der Wahrscheinlichkeitstheorie wurden im 17. Jahrhundert vor allem im Zusammenhang mit Glücksspielen durchgeführt (Bernoulli, Fermat, Laplace, Pascal, ... ). Unter anderem spielten damals Abzählaufgaben eine wichtige Rolle.

**Abzählende Kombinatorik** ist ein Teilbereich der **Kombinatorik** und beschäftigt sich mit der Bestimmung der **Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen**

- unterscheidbarer oder nicht unterscheidbarer Objekte (d. h. „ohne“ bzw. „mit“ Wiederholung derselben Objekte)
- mit oder ohne Beachtung ihrer Reihenfolge (d. h. „geordnet“ bzw. „ungeordnet“)

| | **Ohne Wiederholung bzw. Zurücklegen** | **Mit Wiederholung bzw. Zurücklegen** |
|---|---|---|
| **Mit Berücksichtigung der Reihenfolge und $k \leq n$** | **Variation** ohne Wiederholung (engl. k-permutation) | **Variation** mit Wiederholung |
| **Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und $k < n$** | **Kombination** ohne Wiederholung (engl. k-combination) | **Kombination** mit Wiederholung |

# BAUSTEINE DER KOMBINATORIK

**Multiplikationsregel der Kombinatorik:**

Es sei eine **mehrfache Auswahl** zu treffen, wobei es **$m_1$ Möglichkeiten für die erste Wahl, $m_2$ Möglichkeiten für die zweite Wahl, $m_3$ für die dritte Wahl usw**. gibt. Können alle Möglichkeiten nach Belieben kombiniert werden, so lautet die **Gesamtzahl aller möglichen Fälle:**

$$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots$$

**Wichtigste Bausteine von Kombinatorik-Formeln:**

1. **Fakultät**
   Für $n \in N_0$ gibt **n!** (n-Fakultät) die Anzahl der möglichen Permutationen (=Vertauschungen) von **n** verschiedenen Objekten an
   $$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$$
   $$0! = 1$$
   $$1! = 1$$
2. **Binomialkoeffizient**
   $\binom{n}{k}$ → Tupel → Spachweise: **„n über k“**, oder „k aus n“
   Man kann auf $\binom{n}{k}$ Weisen **k** Elemente aus einer Menge mit **n** Elementen auswählen. Dies entspricht genau der Anzahl der Ziehungsergebnisse <u>ohne Zurücklegen und ohne Anordnung</u> ($K_{oW}$).

# GRUNDMUSTER DER KOMBINATORIK

Sei **A** einer **n**-elementige Menge **A = {1,…,n}**, aus der man nacheinander **k** Elemente auswählt (**k** Ziehungen). Dabei unterscheidet man mit und ohne Zurücklegen und mit und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge (Anordnung).

Es ergeben sich **vier Grundmuster der Kombinatorik**:

1. mit Reihenfolge, mit Zurücklegen

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{V_{mW}} = \boldsymbol{n^k}$$

2. mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen

$$\boldsymbol{k < n}\text{:}\quad |\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{V_{oW}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}! = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

$$\boldsymbol{k = n}\text{:}\quad |\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{V_{oW}} = \boldsymbol{n}!$$

3. ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen (Binomialkoeffizient)

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{K_{oW}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$$

4. ohne Reihenfolge, mit Zurücklegen

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{K_{mW}} = \binom{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k}} = \frac{(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})!}$$

# 1. MIT REIHENFOLGE, MIT ZURÜCKLEGEN

**Beispiel 1.1:**

Wie viele "Wörter" (auch unsinnige) können aus 5 Buchstaben zustande kommen aus einem Alphabet vom Umfang 26?

**n = 26, k = 5** (k < n → Variationen mit Wiederholung)

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{V_{mW}} = \boldsymbol{n^k} = \mathbf{26^5} = \mathbf{11.881.376}$$

**Beispiel 1.2:**

Fünfmaliges Werfen eines Würfels (= oder Werfen von fünf Würfeln).

**n = 6, k = 5** (k < n → Variationen mit Wiederholung)

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{V_{mW}} = \boldsymbol{n^k} = \mathbf{6^5} = \mathbf{7.776}$$

# 2. MIT REIHENFOLGE, OHNE ZURÜCKLEGEN

**Beispiel 2.1:**

Auf wie viele Arten können sich 5 Personen auf 5 freie (unterscheidbare) Plätze verteilen?

**n = 5, k = 5** (n = k → Variation ohne Wiederholung)

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{V_{oW}} = \boldsymbol{n}! = \mathbf{5}! = \mathbf{120}\ (\boldsymbol{Arten})$$

**Beispiel 2.2:**

Es gibt eine genaue Sitzordnung für die Personen aus Beispiel 2.1.
Wie groß ist die <u>Wahrscheinlichkeit</u>, dass sich jede Person auf den ihr zugedachten Platz zufällig gesetzt hat?
Achtung! Laplace-Experiment:
Die "Zahl der möglichen Fälle" ist 120, die "Zahl der günstigen Fälle" ist 1

$$\boldsymbol{p} = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{\Omega}|} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{120}} = \mathbf{0{,}008}$$

# 2. MIT REIHENFOLGE, OHNE ZURÜCKLEGEN

**Beispiel 2.3:**

Wie ist die Wahrscheinlichkeit, beim viermaligen Werfen eines Würfels lauter verschiedene Augenzahlen zu erzielen?

**n = 6, k = 4**

Schritt 1: (Ergebnisraum)

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{V_{mW}} = \boldsymbol{n^k} = \mathbf{6^4} = \mathbf{1.296}$$

Schritt 2: (Menge der günstigen Ereignissen)

$$|\boldsymbol{E}| = \boldsymbol{V_{oW}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}! = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \frac{\mathbf{6}!}{(\mathbf{6}-\mathbf{4})!} = \mathbf{6} * \mathbf{5} * \mathbf{4} * \mathbf{3} = \mathbf{360}$$

Schritt 3: (Wahrscheinlichkeit)

$$\boldsymbol{p} = \frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{\Omega}|} = \frac{\mathbf{360}}{\mathbf{1.296}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{18}} = \mathbf{0,278}$$

# 3. OHNE REIHENFOLGE, OHNE ZURÜCKLEGEN

**Beispiel 3.1:**

Experiment: gleichzeitiges Ziehen von 2 Kugeln aus der Urne $U_6$ (Urne mit 6 Kugeln) ohne Zurücklegen.

Wie viele Paare sind möglich wenn man die Kugeln durchnummeriert?

Ergebnisraum: **Ω = {{1,2}**, **{1,3}**, ...., **{5,6}}**

Mächtigkeit des Ergebnisraumes:

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{K_{oW}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{6}!}{\mathbf{2}!\,(\mathbf{6}-\mathbf{2})!} = \frac{\mathbf{6}!}{\mathbf{2}! * \mathbf{4}!} = \frac{\mathbf{6} * \mathbf{5} * \mathbf{4} * \mathbf{3} * \mathbf{2}}{\mathbf{2} * \mathbf{4} * \mathbf{3} * \mathbf{2}} = \mathbf{15}$$

# 3. OHNE REIHENFOLGE, OHNE ZURÜCKLEGEN

**Beispiel 3.2:**

Einer Urne mit 6 roten und 4 grünen Kugeln werden gleichzeitig 5 Kugeln entnommen.

Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 der Kugeln rot sind?

**$n=10$, $n_1 = 6$, $n_2 = 4$, $k = 5$**

Schritt 1: (Ergebnisraum)

$$|\Omega| = K_{oW} = \binom{n}{k} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,(10-5)!} = 252$$

Schritt 2: (Menge der günstigen Ereignissen: 2 Kugeln müssen aus der Menge der roten Kugeln und der Rest aus der Menge der grünen Kugeln stammen)

$$|E| = K_{oW} = \binom{6}{2}\binom{4}{3} = \frac{6!}{2!\,4!} * \frac{4!}{3!\,1!} = 60$$

Schritt 3: (Wahrscheinlichkeit)

$$p = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{60}{252} = \frac{15}{64} = 0,24$$

# 4. OHNE REIHENFOLGE, MIT ZURÜCKLEGEN

**Beispiel 4.1:**

10 Sportlerinnen nehmen an 3 Wettbewerben teil, bei denen es jeweils genau eine Siegerin gibt. Auf wie viele Arten können die Preise verteilt werden?

**n = 10, k = 3**

$$|\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{K_{mW}} = \binom{\boldsymbol{n+k-1}}{\boldsymbol{k}} = \frac{(\boldsymbol{n+k-1})!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n-1})!} = \frac{\mathbf{12!}}{\mathbf{3!\,9!}} = \mathbf{220}$$

# ANORDNUNGEN DER ELEMENTE EINER MENGE MIT WIEDERHOLUNG

Werden bei einer Anordnung mit den **k** Elementen einer Menge das 1. Element **$n_1$**-mal, das 2. Element **$n_2$**-mal usw. verwendet, dann nennt man eine derartige Anordnung eine **Permutation mit Wiederholung**.

Ist **$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$**, dann ist die Anzahl der Permutationen

$$\boldsymbol{P_{mW}} = \frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}}$$

**Beispiel:**

Der Name **RAFAELLA** ist eine Anordnung der Buchstabenmenge {R, A, F, E, L} mit der Besonderheit, dass der Buchstabe L zweimal und der Buchstabe A dreimal auftritt.
Es gibt also

$$\boldsymbol{P_{mW}} = \frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{1!\,3!\,1!\,1!\,2!}} = \frac{\mathbf{8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2}}{\mathbf{3 * 2 * 2}} = \mathbf{3.360}$$

Permutationen, d.h. man kann 3.360 unterschiedliche „Wörter“ aus dieser Buchstabenmenge zusammenstellen.

# BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

In zahlreichen Anwendungsfällen tritt das Problem auf, dass nur solche Versuchsausgänge eines Zufallsexperiments von Interesse sind, bei denen ein bestimmtes Ereignis eintritt.

Damit tritt eine neue Fragestellung auf:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses **A unter der Voraussetzung**, dass **B** eingetreten ist?

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit p(A|B)** des Ereignisses **A "unter der Voraussetzung B"** ist (nach empirischen Gesetz der großen Zahlen, Folie 12) definiert als der Quotient aus der absoluten Häufigkeit $H_{AB}$ für AB (das gleichzeitige Eintreten von A und B) und $H_B$, der absoluten Häufigkeit von B. **Voraussetzung: P(B)>0**

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

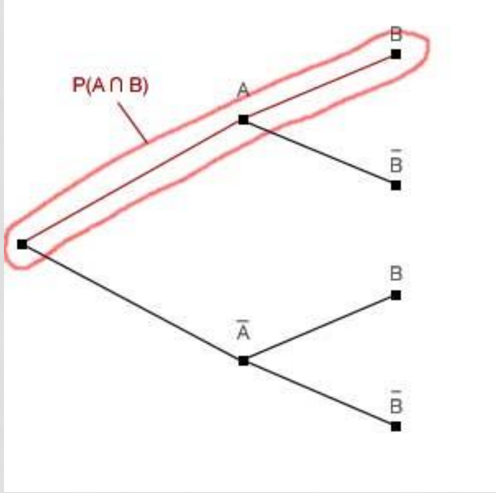
$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

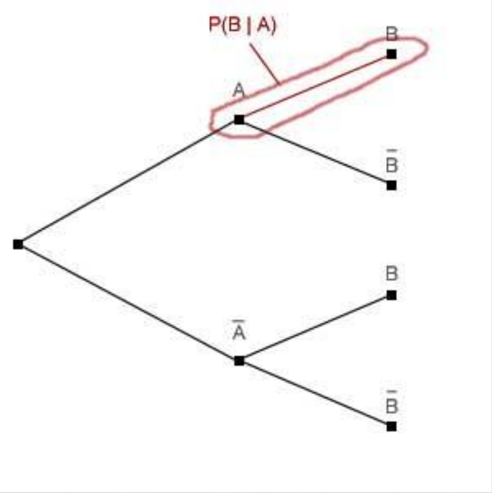
# BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$ und $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$ sind <u>unterschiedliche</u> Wahrscheinlichkeiten.

$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, dass man mit allen möglichen Ausgängen des Zufallsexperiments startet, dann zuerst das Ereignis A und dann noch das Ereignis B erhält. Bei $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$ ist bereits A eingetreten, die möglichen Ausgänge des Zufallsexperiments sind daher schon stark eingeschränkt. Jetzt ist nur noch wichtig, mit welcher Wahrscheinlichkeit B eintritt.

**Beispiel zum Verständnis:**
Sei A das Ereignis „weiblich“ und B das Ereignis „Hochschulabschluss“ bei einer zufällig herausgegriffenen Person im Hörsaal. Die „bedingte“ relative Häufigkeit bezieht sich auf den Anteil der Frauen unter den Akademikern.



# TOTALE WAHRSCHEINLICHKEIT

Der **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit** ist ein Hilfsmittel, um mit Hilfe von bekannten Wahrscheinlichkeiten weitere zu ermitteln.

Für **zwei Ereignisse** A und B:

$$\boldsymbol{P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

Für **endlich viele Ereignisse $B_i$**: sei $\{B_1, \ldots, B_n\}$ eine Menge von **paarweise disjunkten Ereignissen**, dann gilt:

$$\boldsymbol{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) * P(B_i)}$$

# SATZ VON BAYES

**Satz von Bayes** (→direkte Konsequenz aus dem **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**)

Für **zwei Ereignisse *A*** und ***B*** mit $\boldsymbol{P(B) > 0}$ gilt:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(B|A) * P(A)}{P(B)}}$$

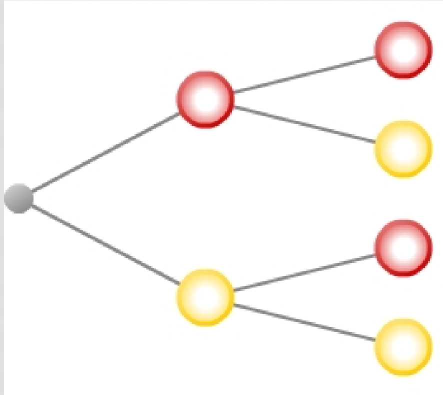
Für **endlich viele Ereignisse $B_i$**: seien **$B_i$ paarweise disjunkt** und $A \subset \bigcup_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{B_i}$ und $\boldsymbol{P(A) \neq 0}$, dann gilt:

$$\boldsymbol{P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) * P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i) * P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) * P(B_i)}}$$

# WAHRSCHEINLICHKEITSGRAPHEN

**Wahrscheinlichkeitsgraph** (**W-Graph**) → grafische Darstellungsform der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten; dient zur Beschreibung des Ablaufs eines mehrstufigen Zufallsexperimentes (eines Zufallsprozesses).

Ein **W-Graph** ist ein
bewerteter gerichteter Graph
mit Baumstruktur →**Baumdiagramm**



In einem **Baumdiagramm** werden die Ausgänge eines Zufallsexperiments als **Linien** dargestellt und die entsprechenden **Wahrscheinlichkeiten** dazugeschrieben. Die Linien entsprechen disjunkten (einander ausschließenden) Ereignissen. Die **Kugelsymbole** oder **Knoten** am Ende jeder Linie und die **Farben** kennzeichnen die einzelnen Versuchsausgänge (die Kugelsymbole können auch durch entsprechende **Beschriftungen** ersetzt werden).

# BAUMDIAGRAMME

**Pfadregeln für Baumdiagramme:**

1. **Multiplikationssatz:**

   Die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten eines Pfades ist das **Produkt** aller der längs diesen Pfades verzeichneten Wahrscheinlichkeiten.

2. **Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:**

   Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ereignisses A ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu einem Zustand führen, bei dem das Ereignis A eintritt.

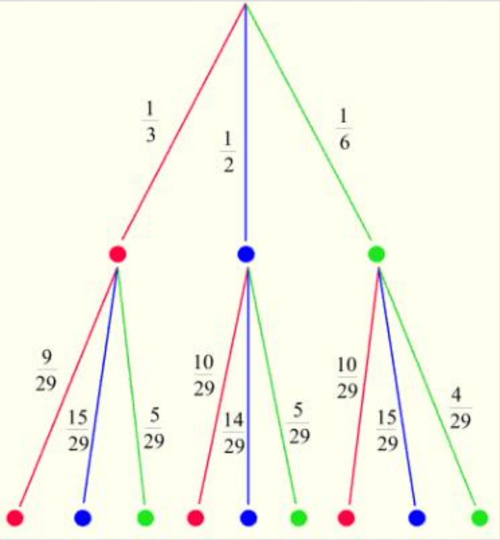
# BAUMDIAGRAMME

**Beispiel aus dem Beispiel 2 (Folie 33):**

Aus der Urne werden **hintereinander zwei Kugeln, ohne die erste zurückzulegen, gezogen**.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden eine rote und eine blaue Kugel (egal in welcher Reihenfolge) gezogen?

Die Wahrscheinlichkeiten für die erste Ziehung sind dem Baumdiagramm zu entnehmen. Nach der ersten Ziehung sind nun nur 29 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten für die zweite Ziehung hängen davon ab, welche Farbe die zuerst gezogene Kugel hat.

Das Prinzip des Baumdiagramms besteht nun darin, an das Ende jeder Linie, die einem Ausgang der ersten Ziehung entspricht, eine weitere Verzweigung anzuhängen, die die zweite Ziehung (unter den entsprechenden neuen Umständen) darstellt.



# BAUMDIAGRAMME

**Beispiel aus dem Beispiel 2 (Folie 33):**

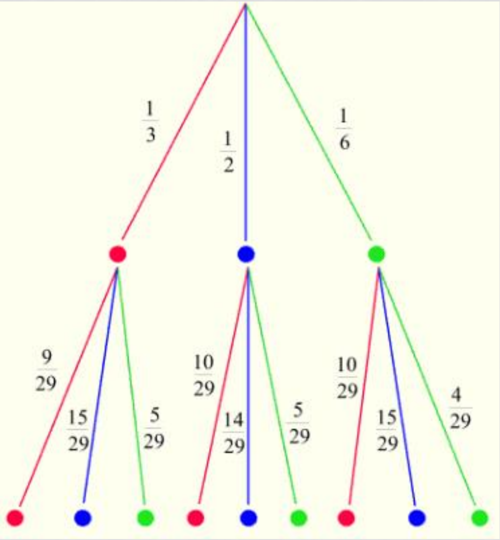
*p*(rote Kugel) = 1/3
*p*(blaue Kugel) = 1/2
*p*(grüne Kugel) = 1/6
Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten ist 1.

**Multiplikationsregel für Baumdiagramme:**
Die **Wahrscheinlichkeit** für das Eintreten eines Pfades ist das **Produkt der entlang ihm verzeichneten Wahrscheinlichkeiten:**

p(erst rot, dann blau) = (1/3) × (15/29) = 5/29
p(erst blau, dann rot) = (1/2) × (10/29) = 5/29

**Additionsregel für Baumdiagramme:**
Da Pfade disjunkte Ereignisse darstellen, werden **Wahrscheinlichkeiten addiert:**

p(A) = 5/29 + 5/29 = 10/29



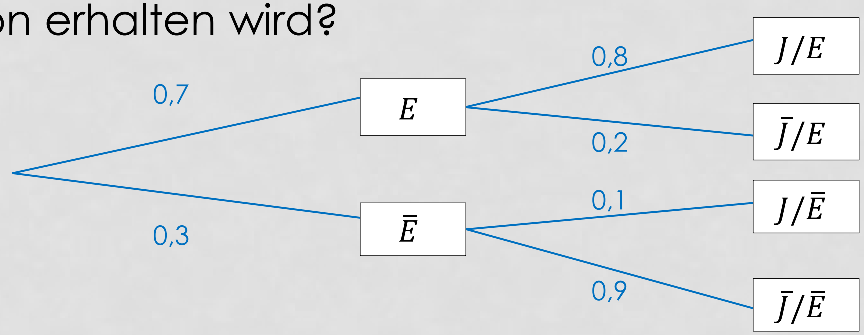
# TOTALE WAHRSCHEINLICHKEIT

**Beispiel:**

Der Informatikstudent glaubt am Anfang seines Studiums, dass er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 erfolgreich beenden wird. Mit erfolgreich abgeschlossenem Studium beträgt die Wahrscheinlichkeit, die gewünschte Position zu erhalten, 0,8, ohne Studienabschluss nur 0,1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Position erhalten wird?

**E: Ende des Studiums**

**J: Job**




**Tipp:**

**s. auch Folie 48**

Gefragt ist hier nach **P(J)**.
Dies ist die **totale Wahrscheinlichkeit** dafür, die gewünschte Position zu erhalten. Dazu muss man die **bedingten Wahrscheinlichkeiten von J** unter allen möglichen Hypothesen mit den Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen multiplizieren und die Ergebnisse aufaddieren (Regeln des Baumdiagramms):

$$\boldsymbol{P(J) = \sum_{i=1}^{n} P(J|E_i) * P(E_i) = 0,8 * 0,7 + 0,1 * 0,3 = 0,59}$$

# MONTY-HALL-DILEMMA ODER ZIEGENPROBLEM

| Tor 1 gewählt | Tor 2 | Tor 3 | Moderator öffnet … | Ergebnis beim Wechseln | Ergebnis beim Behalten |
|---|---|---|---|---|---|
| **Auto** | Ziege | Ziege | Tor 2 oder Tor 3 | Ziege | Auto |
| **Ziege** | Auto | Ziege | Tor 3 | Auto | Ziege |
| **Ziege** | Ziege | Auto | Tor 2 | Auto | Ziege |

6 Fälle für das Öffnen der Tore 2 und 3 → das entspricht einem Zufallsexperiment, bei dem die beiden Ziegen voneinander unterschieden werden können und jede Verteilung von Auto und Ziegen hinter den drei Toren gleich wahrscheinlich ist (**Laplace-Experiment**).

Man sieht, dass in zwei der drei Fälle der Kandidat durch Wechseln das Auto gewinnt.

Der Kandidat hat also eine **durchschnittliche Gewinnchance** von **p = 2/3**. Demnach wäre es für einen Kandidaten, der mehrmals an dieser Spielshow teilnehmen dürfte, von Vorteil, die Wahl des Tors immer zu ändern.

**Das gilt nur unter Voraussetzung, dass der Moderator immer eine Ziegentür öffnet und einen Wechsel anbietet → feste Spielregeln!**

# MONTY-HALL-DILEMMA ODER ZIEGENPROBLEM

**Formelle mathematische Lösung mit dem Satz von Bayes**
Folgende Situation: der Kandidat hat das **Tor 1 gewählt** und der Moderator hat daraufhin das **Tor 2 geöffnet**. Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn der Kandidat das Tor wechselt?

**Moderator wählt zufällig mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eines der beiden anderen Tore, hinter dem sich immer eine Ziege befindet.**

Folgende Ereignisse sind definiert:

**$M_i$: der Moderator hat das Tor j geöffnet (j=1,2,3)**

**$G_i$: der Gewinn ist hinter Tor i (i=1,2,3)**

$$P(G_1) = P(G_2) = P(G_3) = \frac{1}{3}$$
$$P(M_2|G_1) = \frac{1}{2}$$
$$P(M_2|G_2) = 0$$
$$P(M_2|G_3) = 1$$

$$P(G_3|M_2) = \frac{P(M_2 \cap G_3)}{P(M_2)} = \frac{P(M_2|G_3)P(G_3)}{P(M_2|G_1)P(G_1) + P(M_2|G_2)P(G_2) + P(M_2|G_3)P(G_3)} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

**Die Gewinnchancen erhöhen sich mit dem Wechsel des Tors von anfangs 1/3 auf nun 2/3.**

# MONTY-HALL-DILEMMA ODER ZIEGENPROBLEM

**Formelle mathematische Lösung mit dem Satz von Bayes**
Folgende Situation: der Kandidat hat das **Tor 1 gewählt** und der Moderator hat daraufhin das **Tor 2 geöffnet**. Wie hoch ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn der Kandidat das Tor wechselt?

**Moderator öffnet immer das Tor 2, vorausgesetzt hinter dem befindet sich eine Ziege und der Kandidat das Tor 2 nicht gewählt hat. Sonst wird das Tor mit der größeren Zahl geöffnet.**

Folgende Ereignisse sind definiert:

**$M_i$: der Moderator hat das Tor j geöffnet (j=1,2,3)**

**$G_i$: der Gewinn ist hinter Tor i (i=1,2,3)**

$$P(G_1) = P(G_2) = P(G_3) = \frac{1}{3}$$

$$P(M_2|G_1) = 1$$

$$P(M_2|G_2) = 0$$

$$P(M_2|G_3) = 1$$

$$P(G_3|M_2) = \frac{P(M_2 \cap G_3)}{P(M_2)} = \frac{P(M_2|G_3)P(G_3)}{P(M_2|G_1)P(G_1) + P(M_2|G_2)P(G_2) + P(M_2|G_3)P(G_3)} = \frac{1 * \frac{1}{3}}{1 * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

**Die Gewinnchance ist 50% → also unabhängig von der Entscheidung das Tor zu wechseln.**